



Modalidad Presencial

ECUACIONES DIFERENCIALES

Versión: 3 Edición: 1 Año: 2019

Misión de UTEPSA:

“Lograr que cada estudiante desarrolle una experiencia académica de calidad, excelencia, con valores, responsabilidad social, innovación, competitividad, y habilidades emprendedoras durante su formación integral para satisfacer las demandas de un mercado globalizado.”

Esto se sintetiza en:

“Educar para emprender y servir”

Visión de UTEPSA:

“Ser una universidad referente y reconocida por su calidad académica, investigación y compromiso con la comunidad, en la formación de profesionales íntegros, emprendedores e innovadores, según parámetros y normativas nacionales e internacionales”.”

¿Qué es la Guía MAAP?



Es un documento que marca los objetivos de cada asignatura y que a través de actividades y otros contenidos, orienta los esfuerzos del estudiante para garantizar un exitoso desempeño y el máximo aprovechamiento.

Esta herramienta, otorga independencia en el aprendizaje mediante trabajos, lecturas, casos, y otras actividades que son monitoreadas por el profesor permitiendo a los participantes de la clase desarrollar diferentes competencias.

I. Recordatorios y Recomendaciones

A su servicio



Aunque las normas generales están claramente establecidas, si a usted se le presenta una situación particular o si tiene algún problema en el aula, o en otra instancia de la Universidad, el Gabinete Psicopedagógico y su Jefatura de Carrera, están para ayudarlo.

Comportamiento en clases



Los estudiantes y los docentes, bajo ninguna circunstancia comen o beben dentro el aula y tampoco organizan festejos u otro tipo de agasajos en estos espacios, para este fin está el Patio de Comidas.



Toda la comunidad estudiantil, debe respetar los espacios identificados para fumadores.

También se debe evitar la desconcentración o interrupciones molestas por el uso indebido de equipos electrónicos como teléfonos y tablets.

Cualquier falta de respeto a los compañeros, al docente, al personal de apoyo o al personal administrativo, será sancionada de acuerdo al Reglamento de la Universidad.

Asistencia y puntualidad



Su asistencia es importante en **TODAS las clases**. Por si surgiera un caso de fuerza mayor, en el Reglamento de la Universidad se contemplan tres faltas por módulo (Art. 13 Inc. b y c del Reglamento Estudiantil UPTESA). Si usted sobrepasa esta cantidad de faltas **REPROBARÁ LA ASIGNATURA**.

Se considera “asistencia” estar al **inicio, durante y al final de la clase**. Si llega más de 10 minutos tarde o si se retira de la clase antes de que esta termine, no se considera que haya asistido a clases. Tenga especial cuidado con la asistencia y la puntualidad los días de evaluación.

II. Orientaciones para el aprendizaje

La Guía MAAP, contiene diferentes actividades de aprendizaje que han sido clasificadas y marcadas con algunos símbolos.

La tabla a continuación, le permitirá comprender y familiarizarse con cada una de estas actividades:

Símbolo	Actividad	Descripción
	Preguntas	A través de cuestionarios, se repasan las bases teóricas generales para una mejor comprensión de los temas.
	Prácticos y/o Laboratorios	Los prácticos permiten una experiencia activa; a través, de la puesta en práctica de lo aprendido las cuales según la carrera, pueden desarrollarse en laboratorios.
	Casos de Estudio y ABP	Son planteamientos de situaciones reales, en los que se aplica los conocimientos adquiridos de manera analítica y propositiva.
	Investigación	Las actividades de investigación, generan nuevos conocimientos y aportes a lo aprendido.
	Innovación y/o Emprendimiento	A través de esta actividad, se agrega una novedad a lo aprendido, con el fin de desarrollar habilidades emprendedoras.
	Aplicación	Al final de cada unidad y después de haber concluido con todas las actividades, se debe indicar, cómo los nuevos conocimientos se pueden aplicar y utilizar a la vida profesional y a las actividades cotidianas.
Ética Responsabilidad Social Formación Internacional Idioma Ingles		Serán actividades transversales que pueden ser definidas en cualquiera de las anteriores actividades.

III. Datos Generales

ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES

SIGLA: BMS- 303

PRERREQUISITO: BMS - 301 Cálculo I

APORTE DE LA ASIGNATURA AL PERFIL PROFESIONAL:

Las ecuaciones diferenciales tienen su aplicación en los circuitos eléctricos aplicándolas en las leyes de Ohm y Kirchhoff, además de permitir resolver circuitos de CA, sin importar que tan complicados sean estos, también ayudan a determinar el valor de un factor, una fuente, potencia de un elemento, etc. Se involucran ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo (para capacitores e inductores). Finalmente, las ecuaciones diferenciales son una parte muy importante del análisis matemático y modelan innumerables procesos de la vida real, aportando en la formación del Ingeniero una visión muy amplia, orientada a diferentes áreas y sectores productivos.

OBJETIVO GENERAL DE LA ASIGNATURA:

Resolver los principales tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales, utilizando los conceptos fundamentales del análisis matemático. Aplicar las ecuaciones diferenciales ordinarias en la resolución de problemas de Ingeniería, Física, Geometría y otras áreas de la Ciencia.

ESTRUCTURA TEMÁTICA

Unidad 1: Conceptos generales de ecuaciones diferenciales

- 1.1. Ecuación diferencial: Definición y generalidades.
- 1.2. Grado, orden, linealidad
- 1.3. Soluciones generales, particulares y singulares

Unidad 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado

- 2.1. Ecuaciones con variables separadas
- 2.2. Ecuaciones con variables separables y reducibles a variables Separables
- 2.3. Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas
- 2.4. Ecuaciones lineales de primer orden homogéneas y no homogéneas
- 2.5. Ecuación diferencial de Bernoulli.
- 2.6. Ecuaciones diferenciales exactas.
- 2.7. Ecuaciones diferenciales no exactas:
 - 2.7.1 Factor integrante y combinación integrable.
- 2.8. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer Orden en diversos problemas



- 2.8.1 Obtención de la Ecuación Diferencial Ordinaria de una familia de curvas
- 2.8.2 Crecimiento y decrecimiento
- 2.8.3 Ley de Newton del enfriamiento.
- 2.8.4 Movimiento acelerado de cuerpos.
- 2.8.5 Trayectorias ortogonales (en coordenadas cartesianas y polares).
- 2.8.6 Aplicaciones a la geometría.
- 2.8.7 Disoluciones.
- 2.8.8 Circuitos eléctricos simples

Unidad 3: Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 3.1 Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes
 - 3.1.1. Raíces reales simples y múltiples de la ecuación característica.
 - 3.1.2. Raíces complejas simples y múltiples de la ecuación característica.
- 3.2 Ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes
 - 3.2.1 Método de los coeficientes indeterminados
 - 3.2.2 Métodos abreviados.
 - 3.2.3 Método de la variación de parámetros.
- 3.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Euler-Legendre.
 - 3.3.1. Métodos de solución.
- 3.4 Ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes variables.
- 3.5 Ecuaciones diferenciales no homogéneas de coeficientes variables.
 - 3.5.1 Método de la variación de parámetros.
- 3.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior
 - 3.6.1 Circuitos Eléctricos
 - 3.6.2 Resortes

Unidad 4: Sistemas de ecuaciones diferenciales

- 4.1 Resolución por sustitución
- 4.2 Método de Euler
- 4.3 Método de operadores.

BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

1. Boyce William. – Di Prima Richard “Ecuaciones Diferenciales” Ed. Limusa, Mexico 1997
2. Murray - Spiegel. Transformada de Laplace. Serie de compendios Schaum Ed. Mc Graw Hill, México 1967
3. Chungara, Víctor. “Ecuaciones Diferenciales”. Edición 2006



COMPLEMENTARIA

1. Rainville Earl D., Bedient Philip E., Bedient Richard E., Ecuaciones Diferenciales Ed. Prentice Hall México 1998
2. Ayres Frank. Ecuaciones Diferenciales. Serie de compendios Schaum Ed. McGraw Hill, Colombia 1969
3. Makarenko G., Krasnov M., Kiseliyov A. "Ecuaciones Diferenciales". Ed. Mir. Moscú 1968

<http://usuarios.multimania.es/equatdiff/id31.htm>

<http://www.todoejercicios.com/resueltos/Matematicas/Ecuaciones-Diferenciales/Ordinarias-de-Primer-Orden>

<http://www.monografias.com/trabajos33/laplace-ejercicios/laplace-ejercicios.shtml>

<http://www.scribd.com/doc/6164997/Transform-Ada-y-AntiTransformada-de-Laplace>

<http://usuarios.multimania.es/equatdiff/id30.htm>

<http://www.guiamath.net/>

<http://matematica.50webs.com/contenido.html>

IV. Sistema de Evaluación

A continuación, se presenta el sistema de evaluación sugerido para la asignatura:

NÚM.	TIPO DE EVALUACIÓN	UNIDADES A EVALUAR	PUNTOS SOBRE 100
1	PRUEBA PARCIAL	Unidades 1 a 2 (2.7)	15
2	PRUEBA PARCIAL	Unidades 2 (2.8) a 3	15
3	TRABAJOS PRÁCTICOS (CASOS-EJERCICIOS)	Todas las actividades de aprendizaje	20
4	EVALUACIÓN FINAL	Todos los temas de forma integral	50



Descripción de las características generales de las evaluaciones:

PRUEBA PARCIAL 1	Esta evaluación medirá los objetivos de la unidad 1 y unidad 2. La prueba estará compuesto: de una parte práctica de resolución de ecuaciones diferenciales por los métodos realizados en clases, y la otra determinando la función solución y su análisis gráfico.
PRUEBA PARCIAL 2	Se concentra en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en diversos problemas Así como los objetivos de la Unidad 3 una parte práctica de resolución de Ecuaciones diferenciales de 2do orden por los diferentes métodos y situaciones, como el análisis de la solución de ecuaciones diferenciales de modelos matemáticos de fenómenos físicos.
TRABAJOS PRÁCTICOS	Esta evaluación corresponde a los trabajos que los estudiantes realizarán durante la materia, ya sea en forma individual o grupal. Presentar los prácticos, cuestionarios asignados en cada tema (no los que se resuelven en forma paralela), en forma legible, prolijo, caratula indicando sus datos y en las fechas correspondientes.
EVALUACIÓN FINAL	Proyecto: Realizado en grupos de 4 estudiantes, presentar el informe y la demostración expositiva del fenómeno físico representado (20 puntos) Se evaluara todas las unidades (30 puntos)

V. Guía para el Trabajo Final

INSTRUCCIONES

Se indica los pasos y procedimientos a seguir para la realización del trabajo final.

El trabajo deberá presentarse impreso con las siguientes características:

- Hoja de papel boom tamaño carta.
- Margen superior de 2.5 cm. Inferior de 2.5 cm. derecho de 3 cm. e izquierdo 2.5 cm.
- Letra Arial 11, Interlineado de 1,5.

OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL:

Llevar a la práctica los conocimientos adquiridos en la materia de Ecuaciones Diferenciales, referente a la aplicación en la práctica de uno de los temas del contenido de la materia (Uso de ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de orden superior y aplicación de las transformadas de La Place) en un caso real.



ESTRUCTURA DEL TRABAJO FINAL:

i) CARÁTULA

- Nombre de la Universidad
- Nombre de la Facultad a la que pertenece
- Nombre de la Carrera
- Nombre de la Materia
- Nombre del Docente
- Nombre de los Integrantes del grupo
- Fecha y año

ii) CONTENIDO INTERNO

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

- Antecedentes. Breve descripción de la organización objeto de estudio.

II. OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

- Que se quiere lograr o donde se quiere llegar con la realización del trabajo

2.2. Objetivos específicos

- Pasos a seguir para llegar al objetivo general

III. FUNDAMENTOS TEORICOS

- Realizar conceptos teóricos de las unidades de donde se realiza el trabajo.

IV. TABULACION DE DATOS

4.1. Formulas, Cálculos

4.2. Gráficos e interpretaciones

V. CONCLUSIONES

- Conclusión general del grupo sobre resultados obtenidos en el trabajo.



VI. Objetivos y Actividades de cada Unidad

Unidad 1

Conceptos generales de ecuaciones diferenciales

Objetivos de aprendizaje:

- Interpretar las soluciones geométricas y analíticas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Muchas veces se presentan problemas como los siguientes:

1- Se desea buscar la ecuación de una curva, cuya pendiente es igual a 3.

$$\frac{dy}{dx} = 3 \quad \text{En este caso la función desconocida es } y = f(x)$$

2- Se tiene un móvil que se desplaza con una aceleración igual a 3 veces su velocidad. Obtener la función desplazamiento del móvil.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 3 \frac{ds}{dt} \quad \text{La función desconocida es } s(t) \text{ donde la variable independiente es la } t$$

3- Expresar la ley de Newton de la Física, que expresa que la fuerza es igual a la masa por la aceleración.

$$F = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{La función desconocida es } s(t) \text{ donde la variable independiente es la } t$$

4- Encontrar la función de crecimiento de una población que crece proporcionalmente a la cantidad actual existente. Considerando la población como Q se tiene:

$$\frac{dp}{dt} = K \quad \text{La función que expresa el crecimiento de la población es } P(t)$$

Todos los problemas anteriores pueden ser resueltos con las técnicas y métodos que se estudiarán en esta unidad.

1.2 CONCEPTO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL. GRADO Y ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Las Ecuaciones Diferenciales (E.D) son igualdades en las que aparece involucrada una función (desconocida) y al menos una de las derivadas de esta función con respecto a una variable independiente.





