

DOI:10.3969/j.issn.1674-0696.2020.11.16

# 基于径向基函数逼近的波浪折射问题求解

许锡宾<sup>1</sup>, 束仲祎<sup>1</sup>, 徐绩青<sup>1,2</sup>

(1. 重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074;  
2. 重庆交通大学 国家内河航道整治工程技术研究中心 水利水运工程教育部重点实验室, 重庆 400074)

**摘要:**波浪具有三维性、随机性和非线性等特征,其边界条件复杂,波浪折射方程难以求解。考虑到径向基函数具有形式简单,各向同性,与空间维数无关等优点。将径向基函数逼近的思想与波浪折射方程相结合,且考虑其导数边界条件,构造了一种求解波浪折射问题的计算方法。在实际工程中,为求解波浪折射的数值解提供了一种新思路。

**关键词:**港口工程;波浪折射;紧支柱思想;径向基函数;理论解

**中图分类号:**U656.2

**文献标志码:**A

**文章编号:**1674-0696(2020)11-109-05

## Solutions to the Problem of Wave Refraction Based on Approximation Using Radial Basis Function

XU Xibin<sup>1</sup>, SHU Zhongyi<sup>1</sup>, XU Jiqing<sup>1,2</sup>

(1. School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;  
2. National Engineering Technology Research Center for Inland Waterway Regulations, Key Laboratory of Hydraulic & Waterway Engineering of the Ministry of Education, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** Wave has features of three-dimension, stochasticity and nonlinearity, whose boundary conditions are complex, so wave refraction equation is difficult to solve. The radial basis function has the advantages of simple form, isotropic and space dimension independence. Considering the above, a new numerical method for solving the wave refraction problem was constructed by combining the idea of the radial basis function approximation with the wave refraction equation and considering its derivative boundary condition. In the actual project, the proposed algorithm provides a new idea to solve the numerical solution of wave refraction.

**Key words:** port engineering; wave refraction; tight strut thought; radial basis function; theoretical solutions

## 0 引言

波浪在传播过程中,因流场、水深和水位的不均匀变化,海洋情况极为复杂,波浪折射方程始终难以精确求解。近年来,研究波浪折射的方法一般分为 3 种:①波射线法,该方法计算简便,容易被工程所接受,但对复杂地形条件计算结果会出现较大误差;②缓坡方程,该方法适用于水下坡度较缓情况,但对缓坡方程来说,其波浪、海底高度等环境因素必须满足某种条件<sup>[1]</sup>,其适用范围有所欠缺;③有限差分法,该方法作为一种无网格法被用于流体力学方面<sup>[2-3]</sup>,但由于这种方法需要边界条件,无边界水域

情况会降低其求解精度。

笔者通过对波浪折射方程分析,并根据近年来国内外广泛应用的径向基函数几乎可逼近所有函数这一性质<sup>[4-6]</sup>,将其用于波浪折射方程的求解。通过求解一系列的非线性方程组,可计算出波浪折射的折射角,且求解精度高,能更好地模拟波浪折射问题。

## 1 径向基函数方法及计算思路

径向基函数利用一个影响范围内每个点与其他所有点的距离来表达它们之间的关系,以径向距离作为变量,是一种具有强大逼近能力的基函数。该

收稿日期:2020-06-01;修订日期:2020-09-08

基金项目:重庆市教委科技研究项目(KJ100417)

第一作者:许锡宾(1955—),男,四川宜宾人,教授,博士生导师,主要从事结构工程、港口工程方面的研究。E-mail:915688461@qq.com

通信作者:徐绩青(1974—),男,重庆人,讲师,博士,主要从事计算力学与应用数学方面的研究。E-mail:plappk@sina.com

函数具有形式简单、各向同性、不依赖空间维数等特点。其基本形式如式(1):

$$y(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad (1)$$

式中:  $y(r)$  为所用的插值函数;  $n$  为指所使用的径向基函数总数目, 当节点影响域与求解范围相一致时, 一般与节点数目相同, 当边界条件有多个时, 还会加入辅助函数以提高求解精度;  $\alpha_i$  为与之对应的  $i$  节点的权重系数;  $\|x - x_i\|$  为每个节点与第  $i$  节点之间距离。

