Homework 7

1 [Enderton, ex. 1, 2, 5, p. 17] 在英文和指定的一阶语言之间进行翻译.

(a) Any uninteresting number with the property that all smaller numbers are interesting certainly is interesting. ($\forall$, for all things; N, is a number; I, interesting; $<$, is less than; 0, a constant symbol intended to denote zero.)

(b) There is no number such that no number is less than it. (The same language as in Item a.)

(c) $\forall x(Nx \to Ix \to \neg\forall y(Ny \to Iy \to \neg x < y))$. (The same language as in Item a. There exists a relatively concise translation.)

(d) (i) You can fool some of the people all of the time. (ii) You can fool all of the people some of the time. (iii) You can't fool all of the people all of the time. ($\forall$, for all things; P, is a person; T, is a time; $F\ x\ y$, you can fool x at y. One or more of the above may be ambiguous, in which case you will need more than one translation.) $\triangleleft$

(a) $\forall x(Nx \wedge \neg Ix \wedge \forall y(Ny \wedge y < x \to Iy) \to Ix)$.

(b) $\neg\exists x(Nx \wedge \neg\exists y(Ny \wedge y < x))$.

(c) Any interesting number is less than some interesting number.

(d) (i) Here ambiguity is in that it either says that there are some (fixed) people you can fool all time, or says that at every moment there are (some, not fixed) people you can fool, i.e. either $\exists x(Px \wedge \forall y(Ty \to Fxy))$ or $\forall y(Ty \to \exists x(Px \wedge Fxy))$. (ii) Here ambiguity is in that it either says that you can fool each person at some time (times can be different for different people), or says that at some (fixed) time you can fool everyone (at that specific time): $\forall x(Px \to \exists y(Ty \wedge Fxy))$ or $\exists y(Ty \wedge \forall x(Px \to Fxy))$. (iii) $\neg\forall x(Px \to \forall y(Ty \to Fxy))$.

2 [Enderton, ex. 1, p. 129] 对于一个项 u, 记 u^x_t 为将变量 x 用项 t 代换得到的表达式. 请在不使用单词"replace" 及其同义词的情况下重新表述此定义. $\triangleleft$

对于项 t 和变量 x, 定义映射 $\sigma_{x\mapsto t} : V \to T$, 其中 V 是变量集合, T 是项集合, $\sigma_{x\mapsto t}$ 与恒等映射相同, 但将 x 映到 t. 进一步递归地定义其扩张 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}} : T \to T$:

1. 对每个变量 v, 有 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(v) = h(v)$.
2. 对每个常量符号 c, 有 $\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(c) = c$.
3. 若 $t_1, \ldots, t_n$ 为项且 f 为 n 元函数符号, 则

$$\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\overline{\sigma_{x\mapsto t}}(t_1), \ldots, \overline{\sigma_{x\mapsto t}}(t_n)).$$

3 [Enderton, ex. 9, p. 130]

(a) 请给出两个例子证明, $(\varphi^x_y)^y_x$ 一般并不等于 φ. 第一个例子应说明 x 可能出现在 $(\varphi^x_y)^y_x$ 中而不出现在 φ 的对应位置, 第二个例子应说明 x 可能出现在 φ 中而不出现在 $(\varphi^x_y)^y_x$ 的对应位置.

(b) 证明 *Re-replacement lemma*: 若 y 不出现在 φ 中, 则 x 对 φ^x_y 中的 y 是可替换的, 并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$. $\triangleleft$

(a) $\varphi = P\ y$ (y 在 φ 中自由出现) 与 $\varphi = \forall y\ P\ x$ (y 对 $\forall y\ P\ x$ 中的 x 不可替换).

(b) 我们对 φ 进行归纳证明.

Case 1: 若 φ 为原子式 $P\ t_1, \ldots, t_n$, 则 x 对 φ_y^x 中的 y 是可替换的, 且

$$(\varphi_y^x)_x^y = ((P\ t_1, \ldots, t_n)_y^x)_x^y = P\ ((t_1)_y^x)_x^y, \ldots, ((t_n)_y^x)_x^y = \varphi.$$

Case 2: 设归纳假设成立, 则对于公式构造算子 $\mathcal{E}_\neg$, $\mathcal{E}_\to$ 和 $\mathcal{Q}_i$ (其中 $v_i \neq x$ 且 $v_i \neq y$, 因为 y 不出现在 φ 中), 归纳步骤由定义立即成立.