Ejemplos:

a) $\frac{dy}{dx} + 3xy - e^x = 0$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \text{sen}(2t)$

c) $(y''')^2 y'' + 5y' = x$

d) $(y'')^3 - (y')^4 = 0$

Resolver una E.D. es obtener la función desconocida $y = f(x)$ involucrada en la E.D. para lo cual se requiere conocer el tipo de E.D. para identificar su metodología de solución.

1.2.1 Orden de una E.D.

Es igual a la derivada superior presente en la ecuación diferencial.



Ejemplos:

a) $\frac{dz}{dx} - \frac{d^3z}{dx^2} + x^3z = 3z$ *Es una E.D. de 3er orden*

b) $y' - 4xy = 8x^5$ *Es una E.D. de primer orden*

1.2.2 Grado de una E.D.

Es igual al valor del exponente que posea la derivada de mayor orden.



Ejemplo:

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 4xy = 0$ *Esta E.D. es de segundo grado y de orden 3*

Se llama **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** a aquella E.D. que involucra a una función de una sola variable independiente.

En una **Ecuación Diferencial Parcial**, la función depende de dos o más variables independientes.





Ejemplos:

a) $(y'')^3 - (y')^4 = 0 \longrightarrow$ Es de Grado 3 \longrightarrow Es de Orden 2 \longrightarrow Es E.D.O

b) $(y''')^2 - y'' + 5y' = x \longrightarrow$ Es de 2 Grado \longrightarrow Es de 3 Orden \longrightarrow Es E.D.O

c) $\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \text{sen}(2t) \longrightarrow$ Es de 1 Grado \longrightarrow Es de 3 Orden \longrightarrow Es E.D.O

1.3 SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.

Una solución de una E.D.O es la función $y = f(x)$ que satisface la igualdad enunciada. Puede ser:

1.3.1 Solución general

Es aquella solución que presenta tantas constantes como orden posee la E.D.

1.3.2 Solución particular

Es la solución que se obtiene de la solución general cuando se han obtenido el valor de las constantes al aplicarse condiciones iniciales.



Ejemplos:

1. Dada la siguiente E.D. Verificar cuál de las siguientes funciones es una solución de la E.D

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

a) $y = e^{3x}$

Derivando.

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}$$

Reemplazando.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

$$(9e^{3x}) + (3e^{3x}) - 12(e^{3x}) = 0$$

$$0 = 0$$

$\therefore y = e^{3x}$ Es solución de la E.D

b) $y = \cos(2x)$

Derivando

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin(2x) \cdot 2 \cdot (2)$$

$$= -\cos(2x)$$

Reemplazando.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

$$[-4\cos(2x)] + [-\sin(2x)2] - 12(\cos 2x) = 0$$

$$-16\cos 2x - \sin 2x \cdot 2 \neq 0$$

La igualdad no se cumple, por tanto $y = \cos(2x)$ no es solución de la E.D.

1.3.3 Interpretación geométrica de la solución general

Una ecuación diferencial representa una familia de curvas que se desplazan a lo largo del eje de la variable independiente.



Preguntas a resolver paralelo a las clases de la unidad

- 1.- ¿Que es una solución general y particular de un ecuación diferencial?
- 2.- ¿con 3 ejemplos explica el orden y grado de una ecuación diferencial?



Practico

2. comprobar si las funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales a

a) $y = e^{-6x}$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 12y = 0$



b) $y = 2x + 6x^2$ es solución de $(x + 3x^2) \frac{dy}{dx} - y(1 + 6x) = 0$

4. En los problemas A y B compruebe que cada par de funciones sea una solución del sistema respectivo de ecuaciones diferenciales.

A) $\frac{dx}{dt} = x + 3y$

$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t}, y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

B) $\frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{5} e^t,$

$y = -\cos 2t - \sin 2t - \frac{1}{5} e^t$

5) Comprobar si:

a) $y = e^{-6x}$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 12y = 0$

b) $y = 2x + 6x^2$ es solución de $(x + 3x^2) \frac{dy}{dx} - y(1 + 6x) = 0$

c) $y = \arcsin(xy)$ es solución de $xy' = y + x^2 + y^2$

d) $y = e^x + e^{-x} - x$ es solución de $y'' - y = x$

e) $y = \frac{c}{\cos x}$ es solución de $y' - y \tan x = 0$

f) $y = \ln(c + e^x)$ es solución de $y' = e^{x-y}$

Unidad 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado

Objetivos de aprendizaje:

- Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden y primer grado
- Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden donde la derivada está en forma implícita
- Encontrar la Ecuación Diferencial de familias de curvas
- Resolver problemas utilizando Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden



2.1 ECUACION DIFERENCIAL DE VARIABLES SEPARABLES

Una E.D. es de variables separables, si la misma se puede expresar de la siguiente forma:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

- Para resolver una E.D.O de variables separables:

- Se pasa a cada lado del igual uno de los diferenciales con sus funciones

$$N(x,y)dy = - M(x,y)dx$$

- Se integra cada miembro por separado.



Ejemplo 1. Verificar si la siguiente E.D es de variables separables.

Solución:

$$(x^2 + 2x^2 y) \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$(x^2 + 2x^2 y) dy - dx = 0$$

$$1dx - x^2(1 + 2y)dy = 0$$

$$\frac{1}{x^2} dx - (1 + 2y)dy = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2} dx}_{M(x,y)} + \underbrace{-(1 + 2y)dy}_{N(x,y)} = 0$$

Por tanto, es una E.D. de variables separables.

Resolviendo:

$$\frac{1}{x^2} dx - (1 + 2y)dy = 0 \rightarrow \int (1 + 2y)dy = \int \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \int dy + 2 \int y dy = \int x^{-2} dx$$

$$y + 2 \frac{y^2}{2} = \frac{x^{-1}}{-1} + c \rightarrow y^2 + y + \frac{1}{x} = c \quad \text{Solucion General}$$





Ejemplo 2.

Hallar la solución general de: $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - x^2y = 0$

Solución:

$$y^2(1+x)\frac{dy}{dx} + x^2(1-y) = 0 \quad \rightarrow \quad y^2(1+x)dy = -x^2(1-y)dx \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{1-y}dy = \frac{x^2}{1+x}dx$$

$$\int \frac{y^2}{1-y}dy = \int \frac{x^2}{1+x}dx \quad \rightarrow \quad -\int ydy - \int dy + \int \frac{dy}{1-y} = -\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]$$

La expresión del lado izquierdo se puede integrar por sustitución:

$$u = 1 - y$$

$$du = -dy \quad \rightarrow \quad \text{entonces : } -\frac{y^2}{2} - y - \int \frac{du}{u}$$

por tanto :

$$-\frac{1}{2}y^2 - y - \ln(1-y) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln(1+x) + c$$

$$2 * \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - 2(x+y) + 2\ln(1+x) - 2\ln(1-y) = 2c$$

$$x^2 - y^2 - 2(x+y) + 2\ln\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = c$$

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE FUNCIONES HOMOGÉNEAS

2.2.1 Función Homogénea

Sea $f(x, y) = 0$ una función. Se dice que $f(x, y)$ es homogénea de orden n , si para cualquier parámetro t , se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Una ecuación diferencial escrita de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Es **homogénea** si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas, ambas de grado n .



