Mathe 1

Tom Haelbich

WiSe2024/25

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin
Angewandte Informatik

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Element von ($\in$)

Symbol: $\in$
Erklärung: Das Symbol $\in$ bedeutet, dass ein Element zu einer Menge gehört.
Beispiel: $3 \in \mathbb{N}$, was bedeutet, dass die Zahl 3 ein Element der natürlichen Zahlen ist.

1.2 Kein Element von ($\notin$)

Symbol: $\notin$
Erklärung: Das Symbol $\notin$ bedeutet, dass ein Element nicht zu einer Menge gehört.
Beispiel: $-1 \notin \mathbb{N}$, da -1 keine natürliche Zahl ist.

1.3 Für alle ($\forall$)

Symbol: $\forall$
Erklärung: Das Symbol $\forall$ bedeutet *für alle*.
Beispiel: $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$

1.4 Es existiert ($\exists$)

Symbol: $\exists$
Erklärung: Das Symbol $\exists$ bedeutet *es existiert*.
Beispiel: $\exists x \in \mathbb{N}, x = 0$

1.5 Es existiert genau ein ($\exists!$)

Symbol: $\exists!$
Erklärung: Das Symbol $\exists!$ bedeutet *es existiert genau ein*.
Beispiel: $\exists! x \in \mathbb{N}, x = 0$

1.6 Teilmenge ($\subset$)

Symbol: $\subset$
Erklärung: Eine Menge A ist eine *echte Teilmenge* von B, wenn alle Elemente von A auch in B sind, aber $A \neq B$. `"Boolischer Ausdruck"`
Beispiel: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

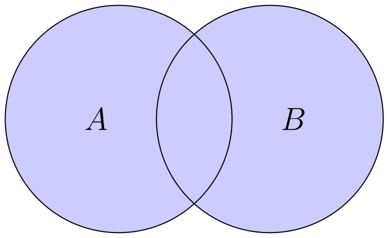
1.7 Teilmenge oder gleich ($\subseteq$)

Symbol: $\subseteq$
Erklärung: Eine Menge A ist eine *Teilmenge* von B, wenn alle Elemente von A auch in B sind. `"Boolischer Ausdruck"`
Beispiel: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

1.8 Vereinigung ($\cup$)

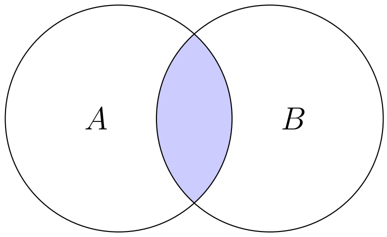
Symbol: $\cup$
Erklärung: Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die

in A oder in B sind.
Beispiel: $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$



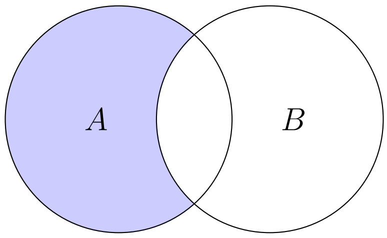
1.9 Durchschnitt ($\cap$)

Symbol: $\cap$
Erklärung: Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B sind.
Beispiel: $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$



1.10 Mengendifferenz (ohne) ($\setminus$)

Symbol: $\setminus$
Erklärung: Die Mengendifferenz $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente, die in A, aber nicht in B sind.
Beispiel: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$



1.11 Potenzmenge ($\mathcal{P}$)

Symbol: $\mathcal{P}$
Erklärung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A.
Beispiel: Wenn $A = \{1, 2\}$, dann ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1.12 Kartesisches Produkt ($\times$)

Symbol: $\times$
Erklärung: Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
Beispiel: $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

1.13 Cardinalität ($|A|$)

Symbol: $|A|$
Erklärung: Die Anzahl der Elemente in der Menge A.
Beispiel: Wenn $A = \{1, 2, 3\}$, dann ist $|A| = 3$

1.14 Mengennotation

- **Leeremenge:** $\emptyset$
- **Menge mit Elementen:** $A = \{1, 2, 3\}$
- **Menge mit Bedingung:** $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- **Menge als Intervall:** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} = [1, 3[$
  Erklärung: Klammer offen weg von der Zahl bedeutet, dass die Zahl nicht in der Menge enthalten ist. Alternativ auch eine runde Klammer.