Case 3: 若 $\varphi = \forall x\ \psi$, 则 $(\forall x\ \psi)_y^x = \forall x\ \psi$, 其中 y 不自由出现, 因而 x 对 $(\forall x \psi)_y^x$ 中的 y 是可替换的. 因此

$$(\varphi_x^y)_y^x = ((\forall x\ \psi)_y^x)_x^y = (\forall x\ \psi)_y^x = \forall x\ \psi = \varphi.$$

Homework 8

1 [Enderton, ex. 4, 7, 10, p. 130] 通过演绎证明:

1. $\vdash \forall x\ \varphi \to \exists x\ \varphi$;
2. $\vdash \exists x(Px \to \forall x\ Px)$;
3. $\{Qx, \forall y(Qy \to \forall z\ Pz)\} \vdash \forall x\ Px$.
4. $\forall x \forall y\ Pxy \vdash \forall y \forall x\ Pyx$. ◁

1. $$\begin{aligned} \vdash \forall x\ \varphi \to \exists x\ \varphi \Leftarrow & \forall x\ \varphi \vdash \exists x\ \varphi && \text{by deduction theorem,}\\ \Leftarrow & \forall x\ \varphi \vdash \neg\forall x\ \neg\varphi && \text{by rewriting,}\\ \Leftarrow & \forall x\ \neg\varphi \vdash \neg\forall x\ \varphi && \text{by contraposition and rule T,}\\ \Leftarrow & \neg\varphi \vdash \neg\forall x\ \varphi && \text{by Ax.2 and MP,}\\ \Leftarrow & \forall x\ \varphi \vdash \varphi && \text{by contraposition and rule T,}\\ \Leftarrow & \vdash \forall x\ \varphi \to \varphi && \text{by MP, which is Ax.2.} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} & \vdash \exists x(Px \to \forall x Px) \\ \Leftarrow & \{\forall x \neg(Px \to \forall x Px)\} \text{ is inconsistent} && \text{by RAA,}\\ \Leftarrow & \forall x \neg(Px \to \forall x Px) \vdash \forall x Px \\ & \wedge \forall x \neg(Px \to \forall x Px) \vdash \neg\forall x Px, \\ & \text{where} \\ & \forall x \neg(Px \to \forall x Px) \vdash \forall x Px \\ \Leftarrow & \vdash \forall x \neg(Px \to \forall x Px) \to \forall x Px && \text{by MP,}\\ \Leftarrow & \vdash \forall x(\neg(Px \to \forall x Px) \to Px) && \text{by Ax.3 and MP,}\\ \Leftarrow & \neg(Px \to \forall x Px) \to Px, && \text{by generalization theorem and MP,}\\ & \text{which is Ax.1, and} \\ & \forall x \neg(Px \to \forall x Px) \vdash \neg\forall x Px, \\ \Leftarrow & \neg(Px \to \forall x Px) \to Px && \text{by Ax.2, which is Ax.1.} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} & \{Qx, \forall y(Qy \to \forall z\ Pz)\} \vdash \forall x\ Px \\ \Leftarrow & \{Qx, \forall y(Qy \to \forall z\ Pz)\} \vdash \forall w\ Pw && \text{by EAV (cf. 2),}\\ \Leftarrow & \{Qx, \forall y(Qy \to \forall z\ Pz)\} \vdash Pw && \text{by generalization theorem,}\\ & \text{which we show directly:} \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} & 1. \vdash \forall y(Qy \to \forall z Pz) \to Qx \to \forall z Pz && \text{Ax.2.}\\ & 2. \{Qx, \forall y(Qy \to \forall z Pz)\} \vdash \forall z Pz && \text{1; ded.}\\ & 3. \vdash \forall z Pz \to Pw && \text{Ax.2.}\\ & 4. \{Qx, \forall y(Qy \to \forall z Pz)\} \vdash Pw && \text{2; 3; MP.} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} & 1. \forall x \forall y Pxy \vdash \forall a \forall b Pab && \text{EAV (cf. 2).}\\ & 2. \forall a \forall b Pab \vdash \forall y \forall x Pyx && \text{EAV (cf. 2).}\\ & 3. \forall x \forall y Pxy \vdash \forall y \forall x Pyx && \text{1; 2; ded; MP.} \end{aligned}$$

2 给出字母变体存在性的完整证明. ◁

Existence of Alphabetic Variants (EAV) 设 φ 为公式, t 为项, x 为变量. 我们可以找到公式 φ' (与 φ 仅在非自由变量的选取上不同) 使得 (a) $\varphi \vdash \varphi'$ 且 $\varphi' \vdash \varphi$, (b) t 对于 φ' 中的 x 可替换.

