

# ~ ENERGETICA ~ Appunti COLOMBINI

## ~ INTRODUZIONE ~

Quando si tratta di fisica energetica si parla di uno degli aspetti legati al problema energetico.

In particolare entrammo in gioco un'ampia gamma di fenomeni imerenti la trasformazione, storage ed efficienza energetica.

I fenomeni sono di varia scala: da 1 a  $10^{30}$  eV, da 300 a  $10^8$  K che coprono tutti gli stati della materia da solidi a plasma.

Le fonti primarie di energia sono una dozzina.

Definire l'energia è complicato. Dal dizionario di Oxford:

- Power deni d from physical or chemical resources to provide light and heat or to work machines;
- The property of matter and radiation which is manifest as a capacity to perform work.

Cosa sia esattamente non lo sappiamo. Utile per capire meglio citare Feynman: "The Feynman Lectures on Physics", 1975

Esiste una proprietà, o se preferite, una legge, che governa tutti i fenomeni naturali conosciuti fino ad oggi. Non si conosce eccezione a questa legge, essa è esatta nel limite delle nostre conoscenze.

La legge è chiamata conservazione dell'energia. Essa stabilisce che vi è una certa quantità, che chiamiamo energia, che non cambia nei molteplici mutamenti subiti dalla natura. Il concetto è astratto, poiché si tratta di un principio matematico; esso afferma che esiste una quantità numerica che non cambia qualsiasi cosa

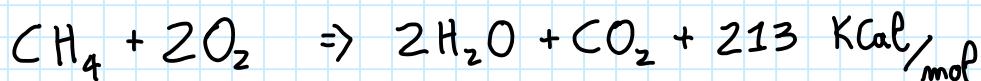
accada. Non è la descrizione di un meccanismo o di un fenomeno concreto, è soltanto il fatto singolare di poter calcolare un numero, e dopo aver osservato i mutamenti capricciosi della natura, ricalcolarlo ottenendo sempre lo stesso risultato.

Possiamo comunque classificare l'energia in varie forme, di cui si iniziò a dare una descrizione nel XVIII secolo:

- CALORE: studiato con la termodinamica;
- CHIMICA: scambiata con reazioni esotermiche ed endotermiche;
- ELETTRICA: trasportata da cariche creando corrente e ddp;
- RADIAZIONE EM: data dai fotoni e dal campo EM;
- NUCLEARE: da forze nucleari;
- MASSA: per la conversione tra massa ed energia;

In sistemi isolati l'energia si trasforma ma rimane costante.

Un esempio è la combustione:



Una parte dell'energia di legame dei reagenti diventa calore

Alla base della termodinamica ci sono vari principi come il II PRINCIPIO:

"È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di calore tratto da una sorgente a temperatura uniforme."

In genere una macchina di Carnot ideale trasferisce calore da una sorgente calda a una fredda producendo lavoro e l'efficienza massima è:

$$\eta = \frac{\text{lavoro svolto}}{\text{energia introdotta}} = \frac{Q_{\text{HOT}} - Q_{\text{COLD}}}{Q_{\text{HOT}}} = \left(1 - \frac{T_{\text{COLD}}}{T_{\text{HOT}}}\right) \quad \left\{ \eta_{\text{Real}} \leq \eta \right.$$

Quanto detto ha varie implicazioni:

- Esiste una gerarchia nelle forme di energia;
- Esiste una direzione della freccia del tempo in quanto i sistemi termodinamici evolvono naturalmente ed irreversibilmente verso la configurazione più disordinata.

Per misurare l'energia esistono molte unità di misura, vediamone alcune.

Dimensionalmente ho:  $ML^2T^{-2}$  (forza \* spostamento)

JOULE (J): 1 J è l'energia di una palla da tennis a 23  $\frac{Km}{h}$

CALORIA (cal):  $1\text{ cal} = 4186\text{ J}$  è l'energia per scaldare 1 g di  $H_2O$  di 1 K

CALORIA (Cal, Kcal):  $1\text{ Cal} = 1000\text{ cal}$ . Usata in alimentazione.

KILOWATTORA (KWh):  $1\text{ KWh} \sim 3,6 \cdot 10^6\text{ J}$

ELETTRONVOLT (eV):  $1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$ . L'energia acquistata da 1 e- a 1 V

Altre unità utili sono:

WATT (W):  $1\text{ W} = 1\text{ J/s}$

BRITISH THERMAL UNIT (BTU):  $1\text{ BTU} = 1055\text{ J}$  è l'energia per scaldare di 1 Fahrenheit una libbra d'acqua

BARILE DI PETROLO (bbl): 42 US gallons ( $\sim 159\text{ l}$ ) = 1700 KWh

CAVALLO VAPORE (Hp).  $1\text{ Hp} = 735\text{ W}$

Vediamo alcune attività e fenomeni:

- Salire le scale  $\sim 375 \text{ W}$  ; • Sopravvivere  $\sim 2400 \text{ Kcal/day}$ ,  $\sim 115 \text{ W}$ ;
- Forno grande  $\sim 10 \text{ KW}$  ; • Nuclear plant  $\sim$  qualche GW
- Radiazione solare  $\sim 10^{26} \text{ W}$

La capacità umana di produrre e consumare energia è variata molto:

Prima del 1000 AC si usavano muscoli, legna per fare fuoco e hand tools. Immagino 3000 Kcal con potenza media di 60 W di sforzo muscolare  $\Rightarrow \eta \sim 17\%$ .

Oggi siamo capaci di usare fino a  $100 \text{ kWh/day}$

Vediamo alcune tecnologie messe a confronto con le relative potenze:

- Mulino (0 AC) 0,2 KW
- Cavallo forte 0,7 KW
- Turbina ad acqua di Fourmeyston 4 KW (1832)
- Turbina a vapore di Parsons  $10^3 \text{ KW}$  (1900)
- Turbina di un Boeing 747  $6 \cdot 10^4 \text{ KW}$  (1969)
- Impianto energetico a carbone  $4 \cdot 10^6 \text{ KW}$  (1986)

In generale si osserva una rapida crescita e non solo nelle potenze sviluppate. Dal punto di vista sociale dal 1790 al 2006 il GDP (prodotto interno lordo) degli USA è cresciuto del  $1,6\%/\text{yr}$  in modo esponenziale, cioè del  $48\%/\text{generation}$

$$F(t) = e^{pt}$$

La crescita esponentiale si ha quando il tasso di incremento di una funzione è proporzionale al valore della funzione stessa.

Cioè è dato dall'eq. differenziale:

$$\frac{df(t)}{dt} = P \cdot f(t)$$

Con soluzione  $f(t) = f_0 \cdot e^{P \cdot t}$ . Ci sono alcune proprietà interessanti di questi andamenti:

- Il tempo in cui una quantità cresce di una data frazione è costante.

Spesso si definisce il tempo di raddoppio  $T_2 = \frac{\ln(2)}{P} \approx \frac{0,7}{P} \Rightarrow \frac{70\%}{\text{Rate}}$

- Sommando i contributi dati nel periodo di raddoppio, il valore è superiore della somma di tutti i termini precedenti

Per esempio se il petrolio consumato raddoppia ogni 10 anni, negli ultimi 10 anni si è usato più petrolio che nel resto del tempo fino a quel momento.

Matematicamente infatti:  $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 2^n - 1 < 2^n$  cioè:

$$\underbrace{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}}_{\text{Passi precedenti}} = (1+2+\cdots+2^{n-1}+1)-1 = 2^n - 1 < 2^n$$

~~~~~  
Ultimo passo

Conoscendo la quantità di una misura è quindi possibile calcolarne la durata temporale trovando l'ultimo passo in cui la misura sarà

disponibile com:

$$f_{\text{TOT}} - f_0 \cdot \sum_{y=0}^{Y_{\text{FIN}}} (1+P)^y > 0$$

Ad oggi noi siamo in continua crescita e globalmente consumiamo 19 TW con una crescita storica del 2% (cioè raddoppio ogni 35 anni)

Con questo tasso:

- Tra 300 anni useremo potenza pari a quella incidente sul suolo terrestre dal Sole;
- Tra 400 quella incidente nell'atmosfera superiore;
- Tra 1400 la potenza emessa dal Sole;
- Tra 2500 quella dell'intera galassia.

È chiaro che le stime sono provocatorie ma rendono l'idea di cosa significhi crescita esponenziale.

In sostanza occorre ridurre la crescita, sia energetica che di popolazione, e in parte sta già accadendo.

Un modello alternativo alla crescita esponenziale è il cosiddetto modello logistico. L'equazione differenziale alla base è:

$$\frac{df}{dt} = P \cdot f \left(1 - \frac{f}{f_{\max}}\right)$$

e si presuppone qui che l'environment abbia risorse per arrivare al massimo fino ad  $f_{\max}$ .

La soluzione è:  $f(t) = \frac{f_{\max}}{1 + \left(\frac{f_{\max} - f_0}{P}\right) \cdot e^{-P \cdot t}}$

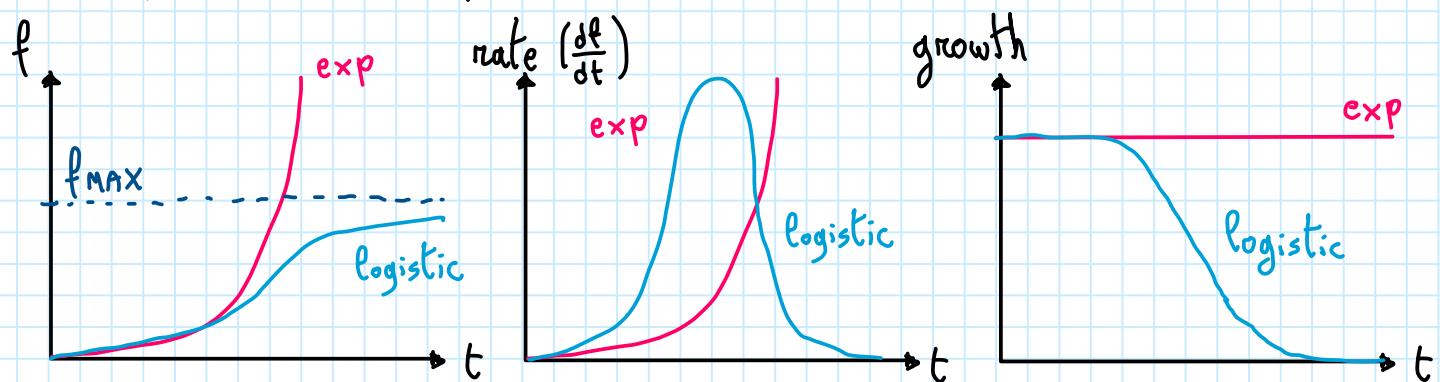
È quindi possibile, conoscendo le risorse totali, dare una stima di  $f_{\max}$  usando il modello malthusiano (esponeenziale) e poi valutare l'andamento logistico.

Questo termine aggiuntivo diventa sempre più importante fino a darre il valore di saturazione asintotica.

Il rate di crescita logistico è una funzione a campana:

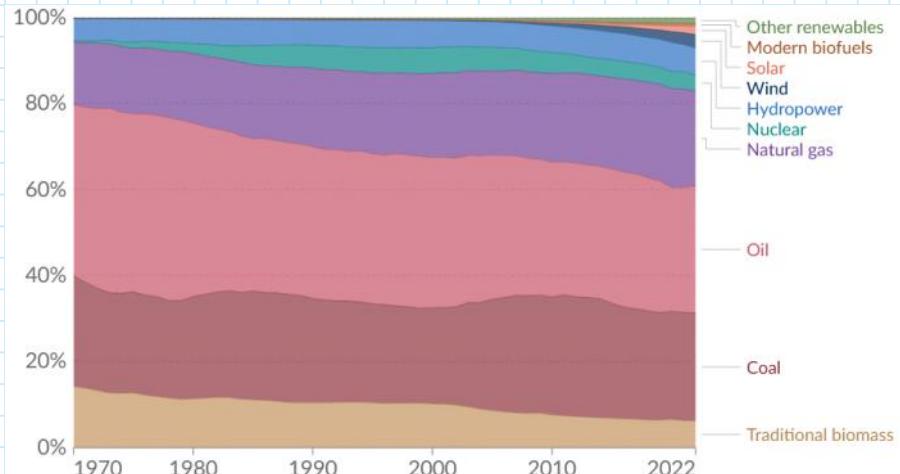
$$\text{rate} \sim \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \quad \text{e la crescita cala con il tempo:}$$

Confronto con l'esponeenziale:



Quindi tornando al problema energetico. Circa l'80% di energia primaria consumata è fossile e l'uso si ripartisce "egualmente" tra:

- trasporti;
- industria;
- civile e terziario.



Source: Energy Institute Statistical Review of World Energy (2023); Vaclav Smil (2017)  
OurWorldInData.org/energy • CC BY

Sono necessari cambiamenti per varie ragioni:

- Incremento della richiesta a causa della crescente popolazione e benessere;
- Impatto ambientale e climatico che si osserva nel global warming;
- Disponibilità limitata delle risorse;
- Dipendenze geopolitiche ed equilibri

È possibile sfruttare fonti alternative, rinnovabili, scalabili, CO<sub>2</sub> "free", ma occorre gestire storage e intermittenza.

Per arrivare alla transizione ci sono molte strade:

- Gestione del livello di popolazione; (politica)
- Accettazione di una minima crescita; (politica)
- Riduzione del rapporto  $\frac{\text{energia usata}}{\text{GDP}}$  es. migliorando l'efficienza; (scienza)
- Riduzione del rate  $\frac{\text{CO}_2 \text{ emessa}}{\text{energia prodotta}}$  (scienza).

In particolare ci occuperemo dell'ultimo punto vedendo come migliorare l'efficienza in conversione, distribuzione e consumo oltre che vedendo le tecnologie rinnovabili e il nucleare.

# Vediamo in seguito un elenco di parole chiave importanti:

- **Capacity factor.** Average annual power output / rated (max) power output
- **Power density.** Continuous power output ( MWe or Gwe ) / used surface
- **Variable sources.** High fluctuations in availability
- **Resource potential.** How much electrical power (or heat) could supply: Technical, Accessible, Economical
- **Carbon emission.** CO<sub>2</sub> emission for 1 kWh electric generated = 1kg for coal and 0.5 kg for gas. Other sources 1 order of magnitude less
- **Levelized cost of energy - LCOE.** cost of produced energy (electrical) in cents kwh 1 taking into account the interest rate of the capital account to build the plant, number of years of operation, maintenance and operation costs, fuel cost.
- **Exergy.** Maximum useful work possible during a process that brings the system into equilibrium with a heat reservoir, reaching maximum entropy. Exergy is the energy that is available to be used. After the system and surroundings reach equilibrium, the exergy is zero.
- **Energy return on investment (EROI).** Ratio of the amount of usable energy (the exergy) delivered from a particular energy resource to the amount of exergy used to obtain that energy resource.

In generale è importante conoscere l'EROI e il LCOE in quanto sono valori determinanti per capire se una fonte è economicamente vantaggiosa: quando l'EROI si avvicina a 1 (il minimo) decresce esponenzialmente il rapporto tra energia utile ottenuta e quella usata per ottenerla.

Le fonti più utili hanno infatti un EROI più alto e in genere se una fonte ha indice minore di 5~7 allora NON è economicamente sostanziale. Vediamo brevemente il confronto tra più risorse:

| Source       | Capacity factor (%) | Power density (MWe per km <sup>2</sup> ) | Life-cycle analysis (gCO <sub>2</sub> per kWh) | Levelized cost (\$cents per kWh) |
|--------------|---------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------|
| Coal         | ~60                 | ~1000                                    | 979                                            | 7–15                             |
| Gas (CCGT)   | ~50                 | ~1000                                    | 477                                            | 5–8                              |
| Nuclear      | ~90                 | ~1000                                    | 12                                             | 10–14                            |
| Solar PV     | ~10–25              | ~5–10                                    | 44                                             | 4–7                              |
| Wind onshore | ~20–40              | ~2                                       | 11                                             | 3–8                              |

|                        | abundance          | difficulty         | intermittency            | demonstrated                | electricity | heat   | transport    | acceptance            | backyard?                  | efficiency  | Score |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|-----------------------------|-------------|--------|--------------|-----------------------|----------------------------|-------------|-------|
| Solar PV               |                    |                    | red                      |                             |             | yellow | via electric | via electric          |                            | green       | 5     |
| Solar Thermal          |                    |                    | some storage             |                             |             |        | via electric |                       | red                        | yellow      | 5     |
| Solar Heating          | yellow             |                    | some storage             |                             | red         | green  | red          |                       | green                      | green       | 4     |
| Hydroelectric          | red                |                    | seasonal flow            |                             |             | yellow | via electric | via electric          | not universal              | micro-hydro | 4     |
| Biofuel/Algae          |                    | gunk/disease       |                          | some R&D                    | mis-spent   |        |              |                       | small scale?               | red         | 4     |
| Geothermal/Electricity | hotspots           |                    |                          |                             |             |        | via electric |                       | red                        | yellow      | 4     |
| Wind                   | yellow             |                    | red                      |                             |             | yellow | via electric | via electric          | noise, birds, eyesore      | green       | 3     |
| Artificial Photosynth. |                    | catalysts          |                          | active devel.               | mis-spent   |        |              |                       | ?                          | yellow      | 3     |
| Tidal                  | red                |                    | daily/monthly variations |                             |             | yellow | via electric | via electric          | red                        | green       | 3     |
| Conventional Fission   | high-tech          |                    |                          |                             |             |        | via electric | waste/fear            |                            | yellow      | 2     |
| Uranium Breeder        | high-tech          |                    |                          | military                    |             |        | via electric | proliferation         |                            |             | 2     |
| Thorium Breeder        | high-tech          |                    |                          | red                         |             |        | via electric | waste/fear            | red                        | yellow      | 2     |
| Geothermal/Depletion   | deep drill         |                    | rarely?                  |                             | red         |        |              | red                   | deep wells                 | impractical | 2     |
| Geothermal/Heating     | yellow             | deep drill         |                          | rarely?                     |             |        |              | red                   | deep wells                 | impractical | 1     |
| Biofuel/Crops          | food<br>cellulosic | annual harvest     | seasonal                 | ethanol, etc.<br>R&D effort | mis-spent   |        |              | food/land competition | small beans                | red         | 1     |
| OceanThermal           |                    | access/maintenance |                          |                             |             | yellow | via electric | via electric          |                            | red         | 1     |
| Ocean Current          |                    | access/maintenance |                          |                             |             | yellow | via electric | via electric          |                            | yellow      | 1     |
| Ocean Waves            |                    |                    | storms/lulls             | many one-off designs        |             | yellow | via electric | via electric          | eyesore                    |             | 1     |
| D-T Fusion             | lithium            | future-tech        |                          | red                         |             |        |              | via electric          | trit/neutron contamination | red         | 1     |
| D-D Fusion             |                    | farther future     |                          | red                         |             |        | via electric |                       | red                        | yellow      | 1     |

|             | abundance | difficulty | intermittency | demonstrated | electricity | heat | transport                     | acceptance | backyard? | efficiency                 | Score |
|-------------|-----------|------------|---------------|--------------|-------------|------|-------------------------------|------------|-----------|----------------------------|-------|
| Petroleum   | for now   |            |               |              |             |      |                               |            |           |                            | 8     |
| Natural Gas | for now   |            |               |              |             |      | buses, trucks<br>via electric |            |           | for heat<br>elec/transport | 8     |
| Coal        | for now   |            |               |              |             |      | via electric<br>trains?       |            |           |                            | 7     |

Confrontando una serie di caratteristiche si può capire se e quanto una risorsa sia da ritenere valida.

Il problema dell'energia è indubbiamente complesso e copre molti campi. Noi da fisici ci occuperemo del mostro.

# ~ RICHIAMI DI TERMODINAMICA ~

Rivediamo alcuni concetti chiave di termodinamica che possono essere utili:

- **Temperatura:** è legata all'energia termica di un corpo ed è proporzionale al moto di atomi e molecole;
- **Equilibrio termico:** si stabilisce tra corpi che eguaggiano la loro temperatura mediante flusso di calore e quindi scambio di energia;
- In generale, eccetto durante i cambiamenti di fase, scambi di calore portano a variazioni di temperatura e vale  $c\Delta T = \Delta Q$  con  $c$  = calore specifico. Nelle transizioni di fase la temperatura rimane costante, si può quindi definire l'energia necessaria per la transizione come **calore latente** e vale  $L_c = \Delta Q_{tr}$ .

Tipicamente il calore specifico ha bassa dipendenza dalla temperatura e il calore latente di evaporazione è un ordine di grandezza maggiore di quello di fusione.

## ~ TRASFERIMENTI DI CALORE ~

I fenomeni di scambio di calore sono sostanzialmente tre:

- **CONDUZIONE:** è il trasferimento di energia termica a causa dell'agitazione termica di atomi e molecole all'interno di un materiale. È quindi un fenomeno collisionale e il passaggio di energia va dalla zona a temperatura maggiore a quella a  $T$  minore

In condizioni stazionarie il rate di calore trasferito è dato dalla legge di Fourier della conduzione:  
 con  $K$  conduttività termica

$$\dot{Q} = KA \frac{(T_1 - T_2)}{d}$$

In condizioni non stazionarie si può definire un tempo caratteristico necessario per arrivare a situazione stazionaria:

$$\tau = -\frac{x^2}{K_t} \quad \text{com} \quad K_t = \frac{K}{\rho c} \quad \text{com} \quad K_t = \text{diffusività termica}$$

$$\rho = \text{densità} \quad c = \text{calore specifico}$$

Alla base di questo trasferimento c'è l'EQ. DI CONDUZIONE DEL CALORE:

$$K_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{é possibile dimostrare come utilizzando le leggi empiricamente verificate come la legge di Fourier}$$

per arrivare a questa equazione. Consideriamo una barra con estremità poste a differenti temperature in condizione isotermica (cioè  $\frac{dT}{dt} = 0$ ). Presi due punti in posizione  $x$  e  $x+dx$  vale:

$$\dot{Q} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \delta x = 0 \Rightarrow \dot{Q} = -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \delta x$$

$$\text{Ricordando l'equazione di Fourier: } \dot{Q} = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

e usando il principio di conservazione dell'energia per il sistema meccanicamente isolato:  $\Delta Q \propto c \Delta T$  quindi vale

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} \delta x = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta x$$

Mettendo tutto assieme ricavo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{K_t} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cerchiamo ora delle soluzioni. Prendiamo la funzione errore

di Gauss:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2} dt$$

consideriamo anche la complementare  $\operatorname{erfc}(y) \stackrel{d}{=} 1 - \operatorname{erf}(y)$ :

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Considero l'isoterma  $T(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{K_t t}}\right)$

Vale che:  $\frac{d}{ds} \int_a^s f(z) dz = f(s)$  e posso scrivere  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$

se  $s = \frac{x}{2\sqrt{K_t t}}$  allora posso scrivere:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \frac{\partial s}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial s}{\partial x} e^{-s^2} \dots$$

Quindi risulta soluzione dell'eq. del calore e, nel caso  $s = \frac{x}{2\sqrt{K_t t}}$

non dimensionale restituisce  $x = \sqrt{K_t t} \Rightarrow t = \frac{x^2}{K_t}$  il tempo caratteristico

• CONVEZIONE: è il trasferimento di calore tra fluidi.

Immaginando di avere due fluidi separati da una barriera avremo lo scambio per convezione ai due lati della barriera e per conduzione al suo interno. Tipicamente la convezione porta ad uno scambio di calore più rapido della conduzione. Ci sono due tipologie:

~ CONVEZIONE NATURALE: Il fluido si muove a causa del galleggiamento. Le porzioni più calde di fluido si muovono verso l'alto e le più fredde verso il basso. In presenza di una parete o zona calda / fredda si instaurano quindi moti convettivi circolari.

~ CONVEZIONE FORZATA: Un meccanismo esterno accelera il moto dei fluidi come una parete ad alta o bassa temperatura o una ventola. Il calore si scambia così più velocemente.

In ogni caso il rate di calore trasferito per unità di area è:

$$\frac{Q}{A} = N_u \frac{K(T_s - T_f)}{D} = h \Delta T \quad \text{con:}$$

- $N_u$ : il numero di Nusselt;
- $K$ : la condutività termica;
- $\Delta T = (T_s - T_f)$ : la differenza di temperatura tra superficie e un punto nel fluido infinitamente distante da essa;
- $D$ : un parametro di lunghezza legato alla geometria del problema; per esempio il raggio di una barra per il trasferimento di calore in un flusso tangenziale.

Concentrandoci sul numero di Nusselt osserviamo che:

$$Nu = \frac{Q/A \text{ convettivo}}{Q/A \text{ conduttivo}} \quad \text{e} \quad Nu = Nu (Pr, Re) \quad \text{cioè dipende da:}$$

$$Pr = \frac{cM}{K} = \frac{\nu}{Kt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Numero di Prandtl legato a viscosità dinamica } (\mu) \\ \text{calore specifico } (c), \text{viscosità cinematica } \nu = \frac{M}{P}, \dots \end{array} \right.$$

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{uD}{\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Numero di Reynolds legato alla velocità del} \\ \text{fluido } u \text{ e alla dimensione del tubo } D. \end{array} \right.$$

Re esprime il rapporto tra rate di trasferimento di momento  $\tau$  e  $L$  alla velocità  $u$ . Aumentando Re il moto è più turbolento.

Vale:

$$Nu = \frac{1}{2} \frac{f \cdot Re \cdot Pr}{1 + 2(Re)^{-1/8} (Pr - 1)} \quad \text{com} \quad f = \text{friction factor}$$

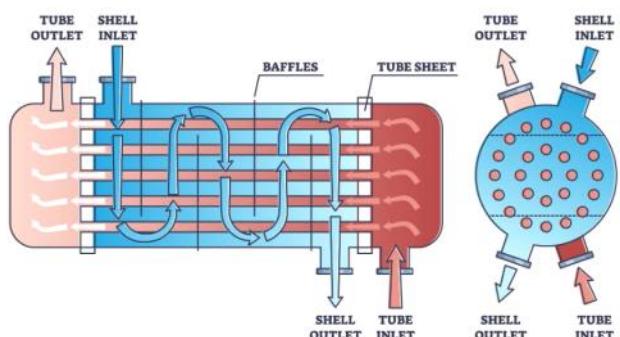
Questa legge empirica descrive lo scambio di calore.

Uno strumento che sfrutta i principi spiegati fin'ora è lo scambiatore di calore: qui un fluido caldo trasferisce calore a uno freddo attraverso uno spessore sottile  $t$ .

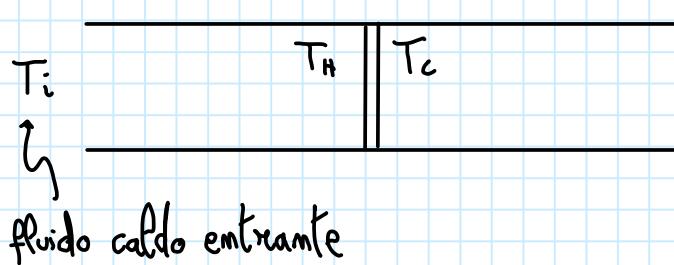
Schematicamente accade:

- I) Convezione nel fluido caldo;
- II) Condizione tramite parete;
- III) Convezione nel fluido freddo.

Quindi il coefficiente di trasferimento del calore avrà 3 componenti:



$h_i$ ,  $\frac{K}{t}$ ,  $h_o$ . Schematizziamo in questo modo:



$$T_i \geq T_H > T_c > T_o$$

↓  
fluido freddo uscente

Il flusso di calore sarà:

$$F = h_i (T_i - T_H) = \frac{K}{t} (T_H - T_c) = h_o (T_c - T_o) \text{ che in totale si potrà}$$

descrivere come:  $h (T_i - T_o) = F$  posso trovare  $h$  essendo:

$$(T_i - T_H) = \frac{F}{h_i}; \quad (T_H - T_c) = \frac{Ft}{K}; \quad (T_c - T_o) = \frac{F}{h_o}$$

$$\text{quindi } (T_i - T_o) = \frac{F}{h} = F \left( \frac{1}{h_i} + \frac{t}{K} + \frac{1}{h_o} \right) \Rightarrow h = \left( \frac{1}{h_i} + \frac{t}{K} + \frac{1}{h_o} \right)^{-1}$$

- **IRRAGGIAMENTO:** Il terzo metodo di trasmissione di calore è l'irraggiamento, cioè la trasmissione mediante radiazione EM. È l'unico metodo che permette la trasmissione di calore in vuoto. Esistono materiali opachi che assorbono, riflettono ed emettono radiazione e materiali trasparenti possono invece trasmettere la radiazione. Una superficie che assorbe la luce di ogni lunghezza d'onda è detta CORPO NERO. In genere questa è una struttura ideale ma una cavità con un piccolo foro approssima bene l'idea. Infatti la radiazione che entra viene assorbita dalla parete interna perché è molto difficile che esca.

Qui l'assorbimento è quasi unitario:  $\alpha = \text{Abs} \approx 1 \Rightarrow R + T \approx 0$

Per misurare l'energia emessa/assorbita per unità di superficie e di tempo da una superficie a temperatura  $T$  è dato dalla

LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN:

$$P_{EM} = \epsilon \sigma T^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \\ \epsilon \text{ emissività, } 0 \leq \epsilon \leq 1 \end{array} \right.$$

coefficiente di Boltzmann

$\epsilon = 1$  nel corpo nero

$\epsilon = 0$  nel corpo bianco

In generale l'emissione di corpo nero ha intensità legata alla lunghezza d'onda e alla temperatura.

Il picco in emissione è inversamente proporzionale a  $T$  e il comportamento è descritto da varie leggi:

$$\bullet \text{ LEGGE DI PLANCK: } I(v, T) = \frac{2hv^3}{c^2 (e^{\frac{hv}{kT}} - 1)}$$

descrive lo spettro  
di emissione

$$\bullet \text{ LEGGE DI RAYLEIGH-JEANS: } I_{RJ}(v, T) = \frac{2K_B T v^2}{c^2} \quad \text{è un'approssimazione per basse frequenze}$$

$$\bullet \text{ LEGGE DI WEIN: } I_w(v, T) = \frac{2hv^3}{c^3} e^{-\frac{hv}{k_B T}} \quad \text{è un'approssimazione ad alte frequenze}$$

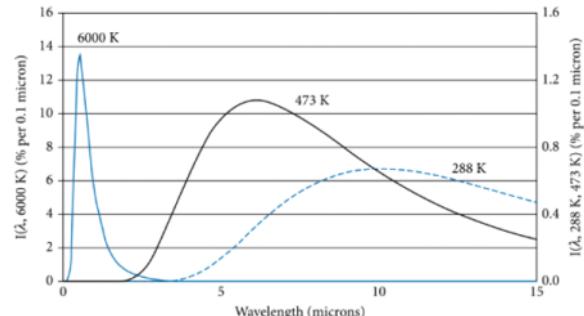


Fig. 2.1 Black-body spectra for  $T = 6000$  K, 473 K, and 288 K.

## ~ EMISSIVITÀ e ASSORBIMENTO :

In genere posso descrivere le proprietà di una superficie con due funzioni legate a  $\lambda$  e  $T$  t.c.  $E_\lambda = \alpha_\lambda$  cioè la porzione di luce a lunghezza d'onda  $\lambda$  emessa per radiazione da un corpo a temperatura  $T$  rispetto all'emissione di corpo nero è uguale alla frazione di luce assorbita rispetto a quella incidente. Cioé:

$$\frac{I_{\text{EMESSA}}}{I_{\text{CORPO NERO}}} = \frac{I_{\text{ASSORBITA}}}{I_{\text{INCIDENTE}}}$$

Esempi sono:

- pareti bianche hanno  $\alpha_\lambda = 0$  nel visibile;
- pareti nere hanno  $\alpha_\lambda = 1$  nel visibile;
- pannelli fotovoltaici hanno  $\alpha_\lambda = 1$  in UV-VIS e  $E_\lambda \approx 0$  nell'IR per non riacettare

Vale però sempre  $\alpha + \tau + \rho = 1$  e nei corpi opachi  $\alpha + \rho = 1$

Il corpo nero è chiaramente un'approssimazione, in genere i corpi sono CORPI GRIGI. Per loro il bilancio in potenza è:

$$P = P_{\text{emessa}} - P_{\text{assorbita}} = E \sigma T^4 - E_0 \sigma T_0^4 \quad \text{con} \quad \alpha_0 = \varepsilon_0 = \alpha_T$$

$$\text{ma } \varepsilon_0 \neq E$$

Immaginiamo infatti che un corpo opaco a temperatura  $T$  assorba radiazione dall'ambiente a temperatura  $T_0$ . L'emissione sarà data dall'emissività della temperatura del corpo mentre l'assorbimento da quella ambientale.

## ~ BILANCIO RADIATIVO TERRESTRE ~

L'irraggiamento del Sole ha effetti sulla Terra quindi capiamo qual è la potenza che arriva alla Terra. La potenza incidente per metro quadro all'equatore è la costante solare. Per ottenerla occorre conoscere:

- la potenza emessa dal Sole: un corpo nero a  $T \sim 5800\text{K}$  e di raggio  $7 \cdot 10^8\text{m}$ .

$$P = \sigma \epsilon T^4 \cdot S = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 1 \cdot (5800\text{K})^4 \cdot 4\pi (7 \cdot 10^8\text{m})^2$$

$$\Rightarrow P \sim 3,95 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

- Occorre poi capire la porzione che giunge alla Terra, che per il Sole occupa un angolo solido di  $\Omega \sim \frac{1}{4\pi d_{TS}} = 3,54 \cdot 10^{-24} \text{ m}^{-2}$

dove  $d_{TS} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Km}$  (distanza Terra-Sole)

quindi  $P\Omega = 1,4 \text{ KW m}^{-2}$

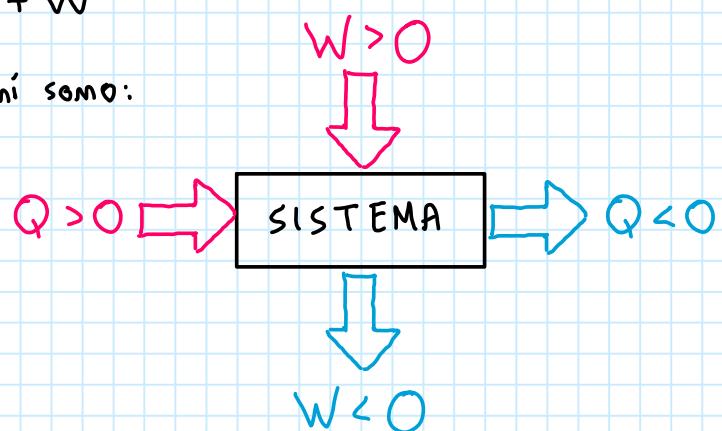
# ~ TERMODINAMICA ~

In generale le leggi della termodinamica servono ai nostri scopi per valutare l'efficienza degli impianti termici senza conoscere in dettaglio il flusso di fluidi e i processi di trasferimento di calore. Facciamo quindi ripasso.

## ~ PRIMA LEGGE DELLA TD ~

Consideriamo un sistema di volume  $V$ . Il calore ENTRANTE nel sistema è  $Q$  e il lavoro esercitato SUL sistema  $W$ , allora la variazione dell'energia interna del sistema è:  $\Delta U = Q + W$

Convenzionalmente (per noi) i segni sono:



Il nostro scopo è quello di capire come convertire in modo efficace calore in lavoro in una centrale termoelettrica e di stimarne l'efficienza partendo da alcuni cicli ideali.

Occorre per questa conversione un fluido detto DI LAVORO e si sfrutterà un ciclo chiuso che coinvolge anche passaggi di stato per riusare il fluido.

Spesso l'acqua è un fluido di lavoro in impianti a vapore e i passaggi coinvolgono un ciclo tipo: acqua liquida  $\rightarrow$  acqua + vapore  $\rightarrow$  vapore secco  $\rightarrow$  liquido...

Per la disponibilità, l'alto calore specifico e alto calore latente di vaporizzazione che consentono trasferimento efficace di calore l'acqua è comune sia per raffreddare che per riscaldare.

Schematicamente gli elementi di una thermal power plant

sono:

- compressore: also known as boiler feed pump. Compie lavoro sul sistema comprimendo l'acqua fredda da pressione atmosferica ad alta pressione;

- boiler: Scalda l'acqua trasformandola in vapore;
- turbina: Il vapore caldo muove la turbina compiendo lavoro;
- condensatore: Il vapore viene raffreddato tornando liquido.

A questo punto siamo interessati all'efficienza del processo. Considerando che l'energia interna rimane invariata dopo un ciclo intero e usando la I T D L A W:  $\Delta U = 0 = Q + W = (Q_1 + Q_2) + (W_{com} + W_1)$

L'efficienza vale, per definizione:

$$\eta = -\frac{W}{Q_1} = -\frac{W_{con} + W_1}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{-Q_2}{Q_1}$$

cioè  $\eta = 1 - \frac{\text{calore uscente dal condensatore}}{\text{calore entrante del boiler}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 < 0 \\ \eta < 1 \end{array} \right.$$

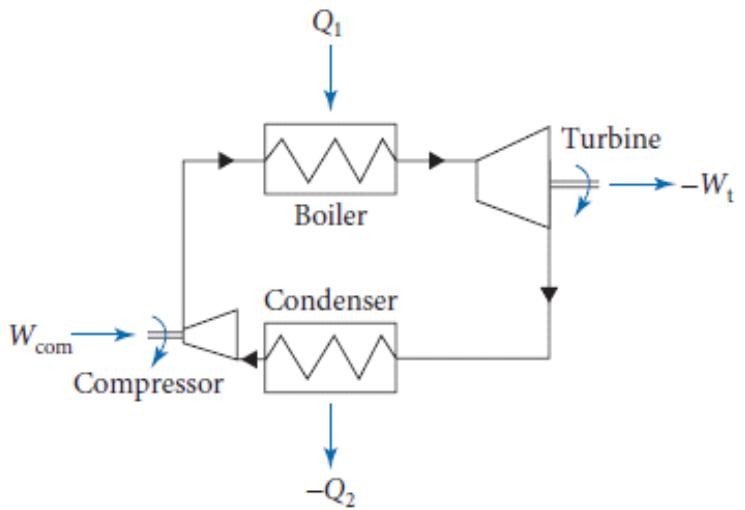


Fig. 2.5 Layout of thermal power plant.

Questo è un valore LIMITE IDEALE, ci sarà comunque sempre una dispersione del calore del fluido nell'ambiente.

È utile qui enunciare la SECONDA LEGGE DELLA TD:

Non è possibile creare una macchina a ciclo chiuso il cui unico risultato sia convertire tutto il calore assorbito da un singolo reservoir in lavoro.

La massima efficienza dipende solo dalle temperature assolute degli ambienti che si scambiano calore secondo la legge:  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

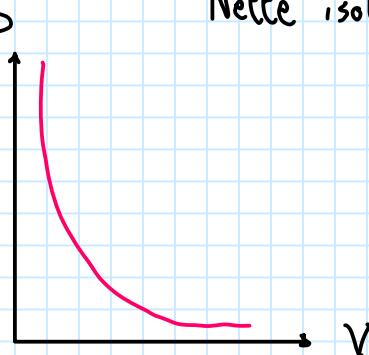
Vediamo come ottenerne questa efficienza analizzando prima alcune trasformazioni dei gas ideali e poi il CICLO DI CARNOT.

### ~ Trasformazioni di GAS IDEALI ~

In un gas perfetto vale  $PV = mRT$  con  $R = N_A K_B$

Vediamo alcune trasformazioni che coinvolgono i gas.

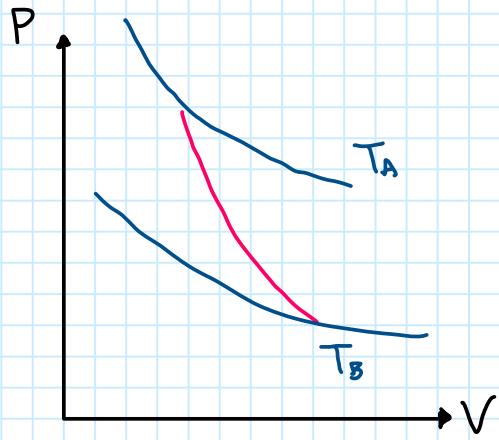