1.15 Wichtige Mengen

1.15.1 Natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$)

Symbol (Ohne Null): $\mathbb{N}$
Erklärung: Die Menge der natürlichen Zahlen.
Beispiel: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Symbol (Mit Null): $\mathbb{N}_0$
Beispiel: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1.15.2 Ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)

Symbol: $\mathbb{Z}$
Erklärung: Die Menge der ganzen Zahlen.
Beispiel: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

1.15.3 Reelle Zahlen ($\mathbb{R}$)

Symbol: $\mathbb{R}$
Erklärung: Die Menge der reellen Zahlen.
Beispiel: $\mathbb{R} = \{-5, 0.5, \frac{2}{3}, \cdots\}$.

2 Logik

2.1 Und ($\wedge$)

Symbol: $\wedge$
Erklärung: Das Symbol für die logische Konjunktion (UND).
Beispiel: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$

Negation: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

2.2 Oder ($\vee$)

Symbol: $\vee$
Erklärung: Das Symbol für die logische Disjunktion (ODER).
Beispiel: $A \subseteq B \vee B \subseteq C$

Negation: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

2.3 Nicht ($\neg$)

Symbol: $\neg$
Erklärung: Das Symbol für die logische Negation (NICHT).
Beispiel: $\neg(A \subseteq B)$

Negation: $\neg\neg A \equiv A$

2.4 Implikation ($\implies$)

Symbol: $\implies$
Erklärung: Das Symbol für die logische Implikation (Wenn ... dann).
Beispiel: $x > 2 \implies x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$

2.5 Umkehrimplikation ($\impliedby$)

Symbol: $\impliedby$
Erklärung: Das Symbol für die logische Umkehrimplikation (Dann ... wenn).
Beispiel: $x^2 > 4 \impliedby x > 2$

Negation: $\neg(A \impliedby B) \equiv \neg A \wedge B$

2.6 Implikation ($\rightarrow$)

Symbol: $\rightarrow$
Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Implikation.
Beispiel: $x > 2 \rightarrow x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

2.7 Umkehrimplikation ($\leftarrow$)

Symbol: $\leftarrow$
Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Umkehrimplikation.
Beispiel: $x^2 > 4 \leftarrow x > 2$

Negation: $\neg(A \leftarrow B) \equiv \neg A \wedge B$

2.8 Äquivalenz ($\iff$)

Symbol: $\iff$
Erklärung: Das Symbol für die logische Äquivalenz (genau dann, wenn).
Beispiel: $x > 2 \iff x^2 > 4$

Negation: $\neg(A \iff B) \equiv A \iff \neg B$

2.9 Logische Äquivalenz ($\Leftrightarrow$)

Symbol: $\Leftrightarrow$
Erklärung: Ein weiteres Symbol für die logische Äquivalenz.
Beispiel: $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ ist eine rationale Zahl.

Negation: $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \Leftrightarrow \neg B$

2.10 Biimplikation ($\leftrightarrow$)

Symbol: $\leftrightarrow$
Erklärung: Das Symbol für die beidseitige Implikation oder Biimplikation.
Beispiel: $P \leftrightarrow Q$

Negation: $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv A \leftrightarrow \neg B$

2.11 Folgerung ($\vdash$)

Symbol: $\vdash$
Erklärung: Das Symbol für die logische Folgerung oder Ableitung.
Beispiel: $P \vdash Q$ bedeutet, dass Q aus P folgt.

3 Zuweisungen

3.1 Definition (:=)

Symbol: :=
Erklärung: Das Symbol := bedeutet *ist definiert als.*
Beispiel: $A := \{1, 2, 3\}$

4 LGS (Lineare Gleichungssysteme)

4.1 Begriffe

- **Koeffizient:** Die Zahlen vor den Variablen in einer Gleichung.
- **Pivot:** Der Wert in einer Zeile, der als erstes von Null verschieden ist.
- **Pivotvariable:** Die Variable, die in einer Zeile mit dem Pivotwert steht.
- **Pivotzeile:** Die Zeile in einem LGS, in der der Pivotwert steht.
- **Koeffizientenmatrix:** Die Matrix, die aus den Koeffizienten der Variablen besteht.

