Grafos: conceitos básicos

José Elias Claudio Arroyo

Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

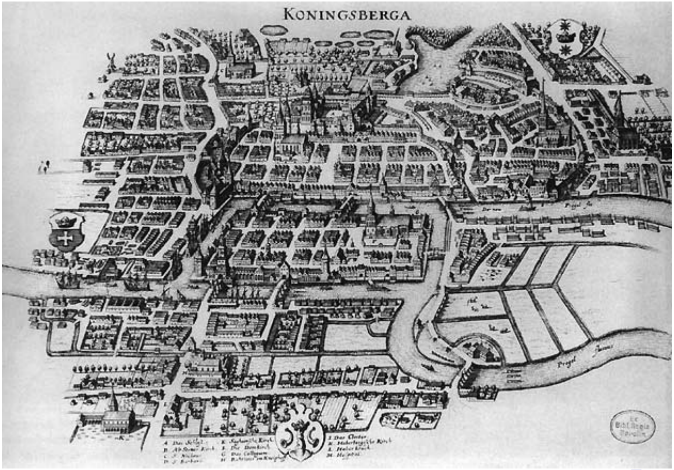
jarroyo@dpi.ufv.br

Pontes de Königsberg

- Na cidade de Königsberg, na antiga Prússia, havia 7 pontes que cruzavam o rio Pregel, ligando suas margens e duas ilhas da cidade
- Os habitantes se perguntavam se era possível passar por todas elas exatamente uma vez, ou seja, se havia um caminho que não repetia ponte (e incluía todas)

