

Chapitre 2

Les ondelettes

Résumé

L'objet de ce premier chapitre est de présenter les ondelettes que nous allons utiliser dans la suite de ce travail. Nous les situerons dans le panorama plus large de l'analyse temps-fréquence, puis nous rappellerons leurs propriétés fondamentales.

2.1 Fréquence locale

Les ondelettes ont été introduites il y a presque 50 ans pour combler une lacune entre deux modes extrêmes de représentation du signal : la représentation d'une fonction par son graphe classique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ce qui correspond à une décomposition sur la base continue des distributions de DIRAC :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \delta(t - u) du$$

et la représentation dans la base de FOURIER :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La première représentation donne une information précise en temps : la valeur $f(t)$ indique l'intensité du signal au temps t . En revanche l'information fréquentielle est nulle. La valeur en un point de f ne donne aucune information sur le « contenu fréquentiel » du signal f . À l'inverse, la représentation de FOURIER donne une information très précise en fréquence, mais ne donne aucune information temporelle. Pour prendre une analogie musicale, supposons que la courbe f représente un son. La représentation temporelle f permet de lire la localisation temporelle du signal, c'est-à-dire : ici on entend un son, là on n'entend rien, sans que l'on puisse savoir quelle est la hauteur du son, ou bien les notes qui composent un accord. En revanche, la représentation fréquentielle permet de dire : cet air de musique contient un la, un si, un ré ♭ et pas de sol, mais cette représentation ne permet de dire quand ces notes (de durée finie) sont jouées.

Naturellement, chacune de ces représentations contient les informations de l'autre, puisque la transformation de FOURIER permet de passer de l'une à l'autre. Néanmoins, à chaque fois, seul un type d'information est explicitée.

On peut reformuler les observations ci-dessus en disant que les distributions $\delta(\cdot - t)$ sont très localisées en espace et très peu en fréquence, et qu'à l'inverse les $t \mapsto e^{i\omega t}$ ont des résolutions spatiale et fréquentielle respectivement nulle et infinie. La question qui vient naturellement est la suivante : existe-t-il une représentation dans laquelle on puisse lire une information mixte, comme « à tel instant, on entend un la et un do » ? MORLET et GABOR ont cherché à concevoir des fonctions de base qui se situent à mi-chemin entre ces extrêmes, c'est-à-dire qui ont à la fois une bonne localisation fréquentielle et une bonne localisation spatiale.

Une limite théorique dans cette perspective est bien connue : c'est l'inégalité de HEISENBERG. Soit une fonction de base f , qu'on suppose de norme L_2 égale à 1 :

$$\int |f(t)|^2 dt = 1.$$

On définit le centre $c(f)$ et la largeur $\Delta(f)$ d'une telle fonction par

$$c(f) = \int t |f(t)|^2 dt$$

$$\Delta(f) = \sqrt{\int (t - c(f))^2 |f(t)|^2 dt}$$

L'inégalité de HEISENBERG est une inégalité fondamentale qui s'écrit pour toute fonction f de norme 1 :

$$\Delta(f) \Delta(\hat{f}) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{H})$$

Si on appelle largeur fréquentielle d'une fonction f la largeur de sa transformée de FOURIER \hat{f} , cette inégalité interdit donc d'avoir une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petites que l'on veut.

On connaît également les fonctions qui réalisent le minimum de cette limite théorique : ce sont les fonctions gaussiennes translatées et modulées :

$$A e^{-(t-t_0)^2/2\Delta t^2} e^{i\omega_0 t}$$

où A est un coefficient de normalisation tel que la fonction ait une norme L_2 égale à 1, qui dépend de Δt . Pour de telles fonctions, et seulement pour ces fonctions-là, l'inégalité (H) devient une égalité. Ces fonctions ont été appelées ondelettes de GABOR.

2.2 Représentations temps-fréquence et temps-échelle

À une telle fonction, on associe un pavé temps-fréquence, c'est-à-dire un rectangle dans le plan (t, ω) centré en $(c(f), c(\hat{f}))$ et de dimensions $\Delta(f) \times \Delta(\hat{f})$. Ce pavé est une représentation

intuitive de la couverture en temps et en fréquence d'une fonction. On associe également à une base un pavage du plan temps-fréquence, qui est un recouvrement du plan (t, ω) par des rectangles de couverture des fonctions de base. Si le centre des boîtes de HEISENBERG est fixé comme le point des centre spatial et fréquentiel de la fonction, leurs dimensions sont en général choisies de telle manière que les boîtes forment une partition du plan temps-fréquence. Cette représentation a un aspect arbitraire, d'autant qu'aucun résultat ne lie le fait qu'une famille soit une base au fait que les pavés temps-fréquence de la famille recouvrent le plan.

