Homework 7

1 [Enderton, 练习 1, 2, 5, 第 17 页] 在英文和指定的一阶语言之间进行翻译。

(a) Any uninteresting number with the property that all smaller numbers are interesting certainly is interesting. ($\forall$, for all things; N, is a number; I, interesting; $<$, is less than; 0, a constant symbol intended to denote zero.)

(b) There is no number such that no number is less than it. (The same language as in Item a.)

(c) $\forall x(Nx \to Ix \to \neg\forall y(Ny \to Iy \to \neg x < y))$. (The same language as in Item a. There exists a relatively concise translation.)

(d) (i) You can fool some of the people all of the time. (ii) You can fool all of the people some of the time. (iii) You can' t fool all of the people all of the time. ($\forall$, for all things; P, is a person; T , is a time; $F\ x\ y$, you can fool x at y. One or more of the above may be ambiguous, in which case you will need more than one translation.) ◁

(a) $\forall x(Nx \wedge \neg Ix \wedge \forall y(Ny \wedge y < x \to Iy) \to Ix)$.

(b) $\neg\exists x(Nx \wedge \neg\exists y(Ny \wedge y < x))$.

(c) Any interesting number is less than some interesting number.

(d) (i) Here ambiguity is in that it either says that there are some (fixed) people you can fool all time, or says that at every moment there are (some, not fixed) people you can fool, i.e. either $\exists x(Px \wedge \forall y(Ty \to Fxy))$ or $\forall y(Ty \to \exists x(Px \wedge Fxy))$. (ii) Here ambiguity is in that it either says that you can fool each person at some time (times can be different for different people), or says that at some (fixed) time you can fool everyone (at that specific time): $\forall x(Px \to \exists y(Ty \wedge Fxy))$ or $\exists y(Ty \wedge \forall x(Px \to Fxy))$. (iii) $\neg\forall x(Px \to \forall y(Ty \to Fxy))$.

2 [Enderton, 练习 1, 第 129 页] 对于项 u，令 u^x_t 表示将项 t 应用于 u 中变元 x 所得到的表达式。请在不使用任何“替换”或其同义词的情况下重新表述此定义。 ◁

对于项 t 和变元 x，我们定义 $\sigma_{x\mapsto t} : V \to T$，其中 V 是变元的集合，T 是项的集合，且 $\sigma_{x\mapsto t}$ 除将 x 映射到 t 外，在其他情况下为恒等映射。然后递归地定义扩展映射 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}} : T \to T$:

1. 对于每个变元 v，有 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(v) = \sigma_{x\mapsto t}(v)$。
2. 对于每个常数符号 c，有 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(c) = c$。
3. 对于项 $t_1, \ldots, t_n$ 及 n 元函数符号 f，

$$\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(t_1), \ldots, \overline{\sigma_{x\mapsto t}}(t_n)).$$

3 [Enderton, 练习 9, 第 130 页]

(a) 通过两个例子说明 $(\varphi^x_y)^y_x$ 一般情况下并不等于 φ，其中第一个例子展示 x 在 $(\varphi^x_y)^y_x$ 中出现在 φ 中未出现的位置，第二个例子展示 x 在 φ 中出现在 $(\varphi^x_y)^y_x$ 中未出现的位置。

(b) 证明重新应用引理（*Re-replacement lemma*）：如果 y 不在 φ 中出现，则 x 在 φ^x_y 中是可替换的，且有 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$。 $\triangleleft$

(a) $\varphi = P\ y$（y 在 φ 中自由出现）和 $\forall y\ P\ x$（不可替换）。

(b) 对 φ 进行归纳证明。

情形 1：对于原子式 $\varphi = P\ t_1, \ldots, t_n$，我们有 x 在 φ^x_y 中是可替换的，且

$$(\varphi^x_y)^y_x = ((P\ t_1, \ldots, t_n)^x_y)^y_x = P\ ((t_1)^x_y)^y_x, \ldots, ((t_n)^x_y)^y_x = \varphi.$$

情形 2：在归纳假设成立的前提下，由公式构造操作 $\mathcal{E}_\neg$、$\mathcal{E}_\to$ 和 $\mathcal{Q}_i$ 的定义可知归纳步骤成立，其中 $v_i \neq x$ 且 $v_i \neq y$（因为 y 不在 φ 中出现）。
情形 3：$\varphi = \forall x\ \psi$。此时有 $(\forall x\ \psi)^x_y = \forall x\ \psi$，其中 y 不出现（自由地，因此 x 是可替换的）。因此

$$(\varphi^y_x)^x_y = ((\forall x\ \psi)^x_y)^y_x = (\forall x\ \psi)^x_y = \forall x\ \psi = \varphi.$$