2.2.2 Resolución de una E.D. de Homogénea

Para resolver una E.D. homogénea, se realiza la sustitución de variables siguiente:

$v = y/x$, de donde: $y = vx$ derivando: $dy = x dv + v dx$



Ejemplo 1.

Verificar si la E.D es homogénea:

$$\underbrace{(x - y) dx}_{M(x,y)} - \underbrace{(x + y) dy}_{N(x,y)} = 0$$

se debe comprobar que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ sean funciones homogéneas de igual grado:

$$M(t_x, t_y) = t^n M(x, y)$$

$$(tx) - (ty) =$$

$$t(x - y) = t^1 M(x, y)$$

$$N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

$$-(tx + ty) =$$

$$-t(x + y) = t[-(x + y)]$$

$$= t^1 N(x, y)$$

Se verifica que las funciones son homogéneas de primer grado

La solución general se obtiene sustituyendo según lo mostrado anteriormente:

$$y = vx \quad dy = x dv + v dx$$

$$(x - xv)dx - (x + xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$xdx - xvdv - xvdx - x^2dv - xv^2dx - x^2vdv = 0$$

$$xdx - 2xvdv - x^2dv - xv^3dx - x^2vdv = 0$$

$$(x - 2xv^2 - xv^2)dx - (x^2 + x^2v)dv = 0$$

$$x^2(1 + v)dv = x(1 - 2v - v^2)dx$$

$$x(1 + v)dv = -x(1 + 2v - v^2)dx$$

$$x(1 + v)dv = -(v^2 + 2v - 1)dx$$

$$\int \frac{(1 + v)}{v^2 + 2v - 1} dv = - \int \frac{dx}{x}$$



la integral se resuelve por sustitución:

$$u = v^2 + 2v - 1 \quad du = (2v + 2)dv$$

$$du = 2(v + 1)dv$$

$$\frac{du}{2} = (v + 1)dv$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln u = - \ln x + c$$

$$\frac{1}{2} \ln(v^2 + 2v - 1) = - \ln x + c$$

$$\frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 2 \frac{y}{x} - 1 \right] = - \ln x + c$$

$$\ln \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} - 1 \right)^{1/2} + \ln x = c$$

$$\ln \left(x \frac{\sqrt{y^2 + 2xy - x^2}}{x^2} \right) = c$$

$$\left(\sqrt{y^2 + 2xy - x^2} \right)^2 = (c)^2$$

$$y^2 + 2xy - x^2 = c$$

2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

Es **exacta** si cumple que:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$



Ejemplo:

$$(2xy + 3x^2)dx + x^2 dy = 0$$

$$M = 2xy + 3x^2 \quad y \quad N = x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{Luego la E.D. es Exacta}$$

Cuando una E.D. es exacta la metodología para obtener su solución general es:

Pasos:

1- Plantear que la función solución $f(x; y)$ es igual a :

$$f(x; y) = \int M(x; y) dx + \int N(x; y) dy = K$$

2- Hallar las integrales de M y N sin repetir los términos iguales obtenidos.

En el ejemplo anterior:

Prueba:



$$\int (2xy + 3x^2)dx = x^2y + x^3$$

$$\int x^2 dy = x^2$$

$$f(x; y) = x^2y + x^3 = K$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$



Ejemplo:

Verificar que la siguiente E.D. es Exacta:

$$\underbrace{(2x-3y^2)}_{M(x, y)}dx + \underbrace{(2y-6xy)}_{N(x, y)}dy = 0$$

Derivando las expresiones $M(x, y)$ y $N(x, y)$, se obtiene:

$$\frac{-\partial M}{\partial y} = \boxed{-6y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \boxed{-6y}$$

↓ ↓
Iguales

Por tanto, es una E.D. exacta.

En el siguiente ejemplo se verá otra técnica para resolver una Ecuación Diferencial Exacta, en la que se considera a la función $\mu(x, y)$ como solución de la E.D.:

$$\mu(x, y) \Rightarrow \int M(x, y)dx + g(y) = c$$

o tambien

$$\mu(x, y) \Rightarrow \int N(x, y)dy + h(x) = c$$



Ejemplo:

Resolver:

$$(2x-3y^2)dx + (2y-6xy)dy = 0$$

Asumiendo que $\mu(x, y)$ es solución:

$$\mu(x, y) \Rightarrow \int (2x-3y^2)dx + g(y) = c$$

Integrando respecto a x , se obtiene:

$$\mu(x, y) = x^2 - 3xy^2 + g(y) = c$$



Esta expresión se deriva respecto a la variable y :

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \Rightarrow 0 - 6xy + g'(y)$$

Igualando a $N(x, y)$:

$$-6xy + g'(y) = 2y - 6xy$$

De donde:

$$g'(y) = 2y$$

Integrando respecto a y :

$$g(y) = \int g'(y) dy = \int 2y dy = y^2$$

Por tanto, la solución general es:

$$\mu(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^2 = c$$



Ejemplo:

Encuentre la solución particular de:

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

Para $x = 1$ $y = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \frac{-2x \cdot 3}{y^4} = \boxed{\frac{-6x}{y^4}} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{-6x}{y^4}}$$

=

E.D.Exacta

Utilizaremos:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &\Rightarrow \int N(x, y) dy + h(x) = c \\ &= \int \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy + h(x) = c \\ &= \int \frac{1}{2} dy - 3 \int \frac{x^2}{y^4} dy + h(x) = c \\ \mu(x, y) &= -\frac{1}{y} + \frac{3x^2}{3y^3} + h(x) = c \end{aligned}$$



Derivando respecto de x ; e igualando a $M(x, y)$

$$0 + \frac{2x}{y^3} + h'(x) = \frac{2x}{y^3}$$

$$h'(x) = 0$$

Integrando.

$$\int h'(x) dx = \int 0 dx$$

$$h(x) = c$$

La solución general es :

$$-\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} = c$$

condiciones : $x = 1, y = 1$

$$-\frac{1}{1} + \frac{1^2}{1^3} = c \Rightarrow c = 0$$

La solución Particular es :

$$-\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} = c$$

2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A EXACTAS

Una ecuación diferencial no exacta de la forma: $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, puede convertirse en exacta, al multiplicarse por un factor integrante.