Proof Sketch. 固定 t 与 x, 对 φ 递归地构造 φ'. 当 φ 为原子式时取 $\varphi' = \varphi$, 并设 $(\neg\varphi)' = (\neg\varphi')$, $(\varphi \to \psi)' = (\varphi' \to \psi')$. 定义 $(\forall y\ \varphi)' = \forall z(\varphi')^y_z$, 其中 z 不出现在 φ', t, x 中. 由归纳假设可得 (b). 对于 (a) 只需证明 $\forall y\ \varphi \vdash \forall z(\varphi')^y_z$. 考虑序列 $\langle \forall y\ \varphi, \forall y\ \varphi', (\varphi')^y_z, \forall z(\varphi')^y_z \rangle$, 除首项外每一项都可由前项推出. 反向推导可用序列 $\langle \forall z(\varphi')^y_z, ((\varphi')^y_z)^z_y, \varphi', \varphi, \forall y\ \varphi \rangle$ 得到. □

3 [Enderton, ex. 15, p. 131] 证明 **规则 EI**: 假设常量符号 c 不出现在 φ, ψ 或 Γ 中, 且 $\Gamma; \varphi^x_c \vdash \psi$. 则有 $\Gamma; \exists x\ \varphi \vdash \psi$, 并且存在一条从 $\Gamma; \exists x\ \varphi$ 推导 ψ 的证明, 其中 c 不出现. (“EI” 表示 “existential instantiation”.) 然后利用该规则证明下列公式均可从 $\emptyset$ 推导:

1. $\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$;
2. $\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$. ◁

Proof. 通过逆否可得 $\Gamma; \neg\psi \vdash \neg\varphi^x_c$. 由常数概括定理, 可从 $\Gamma; \neg\psi$ (不含 c) 推导出 $\forall y((\neg\varphi^x_c)^c_y)$, 其中 y 不出现在 $\neg\varphi^x_c$ 中. 由于 c 不出现在 $\neg\varphi$ 中, 得 $(\neg\varphi^x_c)^c_y = \neg\varphi^x_y$. 再由 3 知 x 对于在 $\neg\varphi^x_y$ 中的 y 是可替换的, 且 $(\neg\varphi^x_y)^y_x = \neg\varphi$, 故 $(\forall y \neg\varphi^x_y) \to \neg\varphi$ 属于 Ax.2, 从而得到 $\forall y \neg\varphi^x_y \vdash \forall x \neg\varphi$. 因此 $\Gamma; \neg\psi \vdash \forall x \neg\varphi$. 再次应用逆否, 证毕. □

1. a. $\vdash \exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta \to \exists x(\alpha \vee \beta)$

$\Leftarrow \exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta \vdash \exists x(\alpha \vee \beta)$	by deduction theorem,
$\Leftarrow \forall x \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \forall x \neg\alpha \wedge \forall x \neg\beta$	by contraposition and Ax.1,
which we show directly:	
1. $\vdash \neg(\alpha \vee \beta)^x_c \to \neg\alpha^x_c$	Ax.1. c does not occur in α or β.
2. $\vdash \forall x \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)^x_c$	Ax.2.
3. $\vdash \forall x \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha^x_c$	1; 2; MP.
4. $\alpha^x_c \vdash \neg\forall x \neg(\alpha \vee \beta)$	3; ded; contraposition.
5. $\exists x \alpha \vdash \neg\forall x \neg(\alpha \vee \beta)$	4; EI.
6. $\forall x \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \forall x \neg\alpha$	5; contraposition.
7. $\forall x \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \forall x \neg\beta$	same as how 6 is deduced.
8. $\forall x \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \forall x \neg\alpha \wedge \forall x \neg\beta$	7; 8; rule T.

b. $\vdash \exists x(\alpha \vee \beta) \to \exists x\alpha \vee \exists x\beta$

$\Leftarrow (\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x\alpha \vee \exists x\beta$ by ded and EI (c does not occur in α or β),

which we show directly:

1.$\forall x \neg\alpha \vdash \neg\alpha^x_c$ Ax.2; ded.

