

Mathe 1

Tom Haelbich

WiSe2024/25

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin
Angewandte Informatik

Inhaltsverzeichnis

1	Mengenlehre	3
1.1	Element von (\in)	3
1.2	Kein Element von (\notin)	3
1.3	Für alle (\forall)	3
1.4	Es existiert (\exists)	3
1.5	Es existiert genau ein ($\exists!$)	3
1.6	Teilmenge (\subset)	3
1.7	Teilmenge oder gleich (\subseteq)	3
1.8	Vereinigung (\cup)	3
1.9	Durchschnitt (\cap)	4
1.10	Mengendifferenz (ohne) (\setminus)	4
1.11	Potenzmenge (\mathcal{P})	4
1.12	Kartesisches Produkt (\times)	4
1.13	Cardinalität ($ A $)	5
1.14	Mengennotation	5
1.15	Wichtige Mengen	5
1.15.1	Natürliche Zahlen (\mathbb{N})	5
1.15.2	Ganze Zahlen (\mathbb{Z})	5
1.15.3	Reelle Zahlen (\mathbb{R})	5
2	Logik	5
2.1	Und (\wedge)	5
2.2	Oder (\vee)	6
2.3	Nicht (\neg)	6
2.4	Implikation (\implies)	6
2.5	Umkehrimplikation (\impliedby)	6
2.6	Implikation (\rightarrow)	6
2.7	Umkehrimplikation (\leftarrow)	6
2.8	Äquivalenz (\iff)	7
2.9	Logische Äquivalenz (\Leftrightarrow)	7
2.10	Biimplikation (\leftrightarrow)	7
2.11	Folgerung (\vdash)	7

3	Zuweisungen	7
3.1	Definition ($:=$)	7
4	LGS (Lineare Gleichungssysteme)	7
4.1	Begriffe	7
4.2	Gauß-Algorithmus	8
4.3	Mögliche Ergebnisse	8
4.4	Beispiel (Eine Lösung)	8
4.5	Beispiel (Unendlich viele Lösungen mit Parameter t)	9
5	Matritzen und Vektoren	9
5.1	Transponierte Matrix (A^T)	9
5.2	Addition und Subtraktion	10
5.3	Sklarmultiplikation	10
5.4	Sklarprodukt	10
5.5	Linearkombination	10
5.6	Analytische Geometrie	10
5.6.1	Kartesisches Koordinatensystem	10
5.6.2	Addition und Subtraktion	11
5.6.3	Sklarmultiplikation	11
5.6.4	Zeilenbild LGS	12
5.6.5	Spaltenbild LGS	12

1 Mengenlehre

1.1 Element von (\in)

Symbol: \in

Erklärung: Das Symbol \in bedeutet, dass ein Element zu einer Menge gehört.

Beispiel: $3 \in \mathbb{N}$, was bedeutet, dass die Zahl 3 ein Element der natürlichen Zahlen ist.

1.2 Kein Element von (\notin)

Symbol: \notin

Erklärung: Das Symbol \notin bedeutet, dass ein Element nicht zu einer Menge gehört.

Beispiel: $-1 \notin \mathbb{N}$, da -1 keine natürliche Zahl ist.

1.3 Für alle (\forall)

Symbol: \forall

Erklärung: Das Symbol \forall bedeutet *für alle*.

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$

1.4 Es existiert (\exists)

Symbol: \exists

Erklärung: Das Symbol \exists bedeutet *es existiert*.

Beispiel: $\exists x \in \mathbb{N}, x = 0$

1.5 Es existiert genau ein ($\exists!$)

Symbol: $\exists!$

Erklärung: Das Symbol $\exists!$ bedeutet *es existiert genau ein*.

