1. 若用电表测得一个电阻两端的电压和电流分别为

$$U = 110 \pm 2(V),\ I = 20 \pm 0.5(A),$$

试用欧姆定律 $R = U / I$ 求这个电阻阻值 R 的近似值，并估计所得近似值的绝对误差和相对误差。

答：

第一步：计算**R**的观测值（估计值）

$$R^* = \frac{U^*}{I^*} = \frac{110}{20} = 5.5(\Omega)$$

第二步：计算绝对误差

$R = R(U, I)$ ①定义二元函数

$$e(R) = \frac{\partial R}{\partial U}e(U) + \frac{\partial R}{\partial I}e(I)$$

②根据泰勒展开式的一次项得到的误差传递公式。

$$e(R) = \frac{1}{I^*}e(U) - \frac{U^*}{I^{*2}}e(I)$$

③带入偏导数

$$\varepsilon(R) = \frac{1}{I^*}\varepsilon(U) + \frac{U^*}{I^{*2}}\varepsilon(I)$$

④根据绝对值不等式的形式计算绝对误差线公式。

$$\varepsilon(R) = \frac{2}{20} + \frac{110}{20^2}0.5 = 0.2375 \approx 0.3(\Omega)$$

⑤代入计算

第三步：计算相对误差

$$\varepsilon_r(R) = \left|\frac{\varepsilon(R)}{R^*}\right|$$

①列出相对误差定义式

$$\varepsilon_r(R) = \left|\frac{0.3}{5.5}\right| \approx 5.5\%$$

②代入计算

分子为 0.2375，被放的过大，导致计算结果有偏差！

2. 指出下列各题的合理计算途径。

（1） $1 - \cos 1^\circ$

（2） $\ln\left(30 - \sqrt{30^2 - 1}\right)$

（3） $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

答：

（1）

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

①利用三角变换避免相近数相减的相对误差。

$$1 - \cos 1^\circ = 2\sin^2 0.5^\circ$$

（2）

$\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$=\ln\left[\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}\right]$

$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$\ln\left(30-\sqrt{30^2-1}\right)=-\ln\left(30+\sqrt{30^2-1}\right)$

①利用分子有理化避免相近数相减，再利用对数的性质适当变形，放大底数。

（3）

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

①在x较小的情况下，小数相处，增大绝对误差，通过二倍角公式消除较小的因子，减小误差

3. 设近似值$T_0=s_0=35.70$具有四位有效数字，计算中无舍入误差。试分析分别用递推式

$$T_{i+1}=5T_i-142.8 \quad 和 \quad S_{i+1}=\frac{1}{5}S_i-142.8$$

计算T_{20}和S_{20}所得结果是否可靠。

答：

第一步：计算初始的绝对误差限

$$\varepsilon(T_0)=\varepsilon(S_0)=0.005$$

第二步：计算T_{20}，并估计绝对误差限

$T_{i+1}=T(T_i)$ ①定义函数

$e(T_{i+1})=\frac{dT}{dT_i}e(T_i)$ ②绝对误差传递公式

$\varepsilon(T_{i+1})=\frac{dT}{dT_i}\varepsilon(T_i)=5\varepsilon(T_i)$ ③绝对误差限公式

$\varepsilon(T_n)=5^n\varepsilon(T_0)$ ④算出关系式

$\varepsilon(T_{20})=5^{20}\varepsilon(T_{20})=5^{20}\times 0.005$ ⑤代入计算

从上式可以看出，$\varepsilon(T_{20})$是一个超级大的天文数字，所以(T_{20})的结果不可靠。

第三步：计算S_{20}，并估计绝对误差限

$\varepsilon(S_n)=\frac{1}{5^n}\varepsilon(S_0)$ ①同理第二步，可以计算出关系式

$\varepsilon(S_n)=\frac{1}{5^{20}}\varepsilon(S_0)=\frac{1}{5^{20}}\times 0.005$ ②代入计算

从上式可以看出，$\varepsilon(S_{20})$是一个超级小的天文数字，所以(S_{20})的结果很可靠。