2.$\alpha^x_c \vdash \exists x\alpha$ 1; contraposition.

3.$\alpha^x_c \vdash \exists x\alpha \vee \exists x\beta$ 2; Ax.1; rule T.

4.$\neg(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \vdash \neg\alpha^x_c$ 3; contraposition; Ax.1.

5.$\neg(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \vdash \neg\beta^x_c$ same as how 4 is deduced.

6.$\neg(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta)^x_c$ 4; 5; rule T.

7.$(\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x\alpha \vee \exists\beta$ 6; contraposition.

c. $\vdash \exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$ a; b; rule T.

2. $\vdash \forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$

$\Leftarrow \forall x\alpha \vee \forall x\beta \vdash \forall x(\alpha \vee \beta)$ by deduction theorem,

$\Leftarrow \exists x \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \exists x \neg\alpha \wedge \exists x \neg\beta$ by contraposition and Ax.1,

$\Leftarrow \neg(\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x \neg\alpha \wedge \exists x \neg\beta$ by EI, where c does not occur in α or β,

which we show directly:

1. $\vdash \forall x\alpha \to \alpha^x_c$ Ax.2.

2.$\forall x\alpha \vdash \alpha^x_c$ 1; ded.

3. $\vdash \alpha^x_c \to (\alpha \vee \beta)^x_c$ Ax.1.

4.$\forall\alpha \vdash (\alpha \vee \beta)^x_c$ 2; 3; MP.

5.$\neg(\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x \neg\alpha$ 4; contraposition.

6.$\neg(\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x \neg\beta$ same as how 5 is deduced.

7.$\neg(\alpha \vee \beta)^x_c \vdash \exists x \neg\alpha \wedge \exists x \neg\beta$ 5; 6; rule T.

Homework 9

1 [Enderton, ex. 1, p. 99] 证明: (a) $\Gamma; \alpha \vDash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$, (b) $\varphi \vDash\Dashv \psi$ 当且仅当 $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. $\triangleleft$

(a) $$\begin{aligned}\Gamma; \alpha \vDash \varphi &\Leftrightarrow (\forall \tau\ \tau \in \Gamma; \alpha \to \vDash_{\mathfrak{A}} \tau[s]) \to \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \\ &\Leftrightarrow (\forall \tau\ \tau \in \Gamma \to \vDash_{\mathfrak{A}} \tau[s]) \wedge \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \to \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \\ &\Leftrightarrow (\forall \tau\ \tau \in \Gamma \to \vDash_{\mathfrak{A}} \tau[s]) \to \vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s] \\ &\Leftrightarrow \Gamma \vDash (\alpha \to \varphi).\end{aligned}$$

(b) 在 (a) 中令 $\Gamma = \emptyset$, 得 $\varphi \vDash \psi$ 当且仅当 $\vDash (\varphi \to \psi)$, 同理 $\psi \vDash \varphi$ 当且仅当 $\vDash (\psi \to \varphi)$, 因此命题得证.

注意: 本证明中出现的 $\wedge$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ 只是元推理的简写.

2 证明: 若 x 在 α 中不自由出现, 则 $\alpha \vDash \forall x \alpha$. $\triangleleft$

固定 $\mathfrak{A}$ 与 s. 对每个 $d \in |\mathfrak{A}|$, 赋值 s 与 $s(x|d)$ 在 α 的所有自由变量上一致, 由课件定理 2.17 可得 $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \Leftrightarrow \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$. 于是 $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ 等价于 $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\ \alpha[s]$, 故结论成立.

3 证明: 公式 θ 有效当且仅当 $\forall x \theta$ 有效. $\triangleleft$

固定 $\mathfrak{A}$ 与 s. 若 θ 有效, 则对每个 $d \in |\mathfrak{A}|$ 有 $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta[s(x|d)]$, 这正是 $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\ \theta[s]$. 反过来, 取 $d = s(x)$ 使得 $s(x|d) = s$, 则由 $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\ \theta[s]$ 推得 $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta[s]$. 因此 θ 有效当且仅当 $\forall x \theta$ 有效.