- **ISOTERMA:** Nelle isotermie  $T = \text{cost.}$  essendo  $U \equiv U(T)$   $\Delta U = 0$  quindi  $Q = W$ . In generale  $P_A V_A = P_B V_B$  (SLIDE 35 SOSTENIBILITÀ).



$$\text{Se ideale } P(V) = \frac{mRT}{V}$$

$$\text{e } W(T=\text{cost.}) = \int_A^B P dV = mRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = mRT \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

• Adiabatica: Nell'adiabatica reversibile ( $\Delta S=0$ )  $dQ=0 \Rightarrow -dW=dU$



$$dU = m c_v dT \quad -dW = P dV = \frac{mRT}{V} dV$$

$$\Rightarrow c_v \frac{dT}{T} = -\frac{R dV}{V}$$

$$R = c_p - c_v$$

(da I princ. su)  
isobaria

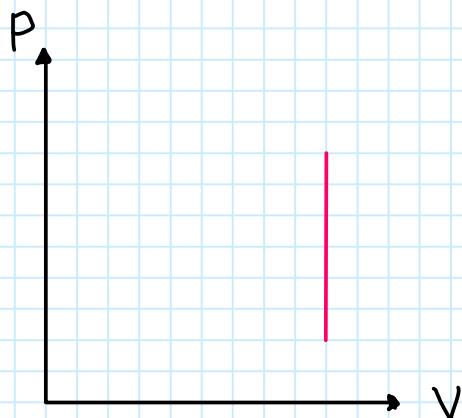
$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -\left(\frac{c_p - c_v}{c_v}\right) \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \Rightarrow \log\left(\frac{T_A}{T_B}\right) = \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost.} \quad \text{e} \quad PV = mRT \quad \text{quindi}$$

$$PV^\gamma = \text{cost.} \quad \circ \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cost.}$$

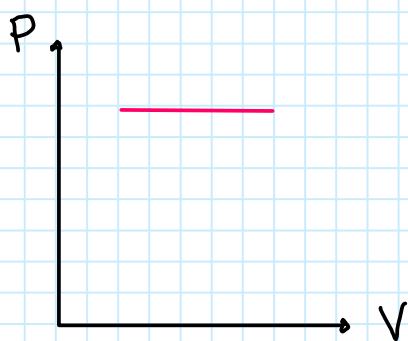
• Isocore: A volume costante. Esseendo  $W = PdV \Rightarrow dW = 0$



$$dU = dQ$$

$$\Delta U = m c_v \Delta T$$

• Isobare: La pressione è costante.  $PV = mRT \Rightarrow P = mR \frac{T}{V}$

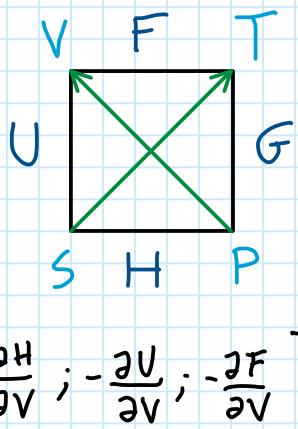


$$\text{quindi} \quad \frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B} \quad mRT \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$W = PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{V} dV = mRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

## ~ QUANTITÀ di interesse ~

Ci sono alcune grandezze rappresentative del sistema descritte dal quadrato termodinamico. "Una volta facevo tanti giochi poi ho smesso".



$$dE = dQ + dW = TdS - PdV \quad (+ N dN)$$

$$F(T, V, N) = E - TS$$

$$H(S, P, T) = E + PV$$

$$G(T, P, N) = E - TS + PV = F + PV$$

$$\text{es. } P = \frac{\partial H}{\partial V}; -\frac{\partial U}{\partial V}; -\frac{\partial F}{\partial V}$$

Cerchiamo di dire qualcosa su ognuno di questi potenziali termodinamici

- ENERGIA INTERNA) \* dipende solo dalle variabili termodinamiche

È una funzione di stato\* che dipende dalla temperatura e ha la legge:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \text{ Con isocora + isoterma.}$$

$$\Delta U = mc_v \Delta T$$

Riflette com il  $c_v$  i legami chimici

- ENTALPIA)  $H = U + PV$  descrive il calore assorbito in trasformazioni isocore.

I) In combustione a  $P$  costante :  $dU = dQ - PdV$  e  $dH = dU + PdV = dQ$

II) In adiabatiche (compressioni o espansioni) :  $dH = dU + PdV + VdP$  } se  $P$   
(es. il lavoro in turbine o compressori)  $dU = dQ - dW$  } costante  
 $dU + dW = 0$  }  $dH = dW$

• ENTROPIA) descritta come viene dispersa l'energia in un sistema.  $dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}}$

Si distinguono i processi in:

I) REVERSIBILI: Il sistema può tornare allo stato iniziale;  $dS \geq 0$

II) IRREVERSIBILI: sistema + ambiente non tornano allo stato iniziale

Microscopicamente  $S = k \ln(\Omega)$  con  $\Omega = \# \text{ stati possibili}$

$$U = \sum_i m_i E_i \Rightarrow dU = \sum dm_i E_i + \sum dE_i m_i = dQ + dW = TdS + dW$$

$\Delta S > 0 \quad \Delta S = 0$

• ENERGIA DI GIBBS) utile per trasformazioni chimiche a (P,T) costanti.

In processi chimici  $\Delta S = \Delta S_{\text{SIST}} + \Delta S_{\text{AMB}}$

Se la pressione è costante  $dU = dQ - PdV \Rightarrow dQ = dH = TdS$

$$\Rightarrow dS_{\text{SIST}} = + \frac{dH}{T} \quad \text{quindi} \quad TdS_{\text{SIST}} - dH > 0$$

Ma  $dG = dH - TdS \Rightarrow dG < 0$  a (T,P) costante

È il massimo lavoro non espansivo estraibile da sistemi.

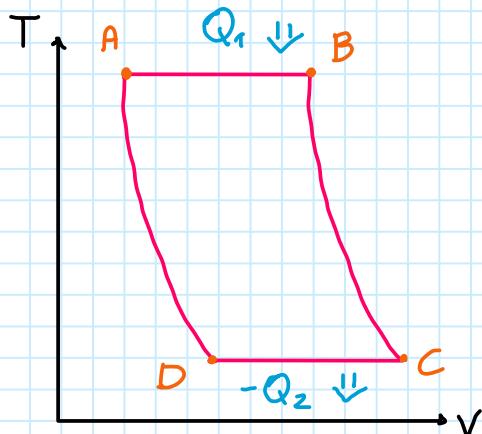
•  $dH < 0$  reazione ESOTERMICA SPONTANEA

•  $dH > 0$  reazione ENDOTERMICA NON SPONTANEA

• EXERGIA: è un'altra quantità è il massimo lavoro disponibile.

## ~ CICLI TERMODINAMICI ~

- Ciclo di CARNOT)



I passaggi del ciclo sono:

- AB) Espansione isotermica reversibile.

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta Q = W_{AB} \sim m R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trascuro dP

- BC) Espansione ADIABATICA reversibile

$$\Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta U = m c_v \Delta T = - P \Delta V = - \frac{m R T}{V} \Delta V$$

- CD) Compressione isotermica con  $-Q_2 = m R T_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$

- DA) Compressione adiabatica con  $c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = -R \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)$

Il rendimento è:

$$\eta_{CARNOT} = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)}$$

Ma nelle ADIABATICHE  $T V^{r-1} = \text{cost.}$

quindi:  $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Macchine a ciclo di Carnot hanno:

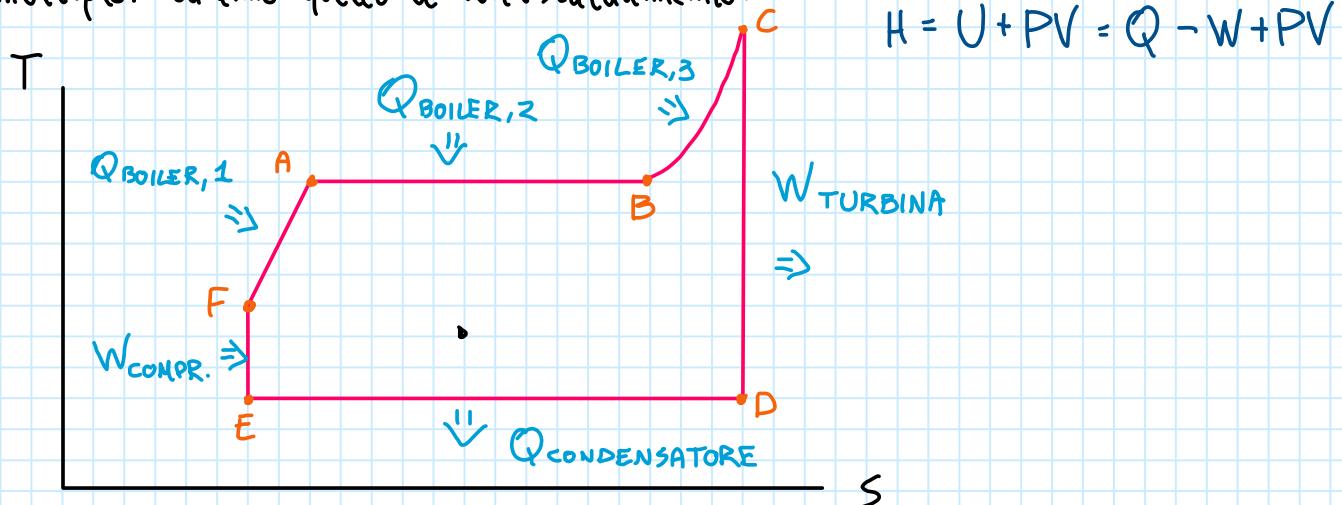
- Compressore, condensatore, turbina, boiler

PROBLEMI:

- Le isoterme ci sono solo nei passaggi di stato, quindi devo lavorare a pressioni controllate;
- Il fluido misto danneggia le turbine quanto più è liquido;  $\eta_c \sim 0,52$
- Il compressore deve gestire grandi volumi.

• CICLO RANKINE) A differenza del ciclo di Carnot qui l'acqua è condensata completamente quindi la compressione adiabatica (isentropica) avviene nel fluido in fase liquida.

Il ciclo RANKINE può essere: semplice, con surriscaldamento, con surriscaldamento a multiplo. Vediamo quello a surriscaldamento:



• AB) espansione isoterma e isobara (passaggio di fase con boiler)

• BC) espansione isobara del vapore (si alza T)

• CD) espansione adiabatica del vapore (abbasso P e T, alto V)

• DE) condensazione totale del vapore a pressione costante

• EF) compressione adiabatica del liquido (alto P, T abbasso V)

• FA) Riscaldamento isobaro dell'acqua

$$\eta_{RAN} \sim 1 - \frac{Q_{CON}}{Q_{BOIL}} \sim 0,42$$

Quindi gli elementi il gioco sono:

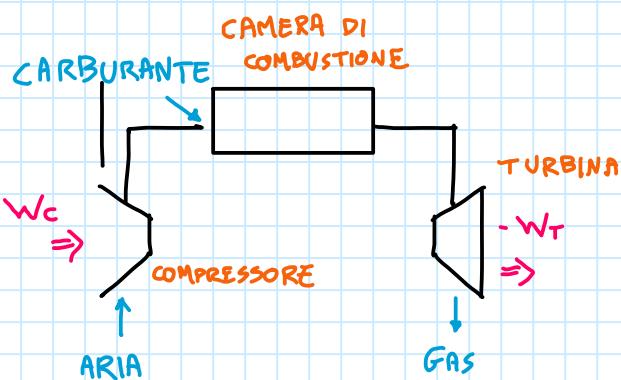
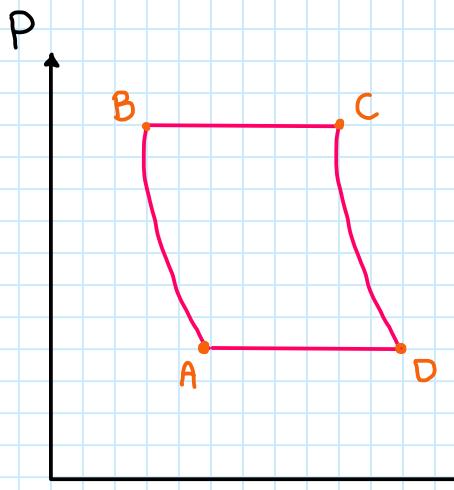
• BOILER) Esegue isobara con quindi  $Q = \Delta H = h_C - h_F$

• TURBINA) Esegue adiabatica quindi  $Q=0 \quad W_T = \Delta H = h_D - h_C$

• CONDENSATORE) Esegue isobara quindi  $-Q = \Delta H = h_E - h_D$

• COMPRESSORE) A lavoro trascurabile.

- CICLO BRYTON A GAS) È il primo dei cicli aperti che vedremo.



Non ho passaggi di fase e arrivo fino a  $1300^{\circ}\text{C}$ .

- AB) Compressione adiabatica.  $\Delta Q = 0 \Rightarrow dU + PdV = 0 \Rightarrow mC_v dT + PdV = 0$

dalla legge dei gas  $PV = mRT \Rightarrow mC_v dT = -\frac{mRT dV}{V} \quad R = C_p - C_v$

$$\frac{C_v}{C_p - C_v} \cdot \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -(\gamma - 1) \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} = \text{cost.} \quad \text{ma} \quad PV = mRT \Rightarrow$$

$$TV^{\gamma-1} = T \cdot T^{\gamma-1} \cdot P^{1-\gamma} = \text{cost} \Rightarrow T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{cost}$$

quindi  $T = A \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

- BC) Ho un'espansione isocora a causa della combustione in cui si cede calore al sistema;

- CD) La turbina si aziona a causa di un'espansione adiabatica

- DA) Una compressione isobara per lo scambio con l'ambiente del gas esaurito chiude il ciclo.

Per vedere l'efficienza del ciclo considero:  $\Delta U = 0$  quindi

$$\Delta Q = -\Delta W \quad \text{Ho delle isobare quindi}$$

↓                   ↑  
 calore              lavoro  
 aggiunto            del sistema

$$\eta = \frac{-\Delta W}{Q_1} = \frac{\Delta Q}{Q_1} = \frac{(T_c - T_B) - (T_D - T_A)}{(T_c - T_A)}$$

Ma dalle adiabatiche ho:

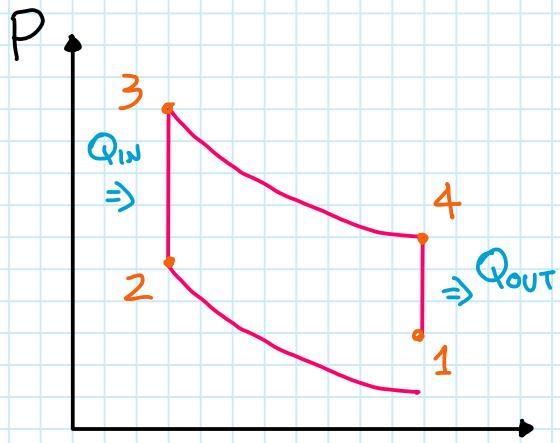
$$\frac{T_A}{T_B} = \left( \frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{e} \quad \begin{cases} P_B = P_C \\ P_A = P_D \end{cases} \quad \text{dalle isobare quindi}$$

$$\eta = [\dots] = 1 - \eta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{P_B}{P_A} < 1 \quad \eta \approx 0,4$$

Questo ciclo ha pro e contro:

- Ottimo rapporto peso - potenza;
- Adatto all'uso prolungato;
- Richiede poche componenti meccaniche mobili  $\Rightarrow$  basso deterioramento;
- Usa grandi masse d'aria quindi emetto meno gas tossico di cicli a motore std;
- Produce gas caldi rilasciati nell'ambiente che possono fare danni o essere sfruttati in cicli combinatori;
- Richiedono materiali resistenti alle alte  $T$ ;
- Serve tempo per entrare a pieno regime e a basso regime l'efficienza cala molto.

• (CICLO OTTO) Il ciclo Otto ideale del motore è:



- 1 → 2) Compressione adiabatica da parte del pistone (calo  $P, T$  fino a soglia critica);
- 2 → 3) Riscaldamento isocoro (scintilla, combustione);
- 3 → 4) Espansione adiabatica che abbassa il pistone;
- 4 → 1) Ricambio d'aria isocoro;

$$Q_{IN} = c_v (T_3 - T_2) \quad Q_{OUT} = -c_v (T_1 - T_4); \quad \Delta W = Q_{IN} - Q_{OUT} \text{ nel ciclo}$$

Per le isocore sono adiabatiche quindi, come prima:

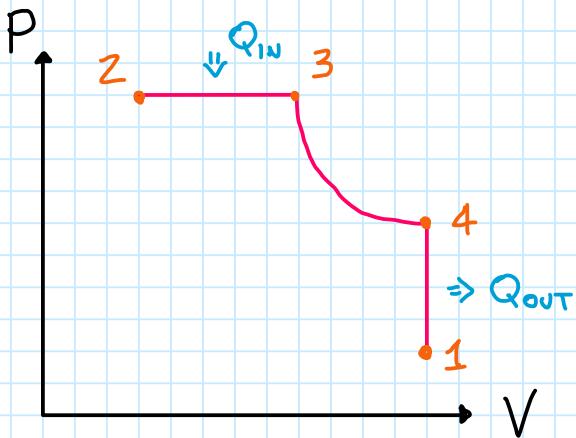
$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad \text{definisco il rapporto di compressione } \eta_v = \frac{V_1}{V_2} > 1$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \eta_v^{\gamma-1} \quad \text{quindi}$$

$$\eta = \frac{-\Delta W}{Q_{IN}} = \frac{c_v [ (T_3 - T_2) - (T_4 - T_1) ]}{c_v (T_3 - T_2)} = [ \dots ] = 1 - \eta_v^{1-\gamma}$$

$\eta$  dipende solo da  $\eta_v$  limitata dalla meccanica e dalla compressione massima prima dell'autocombustione;

• CICLO DIESEL) Sfrutta l'infusione e combustione spontanea



È simile al ciclo Otto ma una delle isocorse è una isobara.

1 → 2) Riscaldamento adiabatico: come prima ho  $m c_v dT = P dV$

$$\Rightarrow [\dots] \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

2 → 3) Espansione isobara:  $Q_{in} = C_p (T_3 - T_2)$

definisco

3 → 4) Espansione adiabatica:  $\frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1}$

$$r_c = \frac{V_3}{V_2} ; r_v = \frac{V_1}{V_2}$$

4 → 1) Raffreddamento isocoro:  $Q_{out} = -C_v (T_2 - T_4)$

$$\Rightarrow \eta = \frac{C_p (T_3 - T_2) - C_v (T_4 - T_1)}{C_p (T_3 - T_2)} = [\dots] = 1 - \frac{r_c^{\gamma} - 1}{r_v^{\gamma-1} \cdot \gamma \cdot (r_c - 1)}$$

# ~ FLUIDODINAMICA ~

Definizioni importanti sono:

- Densità,  $\rho$ : in genere si trattano i fluidi in approssimazione di fluido incompressibile, cioè  $\rho = \text{cost.}$
- Pressione,  $p$ : La forza per unità di area. Ha varie unità di misura come: Pascal ( $1\text{Pa} = 1\text{ N m}^{-2}$ ) o  $1\text{ atm} \approx 1\text{ bar} \approx 10^5\text{ Pa}$ ;
- Viscosità: è la forza per unità di area in un fluido data dalla frizione interna del fluido e originata dal moto relativo tra le parti del fluido e gli elementi vicini. Agisce tangenzialmente sui corpi nei fluidi.

Per visualizzare i fluidi è utile il concetto di STREAMLINES, linee parallele alla direzione del moto del fluido.

Vediamo ora alcune leggi importanti:

- Continuità di massa) Il principio di conservazione di massa è una legge fondamentale. Prendiamo un fluido lungo un tubo a velocità costante. Consideriamo una sezione di area  $A$  e velocità  $u$ . Per definizione le linee di flusso sono parallele alle pareti del tubo quindi il fluido è confinato e il rate di massa uscente ed entrante è uguale in ogni sezione. Cioè:  
$$\rho u A = \text{cost.}$$

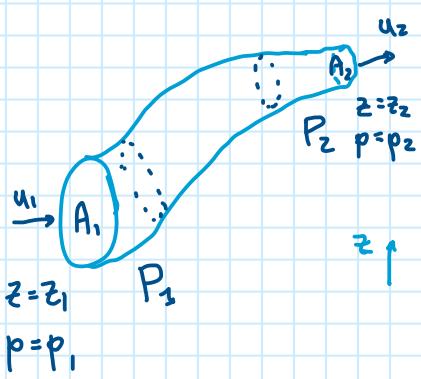
Da questo principio è possibile ricavare una delle leggi fondamentali: la equazione di BERNOULLI.

Immaginiamo un fluido incompressibile in uno stream-tube a flusso costante.

In ogni punto interessiamoci di: altezza ( $z$ ), area della sezione ( $A$ ), velocità ( $u$ ), pressione ( $p$ ). Una variazione di altezza  $\Delta z = z_2 - z_1$  provoca su una

porzione di fluido  $\delta m$  una variazione di energia potenziale gravitazionale  $\delta P_g = \delta m \cdot g \cdot \Delta z$ .

Consideriamo due volumi di controllo in  $P_1$  e  $P_2$ .



$\uparrow z$  In un tempo  $\delta t$  entra in  $P_1$  una massa  $\delta m_1 = \rho u_1 A_1 \delta t$  ed esce da  $P_2$   $\delta m_2 = \rho u_2 A_2 \delta t$

$$[W = F \cdot s = p \cdot A \cdot s]$$

Perciò fare entrare nel volume / spingere fuori dal volume

della massa è necessario compiere un lavoro. Assumendo  $\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$  ho:

In  $P_1$  per muovere di  $\delta s_1 = u_1 \delta t$  un lavoro  $\delta W_1 = p_1 A_1 \delta s_1 = p_1 A_1 u_1 \delta t$

e in  $P_2$  per muovere di  $\delta s_2 = u_2 \delta t$  un lavoro  $\delta W_2 = -p_2 A_2 u_2 \delta t$

Il cambio di segno è dato dal fatto che in un caso il fluido entra nel volume nell'altro esce. Quindi  $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2$  e per conservazione dell'energia:

$$\delta W = \delta P_{\text{grav}} + \delta K_{\text{in}} \Rightarrow p_1 A_1 u_1 \delta t - p_2 A_2 u_2 \delta t = \delta m \cdot g \cdot \Delta z + \frac{1}{2} \delta m (u_2^2 - u_1^2)$$

ma  $\delta m = \rho u_1 A_1 \delta t = \rho u_2 A_2 \delta t$  quindi:

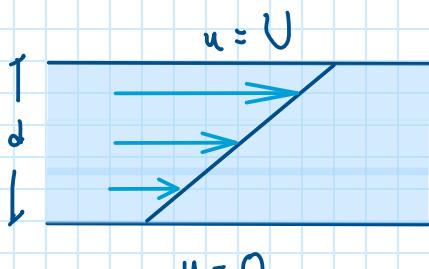
$$\frac{p_1}{\rho} \cancel{\delta m} + g z_1 \cancel{\delta m} + \frac{1}{2} \cancel{\delta m} u_1^2 = \frac{p_2}{\rho} \cancel{\delta m} + g z_2 \cancel{\delta m} + \frac{1}{2} \cancel{\delta m} u_2^2$$

Ho quindi l'equazione di Bernoulli:  $\frac{p}{\rho} + g z + \frac{1}{2} u^2 = \text{cost.}$

Il moto di fluidi NON viscosi è interamente descritto da questa legge.

