1、 证明：当 $x_0=1.5$ 时，迭代法

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{4+x_k}} \text{ 和 } x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}$$

都收敛于方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在区间[1,2]内唯一实根。

使用简单迭代法的收敛条件来证明上述两个迭代式在区间[1,2]是收敛的。通过变换$f(x)=0$至$g(x)=x$来构造简单迭代方程。

第一个迭代方程：

$f(x)=x^3+4x^2-10=0$

变形 $x^2(x+4)=10$

$$x=\sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

构造$g(x)=x$

令$g(x)=\sqrt{\frac{10}{x+4}}$，则$g'(x)=-\frac{\sqrt{10}}{2}(4+x)^{-\frac{3}{2}}$

$|g'(x)|=\frac{\sqrt{10}}{2}(4+x)^{-\frac{3}{2}}$在[1,2]单调递减

比较$|g'(x)|$和 1 的大小

$|g'(x)|\le\frac{\sqrt{10}}{2}5^{-\frac{3}{2}}<\frac{\sqrt{10}}{2}5^{-1}<1$

有$1.5\in[1,2]$，所以使用$x_{k+1}=g(x_k)$是收敛的。 得出结论

第二个迭代方程：

这题需要先缩小搜索范围至[1,1.5]

$f'(x)=3x^2+8x>0\ x\in[1,2]$

$f(x)$在[1,2]内单调递增 得出单调性

$f(1)=-7, f(2)=14, f(1.5)=2.375$ 缩小搜索的范围

>0，所以唯一实根在[1,1.5]内

$f(x)=x^3+4x^2-10=0$

$$x^2=\frac{10-x^3}{4}$$

$$x=\frac{\sqrt{10-x^3}}{2}$$

构造$g(x)=x$

令$g(x)=\frac{\sqrt{10-x^3}}{2}$，$g'(x)=-\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10-x^3}}$

$|g'(x)|=\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10-x^3}}$在[1,1.5]单调递增

比较$|g'(x)|$和 1 的大小

$|g'(x)|\le\frac{3}{4}\frac{1.5^2}{\sqrt{10-1.5^3}}<1$

有$1.5\in[1,1.5]$，所以使用$x_{k+1}=g(x_k)$是收敛的。 得出结论

2、设 $a>0$，试写出用牛顿迭代法求 $\sqrt{a}$ 近似值的计算公式，并讨论该迭代法的收敛性。

构造函数$f(x)=x^2-a$	构造符合牛顿迭代法的函数
迭代方程$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	
代入得$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$	迭代方程
$f'(x)=2x$	求一阶导数
$f''(x)=2>0$	求二阶导数

情况一：$x_0\in(\sqrt{a},L)$ L是大于$\sqrt{a}$的任意数，也就是$x_0\in(\sqrt{a},\infty)$

在$x_0\in(\sqrt{a},\infty)$时，$f''(x)f(x)>0$，由牛顿法收敛的充分条件可知，收敛。

情况二：$x_0\in(0,\sqrt{a})$时

$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$是对勾函数，在$[0,\sqrt{a}]$单调递减

$x_1=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)>\sqrt{a}$

x_1属于情况一，即$x_1\in(\sqrt{a},\infty)$，由牛顿法收敛的充分条件可知，收敛

情况三：$x_0=\sqrt{a}$，此种情况不需要迭代，所以不考虑。

情况四：$x_0\in(-\infty,\sqrt{a})$或$x_0\in(-\sqrt{a},0)$

由函数对y轴的对称性可知，此时$\{x_k\}_0^\infty$收敛到$-\sqrt{a}$。

综上可知，迭代方程是$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$，在$x_0\in(\sqrt{a},\infty)$和$x_0\in(0,\sqrt{a})$时，此方法收敛。