La E.D es reductible a Exacta si cumple:

$\text{caso 1: } \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N(x, y)} = h(x) \quad o \quad \text{caso 2: } \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M(x, y)} = g(y)$

Para cada caso, se utiliza el factor integrante:

$f.i. = e^{\int h(x) dx} \quad o \quad f.i. = e^{\int g(y) dy}$



Ejemplo:

Resolver:

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$



Solución:

Verificando si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = -2y \rightarrow$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y \rightarrow$$

No es Exacta

Para determinar el factor integrante:

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N(x, y)} = h(x) \Rightarrow \frac{-2y - 2y}{2xy} = \frac{-4y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M(x, y)} = g(y) \Rightarrow \frac{2y + 2y}{x^2 - y^2} = \frac{4y}{x^2 - y^2} = \frac{4y}{(x + y)(x - y)}$$

$$FI = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando la expresión original por el factor integrante, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x^2} dx + \frac{2xy}{x} dy &= 0 \\ \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy &= 0 \end{aligned}$$

Esta expresión es exacta, por tanto, se resuelve:

$$\int dx - \int \frac{y^2}{x^2} dx + \int \frac{2y}{x} dy = \int 0$$

$$x - y^2 \frac{x^{-1}}{-1} + 2 \frac{y^2}{2x} = c$$

$$x + \frac{y^2}{x} + 2 \frac{y^2}{x^2} = c$$

$$\frac{x^2 + y^2 + y^2}{x} = c$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = c$$

$$x^2 + y^2 = cx$$



2.5

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una Ecuación diferencial lineal de primer orden es toda ecuación que puede expresarse de la forma:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_{(x)}y = Q_{(x)}$$

La solución de la E.D es:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + c \right]$$



Ejemplo

Resolver la E.D.: $(x+1)dy - [2y + (x+1)^4]dx = 0$

Reordenando:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} - [2y + (x+1)^4]\frac{dx}{dx} = 0$$

$$(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y - (x+1)^4 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} - (x+1)^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} * y = (x+1)^3$$

La expresión está en la forma "lineal"



Por tanto sepuede aplicar la fórmula

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + c \right]$$

$$y = e^{+2\int \frac{dx}{x+1}} \left[\int (x+1)^3 e^{-2\ln(x+1)} dx + c \right]$$

$$y = (x+1)^2 \left[\int (x+1)^3 * \frac{1}{(x+1)^2} dx + c \right]$$

$$y = (x+1)^2 \left[\int (x+1) dx + c \right]$$

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{x^2}{2} + c \right]$$



PRÁCTICO

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Hallar la solución general y/o particular de:

2) $(1+y^2)dx + xy dy = 0$

R. $x^2(1+y^2) = c$

3) $y dx + (1+x^2)dy = 0$

R:

4) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

R. $\arctg(x) + \arctg(y) = c$

5) $y' = \frac{2x-1}{3y^2}$

R.

6) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} y' = 0$

R. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$

7) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - x^2y = 0$

R.

8) $e^{-y}(1+y') = 1$

R $1 - e^y = ce^x$

9) $e^x dx - (1+e^x)dy = 0$

R.

10) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$

R $1+e^y = c(1+x^2)$

11) $18x^2 dx - 6y dy = 0$

12) $6x^2 dx - 2y dy = 0$



$$13) 4xdx - 2(x^2 + 1)dy = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Resolver:

$$14) (x + y)dx - (x - y)dy = 0$$

$$15) \left(y + \sqrt{y^2 - x^2} \right) dx - xdy = 0$$

$$R \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2$$

$$16) (y - x)dx + (y + x)dy = 0$$

$$17) \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$R \quad y^3 - c(y^2 - x^2) = 0$$

$$18) 2xy'(x^2 + y^2) = (2x^2 + y^2)y$$

R

$$19) \left(y - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - xdy = 0$$

$$R \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

$$20) y dx + (2y - x)dy = 0$$

R

$$21) ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$$

R

$$22) \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}, \quad y(1) = 0$$

$$23) 3(x + y)dx + 3xdy = 0$$

$$24) 2(x^3 + y^3)dx = 2xy^2dy$$

$$25) 3xydx - 3(x^2 + y^2)dy = 0$$

$$26) \sin(1 - x)dx - \cos(1 - x)dy = 0, \quad y(0) = 1$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

$$27) (2x - 3y^2)dx + (2y - 6xy)dy = 0$$

$$28) x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$$

$$R \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$$

$$29) (2x + \sin y)dx + x \cos y dy = 0$$

$$30) (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$R \quad x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

$$31) (e^y + e^x)dx + (xe^y - 2y)dy = 0$$

$$32) \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0 \quad R \quad x \sin(y) - y \cos(x) + \ln(xy) = 0$$



$$33) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0, \text{ para } x=1, y=1$$

$$34) y(x^2 + y^2 + 9)dy + x(x^2 + y^2 - 9)dx = 0 \quad R \quad x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 18x^2 + 18y^2 = c$$

$$35) (2xy + 2y^4)dx + (x^2 + 8xy^3 - 5)dy = 0$$

$$36) (2x + e^y)dx + xe^y dy = 0$$

$$37) 5(y - xy^2)dx = 5xdy$$

$$38) (\ln y - xy^4)dx + \left(\frac{x}{y} + 2x^2y^3\right)dy = 0$$

$$39) 2(2x - 3y^2)dx + 2(2y - 6xy)dy = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A EXACTAS

$$40) (y + xy^2)dx - xdy = 0$$

$$41) (x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$$

$$R \quad x^2 - y^2 - 1 = cx$$

$$42) (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$$

$$43) (1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$

$$R \quad -\frac{1}{x^2} - xy + \frac{y^2}{2} = c$$

$$44) (x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

$$45) xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$$

$$R \quad \frac{y-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$$

$$46) (x^2 + y)dx - xdy = 0$$

$$47) (x + y^2)dx - 2xydy = 0$$

$$48) (y - 3x^2)dx = (4y - x)dy$$

$$49) 7(y - xy^2)dx - 7xdy = 0$$

$$50) (x^2 + y)dx = 2ydy$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

$$51) \frac{dy}{dx} + 2xy = 6x$$



$$52) y' + 2y = x^2 + 2x$$

R

$$y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{4} + ce^{-2x}$$

$$53) \frac{dy}{dx} + y \cos x = \cos x$$

$$54) (x^2 + 2x - 1) \frac{dy}{dx} - (x + 1)y = x - 1$$

$$R \quad y = x + c\sqrt{x^2 + 2x - 1}$$

$$55) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

$$56) (4 - x^2)y' + xy = 4$$

$$R \quad y = x + c\sqrt{4 - x^2}$$

$$57) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \ln x$$

$$58) 2xy' - y = 3x^2$$

$$R \quad y = x^2 + c\sqrt{x}$$

$$59) (x + 1)dy - [2y + (x + 1)^4]dx = 0$$

$$60) \frac{dy}{dx} = y \sin(x) + 2 \sin(2x)$$

$$61) 5 \frac{dy}{dx} - \frac{10y}{x+1} = 5(x + 1)^3$$

$$62) 4x \frac{dy}{dx} = 10x^4 + 2y$$

$$63) \frac{3dy}{dx} + 6xy = 24x$$



Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

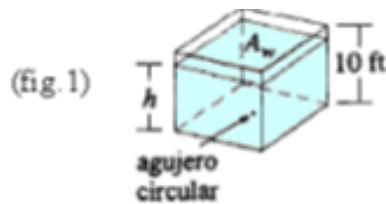
1. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_{amb} del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C hasta 60°C . ¿En qué tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C ?
2. Un barco se retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 m/s. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad se hará 1 m/s?