## ~ Fluidi viscosi ~

Consideriamo ora la viscosità complicando le cose. Immaginiamo un caso semplice: un fluido compreso tra due pareti //; quella sottostante è fissa, quella superstante si muove a velocità costante  $U$ . Tra le pareti c'è una distanza  $d$  e non c'è velocità relativa tra la parete ed il primo strato di fluido a causa della viscosità.



$u = U$

$y$

$u = 0$

$d$

Il profilo di velocità sarà dato da:

$$u(y) = U \frac{y}{d} \quad (0 \leq y \leq d)$$

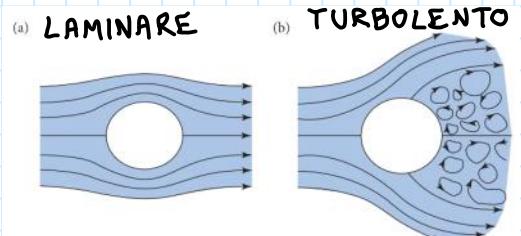
e la forza di taglio (// alla superficie) viscosa per unità di area sarà:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \text{nel nostro caso} \Rightarrow \frac{F}{A} = -\mu \frac{U}{d} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ è il COEFFICIENTE DI} \\ \text{VISCOSITÀ DINAMICO} \end{array} \right.$$

Un fluido viscoso come questo ha due regimi di moto: laminare e turbolento. Il fatto che il moto sia di uno o dell'altro tipo dipende dal rapporto tra forza inerziale e forza viscosa, espresso dal numero di Reynolds. Facciamo qualche ragionamento per capire come ottempero: prendiamo un fluido a velocità  $U$  che scorre in una sezione con dimensione caratteristica  $L^2$ .

La massa per secondo che scorre è  $\rho L^2 U$  quindi la forza inerziale cioè la variazione di momento per unità di tempo è:  $F \sim \rho L^2 U^2$

La forza viscosa abbiamo visto essere  $F \sim \mu U L^2 \cdot L^{-1} = \mu U L$  quindi:



$$Re = \frac{\text{Forza inertiale}}{\text{Forza viscosa}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu UL} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

com  $U = \frac{\mu}{\rho}$  velocità caratteristica.

In genere se  $Re \ll 1$  il moto è laminare, se  $Re \gg 1$  è turbolento.

N.B. Due flussi con stesso  $Re$  hanno lo stesso comportamento geometrico.

Altra distinzione necessaria è, come detto, quella tra fluidi viscosi e non.

In fluidi non viscosi quando pongo un ostacolo le linee di flusso sono simmetriche quindi la forza netta esercitata sull'ostacolo è nulla. Questo va contro il senso comune e si chiama paradosso di J'Ambert.

In un fluido viscoso invece la velocità tangenziale alla superficie è nulla e ad alti numeri di Reynolds la forza viscosa è trascurabile nel bulk ma fondamentale sulla superficie. Si generano quindi componenti rotazionali di flusso dette VORTICITÀ a ridosso dei boundary layers (superficie).

A un certo punto questi flussi si generano anche nel BULK e nelle regioni a valle dell'ostacolo (DOWNSTREAM) lungo la scia (WAKE).

Si perde la simmetria delle linee di forza a monte e a valle dell'ostacolo (si conservano quelle sopra e sotto) e si generano delle forze dette di DRAG, in dimensione del versore della cross-section del flusso.

Se l'ostacolo inizia a ruotare anche le simmetrie nelle altre direzioni si rompono e si generano forze, dette di LIFT, in dimensione tangenziale all'ostacolo.

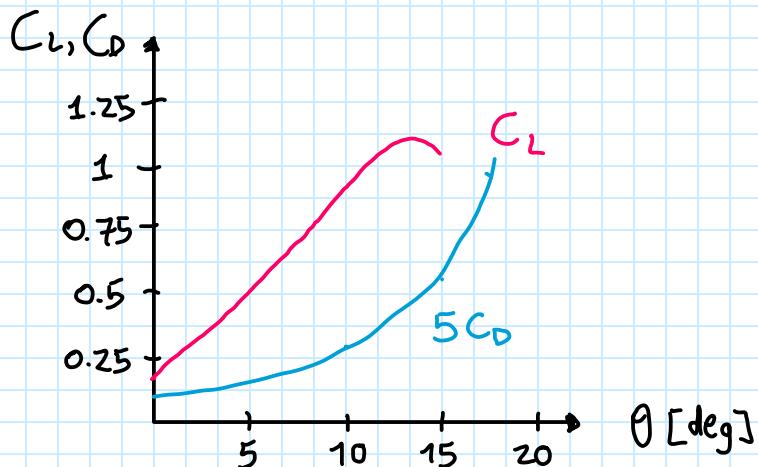
## ~ LIFT e DRAG ~

Facciamo dappriama una derivazione fisica di queste forze per poi analizzarle nel dettaglio. Intuitivamente è ragionevole assumere che dipendano dall'area  $A$  proiettata sul flusso dell'ostacolo, dalla densità del fluido  $\rho$  e dalla sua velocità  $U$ . Ci sarà poi un fattore di forma adimensionale. essendo forze sono dimensionalmente  $ML^{-2}$  possiamo quindi trovare gli esponenti di  $A, \rho, U$  tramite l'equazione:

$$ML^{-2} = (L^2)^a \cdot (ML^{-3})^b \cdot (LT^{-1})^c \Rightarrow a=b=1 \quad c=2$$

Vedremo quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} C_L \rho U^2 A \quad \text{con } C_L \text{ coefficiente di LIFT} \\ D = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 A \quad \text{con } C_D \text{ coefficiente di DRAG} \end{array} \right.$$



Per esempio vediamo i valori per un profilo alare in base all'angolo di attacco (angolo vento - profilo)

Per spiegare il Lift spesso si ricorre a una buona approssimazione basata sul concetto di circolazione. Cerchiamo di capire partendo da un esempio: l'effetto MAGNUS.

Invece che considerare un fluido viscoso con un ostacolo consideriamo un fluido non viscoso che si muove

normalmente più una porzione che ruota attorno all'ostacolo.

La velocità di (b) è data da:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \text{ maggio dell'orbita} \\ \Gamma \text{ circolazione (costante).} \end{array} \right.$$

Sommmando i flussi da Bernoulli si ottiene che sotto avrà una regione di alta pressione e sopra di BASSA.

La forza di lift è data dal teorema di Kutta-Joukowski

$$L = \rho U \Gamma$$

Per fare un esempio più importante è utile considerare un flusso di fluido ideale che scorre attorno ad un cilindro. Capiamo come si composta.

La stream function è  $\Psi$  e la velocità sarà:  $\vec{u} = (u, v, w)$

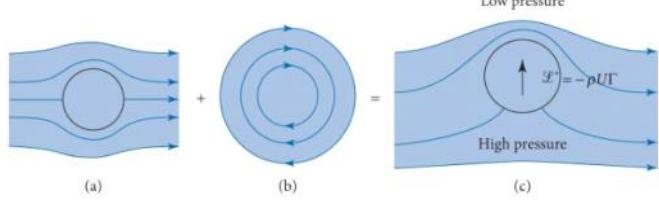
Per conservazione della massa vale:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right) = 0$$

Il flusso è stazionario quindi  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  e il fluido incompressibile quindi  $\rho = \text{cost.}$

Ponendo il cilindro con asse lungo  $z$  verrà:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Ma la stream function descrive le posizioni del fluido quindi:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x} ; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (\text{convenzioni})$$

Quindi:  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$

Se  $\Psi = \text{cost}$  allora  $d\Psi = 0$  quindi  $\frac{u}{r} = \frac{dy}{dx}$

Ma se  $d\Psi \neq 0$  ho un flusso volumetrico  $Q$  e vale  $dQ = V \cdot ds = d\Psi$

ma  $d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$  quindi  $\int_{\Psi_a}^{\Psi_b} d\Psi = \int dQ$

Cioé  $\Psi$  è il potenziale delle velocità del flusso.

Usando le coordinate cilindriche posso quindi scrivere: ( $u_z \equiv 0$ )

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{PARTE RADIALE} \quad \text{e} \quad u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{PARTE AZIMUTALE}$$

Non avendo componenti rotazionali (il fluido ideale non è viscoso) vale:

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} & -\frac{\partial \Psi}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \right) \hat{e}_z = 0$$

Risolvendo si ottiene l'equazione di LAPLACE:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

Quindi la condizione di mom vorticità corrisponde a  $\Psi$  soluzione dell'equazione di Laplace.

La vorticità si definisce in questo contesto come:

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

Per esplicitare le velocità ricordiamo che:  $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ ;  $u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$

e che per teorema di SCHWARTZ  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial r}$

Quindi l'equazione diventa:  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0$

Si può dimostrare che sono soluzioni:

I)  $u_r = 0$  e  $u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$  (moto circolare attorno al cilindro)

II)  $\Psi = U r \sin \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \Rightarrow u_r = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$  e  $u_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$

Sarà quindi soluzione anche:

$$\begin{cases} u_r = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = - \left[ \frac{\Gamma}{2\pi r} + U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \right] \end{cases}$$

Possiamo quindi fare una descrizione più comletta di alcuni casi concreti.

## ~ EFFETTO MAGNUS ~

È possibile a questo punto studiare l'effetto Magnus per un cilindro immerso in un fluido. Sulla superficie del cilindro la velocità sarà:

$$U_\theta = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = -U(2 \sin \theta + B) \quad \text{con } U \text{ velocità del flusso.}$$

Per  $B < 2$  ci sono due punti di stagnazione dove  $\sin \theta = -\frac{B}{2}$  quindi  $U=0$  da Bernoulli qui avrò pressione massima.

$$\text{Inoltre se } U=0 \text{ ho : } 0 = -2U \sin \theta_s - \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \Gamma = -4\pi r U \sin \theta_s$$

La pressione sulla superficie sarà (per Bernoulli):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U_\theta^2 = \text{cost.} \quad \text{infatti non varia l'altezza.}$$

$$\Rightarrow p = K - \frac{1}{2} \rho U_\theta^2 = K - \frac{\rho}{2} (2U \sin \theta + B)^2 = K - \frac{\rho}{2} (4U^2 \sin^2 \theta + 4U \sin \theta B + B^2)$$

L'espressione ha due termini simmetrici per il sopra e sotto del cilindro ma il termine  $-4U \sin \theta B$  da un contributo negativo sopra  $0 < \theta < \pi$  e positivo sotto  $\pi < \theta < 2\pi$  quindi ci sarà in direzione verticale una forza di lift:

$$L = - \int_0^{2\pi} p \cdot r \cdot \sin \theta \, d\theta \stackrel{*}{=} 2\rho U B r \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \Rightarrow \text{risolvendo l'integrale}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\cos \theta \sin \theta \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

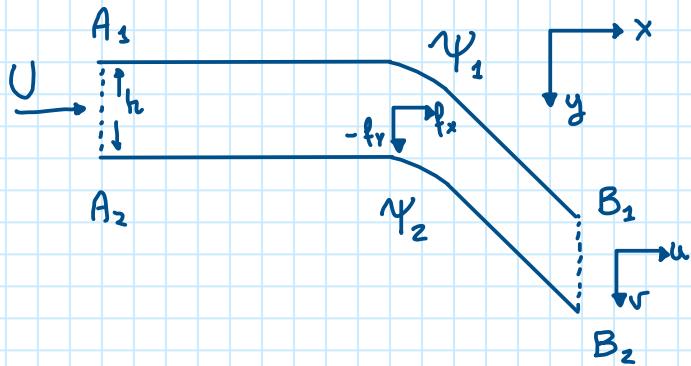
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi \quad \text{quindi, essendo } B = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$L = 2\rho U B r \cdot \pi = \rho U \Gamma$$

## ~ Lift e Drag in un aereo o in una pala ~

Altro esempio pratico che si puo' fare e' studiare l'effetto complessivo di lift e drag.

Assumiamo che la lunghezza sia tale da ignorare gli effetti di bordo



Prendiamo il volume racchiuso tra  
 $C = A_1 B_1 B_2 A_2 A_1$ . Prendiamo due streamlines  
 $\Psi_1, \Psi_2$  a distanza fissa  $h$ .

Siamo  $A_1 A_2, B_1 B_2$  superfici verticali a  
 flusso uniforme.

Non essendo ci flusso di massa né scambio di momento attraverso le  
 streamlines  $U = U_{\text{FIN}}$  e non ho gradiente di pressione né lungo  $\Psi_1$  né  $\Psi_2$ .

Il rate di variazione del momento in direzione verticale dipende perciò  
 dalla forza per unità di lunghezza  $f_y$  lungo l'ala.

La massa entrante (quindi uscente) per unità di tempo è  $\rho U h$  quindi  
 $f_y = -\rho U h v$ .

La circolazione è data da  $\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s}$ . I contributi di  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  si  
 annullano e  $\vec{U} \perp \vec{A_2 A_1}$ ,  $\vec{u} \perp \vec{B_2 B_1}$  quindi rimane  $\Gamma = h v$  ( $\vec{v} \parallel \vec{B_2 B_1}$ )

$$\text{Quindi } f_y = -\rho U \Gamma$$

In un aereoplano di massa  $m_a$  la forza di lift è  $L = -f_y s = m_a \cdot g$

$$\text{quindi: } \Gamma = \frac{m_a g}{\rho s U}$$

L'energia cinetica del flusso cresce lungo le streamlines (verso B) perché  $U_{\text{FIN}} = \sqrt{u^2 + v^2}$  ha componente  $v$  quindi occorre fornire una potenza data dalla forza di drag indotta e la velocità ( $\text{POWER} = D_{\text{IN}} \cdot U$ ) pari al rate di crescita della velocità.

Per un'apertura alare di  $s$  la massa che arriva per unità di superficie è:

$$\frac{dm}{dt} = h s p U \quad \text{quindi} \quad D_{\text{IN}} \cdot U = \frac{1}{2} \cdot h s p U \cdot v^2 \quad \text{ma} \quad v = U \cdot \tan \alpha$$

$$\Rightarrow D_{\text{IN}} = \frac{1}{2} h s p U^2 \tan^2 \alpha \quad \text{Per rimuovere la dipendenza da } \alpha \text{ considero:}$$

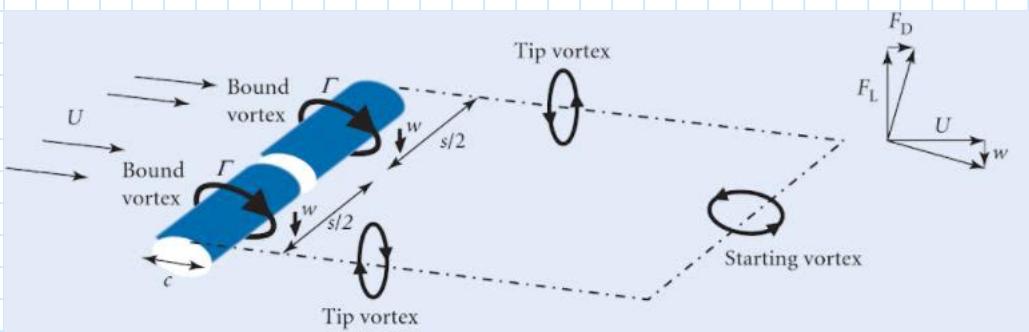
$$L = -f_g \cdot s = mg \quad ; \quad f_g = -\rho U h v \quad ; \quad v = U \cdot \tan \alpha$$

$$\text{quindi} \quad -f_g = \frac{mg}{s} = \rho U h v \Rightarrow v = \frac{mg}{\rho U h s} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{mg}{\rho U^2 h s}$$

$$D_{\text{IN}} = \frac{1}{2} A \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{(mg)^2}{(\rho U^2 A)^2} = \frac{(mg)^2}{2 \rho^2 A U^2} \quad \text{com A sezione del vento deflesso dall'ala}$$

Un modo alternativo per ricavare  $D_m$  è dall'effetto della circolazione prodotta

da un'ala di lunghezza finita. Per un'ala di questo tipo  $\Gamma$  decresce verso l'estremità alare. La vorticità produce un flusso d'aria verso il basso.



È possibile approssimare il vortice di coda con due vortici di estremità fatti:  $\Gamma$  che si muovono verso il basso con velocità  $\omega$  t.c. la distanza tra ciascun tip vortex e il centro dell'apertura alare sia  $s/z$ .

Risulta cioè:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi d} = \frac{\Gamma}{\pi s} \quad \text{o anche} \quad \omega = \frac{mg}{(\rho U \pi s^2)}$$

L'effetto di questi vortici (downwash) è di inclinare la  $\Delta$  di  $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{U}\right) \approx \frac{\omega}{U}$  e di indurre una forza di drag:

$$D_{IN} = J \cdot \frac{\omega}{U} = \frac{F \cdot (mg)^2}{\rho \pi s^2 U^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{com } F \text{ fattore di correzione a causa della} \\ \text{forma dell'ala} \end{array} \right.$$

La forza di drag totale è data da quella indotta e quella di viscosità. Ma  $D_{IN} \propto U^2$  e  $D_{vis} \propto U^2$  quindi ci sarà una velocità ottimale dove  $D_{TOT}$  è minima e l'aereo viaggerà a quella  $U$ .

# ~ L'ENERGIA IDROELETTRICA ~

In generale è la conversione in energia elettrica del potenziale gravitazionale di bacini d'acqua posti a quota maggiore di una turbina o della velocità della corrente di un fiume.

Le riserve sono di vario tipo: dighe, fiumi, pumped storage. Vediamole:

## ~ DIGHE ~

In generale una diga ha:

- Un bacino (reservoir) idrico;
- Una parete di contenimento;