4 通过递归地定义函数 $\bar{h}$, 重新表述"$\mathfrak{A}$ 在赋值 s 下满足 φ", 使得 $\mathfrak{A}$ 在赋值 s 下满足 φ 当且仅当 $s \in \bar{h}(\varphi)$. $\triangleleft$

首先定义 $h : A \to \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|^V)$, 其中 A 为原子公式的集合. 对于 n 元谓词参数 P (若语言含有 $=$, 视其为 2 元谓词),

$$h(P\ t_1 \cdots t_n) = \{s : V \to |\mathfrak{A}| \mid \langle \bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}\}.$$

然后把 h 扩张为以所有公式为定义域的 $\bar{h}$:

1. 对原子式有 $h(\varphi) \subseteq \bar{h}(\varphi)$.
2. $\bar{h}(\neg\varphi) = \{s : V \to |\mathfrak{A}| \mid s \notin \bar{h}(\varphi)\}$.
3. $\bar{h}(\varphi \to \psi) = \bar{h}(\varphi) \cup \bar{h}(\psi)$.
4. $\bar{h}(\forall x\ \varphi) = \{s : V \to |\mathfrak{A}| \mid \text{对于每个} d \in |\mathfrak{A}|, s(x|d) \in \bar{h}(\varphi)\}$.

最终定义

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \text{ iff } s \in \bar{h}(\varphi).$$

5 [Enderton, ex. 9, p. 100] 设语言含有相等符号及二元谓词符号 P. 对下列每一条件, 构造句子 σ, 使得结构 $\mathfrak{A}$ 成为 σ 的模型当且仅当该条件成立.

(a) $|\mathfrak{A}|$ 恰有两个元素.

(b) $P^{\mathfrak{A}}$ 是从 $|\mathfrak{A}|$ 映入 $|\mathfrak{A}|$ 的函数. (函数指单值关系. 若 f 是从 A 到 B 的函数, 则 $\operatorname{dom} f = A$, 而 $\operatorname{rng} f \subseteq B$.)

(c) $P^{\mathfrak{A}}$ 是 $|\mathfrak{A}|$ 的置换, 即 $P^{\mathfrak{A}}$ 是定义域和值域均为 $|\mathfrak{A}|$ 的一一对应函数. $\triangleleft$

1. $\exists a \exists b \forall c(\neg a = b \land (c = a \lor c = b))$.
2. $\forall x \exists y \forall z(P\ xy \land (P\ xz \to y = z))$.
3. $\forall x \exists y \forall z \exists p \forall q \forall r(P\ xy \land (P\ xz \to y = z) \land P\ pq \land (P\ rq \to p = r))$.

Homework 10

1 公理组 3. $\triangleleft$

固定 $\mathfrak{A}$ 与 s, 对每个 $d \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$\begin{aligned}
&(\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x(\alpha \to \beta)[s]) \wedge (\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\ \alpha[s]) \\
\Leftrightarrow&(\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x|d)]) \wedge (\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]) \\
\Leftrightarrow&(\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)] \to \vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x|d)]) \wedge (\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]) \\
\Rightarrow& \vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x|d)] \\
\Leftrightarrow& \vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\ \beta[s].
\end{aligned}$$

于是 $\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\ \alpha\} \vDash \forall x\ \beta$. 这与公理组 3 等价.

2 公理组 4. $\triangleleft$

Cf. 2.

3 公理组 5. $\triangleleft$

固定 $\mathfrak{A}$ 与 s. 有 $\vDash_{\mathfrak{A}} x = x[s]$ 当且仅当 $s(x) = s(x)$, 而这始终成立.

4 公理组 6. $\triangleleft$

设 α 为原子式, α' 由 α 在若干处将 x 替换为 y 得到. 只需证明

$$\{x = y, \alpha\} \vDash \alpha'.$$

取任意 $\mathfrak{A}, s$ 使得

$$\vDash_{\mathfrak{A}} x = y[s], \quad \text{i.e., } s(x) = s(y).$$

则任何项 t 满足: 若 t' 由 t 在若干处把 x 替换为 y 得到, 则 $\bar{s}(t) = \bar{s}(t')$. 这一点显然成立; 完整证明可对 t 做归纳.