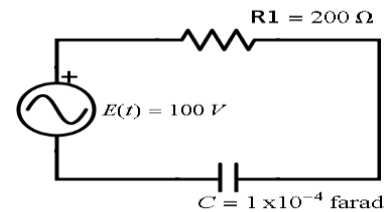
3. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es de 5°C . Después de un minuto el termómetro marca 25°C y después de 5 minutos marca 15°C . ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?
4. Se deja caer un objeto de masa m desde un globo de aire caliente. Deduzca la expresión de la velocidad en función del tiempo, suponiendo que la fuerza de fricción debida al aire es directamente proporcional a la velocidad del objeto.
5. Por razones obvias, la sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5°C . Mientras se encontraba realizando la autopsia de la víctima de un asesinato, el propio forense fue asesinado, y el cuerpo de la víctima robado. A las 10AM, el ayudante del forense descubre su cadáver a una temperatura de 23°C . A medio día su temperatura es de $18,5^{\circ}\text{C}$, supuesto que el forense tenía en vida la temperatura normal de 37° . ¿A qué hora fue asesinado?
6. Una curva que tiene una pendiente dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ pasa por el punto
 - a. $(2, 1)$ Encuentre su ecuación R: $y = \frac{1}{2} \left(5 - \sqrt{25 - 4x^2} \right)$
 - b. *Observación. - la ecuación también puede resolverse como una ecuación homogénea*
7. Una fem decadente $E = 200e^{-5t}$ se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0.01 faradios. Asumiendo $Q = 0$ en $t = 0$, encuentre la carga y la corriente en cualquier tiempo. Muestre, que la carga alcanza un máximo, calcúlelo y halle cuando se obtiene.
8. Un condensador de 5×10^{-3} faradios esta en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de 50 voltios. El interruptor se cierra en $t = 0$. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en $t = 0$, determine la carga determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.
9. Se encontró que experimentalmente que un peso de 6 lb estira un resorte 6 pulg. Si el peso se jala 4 plg. Por debajo de la posición de equilibrio y se suelta:
 - a. Establezca una ecuación diferencial y condiciones asociadas que describan el movimiento;
 - b. Encuentre la posición del peso como una función del tiempo
 - c. determine la posición, velocidad y aceleración del peso $\frac{1}{2}$ s. Después de haberse soltado.
10. Un peso de 2 lb suspendido de un resorte lo estira 1.5 pulg. Si el peso hala 3 plg. por debajo de la posición de equilibrio y se suelta
 - a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones que escriban el movimiento
 - b) Encuentre la velocidad y posición del peso como una función del tiempo
11. El Agua a temperatura de 100°C se enfría en 10 minutos a 80°C , en un cuarto cuya temperatura es de 25°C . Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos. ¿Cuándo la temperatura será de 40°C y 26°C ? rpta. $65,33^{\circ}\text{C}$, 51,94 min, 139 min.



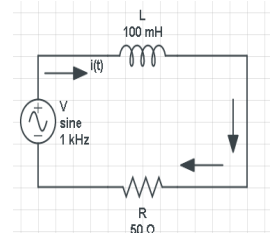
12. La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110°F . Cuando el termómetro marca 36°F se coloca en un horno. Después de 1 y 2 minutos, la temperatura que marca el termómetro es de 60°F y 82°F respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno? Rpta. 324°F .
13. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene 300 galones de agua en un inicio, en los que se disolvieron 50 libras de sal. Al tanque entra agua pura con flujo de 3 gal/min y, con el tanque bien agitado, el mismo flujo. Deduzca una ecuación diferencial al que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque cuando el tiempo es t .
14. Por un agujero circular de área A_o , en el fondo de un tanque, sale agua. Debido a la fricción y a la contracción de la corriente cerca del agujero, el flujo de agua, por segundo, se reduce a $cA_o \sqrt{2gh}$, donde $0 < c < 1$. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la altura h del agua en cualquier momento t , que se muestra en el tanque de la fig. 1. El radio del agujero es de 2 pulgadas y $g = 32 \text{ pies/s}^2$



15. Se aplica una fuerza electromotriz de 30V a un circuito en serie LR con 0.1 Henry de inductancia y 50 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0)=0$. Determine la corriente conforme $t \rightarrow 0$. El circuito está descrito en la **Figura**.



16. Se aplica una fuerza electromotriz de 100V a un circuito en serie RC en el que la resistencia es de 200 ohm y la capacitancia de farad. Determine la carga del capacitor, si. Encuentre la corriente. El circuito está descrito en la **Figura**.



17. Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1 \text{ h}$ se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t , determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.
18. En el momento inicial ($t=0$), un tanque contiene $Q_0 \text{ g.}$ de sal disueltos en 5 litros de agua. En $t=0$, comienza a entrar en el tanque agua que contiene 1 g. de sal



por litro, a razón de 2 litros por minuto. Hay un mecanismo que permite una buena disolución. También en $t=0$, sale la solución a 2 litros/minuto.

a) Hallar la cantidad de sal como función del tiempo



Aplicación de lo aprendido

Realización de experiencias reales en laboratorio

Unidad 3

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Objetivos de aprendizaje:

- Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales de orden superior con coeficientes constantes.
- Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales de orden superior con coeficientes variables
- Aplicar las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales de orden superior, en la resolución de problemas de Física e Ingeniería.

3.1. Introducción

Las E.D de orden n tiene la forma general:

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = f(x)$$

Si $f(x) = 0$ La E.D. se llama **Homogénea**, caso contrario, es llamada **No Homogénea**



Ejemplos:

- a) La ecuación diferencial: $y'' - 3y' + 2y = 0$ Es una E.D. de segundo orden Homogénea.
b) La ecuación diferencial: $y''' + 5y' = \sin x$ Es una E.D. de tercer orden No Homogénea.

3.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS, CON COEFICIENTES CONSTANTES. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, de la forma:

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = 0$$

Los pasos son:

1. Expresar la E.D. como una combinación lineal del operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$, quedando la ecuación en la forma: $A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_{n-1} D + A_n = 0$ A esta ecuación se le llama Ecuación Característica de la E.D.

2. Al resolver la ecuación característica, ésta queda expresada como un producto de factores de la forma:

$$(D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_n) = 0$$

Donde los m_i son las Raíces Características de la ecuación, estas raíces pueden ser Reales o Complejas, y Simples o Múltiples.