由此可见, 径向基函数本质为一个一元函数, 具有计算简便, 应用广泛的优点, 能进行多阶求导, 几乎可逼近所有函数, 这一巨大优点也是人们应用的重要原因。

笔者主要使用的径向基函数有: Gauss 函数和紧支柱正定径向基函数<sup>[7]</sup>。Gauss 函数基本形式为如式(2):

$$\varphi(r) = e^{-c^2 r^2} \quad (2)$$

紧支柱正定径向基函数<sup>[4]</sup>基本形式如式(3):

$$\begin{cases} \varphi(r) = (1-r)^6(6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5) \\ \varphi(r) = (1-r)^4(4+16r+12r^2+3r^3) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $c$  为大于 0 的常数, 为表现影响范围中每一点都对取值点有影响, 且距离越远影响越小的紧支柱思想, 取  $c = \sqrt{8}/d_{\max}$ ;  $r$  为  $(x - x_i)$  的 Euclid (欧几里得) 范数, 在紧支柱正定函数中, 根据紧支柱思想, 取  $r = d/d_{\max}$ ;  $d$  为任意一点与其他点的距离;  $d_{\max}$  为每一个点最大影响范围。

将所求解的空间区域  $\Omega$  用  $N$  个节点  $(x_l, y_l)$  (其中:  $l=1, 2, \dots, N$ ) 离散, 函数  $\alpha(x, y)$  在区域  $\Omega$  中的近似函数  $\alpha^h(x, y)$  可由一组以各节点  $(x_l, y_l)$  为中心的径向基函数  $\varphi_l(x, y)$  的线性组合表示, 如式(4):

$$f^h(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x, y) = \Phi^T(x, y) a \quad (4)$$

式中:  $a_j$  为待定系数,  $a = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ ;  $\Phi(t) = [\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), \dots, \Phi_N(x, y)]^T$ 。

将空间区域  $\Omega$  中的  $N$  个节点带入式(4)中, 可得到  $N$  个方程, 联立为线性方程组如式(5):

$$A_a = \alpha$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi(x_1, y_1) \\ \Phi(x_2, y_2) \\ \vdots \\ \Phi(x_N, y_N) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, y_1) & \varphi_2(x_1, y_1) & \cdots & \varphi_N(x_1, y_1) \\ \varphi_1(x_2, y_2) & \varphi_2(x_2, y_2) & \cdots & \varphi_N(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_N, y_N) & \varphi_2(x_N, y_N) & \cdots & \varphi_N(x_N, y_N) \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T \quad (5)$$

将边界条件带入式(6)中, 即可得到未知量系数矩阵  $a$ 。

文中, 根据文献[8]提出的精密计算概念和标准, Gauss 函数求逆矩阵  $A^{-1}$  误差大概是紧支柱正定径向基函数的 8 倍。由此也可预测出以 Gauss 函数为基本函数的计算结果精度较低, 计算结果明显存在震荡现象。

## 2 波浪折射方程

在实际海况中, 由于波向线与海底等深线斜交, 波浪传播方向会发生变化, 即产生波浪折射。在波浪由深海向近海岸传播过程中, 随着水深变浅, 波长、波高和波向等波要素都会发生变化, 但是波周期始终不变。忽略风速、风阻、海底摩阻等影响因素, 将波浪场视为一个稳定的场<sup>[9-11]</sup>, 其计算如式(6):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ \nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} i + \frac{\partial \theta}{\partial y} j = k_x i + k_y j = k \\ \frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial (k \sin \alpha)}{\partial x} - \frac{\partial (k \cos \alpha)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\theta$  为波浪相位函数;  $(x, y)$  为波浪场中任意一点坐标;  $k$  为波浪的波数。

在以往对波浪折射问题的计算中, 一般都是取边界点的波浪折射角  $\alpha=0$  作为边界条件。但该方法忽略了边界导数条件, 边界点并不符合式(5), 所求出的解并不准确。笔者对于边界点, 取  $\alpha=0$ 。则式(6)可以化简为如式(7):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} k - \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