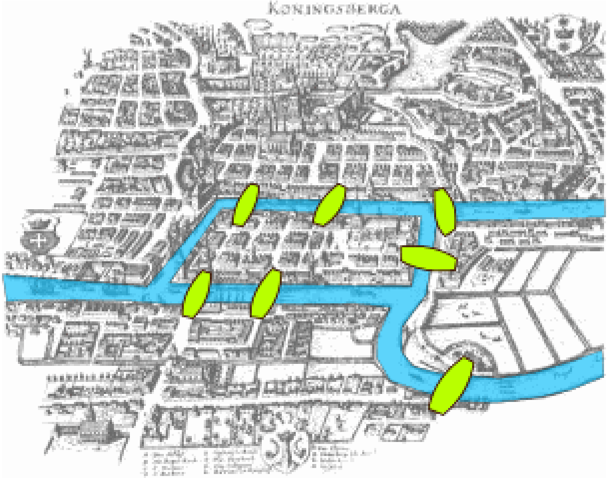
Pontes de Königsberg

Desenho da cidade de Königsberg, naquela época

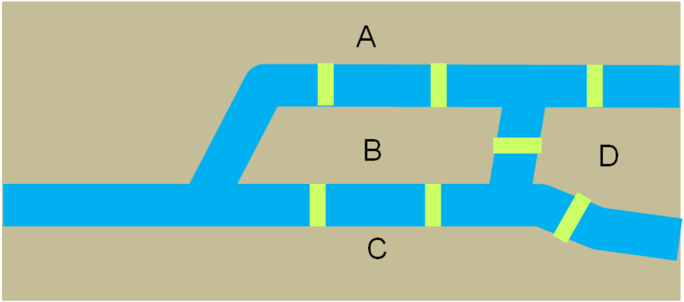


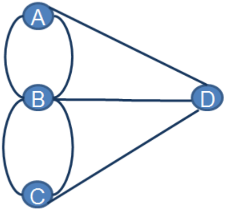
Pontes de Königsberg

Desenho destacando as pontes



Pontes de Königsberg



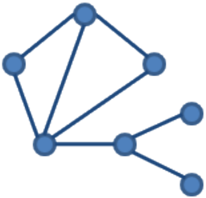


Grafo

Pontes de Königsberg

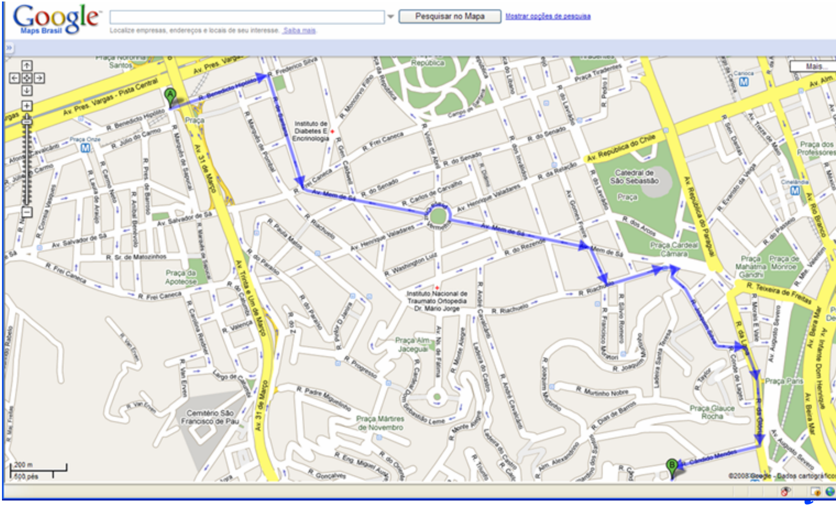
- Euler (1735) provou que o problema das 7 Pontes de Königsberg não possui solução.
- Euler apresentou pela primeira vez as terminologias da Teoria dos Grafos.
- A partir daí começou a base da Teoria dos Grafos

- Muitas situações do mundo real podem ser descritas por um **diagrama** contendo
  - um conjunto de **pontos**
  - um conjunto de **linhas** unindo certos pares desses pontos
- O mais importante é saber se dois pontos são unidos ou não por um linha
- A forma como são unidos é, geralmente, irrelevante

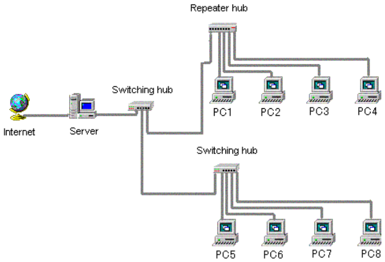


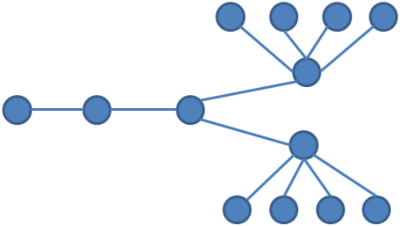
Rotas da Avianca no Brasil

Caminho mais curto

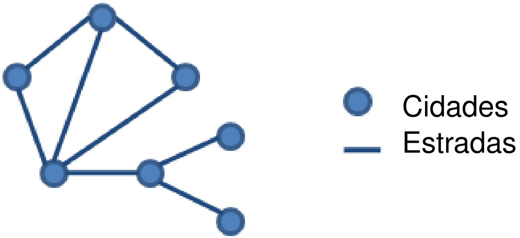


Redes de Computadores

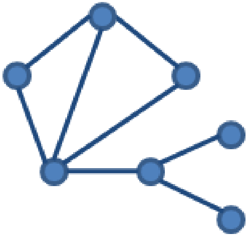




- Mapa

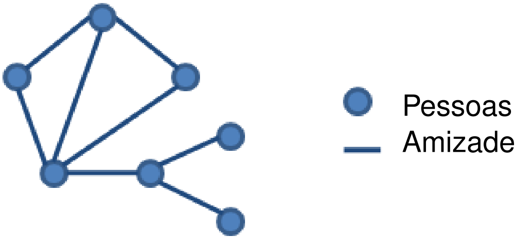


- Infra-estrutura de rede

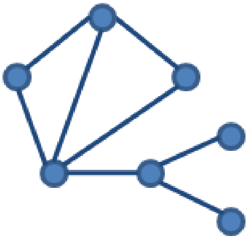


Computadores
Cabos

- Rede social



- Campeonato



Grafo

Um grafo é um par $G = (V, A)$, sendo V um **conjunto de vértices** e A um **conjunto de arestas**, onde cada **aresta** é um par não ordenado de dois vértices de V.

Exemplo de Grafo

$G = (V, A)$
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, b), (a, d), (b, d), (c, d), (c, d), (d, e)\}$
ou $A = \{ab, ac, bb, ad, bd, cd, cd, de\}$

- **Vértices** são também chamados **nós** ou **nodos**
- **Arestas** são também chamadas **links**
- Grafos são também representados por $G = (V, E)$, pois *edges* é o termo mais comum em inglês

Grafo

Um grafo é um par $G = (V, A)$, sendo V um **conjunto de vértices** e A um **conjunto de arestas**, onde cada **aresta** é um par não ordenado de dois vértices de V.