3. Según el tipo de raíces características, la ecuación diferencial puede tener las siguientes soluciones:

3.2.1 Primer Caso: Raíces reales diferentes

La solución es de la forma:

$$y_g = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$



Ejemplo

Resolver: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Solución:

Su expresión a través del operador D quedaría:

$$D^2 y - 3Dy + 2y = 0 \Rightarrow (D^2 - 3D + 2)y = 0$$

O también se puede escribir: $m^2 - 3m + 2 = 0$

Factorizando: $(m - 2)(m - 1) = 0$

Las raíces son 1 y 2 (raíces reales), por tanto, la solución de la E.D. será:



$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

3.2.2 Segundo Caso: Raíces reales repetidas

La solución es de la forma:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x} + \dots + C_n x^n e^{m_n x}$$



Ejemplo

Resolver:
$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 10 \frac{d^2 y}{dx^2} + 33 \frac{dy}{dx} - 36y = 0$$

Solución:

Llevando a la forma del operador D:

$$\begin{aligned} (D^3 - 10D^2 + 33D - 36)y &= 0 \\ (D-3)(D-3)(D-4)y &= 0 \end{aligned}$$

Se hallan dos raíces repetidas ($m = 3$) y una diferente ($m = 4$)

La solución de la E.D. será:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{4x}$$

3.2.3 Tercer Caso: Raíces imaginarias

Si la ecuación es de orden 2, y las raíces son imaginarias de la forma $m = \pm bi$, la solución es de la forma:

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$$



Ejemplo

Resolver:
$$y'' + 4y = 0$$

Solución:

La ecuación característica es:
$$\begin{aligned} (D^2 + 4)y &= 0 \\ (D^2 + 4) &= 0 \end{aligned}$$

La raíz es imaginaria: $m = \pm 2i$

Por tanto, la solución es:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$



3.2.4 Cuarto Caso: Raíces complejas

Si la ecuación es de orden 2, y las raíces son complejas de la forma $m = a \pm bi$, entonces la solución es de la forma:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$



Ejemplo

Resolver: $y'' - 4y' + 29y = 0$

Solución:

La ecuación característica es: $D^2 - 4D + 29 = 0$

Al resolver esta ecuación, se tiene que las raíces son: $m_1 = 2 + 5i$ y $m_2 = 2 - 5i$

Por tanto, la solución es:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$$

3.3. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS, CON COEFICIENTES CONSTANTES. CON CONDICIONES INICIALES



Ejemplo

Resolver: $2y'' + 3y' = 0$

Con las condiciones iniciales: $y = 1$ cuando $x = 0$
 $y' = 1$

Solución:

La ecuación característica es: $D^2 + 3D = 0$

Al resolver esta ecuación, se tiene que las raíces son: $m_1 = 0$ y $m_2 = -\frac{3}{2}$

Por tanto, la solución es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{3x}{2}}$$



Aplicación de las condiciones iniciales

Aplicando la primera condición

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{3x}{2}} \quad y = 1; x = 0$$

$$1 = c_1 + c_2 e^{-\frac{3(0)}{2}}$$

$$1 = c_1 + c_2$$

Aplicando la segunda condición

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{3x}{2}} \quad y' = 1; x = 0$$

$$y' = 0 - \frac{3}{2} c_2 e^{-\frac{3(0)}{2}}$$

$$1 = \frac{3}{2} c_2$$

$$c_2 = -\frac{2}{3}$$

Reemplazando en :

$$1 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = \frac{5}{3}$$

Reemplazando para obtener la solución final:

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{3x}{2}}$$

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{3x}{2}}$$

3.4. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS

Si en la E.D. la función $f(x) \neq 0$, esta E.D. de orden n es No Homogénea y para obtener su solución general se requiere obtener la solución general de la E.D. homogénea asociada y una solución particular de la E.D. no homogénea. La suma de estas dos soluciones dará la solución general de la E.D. no homogénea.

Es decir:

$$Y_g = y_h + y_p$$

Existen diferentes métodos de resolución de E.D. no homogéneas, como ser: Variación de Parámetros, Coeficientes Indeterminados, Fracciones Parciales, etc.



3.4.1. Método de los Coeficientes Indeterminados

Para obtener una solución particular de la E.D. no homogénea se requiere asociarle un formato adecuado a la y_p que se corresponde con la forma de la función del segundo miembro de la E.D.

Los siguientes ejemplos nos permiten establecer el formato correspondiente que tendrán la solución particular que se propone:

$$1. - f(x) = 4 \Rightarrow y_p = A$$

$$2. - f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y_p = Ax + B$$

$$3. - f(x) = 3x^2 + 4x + 2 \Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$4. - f(x) = 3e^{5x} \Rightarrow y_p = Ae^{px}$$

$$5. - f(x) = \text{sen} 6x \Rightarrow y_p = A \text{sen} px + B \cos px$$

$$6. - f(x) = \cos 4x \Rightarrow y_p = A \text{sen} px + B \cos px$$

$$7. - f(x) = (x+1)e^{4x} \Rightarrow y_p = (Ax + B)e^{px}$$

$$8. - f(x) = (3x+4)\cos 2x \Rightarrow y_p = (A \text{sen} px + B \cos px)(Cx + D)$$



Ejemplo

Hallar la solución general de la E.D.: $y'' - 4y = \text{sen} x$

Solución:

1- Hallar la solución general de la E.D. asociada.

$$y'' - 4y = 0 \Rightarrow (D^2 - 4)y = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0$$

$$m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{4} \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{-2x} \end{array} \right\} \Rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

2- Proponer una solución particular de la E.D. No homogénea.

$$f(x) = \text{sen} x \Rightarrow y_p = A \text{sen} x + B \cos x$$

3- Hallar los valores de los coeficientes indeterminados. Para ello reemplazamos en la E.D. a la solución y_p junto con sus derivadas:



$$\left. \begin{aligned} y_p &= A \operatorname{sen} x + B \cos x \\ y'_p &= A \cos x - B \operatorname{sen} x \\ y''_p &= -A \operatorname{sen} x - B \cos x \end{aligned} \right\} \Rightarrow -A \operatorname{sen} x - B \cos x - 4(A \operatorname{sen} x + B \cos x) = \operatorname{sen} x$$

4- Se forma el sistema de ecuaciones para obtener las incógnitas A y B

$$A = -\frac{1}{5} \quad B = 0 \left\} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{5} \operatorname{sen} x$$

5- Hallar la solución general de la E.D. no homogénea:

$$Y_g = y_h + y_p \Rightarrow Y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} \operatorname{sen} x$$



Preguntas a resolver paralelo a las clases de la unidad 3.

1. Realiza un esquema sobre las diferentes opciones de solución de una ecuación diferencial homogénea de orden superior.
2. como se procede a resolver si la ecuación diferencial es de orden superior pero no homogénea.