## 3 算例分析

现有一片水域如图 1。水底等高线为同心圆, 圆心处高程与静水平面相水平。水域最大半径为 3 km, 水域内最大水深为 -30 m, 即最外部水域的水底高程为 30 m。现需得出波浪进入此区域 1.2 km

范围内折射角变化。

由于水域对称分布,故取如图 1 中水域的一半作为计算区域。为保证边界部分计算精度能达到要求,故取  $x$  方向为  $-3\ 000\text{ m} \sim -1\ 500\text{ m}$ ;  $y$  方向为  $0 \sim -3\ 000\text{ m}$ ;最后计算结果取  $1.2\text{ km}$  以内。考虑到编程方便和计算精度,计算区域内取点采用等间距布点,布点间距为  $25\text{ m}$ 。将径向基函数带入波浪折射方程及边界条件方程中,可得到微分方程组,再带入边界条件即可求解。

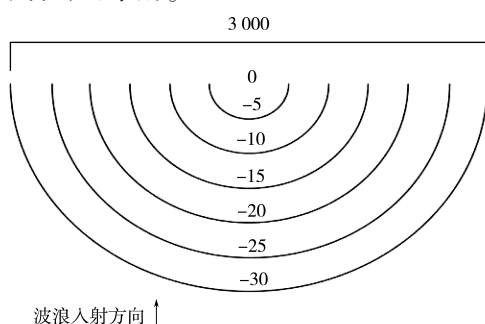


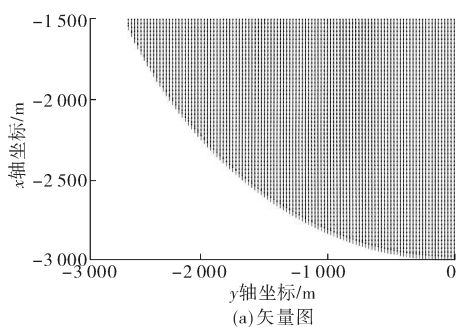
图 1 地形等高线(单位:m)

Fig. 1 Terrain contours

### 3.1 算例 1

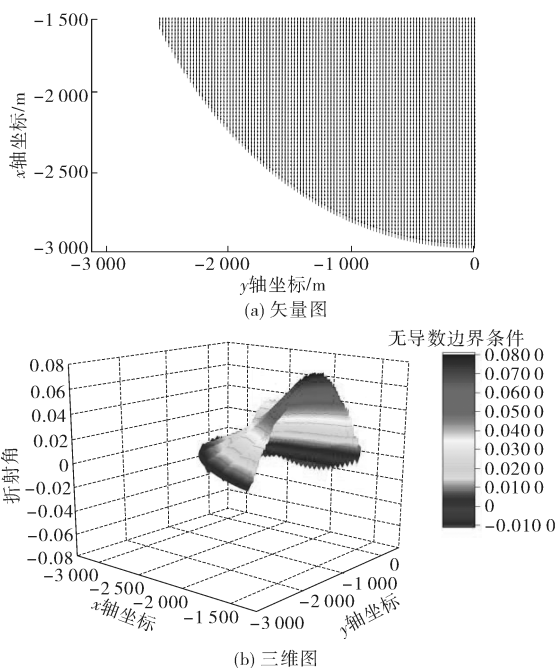
将式(3)作为基本函数,不考虑辅助函数,边界条件取边界点为 0,不考虑导数边界条件,计算结果如图 2。

此计算结果在边界点位置折射角为 0,在边界处存在震荡。由于不考虑导数边界条件,边界处的点不一定满足波浪折射方程导数边界条件,结果存在误差。故此算例证明了导数边界条件的重要性,



(a) 矢量图

后续算例都会考虑导数边界条件。



(b) 三维图

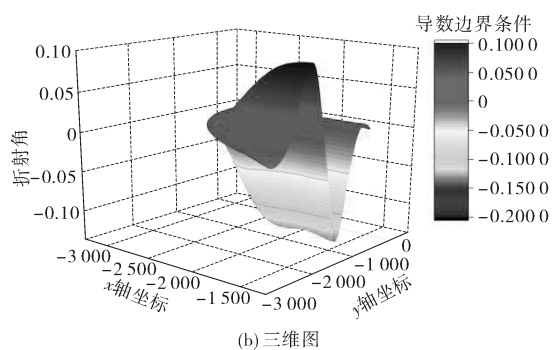
图 2 算例 1 所求折射角

Fig. 2 Refraction angle obtained by example 1

### 3.2 算例 2

将式(3)作为基本函数和辅助函数,边界条件取边界点为 0 和导数边界条件,计算结果如图 3。

此计算结果满足边界点位置折射角为 0,同时也满足波浪折射方程导数形式,且计算出的曲面形态较好,无明显震荡现象。该计算方法计算出来的结果是符合波浪折射方程的,为笔者所建议采用。