Beispiel: $\exists! x \in \mathbb{N}, x = 0$

1.6 Teilmenge (\subset)

Symbol: \subset

Erklärung: Eine Menge A ist eine *echte Teilmenge* von B , wenn alle Elemente von A auch in B sind, aber $A \neq B$. "Boolischer Ausdruck"

Beispiel: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

1.7 Teilmenge oder gleich (\subseteq)

Symbol: \subseteq

Erklärung: Eine Menge A ist eine *Teilmenge* von B , wenn alle Elemente von A auch in B sind. "Boolischer Ausdruck"

Beispiel: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

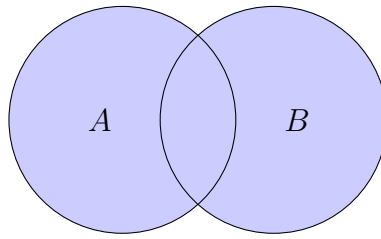
1.8 Vereinigung (\cup)

Symbol: \cup

Erklärung: Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die

in A oder in B sind.

Beispiel: $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

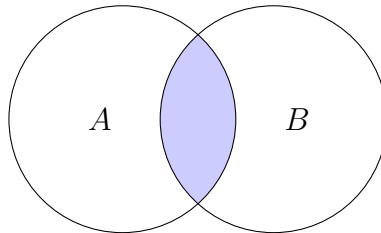


1.9 Durchschnitt (\cap)

Symbol: \cap

Erklärung: Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B sind.

Beispiel: $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

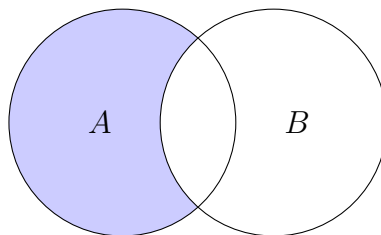


1.10 Mengendifferenz (ohne) (\setminus)

Symbol: \setminus

Erklärung: Die Mengendifferenz $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente, die in A , aber nicht in B sind.

Beispiel: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$



1.11 Potenzmenge (\mathcal{P})

Symbol: \mathcal{P}

Erklärung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A .

Beispiel: Wenn $A = \{1, 2\}$, dann ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1.12 Kartesisches Produkt (\times)

Symbol: \times

Erklärung: Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel: $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

1.13 Cardinalität ($|A|$)

Symbol: $|A|$

Erklärung: Die Anzahl der Elemente in der Menge A .

Beispiel: Wenn $A = \{1, 2, 3\}$, dann ist $|A| = 3$

1.14 Mengennotation

- **Leermenge:** \emptyset
- **Menge mit Elementen:** $A = \{1, 2, 3\}$
- **Menge mit Bedingung:** $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- **Menge als Intervall:** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} = [1, 3[$

Erklärung: Klammer offen weg von der Zahl bedeutet, dass die Zahl nicht in der Menge enthalten ist. Alternativ auch eine runde Klammer.

1.15 Wichtige Mengen

1.15.1 Natürliche Zahlen (\mathbb{N})

Symbol (Ohne Null): \mathbb{N}

Erklärung: Die Menge der natürlichen Zahlen.

Beispiel: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Symbol (Mit Null): \mathbb{N}_0

Beispiel: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1.15.2 Ganze Zahlen (\mathbb{Z})

Symbol: \mathbb{Z}

Erklärung: Die Menge der ganzen Zahlen.

Beispiel: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

1.15.3 Reelle Zahlen (\mathbb{R})

Symbol: \mathbb{R}

Erklärung: Die Menge der reellen Zahlen.

Beispiel: $\mathbb{R} = \{-5, 0.5, \frac{2}{3}, \dots\}$.

2 Logik

2.1 Und (\wedge)

Symbol: \wedge

Erklärung: Das Symbol für die logische Konjunktion (UND).

Beispiel: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$

Negation: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

2.2 Oder (\vee)

Symbol: \vee

Erklärung: Das Symbol für die logische Disjunktion (ODER).

Beispiel: $A \subseteq B \vee B \subseteq C$

Negation: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

2.3 Nicht (\neg)

Symbol: \neg

Erklärung: Das Symbol für die logische Negation (NICHT).