PRÁCTICOS

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

- 1) $y'' - 4y = 0$
- 2) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 81y = 0$
- 3) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$
- 4) $y'' + 36y = 0$
- 5) $3y''' = 9y'' + 3y' - 9y$
- 6) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2dy}{dx} - 36y = 0$



7) $y'' - 6y' = -6y$

8) $y'' + 4y = 0$

9) $y'' - 4y' = 0$

10) $y'' + 4y' = 0$

11) $y'' - 2y' + 3y = 0$

12) $y'' + 2y' - 3y = 0$

13) $y'' + 6y' + 5y = 0$

R. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$

14) $y'' - 2y' + 2y = 0$

15) $y'' + 4y' + 13y = 0$

R. $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

16) $y'' - 2y' + y = 0$

17) $3y'' - 2y' - 8y = 0$

R. $y = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{2x}$

18) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

R. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

19) $y''' - 3y' - 2y = 0$

R. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$

20) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

R. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

21) $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$

R. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + e^{-x}(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES, QUE SATISFAGAN LAS CONDICIONES INICIALES

22) $2y'' + 3y' = 0$ con $y = 1$, $y' = 1$ cuando $x = 0$

23) $y'' + 25y = 0$ con $y = -1$, $y' = 0$ cuando $x = 3$

24) $y'' - 4y' - 5y = 0$ con $y = 2$, $y' = -1$ cuando $x = 1$

25) $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y = 2$, $y' = 0$ cuando $x = 0$

26) $y'' + 6y' + 5y = 0$ $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ R. $y = \frac{7}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-5x}$

27) $y''' - 2y' + 3y = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ R. $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$

28) $4y'' + 36y' = 0$ con $y = 1$, $y' = 2$ cuando $x = 0$

29) $y'' + 2y = 0$ con $y = -2$, $y' = 3$ cuando $x = 0$

30) $y'' - 5y' = -4y$ con $y = -1$, $y' = 1$ cuando $x = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

1) $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ R. $y_G = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$

2) $2y'' + 2y' - 12y = 4x^2 - 3x$



$$3) \quad y'' - y = e^x \sin x$$

$$4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} - 30y = 2x^2$$

$$5) \quad y'' + y' - 6y = -3x$$

$$6) \quad y'' + 18y = 2 \sin(6x)$$

$$7) \quad y'' - 16y = 2e^{3x}$$

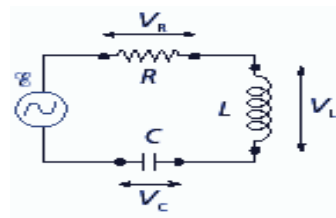
$$8) \quad y'' - 4y = e^{3x} \sin 5x$$

$$9) \quad y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \sin x$$

$$10) \quad y'' - y' = e^x \sin x$$

MODELOS MATEMATICOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Determina $q(t)$, del circuito cuando $E(t)=0$



3. En el circuito de la figura, si $L = 50 \text{ H}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 20 \mu\text{ faradios}$. Hallar las Ecuaciones de la corriente si $q(0) = 0,03 \text{ coul}$, $i(0)=0$

a) Si la corriente de tensión $E(t)$ 0 0

b) Si la fuente de tensión es de 100 volts

c) si la fuente de tensión es de $100 \sin t$

4. Determinar la ecuación de desplazamiento y el periodo de oscilación para un péndulo simple de masa m , y longitud " L "

b) Determinar el periodo y el desplazamiento de un péndulo de $m = 2 \text{ kg}$, $L = 0,30 \text{ m}$

5. Una masa que pesa 2 lb hace que un resorte se estire 6 in. Cuando $t = 0$, la masa se suelta desde un punto a 8 in abajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de 4 ft/s. Deduzca la ecuación del movimiento libre.

6. Una masa de 8 lb de peso estira 2 ft un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el contrapeso, deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 ft/s.

7. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito en serie LRC , cuando $L = 0.25 \text{ henry (h)}$, $R = 10 \text{ ohms (Q)}$, $C = 0.001 \text{ farad (f)}$, $E(t) = 0$, $q(0) = q_0 \text{ coulombs (C)}$ e $i(0) = 0 \text{ amperes (A)}$.





Aplicación de lo aprendido

Resolver aplicaciones de las ecuaciones de orden superior en laboratorio

Unidad 4

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Objetivos de aprendizaje:

- Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales aplicando diferentes métodos

4.1 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un sistema de ecuaciones diferenciales, está formado por un conjunto de ecuaciones diferenciales donde se involucran un sistema de soluciones que no son más que las funciones involucrada en el sistema.



Ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} - 2y = e^t \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} - 3x = 3t \end{cases}$$

En este ejemplo las funciones involucradas son $x(t)$ y $y(t)$ las cuales dependen ambas de la variable independiente t .

Para obtener la solución de este sistema de E.D. se pueden aplicar diferentes métodos, hemos elegido un método muy simple que es el método de los determinantes.

Pasos para obtener la solución a través del ejemplo anterior:

- 1- Ordenar el sistema, colocando primero las derivadas de la x con todos los términos que contengan la x y a continuación los términos que contengan la variable dependiente y

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = e^t \\ \frac{dx}{dt} - 3x + \frac{dy}{dt} = 3t \end{cases}$$



2- Expresar cada E.D. del sistema a través del operador diferencial L(D).

$$\begin{cases} Dx + Dy - 2y = e^t \\ Dx - 3x + Dy = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dx + (D-2)y = e^t \\ (D-3)x + Dy = 3t \end{cases}$$

3- Resolver el sistema aplicando el método de reducción.

$$\begin{aligned} D(D-3)x + (D-3)(D-2)y &= (D-3)e^t \\ -D(D-3)x - D^2y &= -D3t \end{aligned}$$

$$-D^2(D-3)(D-2)y = e^t - 3e^t - 3$$

$$(D^4 - 5D^3 + 6D^2)y = 2e^t + 3$$

$$\Rightarrow D^2(D-3)(D-2)y = 2e^t - 3 \Rightarrow m^2(m-3)(m-2) = 0$$

$$m_{1,2} = 0, m_3 = 3, m_4 = 2 \Rightarrow y_c = C_1 + C_2t + C_3e^{3t} + C_4e^{2t}$$

$$y_p = A + Be^t$$

$$\left. \begin{aligned} y_p' &= Be^t \\ y_p'' &= Be^t \\ y_p''' &= Be^t \\ y_p^{IV} &= Be^t \end{aligned} \right\} \Rightarrow Be^t - 5Be^t + 6Be^t = 2e^t + 3$$

$$B = 2 \Rightarrow y_p = 2e^t \Rightarrow$$

$$Y_g = y_c + y_p \Rightarrow Y_g = C_1 + C_2t + C_3e^{3t} + C_4e^{2t} + 2e^t$$



Preguntas

1. Los sistemas de ecuaciones diferenciales nos permitirán resolver problemas más complejos y más reales?
2. Existen diferentes métodos matemáticos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales?
3. Una ecuación diferencial de orden superior se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden?
4. La teoría del caos se puede entender a través de un sistema de ecuaciones diferenciales?





VII. Aplicabilidad de la Guía

La presente Guía MAAP se desarrolló en función del (los) documento(s):

<u>Detalle Programa(s) Analítico(s)</u>