若 α 为 $t_1 = t_2$, 则 α' 为 $t_1' = t_2'$, 其中 t_i' 按上述方式由 t_i 得到. 于是

$$\begin{aligned}
\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] &\iff \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2) \\
&\iff \bar{s}(t_1') = \bar{s}(t_2') \\
&\iff \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha'[s].
\end{aligned}$$

同理, 若 α 为 $Pt_1 \cdots t_n$, 则 α' 为 $Pt_1' \cdots t_n'$, 相同的论证亦成立.

Homework 11

1 [Enderton, ex. 4, p. 146] 设 $\Gamma = \{\neg\forall v_1 Pv_1, Pv_2, Pv_3, \dots\}$. 问: Γ 是否一致? Γ 是否可满足? $\triangleleft$

它既一致又可满足. 令 $P^{\mathfrak{A}} = \{v_2, v_3, \dots\}$, 取 $s : V \to |\mathfrak{A}|$ 为恒等映射, 则对所有 $\gamma \in \Gamma$ 有 $\vDash_{\mathfrak{A}} \gamma[s]$.

2 [Enderton, ex. 7, p. 146] 对下列每个句子, 或给出推导, 或给出反例结构 (即使其为假的结构).

(a) $\forall x(Qx \to \forall y\, Qy)$

(b) $(\exists x\, Px \to \forall y\, Qy) \to \forall z(Pz \to Qz)$

(c) $\forall z(Pz \to Qz) \to (\exists x\, Px \to \forall y\, Qy)$

(d) $\neg\exists y\, \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$ $\triangleleft$

(a) 不成立. 取 $|\mathfrak{A}| = \{0, 1\}$ 且 $Q^{\mathfrak{A}} = \{1\}$. 则 $\mathfrak{A}$ 为反例结构.

(b) 可证明, 推导如下:

$$
\begin{aligned}
&\vdash (\exists x Px \to \forall y Qy) \to \forall z(Pz \to Qz) && \\
\Leftarrow\, &\exists x Px \to \forall y Qy \vdash \forall z(Pz \to Qz) && \text{by ded,} \\
\Leftarrow\, &\{\exists x Px \to \forall y Qy, Pz\} \vdash Qz && \text{by gen and ded,}
\end{aligned}
$$

which we show directly:

$$
\begin{aligned}
&1. \forall x \neg Px \vdash \neg Pz && \text{Ax.2; ded.} \\
&2. Pz \vdash \neg\forall x \neg Px && \text{1; contraposition.} \\
&3. \{\exists x Px \to \forall y Qy, Pz\} \vdash \forall y Qy && \text{2; MP.} \\
&4. \vdash \forall y Qy \to Qz && \text{Ax.2.} \\
&5. \{\exists x Px \to \forall y Qy, Pz\} \vdash Qz && \text{3; 4; MP.}
\end{aligned}
$$

(c) 不成立. 取 $|\mathfrak{A}| = \{0, 1\}$ 且 $P^{\mathfrak{A}} = Q^{\mathfrak{A}} = \{1\}$. 则 $\mathfrak{A}$ 为反例结构.

(d) 可证明, 推导如下:

$$
\begin{aligned}
&\vdash \neg\exists y \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) && \\
\Leftarrow\, &\vdash \forall y \neg\forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) && \text{by Ax.1 and MP,} \\
\Leftarrow\, &\vdash \neg\forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) && \text{by gen,}
\end{aligned}
$$

which we show directly:

$$
\begin{aligned}
&1. \vdash \neg(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)^x_y && \text{Ax.1.} \\
&2. \vdash \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) \to (Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)^x_y && \text{Ax.2.} \\
&3. \vdash \neg(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)^x_y \to \neg\forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) && \text{2; Ax.1; MP.} \\
&4. \vdash \neg\forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx) && \text{1; 3; MP.}
\end{aligned}
$$

3 [Enderton, ex. 8, p. 146] 设语言 (含相等) 仅有量词和二元谓词符号 P. 取结构 $\mathfrak{A}$, 其中 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{Z}$, 且 $\langle a, b\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ 当且仅当 $|a - b| = 1$. 因此 $\mathfrak{A}$ 如同一条无限链:

$$\cdots \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \bullet \longleftrightarrow \cdots$$

证明: 存在与 $\mathfrak{A}$ 初等等价但非连通的结构 $\mathfrak{B}$. (连通指对 $|\mathfrak{B}|$ 中任意两点存在路径相连.