Beispiel: $\neg(A \subseteq B)$

Negation: $\neg\neg A \equiv A$

2.4 Implikation (\implies)

Symbol: \implies

Erklärung: Das Symbol für die logische Implikation (Wenn ... dann).

Beispiel: $x > 2 \implies x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$

2.5 Umkehrimplikation (\impliedby)

Symbol: \impliedby

Erklärung: Das Symbol für die logische Umkehrimplikation (Dann ... wenn).

Beispiel: $x^2 > 4 \impliedby x > 2$

Negation: $\neg(A \impliedby B) \equiv \neg A \wedge B$

2.6 Implikation (\rightarrow)

Symbol: \rightarrow

Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Implikation.

Beispiel: $x > 2 \rightarrow x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

2.7 Umkehrimplikation (\leftarrow)

Symbol: \leftarrow

Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Umkehrimplikation.

Beispiel: $x^2 > 4 \leftarrow x > 2$

Negation: $\neg(A \leftarrow B) \equiv \neg A \wedge B$

2.8 Äquivalenz (\Longleftrightarrow)

Symbol: \Longleftrightarrow

Erklärung: Das Symbol für die logische Äquivalenz (genau dann, wenn).

Beispiel: $x > 2 \Longleftrightarrow x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \Longleftrightarrow B) \equiv A \Longleftrightarrow \neg B$

2.9 Logische Äquivalenz (\Leftrightarrow)

Symbol: \Leftrightarrow

Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Äquivalenz.

Beispiel: $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ ist eine rationale Zahl.

Negation: $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \Leftrightarrow \neg B$

2.10 Biimplikation (\leftrightarrow)

Symbol: \leftrightarrow

Erklärung: Das Symbol für die beidseitige Implikation oder Biimplikation.

Beispiel: $P \leftrightarrow Q$

Negation: $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv A \leftrightarrow \neg B$

2.11 Folgerung (\vdash)

Symbol: \vdash

Erklärung: Das Symbol für die logische Folgerung oder Ableitung.

Beispiel: $P \vdash Q$ bedeutet, dass Q aus P folgt.

3 Zuweisungen

3.1 Definition ($:=$)

Symbol: $:=$

Erklärung: Das Symbol $:=$ bedeutet *ist definiert als*.

Beispiel: $A := \{1, 2, 3\}$

4 LGS (Lineare Gleichungssysteme)

4.1 Begriffe

- **Koeffizient:** Die Zahlen vor den Variablen in einer Gleichung.
- **Pivot:** Der Wert in einer Zeile, der als erstes von Null verschieden ist.
- **Pivotvariable:** Die Variable, die in einer Zeile mit dem Pivotwert steht.
- **Pivotzeile:** Die Zeile in einem LGS, in der der Pivotwert steht.
- **Koeffizientenmatrix:** Die Matrix, die aus den Koeffizienten der Variablen besteht.

- **Erweiterte Koeffizientenmatrix:** Die Matrix, die aus den Koeffizienten der Variablen und den Ergebnissen besteht.

4.2 Gauß-Algorithmus

Videoempfehlung: Gauß Algorithmus – Lineare Gleichungssysteme lösen — Mathema-Trick

- **Schritt 1:** Stelle die Koeffizientenmatrix auf.
- **Schritt 2:** Führe Zeilenoperationen durch, um Nullen unter den Pivotelementen zu erzeugen.
 - Unten links von jedem Pivotwert müssen Nullen stehen.
 - Mit der Linken Seite der Matrix beginnen. Dabei immer die erste Zeile zum verrechnen verwenden.
 - Bei folgenden spalten immer die Zeile mit 0 links neben dem Pivotwert verwenden.
- **Schritt 4:** Rückwärtseinsetzen, um die Lösung zu finden.