Exemplo de Grafo

$G = (V, A)$
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, b), (a, d), (b, d), (c, d), (c, d), (d, e)\}$
ou $A = \{ab, ac, bb, ad, bd, cd, cd, de\}$

- **Vértices** são também chamados **nós** ou **nodos**
- **Arestas** são também chamadas **links**
- Grafos são também representados por $G = (V, E)$, pois *edges* é o termo mais comum em inglês

Grafo

Um grafo é um par $G = (V, A)$, sendo V um **conjunto de vértices** e A um **conjunto de arestas**, onde cada **aresta** é um par não ordenado de dois vértices de V.

Exemplo de Grafo

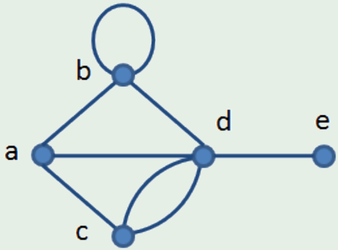
$G = (V, A)$
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, b), (a, d), (b, d), (c, d), (c, d), (d, e)\}$
ou $A = \{ab, ac, bb, ad, bd, cd, cd, de\}$

- **Vértices** são também chamados **nós** ou **nodos**
- **Arestas** são também chamadas **links**
- Grafos são também representados por $G = (V, E)$, pois *edges* é o termo mais comum em inglês

- Grafos são geralmente **representados graficamente** (desenhados), daí o nome
- Muitas de suas propriedades são mais facilmente entendidas com esse desenho
- Cada **vértice** é representado por um **ponto (círculo)** e cada **aresta** por uma **linha**

Exemplo de Grafo

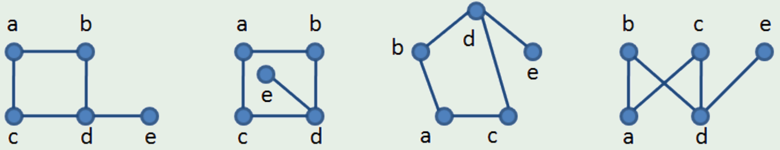
$G = (V, A)$
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, b),$
$(b, d), (b, d), (c, d), (c, d),$
$(d, e)\}$



- O desenho de um grafo meramente descreve a **relação** que existe **entre os vértices**
- Não há uma forma única de desenhar um grafo; as posições relativas dos pontos e linhas não tem significado

Exemplos de representação gráfica

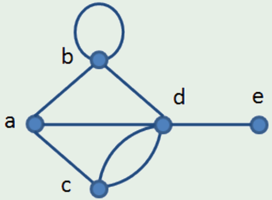
$G = (V, A)$
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}$



- O **número de vértices** de um grafo G é representado por $|V(G)|$, $n(G)$, $\nu(G)$, ...
- O **número de arestas** de um grafo G é representado por $|A(G)|$, $m(G)$, $\varepsilon(G)$, ...
- Quando existe somente um grafo em discussão, geralmente ele é chamado de G; nesse caso omite-se G dos símbolos, isto é, usa-se apenas
  $|V|$, n, ν (número de vértices)
  $|A|$, m, ε (número de arestas)

- Os vértices de uma aresta são ditos incidentes à aresta, e vice-versa (a aresta incide a seus vértices extremos)
- Dois vértices incidentes a uma aresta em comum são ditos adjacentes
- Uma aresta com vértices incidentes idênticos é chamada loop ou laço
- Múltiplas arestas podem incidir em um mesmo par de vértices

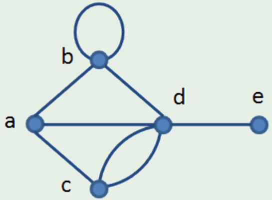
Exemplo de Grafo



- a e b são incidentes a (a, b)
- a e b são adjacentes
- b e c não são adjacentes
- (b, b) é um loop
- há múltiplas arestas (c, d)