(b) 三维图

图 3 算例 2 所求折射角

Fig. 3 Refraction angle obtained by example 2

### 3.3 算例 3

将式(3)作为基本函数和辅助函数,边界条件取边界点为 0 和导数边界条件,计算结果如图 4。

由图 4 可看出,由于 Gauss 函数求逆矩阵  $A^{-1}$  误

差较大,计算结果震荡现象比较严重,存在较大误差,因此这种 Gauss 函数作为基本函数形式不被采用。

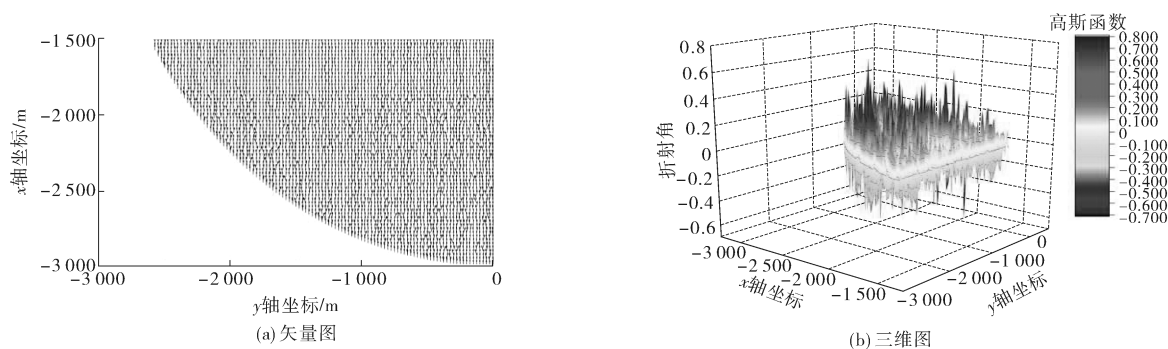


图 4 算例 3 所求折射角

Fig. 4 Refraction angle obtained by example 3

### 3.4 算例 4

将式(3)作为基本函数,式(3)的导数作为辅助函数,边界条件取边界点为 0 和导数边界条件,计算结果如图 5。

此计算结果在局部位置起伏,存在震荡现象,虽

然不是很明显,但对计算结果仍然存在影响。计算结果与算例 2 相比,计算精度有所降低,由此证明该算例所取的基本函数和辅助函数对计算结果存在影响,不建议使用。

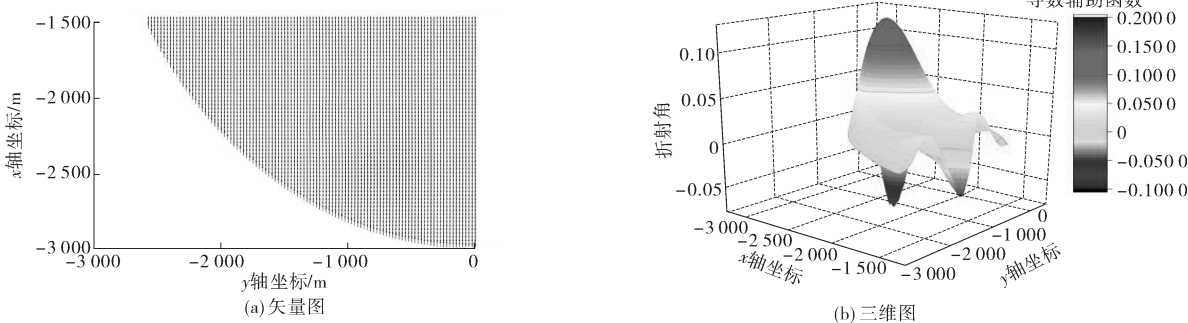


图 5 算例 4 所求折射角

Fig. 5 Refraction angle obtained by example 4

## 4 对比分析

由于算例 1 中没有考虑导数边界条件,将其边界点计算结果带入式(7)中,求得误差如图 6。

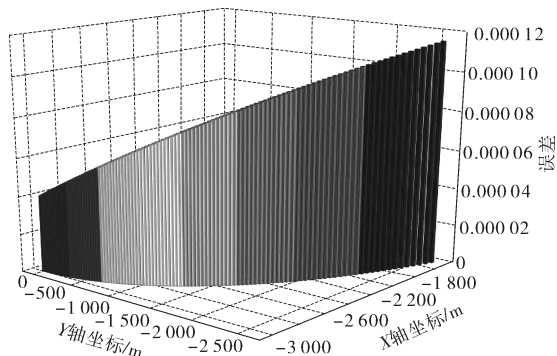


图 6 算例 1 导数方程误差

Fig. 6 Example 1 error diagram of derivative equation

为对比分析其他算例计算结果,选择一处相同的计算范围( $x$  轴坐标为  $-1\,940 \sim -2\,060$ ;  $y$  轴坐标为