Le pavage temps-fréquence correspondant par exemple aux bases de fonctions de DIRAC et de fonctions de FOURIER sont des pavages par des rectangle infiniment fins et allongés qui sont représentées schématiquement dans la figure 2.1.

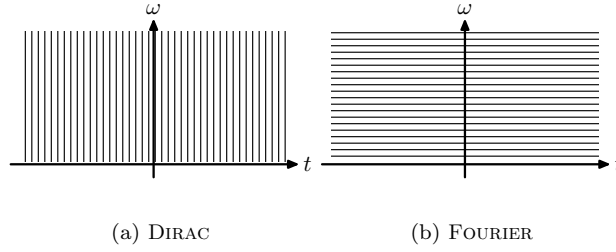


FIG. 2.1 – Pavages temps-fréquences associés aux représentations de DIRAC et de FOURIER

Pour représenter un signal comme combinaison de telles fonctions, il est très redondant de laisser varier indépendamment les trois paramètres t_0 , ω_0 et Δt . Deux approches différentes ont prévalu :

- la première approche est l'approche *temps-fréquence*, dans laquelle la largeur spatiale Δt des fonctions g est indépendante de la fréquence. Les fonctions s'écrivent sous la forme

$$g_{t_0, \omega_0}(t) = e^{i\omega_0 t} g_0(t - t_0)$$

où $g_0(t) = A_0 e^{-t^2/2\Delta t^2}$. Ce mode d'approximation est également appelé analyse de FOURIER à fenêtre.

- Une deuxième approche est l'approche *temps-échelle*, dans laquelle la largeur spatiale des fonctions g est inversement proportionnelle à la fréquence (le produit $\omega_0 \Delta t$ est constant et égal à c). On obtient alors, à un facteur de module 1 près, une forme relativement simple pour les différentes ondelettes :

$$g_{t_0, \Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} g_0\left(\frac{t - t_0}{\Delta t}\right)$$

où $g_0(t) = A_0 e^{-t^2/2\Delta t^2} e^{ict}$.

Les pavages du plan temps–fréquence donnent une idée de la différence des deux approches. Dans le cas de l’analyse temps–fréquence, le pavage obtenu est un pavage par des domaines rectangulaires qui se déduisent les uns des autres par translation dans le plan temps–fréquence. Dans le cas de l’analyse temps–échelle, les domaines sont également de surface constante, mais ont une résolution fréquentielle relative $\Delta\omega/\omega_0$ constante.

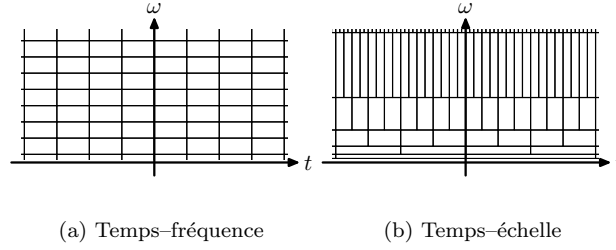


FIG. 2.2 – Pavages du plan temps–fréquence pour la représentation temps–fréquence et la représentation temps–échelle

Les ondelettes que nous allons utiliser dans la suite correspondent à l’analyse temps–échelle. Les avantages de ce mode de décomposition sont multiples. On dispose de moyens efficaces pour construire des bases discrètes pour lesquelles les calculs de transformation sont très rapides. L’analyse multi-échelles repose sur une forme de fonction unique. Enfin, dans l’analyse temps–échelle, les fonctions de base ont une taille de support proportionnelle à la résolution spatiale liée à leur fréquence par l’inégalité de Heisenberg.

2.3 Transformée en ondelettes continue

On choisit une fonction de base ψ appelée ondelette qui vérifie la condition d’admissibilité :

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2.1)$$

On remarque que si transformée de FOURIER de ψ est régulière, elle doit nécessairement s’annuler en 0, ce qui exclut d’office la fonction de GABOR que nous avons indiquée ci-dessus. En pratique, on considérera que la fonction de GABOR satisfait presque la condition d’admissibilité, dans la mesure où sa transformée de FOURIER prend une valeur très petite (mais non nulle) en 0.