4.3 Mögliche Ergebnisse

- **Keine Lösung:** Wenn ein Widerspruch entsteht, z.B. $0 = 1$.
- **Unendlich viele Lösungen:** Wenn mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind. z.B. Letzte Zeile $0 = 0$.
- **Eine Lösung:** Wenn alle Variablen eindeutig bestimmt werden können.

4.4 Beispiel (Eine Lösung)

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform bilden:

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 3 & -1 & 5 & \\ 4 & -1 & 5 & 9 & | II - 2 \cdot I \\ 1 & 2 & 3 & 6 & | 2 \cdot III - I \\ \hline 2 & 3 & -1 & 5 & \\ 0 & -7 & 7 & -1 & \\ 0 & 1 & 7 & 7 & | 7 \cdot III + II \end{array}$$

2	3	-1	5
0	-7	7	-1
0	0	56	48

Rückwärtseinsetzen:

$$56x_3 = 48 \mid : 56 \Rightarrow x_3 = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

$$-7x_2 + 7 \cdot \frac{6}{7} = -1 \Rightarrow -7x_2 + 6 = -1 \Rightarrow -7x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$2x_1 + 3 \cdot 1 - \frac{6}{7} = 5 \Rightarrow 2x_1 + 3 - \frac{6}{7} = 5 \Rightarrow 2x_1 = 5 - 3 + \frac{6}{7} = \frac{32}{7} \Rightarrow x_1 = \frac{16}{7}$$

Lösungsmenge: $\{(\frac{16}{7}, 1, \frac{6}{7})\}$

4.5 Beispiel (Unendlich viele Lösungen mit Parameter t)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 9\end{aligned}$$

erweitere Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 3 & \\ 2 & 4 & -2 & 6 & II - 2 \cdot I \\ 3 & 6 & -3 & 9 & III - 3 \cdot I \\ \hline 1 & 2 & -1 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 - 2t \\ , x_2 &= t \\ x_3 &= t\end{aligned}$$

5 Matritzen und Vektoren

Videoempfehlung: Videoserie 3Blue1Brown - Essence of Linear Algebra 1: Vektoren

5.1 Transponierte Matrix (A^T)

Jede Zeile wird zur Spalte. Die Elemente werden von mit dem Uhrzeigersinn gedreht.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5.2 Addition und Subtraktion

Matritzen (und Vektoren) können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Jedes Element wird mit dem entsprechenden Element der anderen Matrix addiert oder subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

5.3 Sklarmultiplikation

Eine Matrix (oder ein Vektor) wird mit einem Skalar multipliziert.

Jedes Element der Matrix (oder des Vektors) wird mit dem Skalar multipliziert.

Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

5.4 Sklarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

5.5 Liniearkombination

Eine Linearkombination ist eine Summe von Sklarmultiplikationen von Vektoren.

Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5.6 Analytische Geometrie

Die Analytische Geometrie löst geometrische Probleme mit algebraischen Methoden. Bietet aber auch die Möglichkeit, algebraische Probleme verständlich zu visualisieren.

Vektoren werden als Pfeile dargestellt. Der Anfangspunkt ist der Ursprung. Der Pfeil zeigt in die Richtung des Vektors.

5.6.1 Kartesisches Koordinatensystem

- n -dimensionales Koordinatensystem mit n Achsen.
- Achsen schneiden sich im Ursprung.
- Der Schnittpunkt der Achsen ist der Ursprung.

5.6.2 Addition und Subtraktion

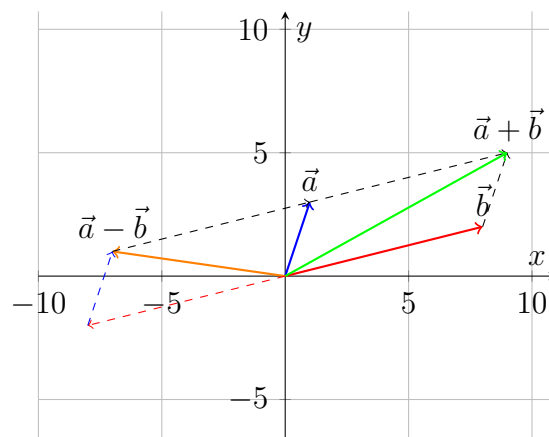
Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} spannen immer ein Parallelogramm mit den Diagonalen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ auf, so lange sie nicht parallel, ein Vielfaches voneinander oder der Nullvektor sind.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoraddition und -subtraktion