- Os vértices de uma aresta são ditos incidentes à aresta, e vice-versa (a aresta incide a seus vértices extremos)
- Dois vértices incidentes a uma aresta em comum são ditos adjacentes
- Uma aresta com vértices incidentes idênticos é chamada loop ou laço
- Múltiplas arestas podem incidir em um mesmo par de vértices

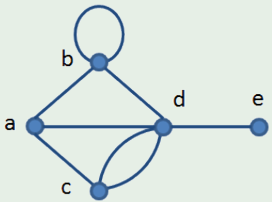
Exemplo de Grafo



- a e b são incidentes a (a, b)
- a e b são adjacentes
- b e c não são adjacentes
- (b, b) é um loop
- há múltiplas arestas (c, d)

- Os vértices de uma aresta são ditos incidentes à aresta, e vice-versa (a aresta incide a seus vértices extremos)
- Dois vértices incidentes a uma aresta em comum são ditos adjacentes
- Uma aresta com vértices incidentes idênticos é chamada loop ou laço
- Múltiplas arestas podem incidir em um mesmo par de vértices

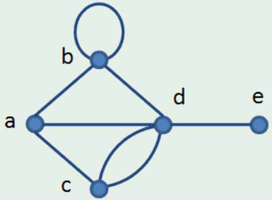
Exemplo de Grafo



- a e b são incidentes a (a, b)
- a e b são adjacentes
- b e c não são adjacentes
- (b, b) é um loop
- há múltiplas arestas (c, d)

- Os vértices de uma aresta são ditos **incidentes** à aresta, e vice-versa (a aresta incide a seus vértices extremos)
- Dois vértices incidentes a uma aresta em comum são ditos **adjacentes**
- Uma aresta com vértices incidentes idênticos é chamada **loop** ou **laço**
- **Múltiplas arestas** podem incidir em um mesmo par de vértices

Exemplo de Grafo



- a e b são incidentes a (a, b)
- a e b são adjacentes
- b e c não são adjacentes
- (b, b) é um loop
- há múltiplas arestas (c, d)

Grafo finito

Um grafo $G = (V, A)$ é finito se ambos V e A são finitos

- Neste curso serão usados apenas grafos finitos

Grafo simples

Um grafo é simples se não tem **loops** nem **arestas múltiplas**

- A **teoria de grafos** estuda principalmente as **propriedades de grafos simples**

Grafo finito

Um grafo $G = (V, A)$ é finito se ambos V e A são finitos

- Neste curso serão usados apenas grafos finitos

Grafo simples

Um grafo é simples se não tem **loops** nem **arestas múltiplas**

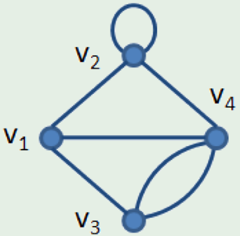
- A **teoria de grafos** estuda principalmente as **propriedades de grafos simples**

Grau de un vértice

O **grau** $d(v)$ de um vértice v em G é o número de arestas de G incidentes a v. No caso de loops conta-se duas incidências.

- Denota-se por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ respectivamente o **mínimo** e o **máximo grau** dos vértices de G.

Exemplo

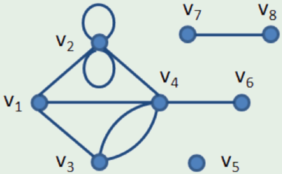


- $d(v_1) = 3$
- $d(v_2) = 4$
- $d(v_3) = 3$
- $d(v_4) = 4$

- $\delta = 3$
- $\Delta = 4$

Grau de un vértice

Outro exemplo



- $d(v_1) = 3$
- $d(v_2) = 6$
- $d(v_3) = 3$
- $d(v_4) = 5$
- $d(v_5) = 0$
- $d(v_6) = 1$
- $d(v_7) = 1$
- $d(v_8) = 1$

- Um vértice de grau 0 é chamado de **vértice isolado.**

Teorema

A soma dos graus de todos os vértices de um grafo $G = (V, E)$ é duas vezes o número de arestas, ou seja, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ (dobro do número de arestas).

Prova

- Se o vértice v tem grau $d(v)$, então o vertice v incide em $d(v)$ arestas.
- Como cada aresta tem 2 vértices incidentes e m é o total de arestas, então existem $2m$ incidências diferentes de vértices.
  Então, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

Corolário

Em qualquer grafo $G = (V, E)$, o número de vértices de grau ímpar é par.