Homework 8

Homework 9

1 [Enderton, 练习 1，第 99 页] 证明：(a) $\Gamma; \alpha \vDash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$；(b) $\varphi \vDash\Dashv \psi$ 当且仅当 $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$。 ◁

2 [Enderton, 练习 4，第 99 页] 证明：如果 x 不在 α 中自由出现，则 $\alpha \vDash \forall x \alpha$。 ◁

3 [Enderton, 练习 6，第 99 页] 证明：公式 θ 是有效的，当且仅当 $\forall\theta$ 是有效的。 ◁

4 [Enderton, 练习 7，第 99 页] 将"$\mathfrak{A}$ 在赋值 s 下满足 φ"的定义，重新表述为递归地定义一个函数 $\overline{h}$，使得 $\mathfrak{A}$ 在赋值 s 下满足 φ 当且仅当 $s \in \overline{h}(\varphi)$。 ◁

5 [Enderton, 练习 9，第 100 页] 假设语言中含有等号和一个二元谓词符号 P。对于下列每一个条件，找出一个句子 σ，使得结构 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的一个模型，当且仅当该条件成立。

(a) $|\mathfrak{A}|$ 恰好有两个元素。

(b) $P^{\mathfrak{A}}$ 是从 $|\mathfrak{A}|$ 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数。（函数指单值关系。如第 0 章所述，若 f 是从 A 到 B 的函数，则 f 的定义域是 A，而值域是 B 的子集，不一定是适当子集。）

(c) $P^{\mathfrak{A}}$ 是 $|\mathfrak{A}|$ 上的置换，即 $P^{\mathfrak{A}}$ 是定义域和值域均为 $|\mathfrak{A}|$ 的双射。 ◁

Homework 10

Homework 11

1 [Enderton，第 4 题，第 146 页] 设 $\Gamma = \{\neg\forall v_1 Pv_1, Pv_2, Pv_3, \dots\}$。$\Gamma$ 是一致的吗？Γ 是可满足的吗？ ◁

to do

2 [Enderton，第 7 题，第 146 页] 对于下列每个句子，要么说明其存在一个推导，要么给出一个反模型（即在其中该句子为假的结构）。

(a) $\forall x(Qx \to \forall y\, Qy)$

(b) $(\exists x\, Px \to \forall y\, Qy) \to \forall z(Pz \to Qz)$

(c) $\forall z(Pz \to Qz) \to (\exists x\, Px \to \forall y\, Qy)$

(d) $\neg\exists y\, \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$ ◁

to do

3 [Enderton，第 8 题，第 146 页] 假设该语言（带等号）仅包含量词 $\forall$ 和谓词符号 P，其中 P 是一个二元谓词符号。设 $\mathfrak{A}$ 是一个结构，其 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{Z}$，即整数集合（正整数、负整数和零），并且当且仅当 $|a - b| = 1$ 时，有 $\langle a, b\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$。因此，$\mathfrak{A}$ 看起来像一个无限图：

$$\cdots \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \cdots$$

证明存在一个与其初等等价的结构 $\mathfrak{B}$，但它不是连通的。（连通，是指对于 $|\mathfrak{B}|$ 中任意两个元素，存在一条路径连接它们。一条从 a 到 b 的长度为 n 的路径是一个序列 $\langle p_0, p_1, \dots, p_n\rangle$，其中 $a = p_0$ 且 $b = p_n$，并且对于每个 i，都有 $\langle p_i, p_{i+1}\rangle \in P^{\mathfrak{B}}$。）提示：加入常元符号 c 和 d。写出表示 c 和 d 距离很远的句子。应用紧致性。 ◁

to do

4 [Enderton，第 11 题，第 100 页] 对于下列每个关系，在 $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ 中给出一个定义它的公式。（语言被假设包含等号以及参数 $\forall$、$+$、和 $\cdot$。）

1. $\{0\}$.
2. $\{1\}$.
3. $\{\langle m, n\rangle \mid n$ 是m 在$\mathbb{N}$ 中的后继$\}$.
4. $\{\langle m, n\rangle \mid m < n$ 在$\mathbb{N}$ 中$\}$. ◁

Assuming Definability

5 [Enderton，第 6 题，第 146 页] 设 Σ_1 和 Σ_2 是两个句子的集合，且没有模型同时满足 Σ_1 和 Σ_2。证明存在一个句子 τ，使得

$$\text{Mod } \Sigma_1 \subseteq \text{Mod } \tau \quad \text{且} \quad \text{Mod } \Sigma_2 \subseteq \text{Mod } \neg\tau.$$

（这可以表述为：不相交的 EC_Δ 类可以被某个 EC 类区分开。）提示：$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是不可满足的；应用紧致性。 ◁

Assuming Mod