长度为 n 的路径 $\langle p_0, p_1, \ldots, p_n \rangle$ 满足 $p_0 = a$, $p_n = b$, 且对每个 i 有 $\langle p_i, p_{i+1} \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$.) 建议: 加入常量符号 c, d, 写句子声明 c, d 距离很远, 再用紧致性. $\triangleleft$

在语言中增添常量 c, d. 对每个整数 $k \geq 0$, 构造句子 λ_k 表示"c 与 d 的距离不是 k". 例如,

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = \neg c = d, \\
&\lambda_1 = \forall p_1 (Pcp_1 \to \neg p_1 = d), \\
&\lambda_2 = \forall p_1 \forall p_2 (Pcp_1 \to Pp_1p_2 \to \neg p_2 = d).
\end{aligned}$$

设 $\Sigma = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. 取 $\Sigma \cup \mathrm{Th}\mathfrak{A}$ 的任意有限子集, 它在某个 $\mathfrak{A}_k$ 中成立, 其中 $|c^{\mathfrak{A}_k} - d^{\mathfrak{A}_k}| > k$. 故由紧致性, $\Sigma \cup \mathrm{Th}\mathfrak{A}$ 有模型

$$\mathfrak{B} = (|\mathfrak{B}|; P^{\mathfrak{B}}, =^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}}, d^{\mathfrak{B}}).$$

记 $\mathfrak{B}_0$ 为去掉新常量后的结构: $\mathfrak{B}_0 = (|\mathfrak{B}|, P^{\mathfrak{B}}, =^{\mathfrak{B}})$. 则 $\mathfrak{B}_0 \models \mathrm{Th}\mathfrak{A}$, 因而 $\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{A}$. 然而 $c^{\mathfrak{B}}$ 与 $d^{\mathfrak{B}}$ 间不存在路径, 故 $\mathfrak{B}_0$ 非连通.

注. 可将 c, d 各自所在的无限链与 $\mathbb{Z}$ 看作三条彼此不连通的链, 它们共同组成 $|\mathfrak{B}|$. 对 $\mathfrak{B}_0$ 的任何有限子结构, 看起来都与 $\mathfrak{A}$ 的某段有限子链相同.

4 [Enderton, ex. 11, p. 100] 在结构 $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ 中 (语言含相等及符号 $\forall, +, \cdot$), 对下列关系给出定义它们的公式.

1. $\{0\}$.
2. $\{1\}$.
3. $\{\langle m, n \rangle \mid n$ 是m 的后继$\}$.
4. $\{\langle m, n \rangle \mid m < n\}$. $\triangleleft$

1. $\forall x\ x + a = x$.
2. $\forall x\ x \cdot a = x$.
3. $\exists y \forall x (x \cdot y = x \wedge n = m + y)$.
4. $\exists y \forall x \exists k (x + y = x \wedge \neg k = y \wedge n = m + k)$.

5 [Enderton, ex. 6, p. 146] 设 Σ_1, Σ_2 为句子集, 且不存在同时满足两者的结构. 证明存在句子 τ 使得

$$\mathrm{Mod}\ \Sigma_1 \subseteq \mathrm{Mod}\ \tau, \quad \text{且} \quad \mathrm{Mod}\ \Sigma_2 \subseteq \mathrm{Mod}\ \neg\tau.$$

(等价表述: 不相交的 EC_Δ 类可以用一条 EC 类分开.) 提示: $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 不可满足, 用紧致性. $\triangleleft$

可设 Σ_1, Σ_2 均可满足 (其余情形显然). 因 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 不可满足, 故其某有限子集 Σ_0 不可满足. 设 α 为 $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ 中句子的合取. 则 $\Sigma_1 \vdash \alpha$. 若 $\Sigma_2 \nvdash \neg\alpha$, 则 $\Sigma_2; \alpha$ 可满足, 这与 Σ_0 不可满足矛盾. 因而 $\Sigma_2 \vdash \neg\alpha$. 取 $\tau = \alpha$, 则满足要求.