- Una condotta forzata (penstock);
- Un sistema turbina + generatore;
- Un bacino a bassa quota.

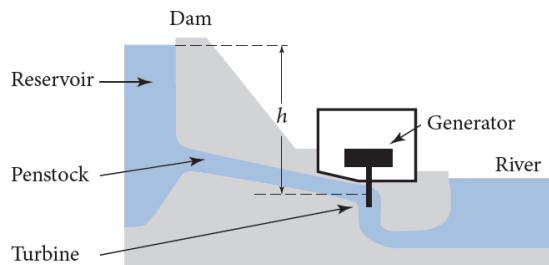


Fig. 6.3 Hydroelectric plant.

La potenza erogata da una diga è:

$$P = \eta \cdot mgh = \eta \cdot PQgh \text{ con}$$

$\eta$  efficienza,  $Q$  flusso volumetrico  
e  $h$  quota efficace.

Il sistema ha vari pro e contro:

### - PRO -

- Impianto duraturo;
- CO<sub>2</sub> solo prodotta in costruzione - manutenzione,

### - CONTRO -

- Costi iniziali elevati;
- Rischio collasso;
- Impatto ambientale;

## ~ TURBINA A IMPULSO (PELTON) ~

Queste turbine le pale sono fissate sulla turbina che ruota in aria grazie a un flusso d'acqua

incidente a grande momento. Vediamo la potenza massima estraibile.

Consideriamo un fluido in moto a velocità  $u$  e una pala in moto a velocità  $u_c$ . La velocità relativa è  $(u-u_c)$  e una volta riflesso il getto  $-(u-u_c)$ . Quindi il cambiamento di velocità è  $2(u-u_c)$ .

La massa d'acqua per secondo che incide è  $PQ$  quindi la forza è:

$$F = 2PQ(u-u_c) \text{ mentre la potenza è } P = Fu_c = 2PQ(u-u_c)u_c.$$

Si può trovare la massima potenza risolvendo  $\frac{dP}{du_c} = 0 \Rightarrow u = 2u_c$

$$\text{Quindi } P_{\max} = \frac{PQ u_c^2}{2}$$

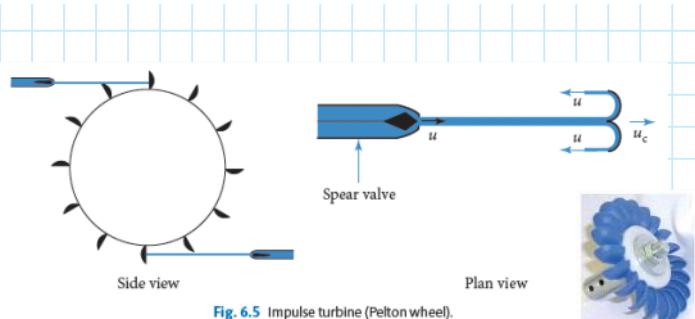


Fig. 6.5 Impulse turbine (Pelton wheel).



## ~ TURBINA A REAZIONE (FRANCIS, KAPLAN) ~

Usano una guida fissa per direzionare l'acqua contro delle pale mobili. Sono turbine chiuse con il fluido passante per l'impianto. Vediamo la potenza estratta.



Per conservazione dell'energia e Bernoulli:

$$\frac{P_{IN}}{\rho} + \frac{1}{2} q_1^2 = \frac{P_{OUT}}{\rho} + \frac{1}{2} q_2^2 + E \quad \text{com } E \text{ energia per unità di massa ceduta}$$

Vediamo due casi:

$$I) q_1 = q_2 \Rightarrow E = \frac{P_{IN} - P_{OUT}}{\rho} \quad ; \quad II) P_{IN} = P_{OUT} \Rightarrow E = \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}$$

P posso definire il grado di reazione:

$$R = \frac{P_{IN} - P_{OUT}}{PE} = 1 - \frac{(q_1^2 - q_2^2)}{2E}$$

Per trovare l'efficienza idraulica occorre analizzare il torque sulla pala:

considerando un raggio interno  $r_1$  e uno esterno  $r_2$  ho:

$$T = P Q (r_1 q_1 \cos \beta_1 - r_2 q_2 \cos \beta_2) \quad \text{com } q \text{ velocità del fluido, } u \text{ velocità della pala}$$

Se  $\omega$  è la velocità angolare della pala vale  $\omega = r_1 u_1 = r_2 u_2$ .

$$P = T \omega = P Q (u_1 q_1 \cos \beta_1 - u_2 q_2 \cos \beta_2)$$

Potenza della diga  
↑

Eguagliando com la potenza di acqua che arriva da altezza  $h$ :  $P = mghQ \cdot \eta$

$$\eta P g h Q = P Q (u_1 q_1 \cos \beta_1 - u_2 q_2 \cos \beta_2) \Rightarrow \eta = \frac{u_1 q_1 \cos \beta_1 - u_2 q_2 \cos \beta_2}{g h}$$

$$\text{e } M_{MAX} = \frac{u_1 q_1 \cos \beta_1}{g h} \quad \text{com } \beta_2 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$$

## ~ PARAMETRI PRIMARI ~

Per scegliere quale turbina utilizzare è utile analizzare gli ordini di grandezza di alcuni parametri, in particolare il flusso d'acqua  $Q$  e la quota  $h$  disponibili.

La potenza estrattibile dipende da quota  $h$ , velocità angolare  $\omega$ , diametro  $D$  e densità del fluido  $\rho$ .

$$\text{Coefficieni utili sono: } K_p = \frac{P}{\omega^3 d^5 \rho} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{POWER COEFFICIENT} \\ \text{HEAD COEFFICIENT} \end{array} \right.$$

$$K_h = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{HEAD COEFFICIENT} \\ \text{POWER COEFFICIENT} \end{array} \right.$$

Una turbina a piena efficienza avrà certi valori di  $K_p, K_h$ .

Per eliminare la dipendenza da  $D$  introduco il NUMERO DI FORMA:

$$S = \frac{K_p^{1/2}}{K_h^{5/4}} = \frac{\omega P^{1/2}}{P^{1/2} (gh)^{5/4}} = \left[ P = \eta \frac{1}{2} \rho g h Q \right] = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gh)^{3/4}}$$

$$\text{Ma } Q = V_w A \quad gh = \frac{1}{2} V_w^2 \quad \text{com } V_w \text{ velocità dell'acqua}$$

$$\text{e } \omega = \frac{V_B}{R} \quad \text{com } V_B \text{ velocità della pala (BLADE)}$$

$$\Rightarrow S = 5 \frac{R}{V_w} \cdot \frac{V_B}{\sqrt{2}} \quad \begin{cases} \rightarrow \text{PELTON} & S \sim 0,1 \\ \rightarrow \text{KAPLAN} & S \sim 1 \\ \rightarrow \text{FRANCIS} & S \sim 5 \end{cases}$$

In genere  $\eta < 1$  a causa di frizione o attrito viscoso

## ~ ENERGIA EOLICA ~

Una parte dell'energia solare incidente sulla Terra diventa energia cinetica per l'aria.

La più alta intensità della radiazione solare all'equatore porterebbe alla formazione di due correnti connettive: una per emisfero. Ma la rotazione terrestre cambia la situazione.

L'idea dell'energia eolica è sfruttare l'energia cinetica del vento. Per aria a densità  $\rho$  e velocità  $v$  vale  $E_k = \frac{1}{2} \rho v^2$

Il volume passante per secondo attraverso una sezione di area A normale al flusso del vento è:  $\frac{V}{t} = vA$  quindi la potenza (o energia per secondo) del volume d'aria considerato è:  $P = E_k v A = \frac{1}{2} \rho v^3 A$

Ho quindi una dipendenza con il cubo della velocità.

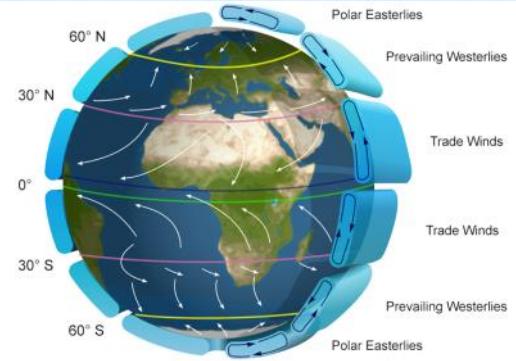
In generale, poi vedremo perché, una turbina non può avere efficienza superiore al 59% e questo è molto come limite di Betz.

Ad oggi esistono due tipi di turbine:

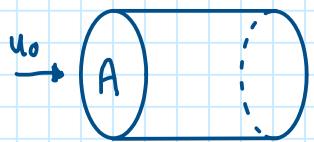
- HAWT (horizontal-axis wind turbine) e le VAWT (vertical-axis wind turbine).

Le prime usano la forza di lift, sono più comuni anche se più complesse e costose perché più efficienti mentre le seconde si basano sul drag.

Osservate che le HAWT siamo orientate in direzione del vento per funzionare al contrario delle VAWT.



## ~ PRINCIPI DI ESTRAZIONE DI ENERGIA NELLE HAWT ~



Immaginiamo un fluido di densità  $\rho$  che si muove imperturbato. Una sezione A della colonna di fluido avrà potenza:

$$P = \frac{1}{2} \rho A u_0^3 \quad \text{come già visto} \quad \begin{cases} \rho \approx 1,2 \text{ kg/m}^3 \\ u_0 \approx 10 \text{ m/s} \end{cases}$$

Per valutare l'efficienza massima di estrazione consideriamo la turbina come un disco spesso detto ATTUATORE. Consideriamo il vento che fluisce a valle, a monte e sulla turbina con velocità diverse e su sezioni diverse.

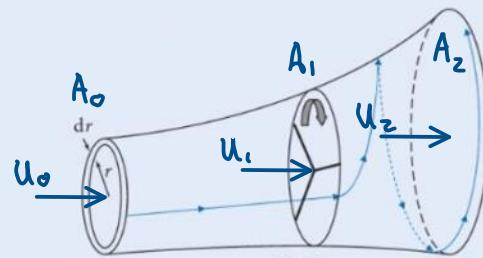


Fig. 6.8 Angular momentum of air flow after passing through turbine.

Le pale assorbono energia cinetica dal vento quindi  $u_2 < u_1$ , ma muovono cedendo momento quindi  $A_2 > A_1$ . La spinta delle pale sarà data da (thrust):

$$T = \frac{dm}{dt} (u_0 - u_2) \quad \text{La potenza estratta è la forza per la velocità}$$

$$\text{a ridosso della pala quindi: } P_T = T u_1 = \frac{dm}{dt} (u_0 - u_2) \cdot u_1$$

Ma posso dire che la potenza è anche legata all'energia cinetica persa dal vento per unità di tempo, cioè:  $P_w = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (u_0^2 - u_2^2)$

Ma vale chiaramente  $P_T = P_w$ : l'energia persa dal vento è estratta dalla turbina.

$$\text{Quindi: } (u_0 - u_2) u_1 = \frac{1}{2} (u_0^2 - u_2^2) = \frac{1}{2} (u_0 - u_2) (u_0 + u_2) \Rightarrow 2u_1 = u_0 + u_2$$

Inoltre per conservazione della massa  $\frac{dm}{dt} = \rho u_1 A_1 = \rho u_1 A_1$ . Posso quindi riscrivere la potenza estratta eliminando la dipendenza dalla velocità di valle  $u_2$ :

$$P_T = \frac{dm}{dt} (u_0 - u_2) u_1 = \rho u_1 A_1 (u_0 - 2u_1 + u_0) u_1 = 2 \rho u_1^2 A_1 (u_0 - u_1)$$

A questo punto possiamo introdurre un fattore di interferenza (o di induzione) (o di perturbazione) che lega la velocità a monte con quella alla turbina.

Vale:  $u_1 = (1-a) u_0 \Rightarrow a = \frac{(u_0 - u_1)}{u_0}$  posso quindi scrivere

$$P_t(a, u_0) = \frac{1}{2} \rho u_0^3 A_1 [4a(1-a)^2]$$

Posso definire quindi il coefficiente di potenza che mi dà la frazione di potenza del vento estratta dalla turbina:

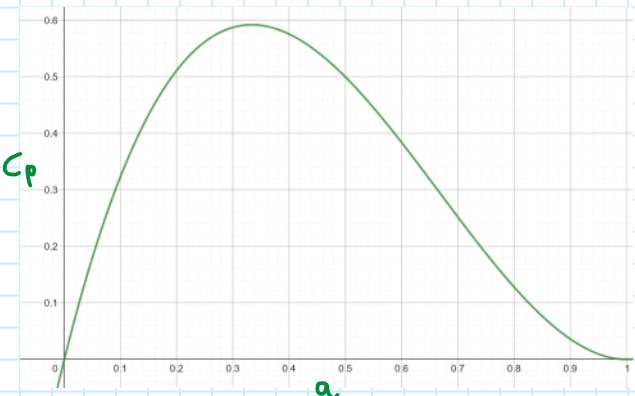
$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho A_1 u_0^3} = 4a(1-a)^2$$

Per trovare il massimo pongo  $\frac{dC_p}{da} = 0$

quindi:  $\frac{dC_p}{da} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad \text{quindi} \quad P_{\max} = \frac{1}{2} \rho u_0^3 A_1 \left( \frac{16}{27} \right)$$

cioè  $C_p \approx 59\%$ .



Questo è il limite di LANCHESTER-BELZ.

Nella pratica  $0,2 \leq C_p \leq 0,45$

### ~ DESIGN DELLE PALE e DINAMICA ~

Le pale sono aerodinamiche in modo da muoversi al meglio. La spinta che mette in rotazione la turbina è generata prendendo l'energia traslazionale dell'aria in LIFT in direzione perpendicolare alla velocità dell'aria rispetto al profilo aereo.

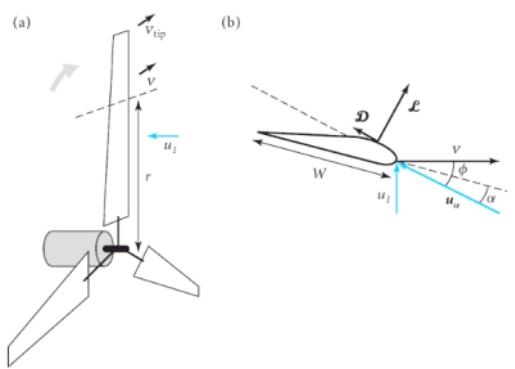


Fig. 5.6 (a) Wind incident on rotating turbine. (b) Section of turbine blade at distance  $r$  from the axis.

Immaginiamo un vento come in figura.

La velocità del vento è  $u_1$ , la velocità di rotazione della pala  $v$  (ortogonale al vento). La velocità risultante del vento

rISPETTO ALLA TURBINA  $\vec{v}$  forma un angolo

RISPETTO ALLA DIREZIONE DELLA PALA DI  $\phi$  t.c.  $\tan \phi = \frac{u_1}{v}$

L'angolo di attacco del vento alla pala è  $\alpha$ .

Il moto del vento attraverso la sezione della pala genera una forza di lift ortogonale ad  $\vec{v}$  mentre la componente di drag è opposta a  $\vec{v}$ . Si genera quindi una forza tangente per unità di lunghezza sulla pala di  $T = L \cos \phi$  (trascuro  $D$ ) e una potenza di  $P = L \sin \phi v$

(la componente col cosecno è per la direzione di  $L$  quella con il seno per  $v$ )

Ma  $\tan \phi = \frac{u_1}{v}$  quindi:  $P = L \sin \phi \cdot u_1 \cdot \cot \phi = L \cos \phi u_1 = T u_1$ .

(Lo stesso risultato si ottiene valutando la CIRCOLAZIONE dell'aria attorno alla pala e usando Bernoulli).

La velocità della pala in un punto a distanza  $r$  dal centro fisso è:

$$v = \frac{\pi \cdot r \cdot V_{TIP}}{R} \quad \text{con } V_{TIP} \text{ velocità sulla punta e } R \text{ raggio massimo.}$$

Un parametro importante è la TIP-SPEED RATIO definita come:  $\lambda = \frac{V_{TIP}}{u_1}$

Questo è importante perché alle condizioni di Bell ( $u_1 = \frac{2u_0}{3}$ ) posso scrivere

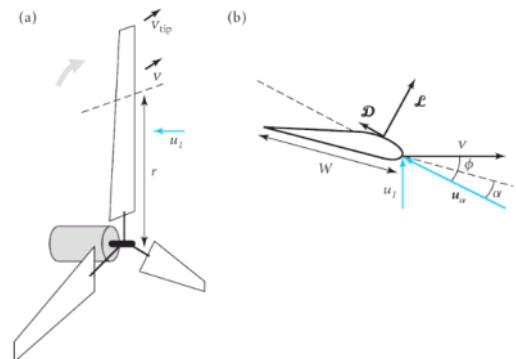


Fig. 5.6 (a) Wind incident on rotating turbine. (b) Section of turbine blade at distance  $r$  from the axis.

$$\tan \phi = \frac{U_1}{r} = \frac{2}{3} \frac{U_0}{r} = \frac{2}{3} \frac{U_0 R}{r U_{TIP}} = \frac{2}{3} \frac{R}{r} \propto \frac{1}{r}$$

Si osserva quindi che l'angolo apparente del vento aumenta avvicinandosi all'asse delle pale. Inoltre, fissato  $r$ ,  $\phi$  è legato a  $1$ .

Quindi le pale sono disegnate con un TWIST (avvolgimento) che cresce al decrescere di  $r$  in modo da mantenere fisso l'angolo di attacco  $\alpha$ .

Anche l'ampiezza,  $W$ , cresce al decrescere di  $r$  così che la componente di lift generi la spinta necessaria a mantenere le condizioni di Betz.

### ~IL NUMERO DI PALE~

È importante bilanciare il numero di pale affinché si sfatti abbastanza il flusso d'aria ma una porzione di vento non incontri più pale o andrei in regime turbolento, non varrebbero le condizioni di Betz e perderei efficienza.

Cerchiamo quindi di vedere il numero ottimale di pale. Sia  $m = \#$  di pale

$$\text{Il periodo di una pala è } T_p = \frac{2\pi}{m r_2}$$

$$\text{mentre la durata della perturbazione è } T_w = \frac{d}{U_0}$$

$$\text{L'estrazione ottimale si ha quando } \frac{2\pi}{m r_2} = \frac{d}{U_0}$$

L'effetto di perturbazione della pala copre porzioni di area  $dA = 2\pi r dr$ .

Immaginiamo vento in moto a velocità  $U_1$  a ridosso della pala. La spinta subita dall'anello  $dA$  a causa di  $m$  pale è data dal rate di variazione del momento:

$$dT_m = \rho dA U_1 \cdot (U_0 - U_2) = \rho U_1^2 2\pi r dr \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Questo vale quando è soddisfatto il criterio} \\ \text{di Betz} \end{array} \right.$$

La spinta è la somma delle componenti di lift  $L$  da ogni sezione della pala tra  $m$  e  $m+dm$ . Vale:

$$dL = \frac{1}{2} C_L \rho A u^2 \quad \text{per definizione, quindi}$$

$$dL = \frac{1}{2} C_L \rho u_\alpha^2 W dm \quad \text{com } \alpha \text{ angolo di attacco e } W \text{ lo spessore im m.}$$

$$u_\alpha = \frac{u_i}{\sin \phi} \quad \text{quindi} \quad dT = m dL \cos \phi \quad \text{risulta}$$

$$\cancel{\rho u_i^2 2\pi r dm} = \frac{1}{2} C_L \cancel{\rho} \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} u_i^2 m W \cancel{dr}$$

$$\text{Quindi } m = \frac{4\pi r \sin^2 \phi}{W C_L \cos \phi} \quad \text{ricordando che } \tan \phi = \frac{z}{3R} \quad \text{ho (com } r=R)$$

$$m = \frac{8\pi R \cdot \sin \phi}{3WC_L}$$

## ~ EFFICIENZA DELLA TURBINA ~

Fini qui abbiamo trascurato gli effetti del drag. In generale questo effetto è piccolo ma è in direzione opposta alla pala. Come risultato il moto rotatorio è ridotto e diventa:

$$L \sin \phi - D \cos \phi = L \sin \phi \left(1 - \frac{C_D}{C_L} \cot \phi\right)$$

$$\text{Ma } \cot \phi = \frac{3 \pi r}{2R} \propto 1$$

Il massimo coefficiente avrà come  $C_{P,\text{MAX}} \sim \left(1 - \frac{C_D}{C_L}\right) C_{P,\text{Betz}}$

$$\text{In genere } \frac{C_D}{C_L} \sim \frac{1}{40} \quad 1 \sim 10 \quad C_P \sim 25\%$$

Se una turbina lavora a  $\lambda$  non ottimale c'è una variazione del Lift e si riduce il  $C_P$ : ad alti  $\lambda$  ho molti turbolenti a bassi  $\lambda$  direzione inefficace del vento. Per capire i valori ottimali di  $\lambda$  ragioniamo.