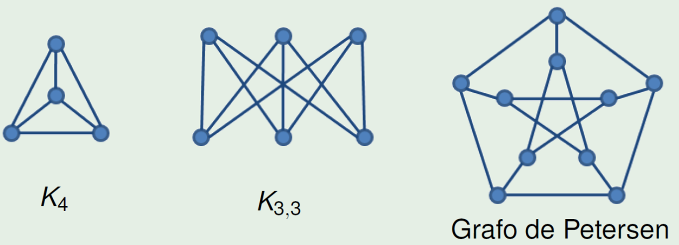
Prova

- Seja *VP* e *VI* os conjuntos de vértices de grau *par* e *impar*, respectivamente ($VP \cup VI = V$).
- $\sum_{v \in VP} d(v) + \sum_{v \in VI} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$.
- Pelo teorema anterior, $\sum_{v \in V} d(v)$ é par.
- Também, $\sum_{v \in VP} d(v)$ é par (soma de valores pares).
- Então, $\sum_{v \in VI} d(v)$ é par.
- Se a soma dos graus impares é par, então o número |VI| é par.

Grafo regular

Um grafo G é **regular** se todos os seus vértices possuem o mesmo grau.
Um grafo G é k**-regular** se $d(v) = k$ para todo $v \in V$.

- Os **3-regulares** são chamados **grafos cúbicos**. Estes grafos podem ser bem complexos e tem um papel de destaque na teoria de grafos.
- **Exemplos:**

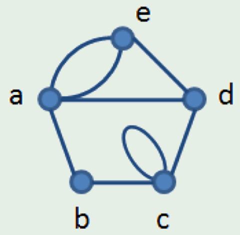


Sequência de graus

A sequência de graus **sd** de um grafo *G* é a sequência dos graus dos vértices de G listados em **ordem decrescente.**

- ou seja, se G tem vértices $v1, v2, ..., vn$, sua sequência de graus é **sd** = $(d(v1), d(v2), ..., d(vn))$, ordenada de forma decrescente.

Exemplo

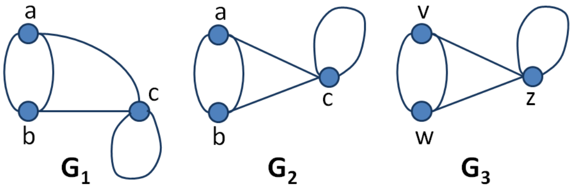


$$\mathbf{d} = (4, 4, 3, 3, 2)$$

Grafos idênticos

Dois grafos G e H são **idênticos** se: $V(G) = V(H)$, $A(G) = A(H)$ e existe uma aresta uv em G *sss* existe uv em H

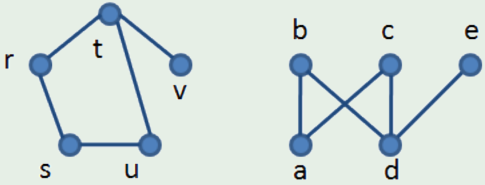
- Dois grafos idênticos podem ou não ser representados por diagramas idênticos.
- Entretanto, dois grafos *não idênticos* podem ser representados pelo mesmo diagrama.
- Os grafos G_1 e G_2 são idênticos. G_2 e G_3 não são idênticos.



Grafos isomorfos

Dois grafos G e H são isomorfos se existe **uma bijeção** $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que existe aresta uv em $A(G)$ *sss* existe aresta $\theta(u)\theta(v)$ em $A(H)$

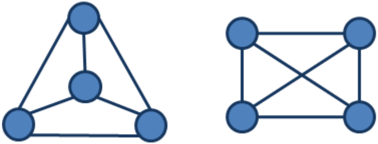
Exemplo de grafos isomorfos



$$\theta(r) = b$$
$$\theta(s) = a$$
$$\theta(t) = d$$
$$\theta(u) = c$$
$$\theta(v) = e$$

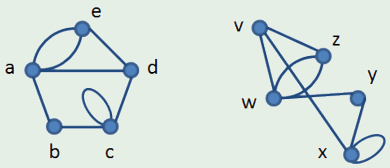
- Para provar que dois grafos G e H são isomorfos basta **encontrar uma bijeção** $\theta : V(G) \to V(H)$ que prove o isomorfismo
- Para provar que **não são isomorfos** deve-se provar que não existe nenhuma tal bijeção

- Dois grafos isomorfos possuem a **mesma estrutura**, diferem apenas no nome dos vértices
- Os nomes de vértices são usados principalmente para referenciá-los, mas **podem ser omitidos**



- Os seguintes pares de grafos são isomorfos?