$-1\,600 \sim -1\,850$ ),分别截取各算例计算结果局部放大图,如图 7。

由理论分析角度来看:在此计算范围中,折射角方向应向右偏转。由图 7(a)可看出:算例 2 计算结果符合理论分析,效果较好;从图 7(b)中可看出:算例 3 计算结果存在较明显震荡现象,计算结果误差较大;从图 7(c)中可看出:算例 4 计算结果趋近于 0,即在此范围内其折射角为 0,显然不符合理论分析的结果。故笔者选取算例 2 计算为最终结果,将其与 Snell 折射定律进行对比分析。

取  $x$  轴坐标为  $-2\,500 \sim -1\,500$  m,间隔取 100 m,  $y$  轴坐标为  $-1\,500$  m,共 11 个点,运用 Snell 折射定律计算,如式(8):

$$\sin \alpha_i = \sin \alpha_0 \frac{c_i}{c_0} = \sin \alpha_0 \tanh(kd) \quad (8)$$

式中: $\alpha_i$  为折射角; $c_i$  为折射点处的波速; $\alpha_0$  为入射角; $c_0$  为入射波速; $k$  为折射点处波数; $d$  为折射点处水深。



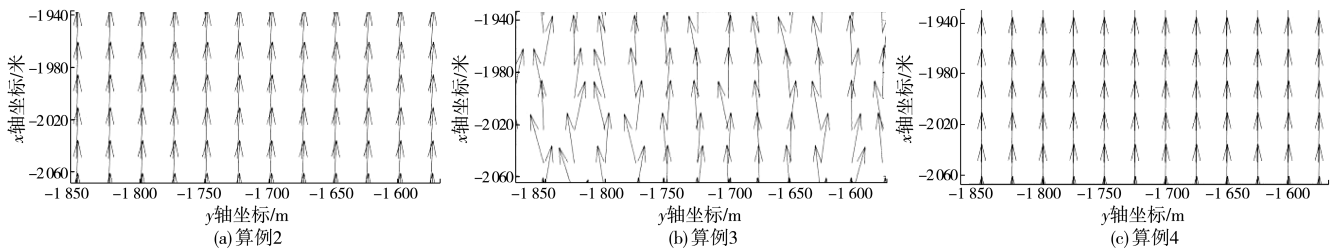


图 7 各算例所求折射角局部放大

Fig. 7 Partial magnification of the refractive angles obtained by various examples

图 8 为 Snell 定律和算例计算结果的对比。由图 8 可看出:由于 Snell 折射定律是特殊情况下的波浪折射,它要求水域内各点水深相同,等深线平行,这种情况与算例实际情况不符合,故其计算结果呈线性。