La potenza estratta dalla turbina da uno stream-tube definito dall'anello compreso tra  $r$  e  $r+dr$  è data dal torque  $dG$ , che si

genera dal cambiamento del momento angolare del vento, moltiplicato per la velocità angolare  $\Omega$  alla turbina.

La potenza estratta è uguale alla perdita dell'energia cinetica in direzione assiale del vento meno il guadagno in energia rotazionale.

Se il vento ruota a velocità  $\omega_1$  ho:  $E_{K,\text{rot}} = \frac{1}{2} d \pi r^2 \omega_1^2$  quindi

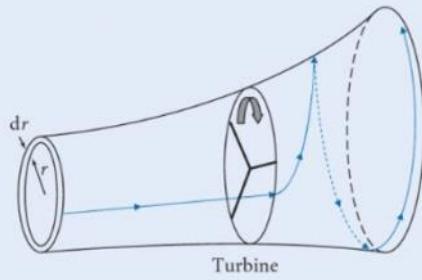


Fig. 6.8 Angular momentum of air flow after passing through turbine.

$dG = dm \dot{m}^2 \omega_1$ , e Perdita cinetica del  
↑ vento  $\rightarrow$  Acquisto rotazionale

$$dP = dG \cdot \Omega = dm \dot{m} \omega_1 r^2 \Omega = \frac{1}{2} dm (\dot{m}^2 - \dot{m}_0^2) - \frac{1}{2} dm \dot{m}^2 \omega_1^2$$

Definendo il fattore di INDUZIONE ANGOLARE  $a^i = \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\Omega}$

Quindi ho : (?)

## ~ CARATTERISTICHE DEL VENTO E PERDITE ~

La velocità del vento è molto variabile e i molti turbolenti, anche se sono legati all'altezza e al tipo di superficie non sono prevedibili totalmente.

Il vento stabile è descrivibile con una distribuzione di frequenza  $f(u)$  e con un fattore di persistenza.

I dati di persistenza dicono, per esempio, quante volte ci si aspetta che il vento soffi per un ora a velocità  $u$  o superiore.

$f(u) \Delta u$  da la percentuale del tempo (probabilità) in cui il vento è a velocità compresa tra  $u$  e  $u + \Delta u$ .

Per siti con velocità media maggiore di 4,5 m/s la distribuzione si approssima bene con quella di RAYLEIGH

$$f(u) = \frac{2u}{c^2} \cdot \exp\left[-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]$$

$$\text{con } c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle u \rangle$$

La potenza media è data quindi da:

$$P_{\text{AVG}} = \frac{\rho}{2} A \langle u^3 \rangle \sim \rho A \langle u \rangle^3$$

È quindi importante avere alte velocità. Ci sono effetti di frizione che si riducono con l'altitudine e sono spesso modellati con:

$$u(z) = u_s \cdot \left(\frac{z}{z_s}\right)^{\alpha_s} \quad \text{con} \quad z_s \text{ altezza in cui } u=u_s \text{ e } \alpha_s \text{ il coefficiente di taglio del vento.}$$

Da misure empiriche posso legare  $\alpha$  alla rugosità del terreno  $\alpha_s = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{z_s}\right)^{0.2}$

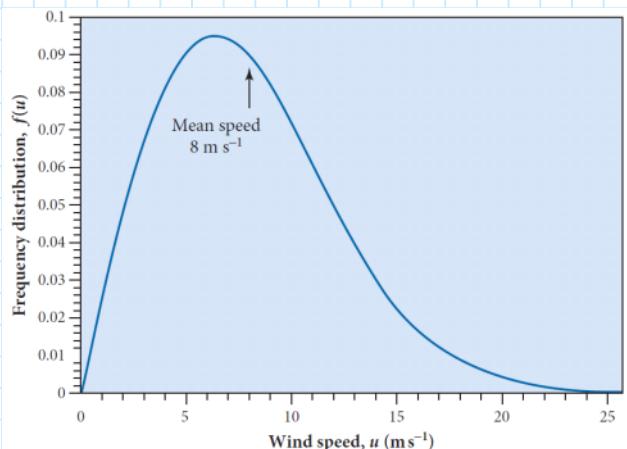


Fig. 7.12 The Rayleigh frequency distribution for a mean wind speed of 8 m s<sup>-1</sup>.

## ~ ENERGIA DAL MARE ~

Fondamentalmente si sfrutta in due modi: con le maree o con le onde.

### ~ MAREE ~

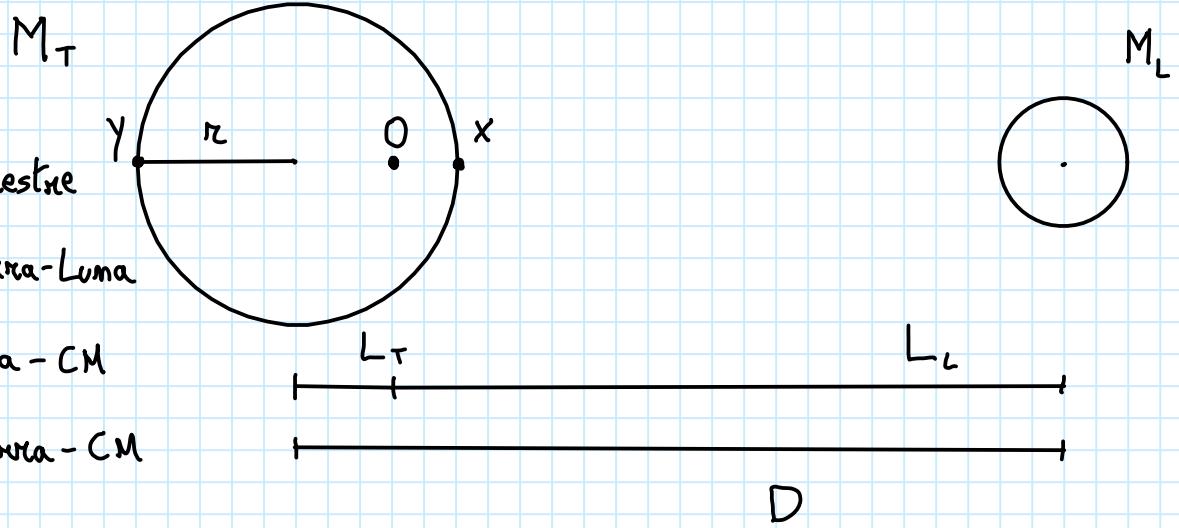
Ci sono due zone di alta e bassa marea contemporaneamente sulla Terra.

Il periodo di marea è circa 12 h 25 min.

In generale l'effetto di marea dipende dalla posizione Terra - Luna.

L'effetto del Sole è circa la metà di quello lunare quindi aumenta o riduce l'effetto di marea.

Consideriamo il sistema Terra-Luna assumendo la Terra una sfera ricoperta d'acqua.



$r$ : Raggio terrestre

$D$ : distanza Terra-Luna

$L$ : distanza Luna-CM

$L'$ : distanza Terra-CM

La forza di gravità è pari alla forza centripeta:  $F_g = F_I$

$$\Rightarrow \frac{GM_T M_L}{D^2} = M_T L_T \omega^2 = M_L L_L$$

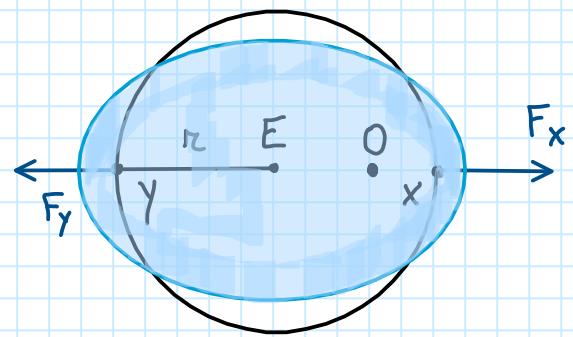
Quindi:  $M_L L_L = M_T L_T$  Ma  $M_L D = M_L (L_T + L_L)$  quindi

$$M_L D = (M_L + M_T) L_T \Rightarrow L_T = \frac{M_L D}{M_T + M_L} = 4670 \text{ Km} < r$$

Il centro di gravità è dentro la Terra.

In  $x$  c'è un incremento della forza gravitazionale e un decremento dell'inerzia in  $y$  viceversa mentre  $E$  è in equilibrio.

Considerando un elemento di massa  $\Delta m$  il comportamento dipende dalla posizione:



$$E) \quad \frac{GM_L \Delta m}{D^2} - \Delta m L_T \omega^2 = 0$$

$$y) \quad F_y = \Delta m (L_T + r) \omega^2 - \frac{GM_L \Delta m}{(D+r)^2}$$

$$x) \quad F_x = \frac{GM_L \Delta m}{(D-r)^2} - \Delta m (r - L_T)^2 \omega^2$$

Questo effetto può essere smorzato se il Sole è a  $90^\circ$  dando la marea di quadratura o amplificato se si allinea dando la marea di plenilunio.

Per l'equilibrio vale.  $\frac{GM_L \Delta m}{D} - \cancel{\Delta m L_T \omega^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_L}{DL_T}$

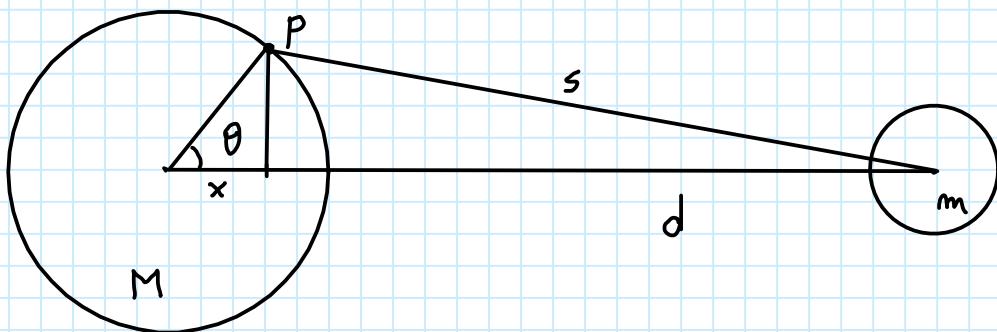
Perciò  $F_y = \Delta m (L_T + r) \omega^2 - \frac{GM_L \Delta m}{(D+r)^2}$  ma  $D \gg r$  quindi

$$\frac{1}{(D+r)^2} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{D}\right)^2} \sim \frac{1}{D^2} \left(1 + 2 \frac{r}{D}\right) \quad \text{quindi, usando anche (E)}$$

$$F_y = \Delta m r \omega^2 \left(1 + 2 \frac{L_T}{D}\right) ; \text{ similmente } F_x = \Delta m r \omega^2 \left(1 + \frac{2 L_T}{D}\right)$$

~Ampiezza di marea~

Consideriamo un punto generico sulla superficie terrestre



Il potenziale gravitazionale dovuto alla Luna in P è  $\mathcal{C}_L = -\frac{Gm}{s}$

Ma  $s^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta$  quindi:

$$\mathcal{C}_L = -\frac{Gm}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}}$$

$d \gg r$  quindi sviluppo per Taylor

$$\mathcal{C}_L = -\frac{Gm}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2 - 2\frac{r}{d} \cos\theta}} = -\frac{Gm}{d} \left\{ 1 - \frac{r^2}{2d^2} + \frac{r}{d} \cos\theta + \frac{3}{8} \cdot \frac{4r^2}{d^2} \cos^2\theta \right\}$$

Durante la rotazione la forza centripeta è costante  $\frac{F}{dm} = \frac{Gm}{d^2}$

$$\text{Ma } F = \frac{d\mathcal{C}_{ROT}}{dx} \text{ com } \mathcal{C}_{ROT} = \frac{Gmx}{d^2} = \frac{Gmr \cos\theta}{d^2}$$

La Terra esercita un potenziale su  $\Delta m$  pari a  $\mathcal{C}_T = gh = \frac{GMh}{d^2}$

Quindi in totale  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_L + \mathcal{C}_{ROT} + \mathcal{C}_T$  com:

$$\mathcal{C} = -\frac{Gm}{d} \left\{ 1 - \frac{r^2}{2d^2} + \frac{r}{d} \cos\theta + \frac{3}{8} \cdot \frac{4r^2}{d^2} \cos^2\theta - \frac{r \cos\theta}{d} - \frac{Mh}{md} \right\}$$

All'equilibrio la superficie è equipotenziale e  $\mathcal{C}=0$  quindi:

$$\frac{M h d}{\pi^2 m} = \frac{\pi^2}{d^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) \Rightarrow h(\theta) = \frac{\pi^2 c^4}{M d^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Quindi  $h_{\max} = h(K\pi) = \frac{\pi^2 c^4}{M d^3} = 0,36 \text{ m}$

$$\begin{cases} \frac{m}{M} = 0,0123 \\ c = 6378 \text{ km} \end{cases} \quad d = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}$$

### ~ PROPAGAZIONE DELLE Onde DI SUPERFICIE ~

Oltre alla marea un altro effetto utile da considerare sono le onde.

Consideriamo uno strato d'acqua alto  $h_0$  in media.

Prendiamo un'onda con lunghezza  $\lambda \gg h_0$  e alta  $\delta h \ll h_0$ , cioè un'onda di superficie. L'accelerazione verticale sarà molto minore di quella gravitazionale

cioè  $\frac{\partial v}{\partial t} \ll g$ . La pressione a una altezza generica sarà:

$$p(y) = p_{\text{ATM}} + \rho g \{ h(x, t) - y \}$$

Un elemento di flusso è  $\delta m = \rho \delta x$  e la forza che agisce è:

$$\delta F = p(x, y) - p(x + \delta x, y) = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \quad \text{QUINDI} \quad - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \delta m \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\text{Per la definizione di } p \text{ vale} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Cerchiamo quindi di costruire la conservazione della massa:

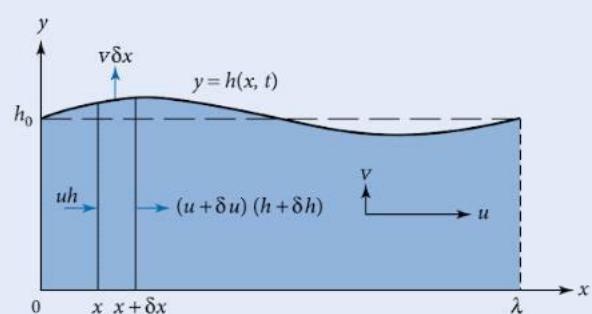


Fig. 6.11 Shallow water wave.

Il volume che fluisce attraverso una sezione per unità di tempo è:

$$u \cdot h = \underbrace{(u + \delta u)(h + \delta h)}_{\substack{\text{volume} \\ \text{attraverso} \\ x}} + v \delta x \quad \left. \begin{array}{l} \text{La differenza tra i due volumi} \\ \text{è il volume mosso verticalmente in} \\ \text{più.} \end{array} \right\}$$

Ricordando che  $h_0 \gg \delta h \Rightarrow h \sim h + \delta h \sim h_0$  vale:

$$u \cdot h_0 = (u + \delta u) \cdot h_0 + v \delta x$$

Ma  $v = \frac{\partial h}{\partial t}$  e  $\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta x$  quindi:

$$\cancel{u \cdot h_0} = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) \cdot h_0 + \frac{\partial h}{\partial t} \cancel{\delta x} \Rightarrow - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h_0} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Consideriamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \xrightarrow[\text{per } x]{\text{differenzio}} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{h_0} \frac{\partial h}{\partial t} \xrightarrow[\text{per } t]{\text{differenzio}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Metto assieme e} \\ \text{ottengo l'equazione} \\ \text{delle onde} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad \text{com} \quad C^2 = g \cdot h_0 \Rightarrow C = \sqrt{g \cdot h_0} \quad \text{velocità di propagazione}$$

### ~ RISONANZA ~

Ci sono alcune zone dove le maree e le onde cambiano il livello del mare anche di vari metri (6 m o più). Questo può accadere quando ci sono fenomeni di risonanza:  $f_b = \frac{c}{\lambda}$  se  $\lambda \sim 2L \Rightarrow f_b \sim 2,2 \cdot 10^{-5} s$  cioè  $f_b \sim$  frequenza di marea

## ~ EFFETTO DEL SOLE ~

Abbiamo visto che possiamo avere maree più o meno intense in base alla posizione del Sole rispetto alla Luna. Vediamo meglio:

$$m_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg} ; \quad m_l = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$$

$$D = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} ; \quad d = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Abbiamo visto che senza considerare il Sole  $h_{\max} \sim \frac{m_l m^4}{m_T d^3}$

Possiamo quindi considerare com il Sole che:

$$h_{\max} = \left( \frac{m_l}{d^3} + \frac{m_s}{D^3} \right) \frac{r^4}{m_T} \quad \text{SOLE ALLINEATO CON LA LUNA}$$

$$h_{\max} = \left( \frac{m_l}{d^3} - \frac{m_s}{D^3} \right) \frac{r^4}{m_T} \quad \text{SOLE OPPOSTO ALLA LUNA}$$

## ~ ENERGIA DALLE MAREE ~

Le maree portano a una variazione di energia potenziale in quanto cambia l'altezza del mare. Tipicamente si crea

un bacino che si chiude quando la marea è alta (o bassa) e si riapre dopo circa 3 ore,

quando il mare è a metà altezza. Il bacino

quindi scambia acqua per circa 6 ore muovendo le turbine: nelle prime 3 il mare arriva in bassa marea e il bacino arriva circa a  $\frac{1}{2} h$  mentre nelle 3 successive raggiungono lo stesso livello.

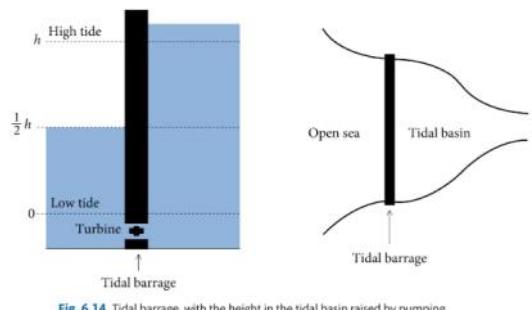


Fig. 6.14 Tidal barrage, with the height in the tidal basin raised by pumping.

La massa d'acqua persa dal bacino è circa  $m \sim \frac{1}{2} \rho Ah$  (il 50%) con una differenza di altezza di circa  $h/2$ .

L'energia scambiata è quindi  $E \sim mg\Delta h \sim \frac{\rho Ah^2}{4}$  quindi la potenza sviluppata è  $P_{AVE} \sim \frac{\rho Ah^2}{4T}$  con  $T$  periodo della marea ( $\sim 12,5$  h)

Un altro metodo per ricavare energia in alcune zone è utilizzare le correnti di marea che possono portare molta energia cinetica.

Immaginiamo un canale corto rispetto alla lunghezza d'onda di marea (tipicamente centinaia di Km). In questo caso l'equazione del moto di una massa d'acqua in una cross-section di area A lungo L è:

$$\rho AL \frac{\partial u}{\partial t} = \rho Aga \cos(\omega t) - F_{TURB} - K'u^2$$

Con  $a$  = Ampiezza dell'onda sinusoidale di frequenza  $\omega$ ;

$u$  = velocità del flusso d'acqua

$K'u^2$  = frizione naturale del canale

$F_{TURB}$  = frizione aggiuntiva data dalla turbina

Quando la frizione è alta posso trascurare  $\frac{\partial u}{\partial t}$  inoltre il flusso d'acqua per secondo è dato da  $Q = u \cdot A$  quindi

$$\rho Aga \cos(\omega t) \approx F_{TURB} + KQ^2 \quad \text{con} \quad K = \frac{K'}{A^2}$$

In assenza di turbina il flusso è massimo perché ha solo la frizione naturale:

$$Q_{MAX}^2 = \frac{\rho g A}{K} \quad \text{con } \cos(\omega t) = 1$$

La potenza estratta dalle turbine è  $P_T = F_{TURB} \cdot u = F_{TURB} \cdot \frac{Q}{A}$

Quindi in generale vale:

$$P_T \approx \left( \rho g A a \cos(\omega t) - K Q^2 \right) \frac{Q}{A} \quad \text{Cerco il massimo} \Rightarrow \frac{\partial P_T}{\partial Q} = 0$$

$$\text{cioè} \quad \rho g a \cos(\omega t) - \frac{K Q^2}{A} - \frac{2 K Q^2}{A} = 0 \Rightarrow Q^2 = \frac{\rho g A a}{3K} \cos(\omega t)$$

$$\text{cioè quando} \quad Q^2 = \frac{1}{3} Q_{MAX}^2 \cos(\omega t)$$

$$\text{Quindi} \quad P_{MAX} \approx \left( \rho g A a \cos(\omega t) - \frac{K \rho g A a}{3K} \cos(\omega t) \right) \sqrt{\frac{\rho g a}{3KA} \cos(\omega t)}$$

$$P_{MAX} \approx \frac{2}{3} \rho g A a \cos(\omega t) \sqrt{\frac{\rho g a}{3KA} \cos(\omega t)} \approx 2 \rho g a \cdot \left( \frac{\cos(\omega t)}{3} \right)^{3/2} \cdot \underbrace{\left( \frac{\rho g A}{3K} \right)^{1/2}}_{Q_0}$$

$$\Rightarrow P_{MAX} \approx \frac{2 \rho g a}{(3)^{3/2}} \langle \cos(\omega t)^{3/2} \rangle \cdot Q_0 = \gamma \rho g a Q_{MAX}$$

$$\text{con } \gamma \approx 0,22$$

## ~ LE ONDE ~

Oltre alle maree anche l'effetto delle onde è interessante per l'estrazione dell'energia. Fino ad ora abbiamo lavorato in ipotesi di  $\lambda \gg h$  valida per le maree. Per le onde oceaniche  $h \gg \lambda$ . Queste sono onde descrivibili come sinusoidali, l'acqua si muove in modo circolare trasferendo momento ma non massa (al contrario delle maree) a causa del vento.