On définit la transformée en ondelettes continue $\mathcal{W}f$ de la fonction f par la formule suivante :

$$\mathcal{W}f(t,s) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} d\tau \quad (2.2)$$

La transformée inverse s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (2.3)$$

De même que dans le cas de la transformée de FOURIER, la transformation est quasi isométrique :

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}f(t, s)|^2 dt \frac{ds}{s^2}. \quad (2.4)$$

En revanche, la représentation d'une fonction f par sa transformée en ondelettes n'est pas biunivoque, mais redondante, car une transformée en ondelettes vérifie une équation aux noyaux reproduisants :

$$\mathcal{W}f(t, s) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}(\tau, \sigma) K(\tau, t, \sigma, s) dt \frac{d\sigma}{\sigma^2}$$

avec un noyau K défini par

$$K(\tau, t, \sigma, s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\sigma s}} \psi\left(\frac{t'-t}{s}\right) \overline{\psi\left(\frac{t'-\tau}{\sigma}\right)} dt'$$

2.4 La transformée en ondelettes discrète

MORLET a proposé de construire des bases ou des *frames* de fonctions construits sur le modèle suivant :

$$g_{t_0, \Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} g\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)$$

où les valeurs possibles de Δt sont pris sur une échelle géométrique et les paramètres de translation sont proportionnels à Δt :

$$\begin{aligned} \Delta t &= b^j \\ t_0 &= k\Delta t \end{aligned}$$

Une gamme d'échelles Δt couramment utilisée est la gamme des échelles dyadiques 2^j , et on obtient des familles constituées de fonctions de la forme $g_0(2^j(t - 2^{-j}k)) = g(2^j t - k)$ où j et k sont des entiers relatifs. La normalisation la plus couramment utilisée étant une normalisation en norme L_2 , on obtient des familles de fonctions $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ où $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Dans un article écrit en 1987, Stéphane MALLAT a tracé un parallèle entre les fonctions de représentation temps-échelle inspirées par le travail de MORLET et les filtres miroirs en quadrature étudiés par BURT, ADELSON et SIMONCELLI pour effectuer de la compression d'images.

Il a mis en avant une certaine catégorie de décompositions en ondelettes qui peuvent être réalisées numériquement en un temps très court par une « transformée en ondelettes

rapide », pour laquelle l'ondelette de base doit être écrite comme convolution infinie de filtres discrets. Plus exactement, soit un couple de filtres discrets (m_0, m_1) :

$$k \mapsto m_0[k] \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

$$k \mapsto m_1[k] \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2.6)$$

dont les transformées de FOURIER $\omega \mapsto m_0(\omega)$ et $\omega \mapsto m_1(\omega)$ sont des fonctions 2π -périodiques. On suppose qu'il existe une fonction d'échelle ϕ et une ondelette ψ de $L_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (2.7)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.8)$$

Sous certaines conditions sur m_0 et m_1 , la famille (ψ_{jk}) est une base orthogonale, et la décomposition en ondelettes d'une fonction échantillonnée peut être effectuée par un algorithme rapide constitué d'une cascade de filtrages et de sous-échantillonnages.

Cette approche réduit considérablement la complexité de la construction d'une ondelette. Au lieu de choisir une fonction, on choisit l'ensemble discret (et en général fini) des coefficients des deux filtres.

2.5 Analyses multi-résolutions

Le cadre d'analyse de ces ondelettes qui s'expriment à l'aide de filtres discrets s'est considérablement développé ces dernières années, et nous disposons de tout un jeu de théorèmes reliant les propriétés des ondelettes et celles de filtres discrets. Par ailleurs, il existe plusieurs familles classiques d'ondelettes qui portent en général soit le nom de leur créateur, soit celui d'une propriété.

2.5.1 Cadre théorique

Le cadre théorique posé par Stéphane MALLAT est basé sur la notion d'analyse multi-résolutions. Une analyse multi-résolutions est une famille de sous-espaces de $L_2(\mathbb{R})$ notée $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, qui ont les propriétés suivantes :

$$V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{jk} : a_k \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{Espace de RIESZ}) \quad (2.9a)$$

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (2.9b)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.9c)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}) \quad (2.9d)$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- L'hypothèse (2.9a) signifie que V_j est un espace de RIESZ engendré par la famille $(\phi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$. Sa définition dépend de la topologie choisie pour l'espace fonctionnel. On peut le définir plus rigoureusement comme l'adhérence de l'espace de combinaisons linéaires finies de fonctions ϕ_{jk} . Cette propriété impose une contrainte sur la fonction ϕ . Pour une topologie L_2 , la correspondance

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L_2(\mathbb{R}) \\ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{0k} \end{aligned}$$

doit être continue. Une fonction ϕ avec une décroissance en espace trop faible n'est donc pas admissible.