Grafos G_1 e G_2

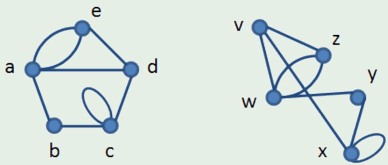


Grafos H_1 e H_2

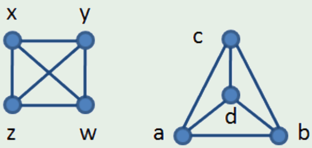
Grafos I_1 e I_2

- Os seguintes pares de grafos são isomorfos?

Grafos G_1 e G_2



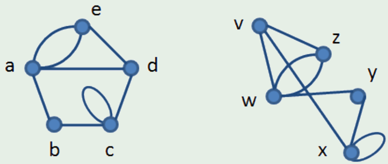
Grafos H_1 e H_2



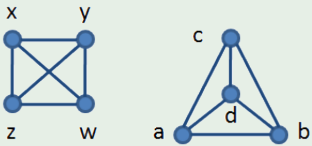
Grafos I_1 e I_2

- Os seguintes pares de grafos são isomorfos?

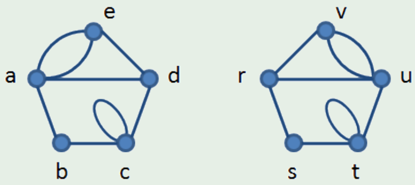
Grafos G_1 e G_2



Grafos H_1 e H_2



Grafos I_1 e I_2



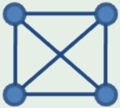
Grafo completo

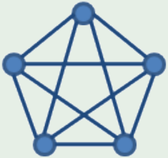
Um grafo completo é um grafo simples em que cada par de vértices é unido por uma aresta

- Sem considerar isomorfismo, há apenas um **grafo completo com n vértices.** Tal grafo é denotado por K_n

Exemplos de grafos completos

K_3 

K_4 

K_5 

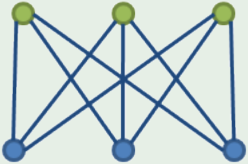
Qual é o **número de arestas** do grafo completo K_n?

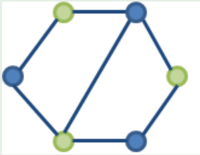
Grafo bipartido

É um grafo cujo conjunto de vértices pode ser divido em dois subconjuntos X e Y tal que toda aresta seja incidente a um vértice de X e a um de Y.

- Ou seja, não há arestas incidentes a vértices do mesmo subconjunto

Exemplos de grafos bipartidos



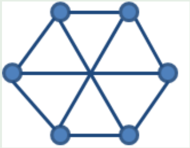


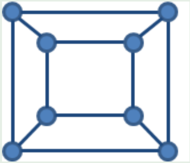
Grafo bipartido

É um grafo cujo conjunto de vértices pode ser divido em dois subconjuntos X e Y tal que toda aresta seja incidente a um vértice de X e a um de Y.

- Ou seja, não há arestas incidentes a vértices do mesmo subconjunto

Os seguintes grafos são bipartidos?



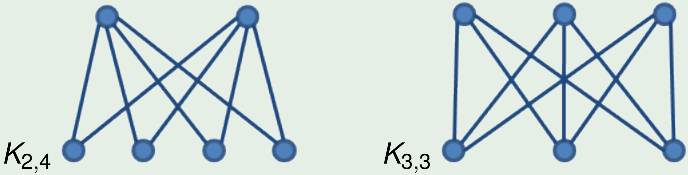


Grafo bipartido completo

Um grafo bipartido completo é um grafo simples, bipartido, com uma bipartição (X, Y) tal que todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y