- **Erweiterte Koeffizientenmatrix:** Die Matrix, die aus den Koeffizienten der Variablen und den Ergebnissen besteht.

4.2 Gauß-Algorithmus

Videoempfehlung: Gauß Algorithmus – Lineare Gleichungssysteme lösen — Mathema-Trick

- **Schritt 1:** Stelle die Koeffizientenmatrix auf.
- **Schritt 2:** Führe Zeilenoperationen durch, um Nullen unter den Pivotelementen zu erzeugen.
- **Schritt 3:** Zeilenstuffenform erreichen.
  - Unten links von jedem Pivotwert müssen Nullen stehen.
  - Mit der Linken Seite der Matrix beginnen. Dabei immer die erste Zeile zum verrechnen verwenden.
  - Bei folgenden spalten immer die Zeile mit 0 links neben dem Pivotwert verwenden.
- **Schritt 4:** Rückwärtseinsetzen, um die Lösung zu finden.

4.3 Mögliche Ergebnisse

- **Keine Lösung:** Wenn ein Widerspruch entsteht, z.B. $0 = 1$.
- **Unendlich viele Lösungen:** Wenn mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind. z.B. Letze Zeile $0 = 0$.
- **Eine Lösung:** Wenn alle Variablen eindeutig bestimmt werden können.

4.4 Beispiel (Eine Lösung)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zeilenstuffenform bilden:

$$\begin{array}{cccc l} 2 & 3 & -1 & 5 & \\ 4 & -1 & 5 & 9 & |II - 2 \cdot I \\ 1 & 2 & 3 & 6 & |2 \cdot III - I \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc l} 2 & 3 & -1 & 5 & \\ 0 & -7 & 7 & -1 & \\ 0 & 1 & 7 & 7 & |7 \cdot III + II \end{array}$$

2	3	−1	5
0	−7	7	−1
0	0	56	48

Rückwärtseinsetzen:

$$56x_3 = 48 | : 56 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

$$-7x_2 + 7 \cdot \frac{6}{7} = -1 \quad \Rightarrow \quad -7x_2 + 6 = -1 \quad \Rightarrow \quad -7x_2 = -7 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$2x_1 + 3 \cdot 1 - \frac{6}{7} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 3 - \frac{6}{7} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 5 - 3 + \frac{6}{7} = \frac{32}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{16}{7}$$

Lösungsmenge: $\left\{\left(\frac{16}{7}, 1, \frac{6}{7}\right)\right\}$

4.5 Beispiel (Unendlich viele Lösungen mit Parameter t)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

erweitere Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Zeilenstuffenform:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 & \\ 2 & 4 & -2 & 6 & |II - 2 \cdot I \\ 3 & 6 & -3 & 9 & |III - 3 \cdot I \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Lösung:
$x_1 = 3 - 2t$
$x_2 = t$
$x_3 = t$

4.6 Rang einer Matrix (LGS in Matrixform)

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Zeilen, die linear unabhängig sind.
Dafür muss die Matrix in Zeilenstuffenform gebracht werden. Der Rang ist dann die Anzahl der Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen.
Beispiele:

$$A : rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad , \quad B : rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

4.7 Defekt einer Matrix (LGS in Matrixform)

Der Defekt einer Matrix ist die Anzahl von freien Variablen, die in dem LGS der Matrix vorkommen.

$n :=$ Anzahl der Spalten
$def(A) := n - rang(A)$

Beispiel mit den Matritzen von oben:
$def(A) = 3 - 2 = 1$
$def(B) = 3 - 3 = 0$

4.8 Lösbarkeit eines LGS

- $rang(A) < rang(A, b)$: LGS ist nicht lösbar.
- $rang(A) = rang(A, b)$: LGS ist lösbar.
- $def(A) = 0$: LGS hat genau eine Lösung.
- $def(A) > 0$: LGS hat unendlich viele Lösungen.