- Intuitivement, nous pouvons considérer que l'ensemble des fonctions de V_{j+1} constitue un ensemble plus « riche » ou plus « dense » que V_j , ce qui ne signifie nullement de relation d'inclusion. L'hypothèse (2.9b) l'impose.

Pour des raisons d'invariance par translation et par changement d'échelles relatives, on peut vérifier que cette hypothèse est équivalente à supposer que $\phi \in V_1$, ce qui signifie qu'il existe une suite de coefficients $(m_0[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\phi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0[k] \phi(2t - k) \quad (2.10)$$

C'est ainsi que nous voyons apparaître le filtre discret m_0 .

- L'hypothèse (2.9c) est formulée plus pour des raisons de principe, car elle est toujours vérifiée. L'hypothèse (2.9d) l'est pourvu que la fonction $\hat{\phi}$ ne soit pas nulle en $\omega = 0$.

Les ondelettes apparaissent naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre deux espaces V_j et V_{j+1} consécutifs. On construit pour cela un espace de RIESZ W_0 tel que :

$$V_0 \oplus W_0 = V_1 \quad (2.11)$$

L'espace W_0 est engendré par une fonction ψ :

$$W_0 = \left\{ t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{R}} d_k \psi(t - k) : d_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Ceci impose que la fonction ψ soit dans l'espace V_1 , et s'écrive comme combinaison linéaire des fonctions $(t \mapsto \phi(2t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_1[k] \phi(2t - k) \quad (2.12)$$

Ainsi apparaît le deuxième filtre discret m_1 .

On montre que les fonctions ϕ et ψ sont alors définies par les seules données des filtres discrets m_0 et m_1 . Les formules sont

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \text{par itération de (2.10),} \quad (2.13a)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{par (2.12).} \quad (2.13b)$$

2.5.2 Les bases d'ondelettes

La relation (2.11) se transpose à toutes les échelles j :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (2.14)$$

et on obtient par itérations de cette relation :

$$V_j \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_{j'-1} = W_{j'} \quad \text{si } j < j' \quad (2.15)$$

En faisant tendre j' vers $+\infty$ (et éventuellement j vers $-\infty$), on obtient deux relations :

$$L_2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \bigoplus_{j'=j}^{+\infty} W_{j'} \quad \text{quel que soit } j \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j'=-\infty}^{+\infty} W_{j'} \quad (2.17)$$

La réunion des bases de RIESZ de chacun des espaces de ces sommes directes fournit ainsi plusieurs bases d'ondelettes :

$$\mathcal{B}_j = \{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j'k} : j' \geq j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{B} = \{\psi_{jk} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.19)$$

2.5.3 Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes s'applique à des signaux échantillonnés sur une grille discrète, et en général cet échantillonnage consiste à approcher une fonction de $L_2(\mathbb{R})$ par

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} f[k/2^j] \phi_{jk}$$

où l'échantillon $f[k/2^j]$ peut lui aussi être estimé par :

$$f[k/2^j] \simeq f(k/2^j)$$

Le signal dont on part est donc représenté sur une base de RIESZ de V_j . Appliquer à ce signal une transformation en ondelettes jusqu'à l'échelle $L \in \mathbb{Z}$ revient à représenter ce signal sur une base adaptée à la somme directe :

$$V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1}$$

L'algorithme de transformation est itératif et consiste à remplacer la représentation d'une composante sur $V_{j'}$ par une représentation sur $V_{j'-1} \oplus W_{j'-1}$. On passe ainsi successivement par des décompositions adaptées aux différentes sommes directes suivantes :

$$\begin{array}{c} V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ \vdots \\ V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \end{array}$$

2.5.4 Filtrés duaux, ondelettes duales

L'itération de base de transformation en ondelettes est donc un changement de base entre les deux décompositions suivantes :

$$V_{j+1} \rightarrow V_j \oplus W_j$$

Elle s'écrit comme une correspondance

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}) \times \ell_2(\mathbb{Z}) \\ (a_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto [(a_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}, (d_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}] \end{aligned}$$

Si on note A_j et D_j les fonctions 2π -périodiques dont les coefficients sont les suites discrètes $k \mapsto a_{jk}$ et $k \mapsto d_{jk}$:

$$\begin{aligned} A_j(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} e^{-ik\omega} \\ D_j(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} e^{-ik\omega} \end{aligned}$$

l'itération de base s'écrit comme l'application d'une matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} A_j(2\omega) \\ D_j(2\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j+1}(\omega) \\ A_{j+1}(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