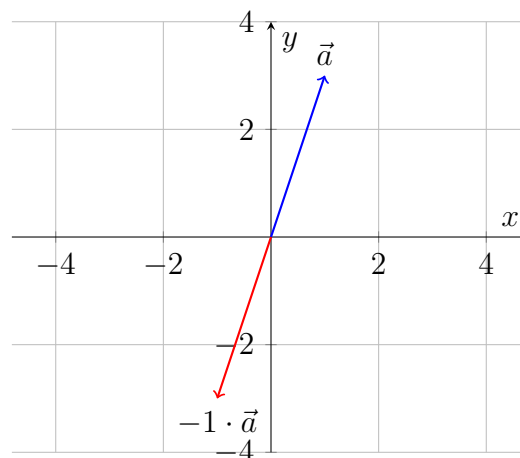
5.6.3 Skalarmultiplikation

Die Skalarmultiplikation eines Vektors \mathbf{a} mit einem Skalar λ verändert die Länge des Vektors, aber nicht die Richtung.

Beispiel:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation



5.6.4 Zeilenbild LGS

Die Zeilen eines LGS können als Vektoren interpretiert werden.

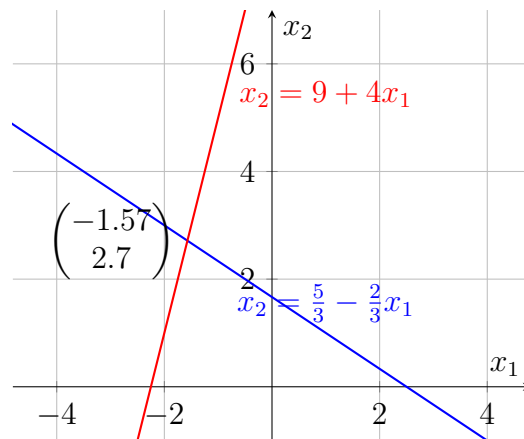
Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Nach x_2 umstellen:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 \\ x_2 &= 9 + 4x_1 \end{aligned}$$

Zeilenbild LGS



Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist die Lösung des LGS.

Lösung: $(x_1, x_2) = (-1.57, 2.7)$

5.6.5 Spaltenbild LGS

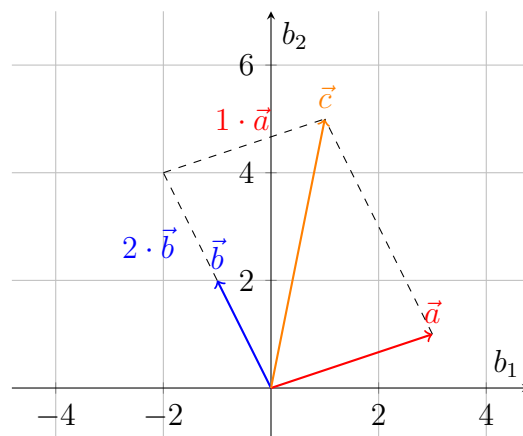
Die Spalten einer Koeffizientenmatrix eines LGS können als Linearkombination dargestellt werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Parallelogramm aufspannen:

Spaltenbild LGS



Aus dem Parallelogramm kann die Lösung des LGS abgelesen werden in dem geguckt wird, wie oft der Vektor \vec{a} und \vec{b} addiert werden müssen, um den Vektor \vec{c} zu erreichen.

$$1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

Lösung: $(x_1, x_2) = (1, 2)$