4.9 Lösungsmenge bestimmen

Begriffe:

- **Homogenes LGS:** Ein LGS, bei dem alle Ergebnisse auf der rechten Seite 0 sind.
- **Inhomogenes LGS:** Ein LGS, bei dem mindestens ein Ergebnis auf der rechten Seite ungleich 0 ist.

5 Matritzen und Vektoren

Videoempfehlung: Videoserie 3Blue1Brown - Essence of Linear Algebra 1: Vektoren

Matritzen und Vektoren haben Dimensionen. Die Dimension einer Matrix ist die Anzahl der Zeilen und Spalten. Dies wird Dargestellt als $A \in \mathbb{R}^{Zeilen \text{x} Spalten}$
Die Dimension eines Vektors ist die Anzahl der Elemente.

5.1 Transponierte Matrix (A^T)

Jede Zeile wird zur Spalte. Die Elemente werden von mit dem Uhrzeigersinn gedreht.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5.2 Determinante ($det(A)$)

Die Determinante einer Matrix ist die Hauptdiagonale minus die Nebendiagonale.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

5.3 Addition und Subtraktion

Matritzen (und Vektoren) können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Dimension haben.
Jedes Element wird mit dem entsprechenden Element der anderen Matrix addiert oder subtrahiert.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

5.4 Sklarmultiplikation

Eine Matrix (oder ein Vektor) wird mit einem Skalar multipliziert.
Jedes Element der Matrix (oder des Vektors) wird mit dem Skalar multipliziert.
Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

5.5 Sklarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

5.6 Rang-1-/Äußeres Produkt

Das Rang-1-Produkt zweier Vektoren ist eine Matrix.
Das Rang-1-Produkt funktioniert, grundlegend wie das Skalarprodukt, jedoch werden die Produkte nicht addiert, sondern in eine Matrix geschrieben.

Vorraussetzung: Der erste Vektor ist ein Spaltenvektor und der zweite Vektor ist ein Zeilenvektor.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

5.7 Liniearkombination

Eine Linearkombination ist eine Summe von Skalarmultiplikationen von Vektoren.
Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5.8 Einheitsmatrix (E_n)

Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen 1 sind und alle anderen Elemente 0 sind.
Jede Matrix multipliziert mit der Einheitsmatrix ergibt die gleiche Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

5.9 Analytische Geometrie

Die Analytische Geometrie löst geometrische Probleme mit algebraischen Methoden. Bietet aber auch die Möglichkeit, algebraische Probleme verständlich zu visualisieren.

Vektoren werden als Pfeile dargestellt. Der Anfangspunkt ist der Ursprung. Der Pfeil zeigt in die Richtung des Vektors.

5.9.1 Kartesisches Koordinatensystem

- n-dimensionales Koordinatensystem mit n Achsen.
- Achsen schneiden sich im Ursprung.
- Der Schnittpunkt der Achsen ist der Ursprung.

5.9.2 Addition und Subtraktion

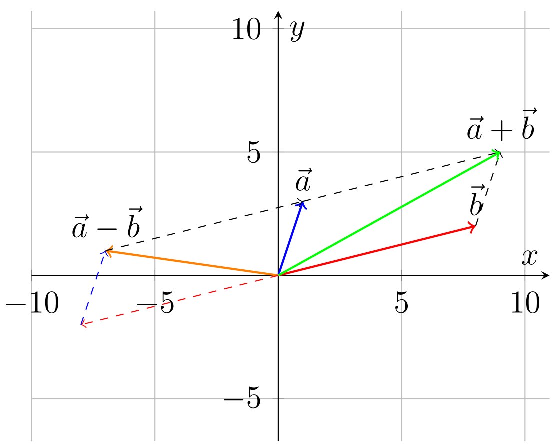
Zwei Vektoren **a** und **b** spannen immer ein Parallelogramm mit den Diagonalen $a+b$ und $a-b$ auf, so lange sie nicht parallel, ein Vielfaches voneinander oder der Nullvektor sind.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoraddition und -subtraktion