Une condition nécessaire pour que cette transformation soit inversible est donc que la matrice de transfert

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

soit bornée d'inverse bornée sur $[0, 2\pi]$. Dans ce cas, on appelle matrice de transfert duale la matrice $\tilde{T}(\omega) = T(\omega)^{-T}$. Il existe deux autres fonctions 2π -périodiques \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 telles que $\tilde{T}(\omega)$ s'écrive :

$$\tilde{T}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega + \pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

Ces filtres définissent les ondelettes duales $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ par des relations identiques à (2.13a) et (2.13b) :

$$\tilde{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} \tilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad (2.20a)$$

$$\tilde{\psi}(\omega) = \tilde{m}_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \tilde{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.20b)$$

Les fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ sont donc des ondelettes duales dans le sens où pour tout j , on a les formules de décomposition sur $L_2(\mathbb{R})$:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{jk} \rangle \phi_{jk} + \sum_{j' \geq j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j'k} \rangle \psi_{j'k} \quad (2.21)$$

pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $f \in L_2(\mathbb{Z})$, et en faisant tendre j vers $-\infty$ la formule de décomposition homogène :

$$f = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} \quad (2.22)$$

2.5.5 L'algorithme de la transformée en ondelettes rapide

Les coefficients des filtres m_0 , m_1 et des filtres duaux \tilde{m}_0 et \tilde{m}_1 interviennent dans le calcul des changements de base

$$\{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\} \leftrightarrow \{\phi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$$

avec les formules suivantes :

- dans le sens de transformation dit « direct » (*forward wavelet transform*), on a

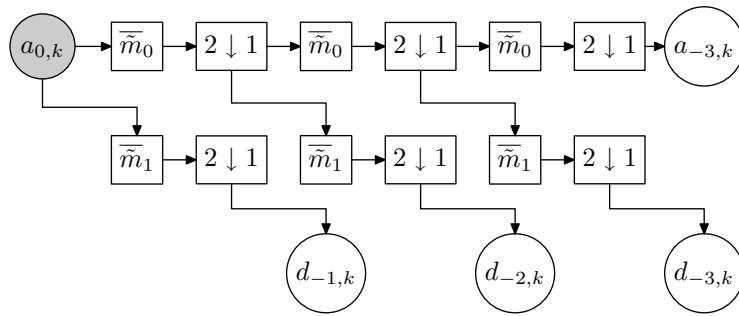
$$\begin{aligned} a_{jk} &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{m}_0[k] a_{j+1, 2l-k} \\ d_{jk} &= 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{m}_1[k] a_{j+1, 2l-k} \end{aligned}$$

- et dans le sens de transformation inverse (*inverse wavelet transform*), on obtient

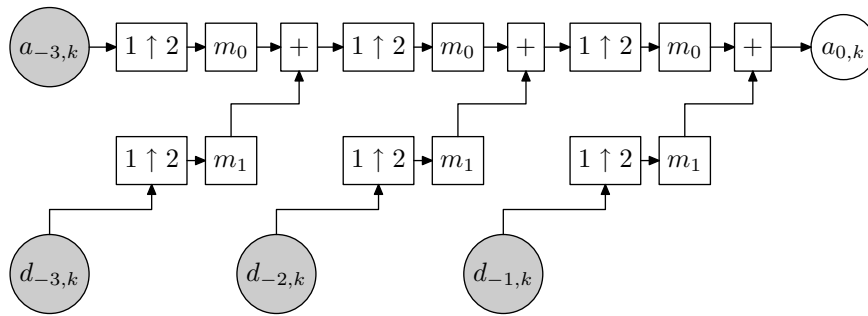
$$a_{j+1,k} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_0[2l-k] a_{jl} + m_1[2l-k] d_{jl}$$

Des schémas de transformation directe et de transformation inverse sont représentés sur la figure 2.3 entre les échelles $j = 0$ et $j = -3$.

Pour un nombre fini N d'échantillons, une transformation en ondelettes (jusqu'à n'importe quelle profondeur autorisée par la taille de l'échantillon) prend moins de $A \times N$ opérations, où la constante A dépend naturellement de la taille des filtres. Ceci est en théorie meilleur qu'une transformée de FOURIER rapide qui prend de l'ordre de $N \log N$ opérations.



(a) Transformée directe



(b) Transformée inverse

FIG. 2.3 – Transformées en ondelettes rapides. Les cercles sur fond grisé désignent les composantes d'entrée, tandis que les cercle sur fond blanc désignent les composantes de sortie.