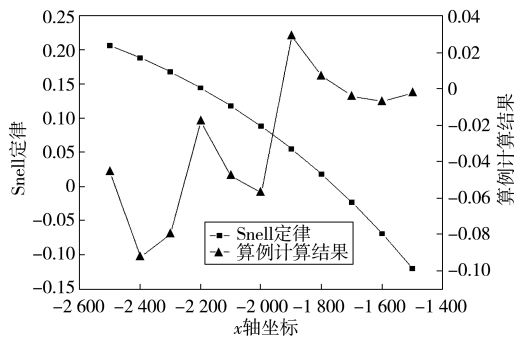


图 8 Snell 定律与算例计算结果对比

Fig. 8 Comparison of Snell law and calculation results

## 5 结 论

笔者通过径向基函数和等间距布点方法计算波浪折射时存在的问题。在运用 Gauss 函数时参考了紧支柱思想,将其中的参数  $c$  取值与全局支撑域相关联,为今后 Gauss 函数运用提供了一种参数的取值方法。但 Gauss 函数的求逆矩阵  $A^{-1}$  误差较大,效果上存在震荡现象,在使用上仍存在一定问题。故笔者的基本函数取紧支柱正定径向基函数和辅助函数取式(3)。

笔者提供了一种计算波浪折射问题方法。在边界点上符合导数边界条件,在理论方面符合波浪折射原理,计算结果更精确,方法更合理。由于 Snell 折射定律的适用条件特殊,不适用于复杂水深下的海洋环境;而笔者提出的方法则适用于水深变化的波浪情况,为求解波浪折射数值解提供了一种新思路。

## 参考文献 (References):

- [1] 蒋德才,台伟涛,楼顺里.海浪能量谱的折绕射研究 I:缓坡上的联合模型[J].海洋学报,1993,15(2):84-86.  
JIANG Decai, TAI Weitao, LOU Shunli. Research on refraction and diffraction of wave energy spectrum: Joint model on slow slope [J]. Acta Oceanologica Sinica, 1993, 15(2): 84-86.

- [2] 梁林.基于广义有限差分法模拟缓坡方程[D].福州:福州大学,2017.  
LIANG Lin. Generalized Finite Difference Method for Mild-Slope Equation [D]. Fuzhou: Fuzhou University, 2017.
- [3] 任聿飞.基于广义有限差分法分析二维自由水面波动问题[D].福州:福州大学,2016.  
REN Yufei. Generalized Finite Difference Method for Two Dimensional Free-Surface Problems of Water-Wave [D]. Fuzhou: Fuzhou University, 2016.
- [4] 吴宗敏.径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J].工程数学学报,2002,19(2):1-12.  
WU Zongmin. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(2): 1-12.
- [5] 马利敏.径向基函数逼近中的若干理论、方法及其应用[D].上海:复旦大学,2009.  
MA Limin. Some Theory, Methods and Application in RBF Approaching [D]. Shanghai: Fudan University, 2009.
- [6] 祖福兴,徐绩青,李岩汀.强非线性梁求解的径向基函数方法[J].重庆交通大学学报(自然科学版),2018,37(12):55-60.  
ZU Fuxing, XU Jiqing, LI Yanting. Radial basis functions methods for strongly nonlinear beam [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2018, 37(12): 55-60.
- [7] 张雄,刘岩.无网格法[M].北京:清华大学出版社,2004.  
ZHANG Xiong, LIU Yan. Meshless Method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [8] 徐绩青,李正良,吴林键.基于径向基函数逼近的结构动力响应计算方法[J].应用数学和力学,2014,35(5):533-541.  
XU Jiqing, LI Zhengliang, WU Linjian. A calculation method for structural dynamic responses based on the approximation theory of radial basis function [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(5): 533-541.
- [9] 王树青,梁丙臣.海洋工程波浪力学[M].青岛:中国海洋大学出版社,2013.  
WANG Shuqing, LIANG Bingchen. Wave Mechanics of Ocean Engineering [M]. Qingdao: China Ocean University Press, 2013.
- [10] 邹志利.海岸动力学[M].4版.北京:人民交通出版社,2009.  
ZOU Zhili. Coastal Dynamics [M]. 4th ed. Beijing: China Communications Press, 2009.
- [11] 邱大洪.波浪理论及其在工程上的应用[M].北京:高等教育出版社,1985.  
QIU Dahong. Wave Theory and Application in Engineering [M]. Beijing: Higher Education Press, 1985.

(责任编辑:刘 韬)