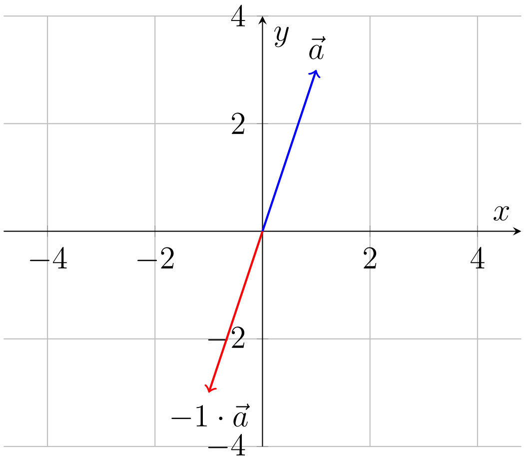


5.9.3 Sklarmultiplikation

Die Skalarmultiplikation eines Vektors **a** mit einem Skalar λ verändert die Länge des Vektors, aber nicht die Richtung.
Beispiel:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sklarmultiplikation



5.9.4 Zeilenbild LGS

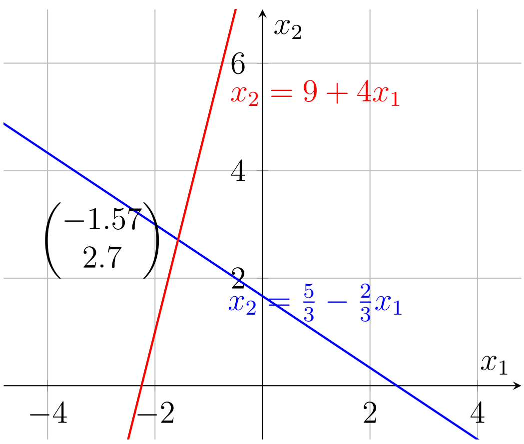
Die Zeilen eines LGS können als Vektoren interpretiert werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Nach x_2 umstellen:

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_1 \\ x_2 &= 9 + 4x_1 \end{aligned}$$

Zeilenbild LGS



Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist die Lösung des LGS.
Lösung: $(x_1, x_2) = (-1.57, 2.7)$

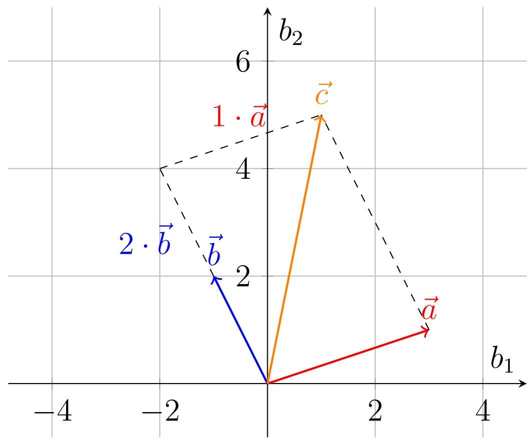
5.9.5 Spaltenbild LGS

Die Spalten einer Koeffizientenmatrix eines LGS können als Linearkombination dargestellt werden.
Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{array} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Parallelogramm aufspannen:

Spaltenbild LGS



Aus dem Parallelogramm kann die Lösung des LGS abgelesen werden in dem geguckt wird, wie oft der Vektor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert werden müssen, um den Vektor $\vec{c}$ zu erreichen.

$$1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

Lösung: $(x_1, x_2) = (1, 2)$

5.10 Matrixmultiplikation

Vorraussetzung: Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix muss der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix entsprechen.

Achtung! Die Reihenfolge der Multiplikation ist wichtig. Matrixmultiplikation ist nicht Kummutativ

Die neue Matrix wird so groß wie die Anzahl der Zeilen der ersten Matrix und die Anzahl der Spalten der zweiten Matrix.
Beispiel:

$$3\text{x}4 \cdot 4\text{x}2 = 3\text{x}2$$

5.10.1 Falk-Schema

Das Falk-Schema ist eine hilfreiche unterstützung bei Matrixmultiplikationen.

$$\begin{array}{cc} A \downarrow B \rightarrow & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

5.10.2 Zeilen-Spalten-weise

Jedes Element der i-ten Zeile der ersten Matrix wird mit jedem Element der j-ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert und aufsummiert. (Sklarprodukt)
Beispiel: $A \cdot B$

$$\begin{array}{cc} A \downarrow B \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} [5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5] & [5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 6] \\ [8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 1 \cdot 5] & [8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 6] \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc} A \downarrow B \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 58 & 76 \\ 40 & 58 \end{pmatrix} \end{array}$$