2.5.6 Les ondelettes orthogonales

Les ondelettes orthogonales sont des ondelettes ψ telles que la famille $(t \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j t - k))_{j,k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$. C'est le cas dès que $\phi = \tilde{\phi}$ et $\psi = \tilde{\psi}$, ce qui équivaut à écrire que la matrice de transfert et la matrice de transfert duale sont égales, soit encore que la matrice de transfert est unitaire pour tout ω . Ceci se traduit par la contrainte sur les filtres m_0 et m_1 par :

$$\begin{array}{rclcl} |m_0(\omega)|^2 & + & |m_0(\omega + \pi)|^2 & = & 1 & \forall \omega \\ m_0(\omega)\overline{m_1(\omega)} & + & m_0(\omega + \pi)\overline{m_1(\omega + \pi)} & = & 0 & \forall \omega \\ |m_1(\omega)|^2 & + & |m_1(\omega + \pi)|^2 & = & 1 & \forall \omega \end{array}$$

Dans ce cas, les filtres m_0 et m_1 sont appelés filtres miroirs en quadrature, selon la terminologie d'ESTEBAN et GALAND et reprise par ADELSON et SIMONCELLI. De plus les sommes directes qui apparaissent dans les formules ci-dessus sont toutes orthogonales. En pratique le choix des filtres se réduit au seul choix de m_0 , car alors un choix pour m_1 s'impose :

$$m_1(\omega) = e^{i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}$$

Historiquement, les premières ondelettes qui ont été mises au point sont les ondelettes orthogonales (MEYER, MALLAT), si bien que les familles d'ondelettes non orthogonales ont reçu l'appellation d'ondelettes biorthogonales. Le préfixe « bi » est censé rappeler que deux bases d'ondelettes sont utilisées, une pour l'analyse (la base duale) et une pour la reconstruction. Une étude systématique des ondelettes biorthogonales a été menée par COHEN, DAUBECHIES et collaborateurs.

Il existe un certain nombre de familles d'ondelettes orthogonales couramment utilisées. Les plus connues sont sans doute les ondelettes de DAUBECHIES. Ces ondelettes résultent de compromis optimaux entre deux critères contradictoires : le nombre de moments nuls des ondelettes et la taille de leur support (ces deux critères contradictoires rappellent dans une certaine mesure l'inégalité de HEISENBERG). Il existe d'autres familles d'ondelettes orthogonales, comme les *coiflets*, du nom de Ronald COIFMAN, ou les *symmlets* qui sont des ondelettes presque symétriques.

Les bases d'ondelettes orthonormées ont un avantage théorique considérable dans les problèmes de compression ou de débruitage : d'une part la métrique d'erreur utilisée est en général la métrique L_2 , et celle-ci s'exprime très simplement avec les coefficients d'une décomposition dans une base orthonormale. Dans le cas du débruitage, il se trouve également qu'un bruit blanc gaussien a une décomposition également très simple dans une base orthonormale : les coefficients sont alors également des variables gaussiennes indépendantes centrées et de même variance.

En pratique, en revanche, les ondelettes orthogonales n'offrent pas la même souplesse dans leur conception que les ondelettes biorthogonales, et on peut également montrer qu'elles ne peuvent jamais être symétriques (à un cas trivial près). Il faut noter que la relation duale entre la base d'analyse des ψ_{jk} et de reconstruction des $\tilde{\psi}_{jk}$ est symétrique, et que les rôles peuvent être interchangés, on peut très bien utiliser la base $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ pour l'analyse et

$(\tilde{\psi}_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ pour la reconstruction, pour avoir la formule :

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{jk}, f \rangle \tilde{\psi}_{jk}$$

que l'on peut comparer à la formule (2.22).

2.6 Décroissance des coefficients, régularité et approximation

Pour que la convergence d'une décomposition d'une fonction sur une base d'ondelettes soit rapide, il faut que les coefficients d'ondelettes décroissent rapidement quand $j \rightarrow +\infty$. Cette décroissance est liée au nombre de *moments nuls* de l'ondelette duale $\tilde{\psi}$.

On dit que $\tilde{\psi}$ a p moments nuls si

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(t) t^k dt = 0$$

pour tout k dans $\{0, \dots, p-1\}$. Ceci revient à écrire que la transformée de FOURIER de $\tilde{\psi}$ a un zéro d'ordre p en $\omega = 0$, ou à dire que $\tilde{\psi}$ est orthogonale à tous les polynômes de degré inférieur à p .