- Um grafo bipartido completo com $|X| = m$ e $|Y| = n$ é denotado por $K_{m,n}$

Exemplos de grafos bipartidos completos



Grafo vazio

Um grafo vazio é um grafo **sem nenhuma aresta**

Grafo trivial

Um grafo trivial é um grafo com **1 vértice** e **nenhuma aresta**

Grafo nulo

Um grafo nulo é um grafo **sem vértices**

Grafo vazio

Um grafo vazio é um grafo **sem nenhuma aresta**

Grafo trivial

Um grafo trivial é um grafo com **1 vértice** e **nenhuma aresta**

Grafo nulo

Um grafo nulo é um grafo **sem vértices**

Grafo vazio

Um grafo vazio é um grafo **sem nenhuma aresta**

Grafo trivial

Um grafo trivial é um grafo com **1 vértice** e **nenhuma aresta**

Grafo nulo

Um grafo nulo é um grafo **sem vértices**

Grafo planar

Um grafo é planar se pode ser desenhado **sem cruzar arestas**

- Ou seja, existe algum desenho em que suas arestas se encontram apenas nos vértices

Exemplo de grafo planar

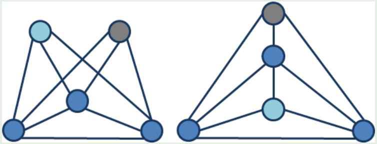
Exemplo de grafo não planar

Grafo planar

Um grafo é planar se pode ser desenhado **sem cruzar arestas**

- Ou seja, existe algum desenho em que suas arestas se encontram apenas nos vértices

Exemplo de grafo planar



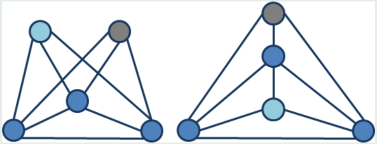
Exemplo de grafo não planar

Grafo planar

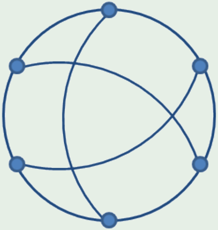
Um grafo é planar se pode ser desenhado **sem cruzar arestas**

- Ou seja, existe algum desenho em que suas arestas se encontram apenas nos vértices

Exemplo de grafo planar



Exemplo de grafo não planar

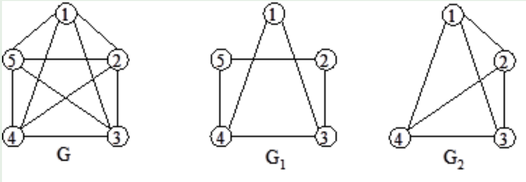


Subgrafos

- Um grafo H é um **subgrafo** de G (denotado por $H \subseteq G$) sss $E(H) \subseteq E(G)$ e $V(H) \subseteq V(G)$.
- Se H é um subgrafo de G e $H \neq G$ entao H é dito um **subgrafo proprio** de G (denotado por $H \subset G$).
- Se H e um subgrafo de G entao G e um **supergrafo** de H.

Exemplos

G1 e G2 são subgrafos de G.

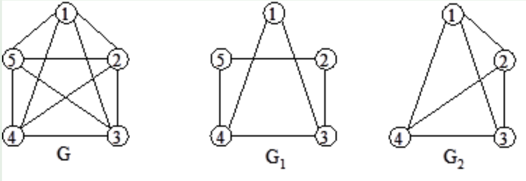


Subgrafo Gerador (spanning)

H é um subgrafo gerador de *G* se *H* é subgrafo de *G* e $V(H) = V(G)$.
Ou seja, H possui todos os vértices e um subconjunto das arestas.

Exemplo

G1 é subgrafo gerador de G.

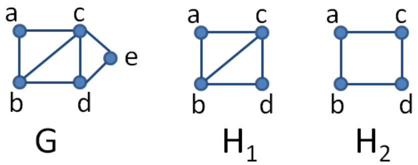


- Seja $V1$ um subconjunto não vazio de V.

Subgrafo Induzido

Um H é **subgrafo de G induzido por** $V1$ se: H contém todos os vértices de $V1$ e todas as arestas de G com ambos extremos em $V1$.
H é denotado por $H = G[V1]$.

- **Exemplo:**



- H_1 é subgrafo de G induzido por $V1 = \{a, b, c, d\}$.
- H_2 é subgrafo de G não induzido por $V1$