5.10.3 Spalten-Zeilen-weise

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} - & b_1 & - \\ & \vdots & \\ - & b_n & - \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

`Das Dichte zusammenstehen von` $a_1 b_1 \dots$ `ist keine Klassische Multiplikation, sondern ein Rang-1-Produkt.`

Der i-te Spaltenvektor der ersten Matrix wird mit dem i-ten Zeilenvektor der zweiten Matrix *Rang-1-Produkt* verrechnet.
Dabei entsteht für jedes i eine neue Matrix. Diese Matritzen werden dann addiert.

Beispiel: $A \cdot B$

$$a_1 b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 8 \cdot 1 & 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$a_2 b_2 = \cdots = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 & 6 \cdot 4 \\ 9 \cdot 3 & 9 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 27 & 36 \end{pmatrix}$$

$$a_3b_3 = \cdots = \cdots = \begin{pmatrix} 35 & 42 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 27 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 42 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 76 \\ 40 & 58 \end{pmatrix}$$

5.11 Permutationsmatrix

Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix die mit einer anderen Matrix multipliziert die Zeilen oder Spalten vertauscht.
Wird eine Permutationsmatrix von links mit einer Matrix multipliziert, so werden die Zeilen vertauscht, wird sie von rechts multipliziert, so werden die Spalten vertauscht.
Beispiel (Zeilentausch):

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Spaltentausch):

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix erstellen:
Es wird eine Einheitsmatrix erstellt und dann die Zeilen oder Spalten so vertauscht wie es in der Permutationsmatrix passieren soll.
Beispiel:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 und 2 vertauschen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.12 Eliminationsmatrix

Eine Eliminationsmatrix ist eine quadratische Matrix, die eine andere Matrix in Zeilenstuffenform bringt.
Dabei wird die Eliminationsmatrix von links mit der Matrix multipliziert um Zeilen zu ändern, und von rechts um Spalten zu ändern.
Beispiel (Unteres Dreieck bilden):

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Eliminationsmatrix erstellen:
Die Eliminationsmatrix wird erstellt, indem die Einheitsmatrix genommen wird und dann die Elemente so verändert werden, wie beim Gauß-Verfahren.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die II Zeile soll 4 mal von der I Zeile abgezogen werden.
Dafür wird die Einheitsmatrix genommen und das Element $E_{1,2}$ auf -4 gesetzt.

$$\begin{matrix} E \downarrow A \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -15 & -18 & -21 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

5.13 Inverse Matrix (A^{-1})

Die Inverse einer Matrix ist die Matrix, die mit der ursprünglichen Matrix multipliziert die Einheitsmatrix ergibt.
Nicht jede Matrix ist invertierbar.

Vorraussetzung: $det(A) \neq 0$, Matrix ist Quadratisch

- **Regulär:** Matrix ist invertierbar.
- **Singulär:** Matrix ist nicht invertierbar.
- $A^{-1}A = E_n$
- **Selbstinventierend:** E_n (Einheitsmatrix) und P (Permutationsmatrix) invertiert sich selbst.
- Wenn A invertierbar ist, dann ist A^T auch invertierbar. Dabei gilt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{nxm}$ invertierbar sind, dann ist auch $A \cdot B$ invertierbar. Dabei gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Gauß-Jordan-Verfahren:
Die Matrix A und die Einheitsmatrix E_n werden nebeneinander geschrieben $\begin{pmatrix} A & | & E_n \end{pmatrix}$. Dann wird die Matrix A durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix umgewandelt, dabei werden die gleichen Operationen auf die Einheitsmatrix angewendet. Aus der Einheitsmatrix wird dann die Inverse.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} & A & & & & E_3 & \\ 2 & -1 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ I + II \\ 2 \cdot II - I \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} & A & & & & E_3 & \\ 3 & 0 & 0 & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ | \cdot \frac{1}{3} \\ | \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} & A & & & & A^{-1} & \\ 1 & 0 & 0 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.13.1 2 x 2 Inverse

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$