On peut montrer alors que si une fonction f est p fois continûment dérivable dans un intervalle I , ses coefficients d'ondelettes $\langle \psi_{jk}, f \rangle$ décroissent en $2^{-j(p+1/2)}$ dans I , c'est à dire qu'il existe une borne M telle que

$$\left| \langle \tilde{\psi}_{jk}, f \rangle \right| \leq M 2^{-(p+1/2)j} \quad \text{si } \text{supp } \tilde{\psi}_{jk} \subset I$$

Pour montrer cette majoration, il suffit d'appliquer la formule de TAYLOR à la fonction f autour du centre de l'ondelette $\tilde{\psi}_{jk}$. Si $u = k/2^j$, on a :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (t-u)^p r(t)$$

où la fonction $r(t)$ est bornée par la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f . Quand on fait le produit scalaire de f avec $\tilde{\psi}_{jk}$, la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_{jk}, f \rangle &= \int (t-u)^p r(t) \overline{\tilde{\psi}_{jk}(t)} dt \\ &= \int t^p r(t+u) \overline{\tilde{\psi}_{j0}(t)} dt \end{aligned}$$

dont on montre par un simple changement de variable qu'il est majoré par $M 2^{-(p+1/2)j}$. On voit donc que la régularité locale de la fonction conditionne la décroissance en échelles des coefficients d'ondelettes. Une quasi-réciproque est également vraie : si la décroissance

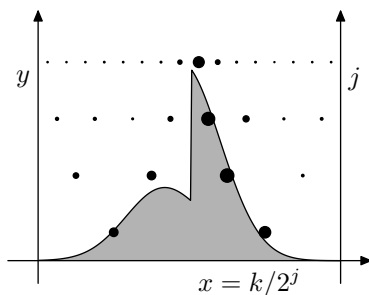


FIG. 2.4 – Coefficients d'ondelettes d'une fonction à support compact. On voit notamment que les coefficients restent importants autour des singularités pour des j croissants.

des coefficients est de l'ordre $M2^{-(p+1/2)j}$, et si ψ est p -LIPSCHITZ, alors la fonction est r -LIPSCHITZ pour tout $r < p$.

Pour illustrer le lien entre coefficients et régularité, la décomposition en ondelettes d'une fonction à support compact avec une singularité est donnée en Fig. 2.4.

Remarque

On voit le lien entre deux paramètres d'une base d'ondelettes : le nombre de moments nuls de l'ondelette duale $\tilde{\psi}$ d'une part, et la régularité de l'ondelette d'autre part. Ces deux paramètres interviennent pour le premier dans un théorème liant la décroissance des coefficients d'ondelettes à la régularité de la fonction, et le deuxième dans sa réciproque.

Yves MEYER a montré que si une ondelette était p fois dérivable, l'ondelette duale avait nécessairement $p + 1$ moments nuls. La réciproque est notoirement fautive : l'ordre de régularité d'une ondelette peut être bien inférieur au nombre de moments nuls de l'ondelette duale.

COHEN et CONZE ont montré que l'ordre de régularité α_N des ondelettes de DAUBECHIES à N moments nuls est asymptotiquement :

$$\alpha \sim \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}\right) N \simeq 0,2075 N$$

2.7 Création d'ondelettes régulières et choix de filtres

La création d'une famille d'ondelettes se réduit donc au choix d'une paire de filtres (m_0, m_1) . La matrice de transfert associée

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

doit satisfaire des conditions de reconstruction parfaite, c'est-à-dire qu'elle doit être bornée et d'inverse bornée, ce qui est relativement facile à vérifier pour des filtres à support compact.

Cette condition n'est pas suffisante. En effet, pour certains filtres m_0 , la fonction ϕ associée par convolutions infinies peut très bien ne pas être dans $L_2(\mathbb{R})$. Si on choisit par exemple $m_0(\omega) = 1$ pour tout ω , on obtient $\phi(\omega) = \delta(\omega)$ (distribution de DIRAC). Il faut que les fonctions ainsi générées soient suffisamment régulières. À ces deux contraintes s'en ajoute une troisième : la convergence des produits partiels de convolution

$$1_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}(\omega) \prod_{k=1}^j m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

vers $\hat{\phi}$ doit être suffisamment forte (i.e. se faire au moins en norme L_2) pour que les propriétés de reconstruction des filtres se traduisent par la dualité effective des ondelettes, c'est-à-dire pour que notamment

$$\langle \phi_{jk}, \tilde{\phi}_{jk'} \rangle = \delta_{kk'}$$

Cette condition n'est pas superflue. Le filtre $m_0(\omega) = (1 + e^{2i\omega})/2$ est orthogonal, produit bien par convolutions infinies une fonction de carré intégrable

$$\phi(t) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(t)$$

qui ne vérifie clairement pas les conditions d'orthogonalité

$$\langle \phi_{jk}, \tilde{\phi}_{jk'} \rangle \neq \delta_{kk'} \quad \text{pour } |k - k'| = 1$$

Pour résumer, les trois ingrédients d'une base d'ondelettes inconditionnelle de L_2 construite à l'aide de filtres sont :

1. un jeu de filtres (m_0, m_1) à reconstruction parfaite, dont les filtres duaux sont notés $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$;
2. l'appartenance de la fonction ϕ définie par

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

et de $\tilde{\phi}$ définie de manière analogue avec \tilde{m}_0 à l'ensemble $L_2(\mathbb{R})$;

3. la convergence des produits partiels de convolutions tronqués sur la bande de fréquences $[-2^j\pi, 2^j\pi]$

$$1_{[-2^j\pi, 2^j\pi]}(\omega) \prod_{k=1}^j m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

vers ϕ (et l'analogue vers $\tilde{\phi}$), afin que la propriété de dualité des filtres se transpose effectivement sur les ondelettes.

2.7.1 Conditions suffisantes dans le cas orthogonal

Une condition suffisante relativement simple a été établie par Stéphane MALLAT dans son article de 1987, dans le cas des ondelettes orthogonales à support compact. Il a établi qu'il suffisait que le filtre m_0 orthogonal (vérifiant $m_0(0) = 1$, et $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \forall \omega$) génère une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$ si

$$m_0(\omega) \neq 0 \quad \text{pour } \omega \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Cette condition suffisante a été allégée par la suite en imposant la non annulation de m_0 sur $[-\pi/3, \pi/3]$ (toujours dans le cas orthogonal).

2.7.2 Condition suffisante de régularité

Un théorème de DAUBECHIES et TCHAMITCHIAN lie la régularité de l'ondelette ϕ à une factorisation du filtre m_0 .

Théorème 2.1 (DAUBECHIES, TCHAMITCHIAN)

Soit m_0 un filtre discret tel que la fonction

$$\omega \mapsto m_0(\omega)$$

soit bornée, dérivable en 0 et telle que $m_0(0) = 1$, et soit ϕ la fonction (distribution tempérée) définie par

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

On factorise m_0 sous la forme suivante

$$m_0(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega} + 1}{2}\right)^N r(\omega)$$

où N est le plus grand entier tel que le quotient r reste borné. On pose

$$B_j = \sup_{\omega} \left| \prod_{k=1}^j r(2^k \omega) \right|$$

et

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{\log B_j}{j \log 2} \\ b &= \inf_{j>0} b_j \quad (\text{exposant critique}) \end{aligned}$$

Alors la transformée de FOURIER de ϕ est contrôlée par la formule suivante :

$$|\hat{\phi}(\omega)| \leq \frac{M}{1 + |\omega|^{N-b_j}} \quad \forall j > 0$$

Si on note H^α l'espace de HÖLDER d'exposant α , c'est à dire l'ensemble des fonctions f telles que

$$\int |\hat{f}(\omega)|(1 + |\omega|)^\alpha d\omega < +\infty$$

alors ϕ est dans l'espace H^α pour tout $\alpha < N - b_j - 1$.

Par ailleurs, pour tout $\alpha < N - b_j - 1/2$, la fonction ϕ est dans l'espace de Sobolev d'exposant α .

Ceci est un des ingrédients du théorème suivant de COHEN

Théorème 2.2 (COHEN)

Soient deux paires de filtres (m_0, m_1) et $(\tilde{m}_0, \tilde{m}_1)$ duales (donc à reconstruction parfaite). On note respectivement N, \tilde{N}, b et \tilde{b} les exposants de factorisation et les exposants critiques des deux filtres passe-bas m_0 et \tilde{m}_0 . Si $N - b > 1/2$ et $\tilde{N} - \tilde{b} > 1/2$, alors les ondelettes générées par ces filtres constituent deux bases inconditionnelles biorthogonales de $L_2(\mathbb{R})$.

Bibliographie

- [BCD⁺91] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, I. DAUBECHIES, S. G. MALLAT, Y. MEYER, L. RA-PHAEL et M. B. RUSKAI. *Wavelets*. Jones and Bartlett, Boston, 1991.
- [Dau92] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*, tome 61 de *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [Mal89a] S. G. MALLAT. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):69–87, 1989.
- [Mal89b] S. G. MALLAT. A theory for multiscale signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [Mal97] S. G. MALLAT. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1997.