Il maggio del moto si riduce con la profondità: circa l'80% dell'energia dell'onda di superficie è contenuta nei primi  $1/4$ .

Possiamo fare una stima della velocità immaginando i termini che la compongono. Consideriamo un'onda che si muove a velocità costante  $c$  e con profilo costante. La pressione è data solo da quella atmosferica ed è costante sulla superficie. L'equazione di Bernoulli darà:

$$u_c^2 - u_v^2 + 2gh = 0 \quad \text{con:} \quad \begin{aligned} u_c &= \text{velocità sulla cresta dell'onda;} \\ u_v &= \text{velocità a valle;} \\ h &= \text{diametro del moto circolare.} \end{aligned}$$

Se  $T$  è il periodo del moto circolare ed  $r$  il raggio vale:

$$u_c = \frac{2\pi r}{T} - c \quad ; \quad u_v = -\frac{2\pi r}{T} - c \quad ; \quad h = 2r = d$$

Quindi l'equazione diventa:  $\left(\frac{2\pi r}{T} - c\right)^2 - \left(-\frac{2\pi r}{T} - c\right)^2 + 4gr = 0$

Cioè:  $\cancel{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}} + \cancel{\frac{4\pi r c}{T}} + c^2 + \cancel{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}} - \cancel{\frac{4\pi r c}{T}} - c^2 = +4gr$

$$\Rightarrow c = \frac{gT}{2\pi} \quad \text{ma se } \lambda = cT \Rightarrow c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Cerchiamo ora di descrivere meglio il moto e vedere le energie coinvolte. Assumiamo un fluido ideale (non viscoso) e irrotazionale ( $\nabla \times \vec{u} = 0$ ). La velocità del fluido si può descrivere come gradiente di un potenziale  $\phi$  che soddisfa l'equazione di Laplace. Cioè vale:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad \text{con} \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{se} \quad \vec{u} = (u, v) \quad \text{vale} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Ignorando i termini non lineari l'eq. del moto di una particella sulla superficie in  $y = h(x, t)$  è (da Bernoulli):  $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$  cioè

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \quad \text{cioè} \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = - p - \rho g \Delta h + \text{cost}$$

Sulla superficie libera pongo cost = p quindi ottempo  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = - g \Delta h$

Una seconda condizione al contorno si ottiene eguagliando la componente verticale della particelle a  $\frac{\partial h}{\partial t}$  cioè:  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t}$

Consideriamo ora un'onda di ampiezza  $a$  e lunghezza  $\lambda$  con  $\lambda \gg a$  in un mare di profondità  $h_0$ . Il potenziale della velocità avrà forma:

$$\phi = A \cosh(Ky) \cdot \sin(K \cdot (x - ct)) \quad \text{con} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Questo potenziale soddisfa l'eq. di Laplace e la condizione al contorno di  $v = 0$  in  $y = 0$  ( $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ )

Ponendo  $y \approx h_0$  e usando la condizione  $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  si ottiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = A \cdot K \cdot \sinh(Kh_0) \cdot \sin(K(x-ct)) \quad \text{cioè}$$

$$h(x,t) = \frac{A}{C} K \sinh(Kh_0) \cdot \cos(K(x-ct)) = a \cdot \cos(K(x-ct)) \quad \text{con}$$

$$a = \frac{A \sinh(Kh_0)}{C} \quad \text{ampiezza dell'onda.}$$

Ma  $\phi = A \cosh(Kh_0) \cdot \sin(K(x-ct))$  e la condizione  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -gh$  da:

$$A \cosh(Kh_0) \cdot cK \cos(K(x-ct)) = gh \quad \text{quindi, da * ottengo}$$

$$A \cosh(Kh_0) \cdot cK \frac{h}{a} = gh \quad \text{cioè} \quad \frac{A \cosh(Kh_0) \cdot c^2 K}{A \sinh(Kh_0)} = g$$

$$\text{quindi } c^2 = \frac{g}{K} \tanh(Kh_0) = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h_0}{\lambda}\right) \quad \text{che è la relazione di dispersione}$$

Si osservi a questo punto che nelle condizioni limite si ritrova:

$$\lambda \gg h_0 \Rightarrow c = \sqrt{gh_0} \quad \text{ONDA DI MAREA}$$

$$\lambda \ll h_0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \text{ONDA DI SUPERFICIE}$$

Si ritrova la propagazione senza spostamento di materia infatti:

$$u = \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = KA \cosh(Ky) \cdot \cos(K(x-ct)) \quad \text{com } (X, Y) \text{ posizione media in } (x, y).$$

$$v = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = KA \sinh(Ky) \cdot \sin(K(x-ct))$$

Integrando rispetto a t ricaviamo:  $(a = \frac{A}{c} \sinh(Kh_0))$

$$X = -\frac{A}{c} \cosh(Ky) \cdot \sin(K(x-ct))$$

$$Y = +\frac{A}{c} \sinh(Ky) \cdot \cos(K(x-ct))$$

quindi  $\frac{a^2}{\sinh^2(Kh_0)} = \frac{X^2}{\cosh^2(Ky)} + \frac{Y^2}{\sinh^2(Ky)}$

Ma se  $\lambda \ll h_0$   $\sinh^2(Ky) \sim \cosh^2(Ky) \sim \frac{1}{2} e^{K(h_0-y)}$  ( $y \sim h_0$ )

Quindi  $X^2 + Y^2 = R^2$  com  $R = a e^{-K(h_0-y)}$

Quindi una particella in profondità  $h_0-y$  si muove con moto circolare

Si noti che:  $u^2 + r^2 = K^2 c^2 a^2 e^{-2K(h_0-y)}$  quindi l'energia cinetica

trasportata in un periodo è:

$$E_K = \int_0^\lambda \left[ \int_0^{h_0} \frac{1}{2} \rho (u^2 + r^2) dy \right] dx = \frac{\rho K a^2 c^2 \lambda}{4}$$

$$\text{Ma } c^2 = \frac{g}{K} \tgh(Kh_0) \Rightarrow E_K = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4} \tgh(K \lambda_0)$$

$$\text{Se } \lambda \ll h_0 \Rightarrow E_K = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4}$$

ABBIAMO FIN QUI TENUTO CONTO DI  $E_{KIN}$  MA I VOLUMI COINVOLTI HAMMO  
ANCHE ENERGIA POTENZIALE DA CONSIDERARE.

Consideriamo un'onda di profilo

$$y = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Premettiamo un elemento di massa

$$\delta m = \rho \delta x \delta y \text{ che si sposta da } -y \text{ a } +y$$

Esso guadagna energia potenziale  $\delta E_{\text{pot}} = \delta m \cdot g \cdot 2y = 2y \rho g \delta x \delta y$

L'energia potenziale della parte rialzata di fluido è quindi:

$$E_{\text{pot}} = 2 \rho g \int_0^{1/2} dx \int_0^{a \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)} y dy = 2 \rho g \int_0^{1/2} \frac{1}{2} a^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx$$

$$\text{Quindi } E_{\text{pot}} = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4}$$

Da teorema di equipartizione dell'energia la media dell'energia cinetica è uguale a quella potenziale media quindi  $E_{\text{tot}} = E_k + E_p = \frac{\rho g a^2 \lambda}{2}$

In realtà le onde del mare non si propagano alla stessa velocità

$\Rightarrow$  NON HO MONOCROMATICITÀ. Considero la velocità di gruppo:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kc) = c + \frac{dc}{dk} = \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{d}{dk}\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = \frac{1}{2}c$$

$$\text{Quindi } P \sim \frac{E}{x} \cdot v = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} c = \frac{1}{4} \rho g a^2 c = \frac{1}{4} \rho g a^2 \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

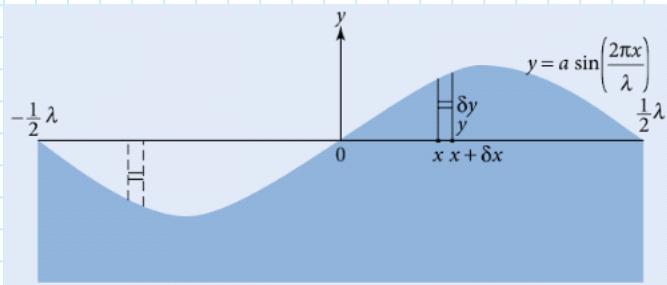


Fig. 6.17 Potential energy of an element in a surface wave.

## ~SORGENTI A BASSO ΔT~

Sistemi geotermici e OTEC (Ocean Thermal Energy Conversion) sono di questo tipo, così come il solare termico (anche se a volte  $\Delta T$  è elevato).

### ~GEOTERMICO~

Come riferimento usiamo il ciclo di Carnot e vediamolo applicato a una pompa di calore.

Di solito si usa un liquido refrigerante come  $NH_3$  e il ciclo composto è simile a un ciclo

RANKINE ed è possibile calcolare l'efficienza del sistema di refrigerazione:

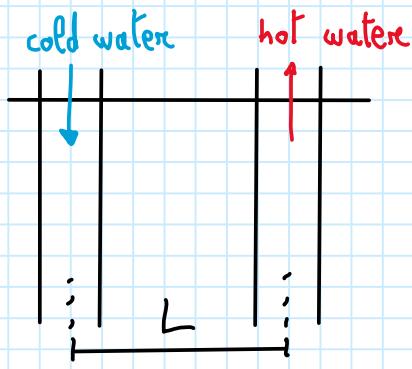
$COP = \text{coeff. of performance}$  definito come:

$$COP = \frac{\text{calore estratto dall'ambiente}}{\text{energia elettrica utilizzata}}$$

$$COP = \frac{\text{calore diffuso nell'ambiente}}{\text{energia elettrica utilizzata}} + 1$$

In base alla direzione di utilizzo ho due diversi coefficienti:

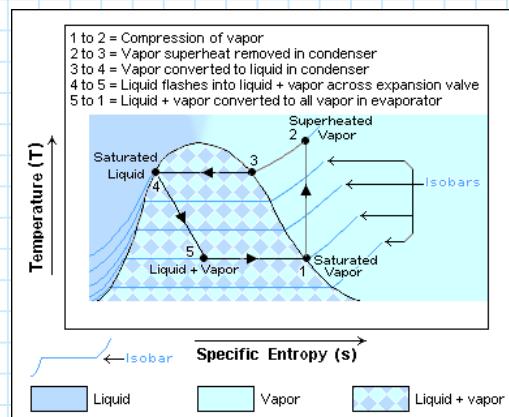
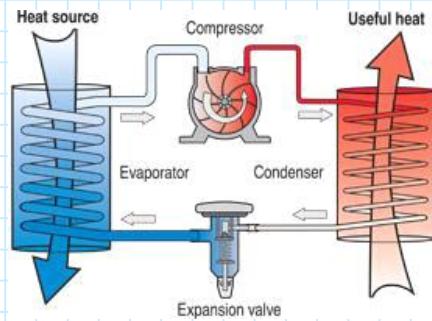
$$COP_H = \frac{T_H}{T_H - T_c} ; \quad COP_c = \frac{Q_c}{Q_H - Q_c} = \frac{T_c}{T_H - T_c} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_c = \text{Temp. cooling} \\ T_H = \text{Temp. heating} \end{array} \right.$$



In genere questi sistemi si usano per geotermia (fino a  $90^\circ C$  naturali)

Si inietta acqua fredda per estrarla calda. La potenza estrabile è:

$$P = \rho_w C_w (T_H - T_c) Q$$



Si possono definire alcune grandezze come:

$$\cdot \text{velocità del fronte: } V_{\text{Front}} = \frac{P_w C_w}{(1-\epsilon) P_{\text{res.}} C_{\text{res.}}} \sqrt{w}$$

$$V_w = \frac{Q}{A}$$

$\epsilon$  = porosità

w = water

res = reservoir

Il tempo di vita è dato da:

$$T = \frac{L}{V_{\text{Front}}}$$

Quindi l'energia totale contenuta nel sistema è:

$$E = P_{\text{res.}} C_{\text{res.}} (T_H - T_C) \cdot A \cdot L$$

~ OTEC ~ Sfrutta la  $\Delta T$  tra l'acqua e le rocce con profondità di immissione di più di 1000 m

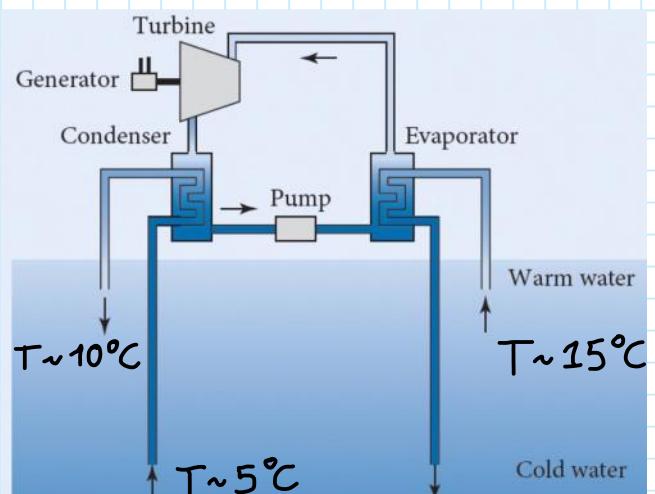
Di solito uso come fluido  $NH_3$  e ha:

$$\Delta T \sim 10^\circ C \quad \eta = \frac{10}{288} \sim 3,4\%$$

$$\Delta T \sim 25^\circ C \quad \eta = \frac{25}{288} \sim 8,5\%$$

$$\text{Quindi } P = PC V_{\text{flux}} \cdot \Delta T \eta$$

$$\text{cioè } P = PC V_{\text{flux}} \frac{(\Delta T)^2}{T_H}$$



## ~ Solare Termico ~

Dell'energia solare incidente nella ionosfera circa il 43% è radiazione diretta dei raggi mentre il 22% è idroenergia lo 0,22% vento, lo 0,02% fotosintesi e una piccola frazione onde. Il resto si dissipava nell'atmosfera o è riflessa. Ma una grande porzione è radiazione diretta. E uno dei modi per raccoglierla è con il solare termico che usa collettori principalmente di due tipi:

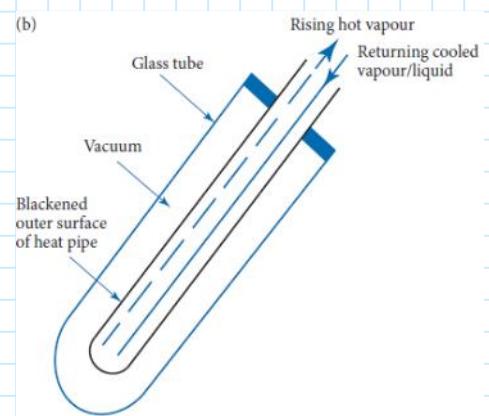
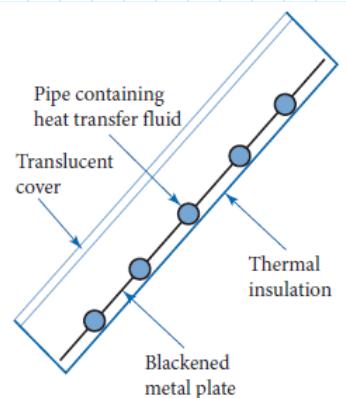
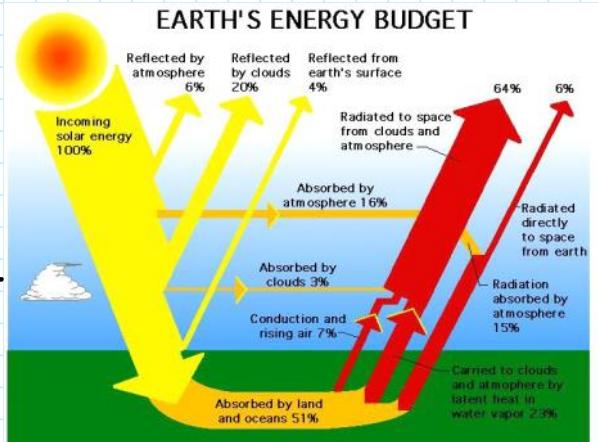
### ~ COLLETTORI PIANI ~

Hanno una superficie ammessa e possono essere ricoperti da uno strato trasparente che lascia passare la radiazione incidente ma trattiene la radiazione IR emessa dalla superficie assorbente scaldata.

L'assorbitore è a contatto con delle condotte quindi un liquido si scalda e viene mandato a un serbatoio;

### ~ COLLETTORI CURVI ~

La radiazione è assorbita da una superficie ammessa di un tubo in cui scorre del fluido che evapora lasciando calore a uno scambiatore che lo fa ricongelare. Il sistema ha uno strato sottovuoto per ridurre le perdite.



## ~ Esempio di sistema domestico ~

Per conservazione dell'energia la potenza assorbita dal collettore è uguale al rate di calore trasferito al fluido quindi:

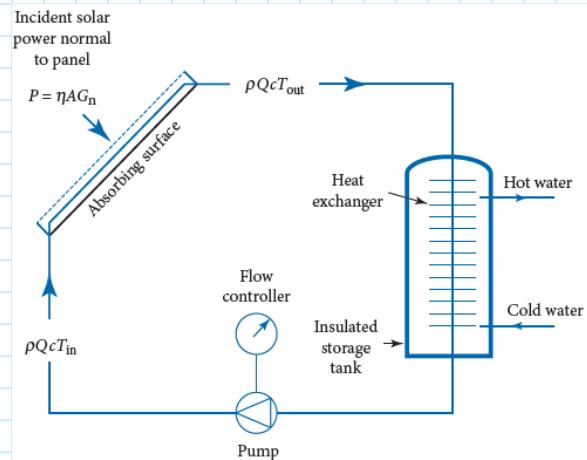
$$P = \eta A G_m \quad \text{com} \quad \eta \text{ efficienza} \\ A \text{ area esposta}$$

$G_m$  irraggiamento solare

$$\text{Ma } P = \rho Q c (T_{out} - T_{in}) \quad \text{com} \quad Q \text{ flusso volumetrico} \\ c \text{ calore specifico}$$

quindi  $T_{out} = T_{in} + \frac{\eta A G_m}{\rho Q c}$

Tipici valori:  $\eta \sim 0,8$   $G_m \sim 500 \frac{W}{m^2}$   $P = P_w = 10^3 \frac{Kg}{m^3}$   $C = 4 \cdot 10^3 \frac{J}{Kg K}$



## ~ESEMPIO DI SISTEMA INDUSTRIALE~

I CSP (Concentrated Solar Thermal Power) richiedono luce solare diretta concentrata in piccole aree grazie a specchi e lenti.

Tipicamente questi impianti sono in regioni calde, aride con latitudine  $15^\circ \text{--} 40^\circ$  dove l'80% - 90% della radiazione arriva direttamente alla superficie senza dispersioni importanti.

Il serbatoio centrale si comporta come un corpo grigio emettendo a sua volta radiazione.

Il fluido contenuto

nel serbatoio deve poter raggiungere temperature di migliaia di gradi senza evaporare. Per poter fare ciò la luce deve essere concentrata. La concentrazione è misurata da un indice detto concentration factor.

$$C = \frac{\text{Area di Input}}{\text{Area di Output}}$$

$$C = \frac{m_{\text{out}} \cdot \sin^2 \beta}{m_{\text{in}} \cdot \sin^2 \alpha}$$

$C$  ha un limite geometrico in base alla dimensionalità del sistema.

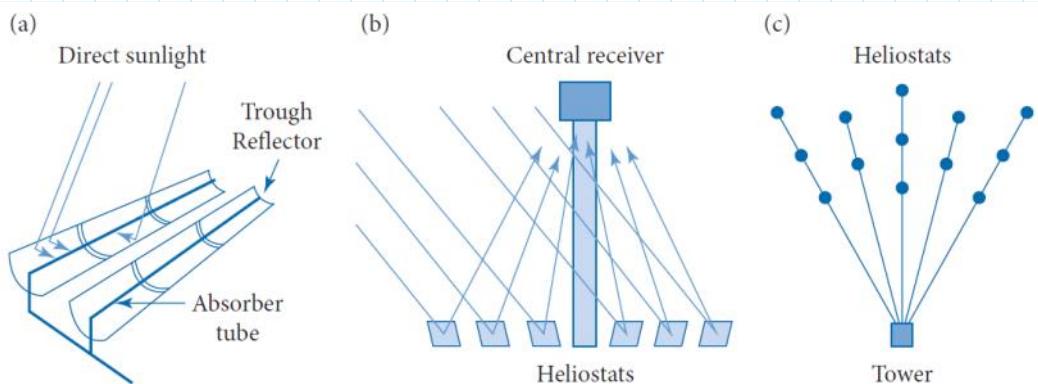
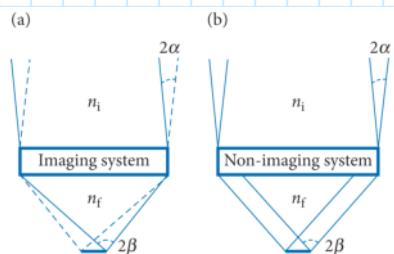


Fig. 5.7 Parabolic trough and solar tower/central receiver plants and heliostat layout (CSP2015).



Questi sistemi non sono di imaging: non ci interessa che l'immagine venga conservata.

com  $\alpha$  angolo di arrivo,  $\beta$  angolo di uscita (angoli solidi)

$$\text{Prestiamo } \beta = \frac{\pi}{2} \quad m_{\text{out}} = m_{\text{in}} = 1$$

$$C_{3D,\text{MAX}} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{ma il Sole è visto dalla Terra con angolo} \\ Z\alpha = 9,3 \text{ mrad}$$

$$\text{Quindi } C_{3D,\text{MAX}} \sim 4,6 \cdot 10^4$$

$$\text{Mentre } C_{2D,\text{MAX}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sim 220$$

C'è da dire che riflessioni multiple possono avvenire e comunque la percentuale assorbita e riflessa dipende anche da  $\lambda$ .

## VEDIAMO MEGLIO LA POTENZA ASSORBITA DAL RICEVITORE (SERBATOIO)

$$\dot{P}_R = \dot{Q}_R = \alpha G A_c - A_e \varepsilon \sigma T^4 = G A_c \eta_R$$

Ovvero la potenza netta assorbita è la differenza tra quella assorbita, data dall'area del collettore  $A_c$ , il coeff. di assorbimento  $\alpha$  e la radiazione solare incidente  $G$  meno l'emissione di corpo grigio

$$\text{L'efficienza di ricevitore è quindi } \eta_R = \alpha - \beta T^4 \text{ con } \beta = \frac{\varepsilon \sigma}{G c} \quad c = \frac{A_c}{A_e}$$

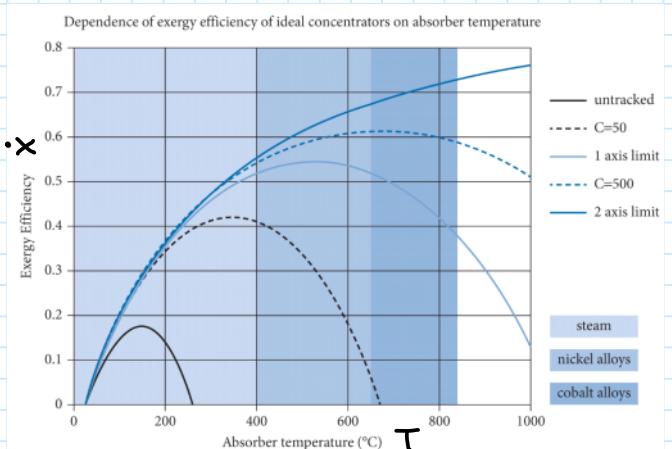
Vista la formula è evidente che esiste una temperatura ottimale.

Vediamo l'exergia e massimizziamola:

$$\dot{X} = G A_c \eta_R \eta_a$$

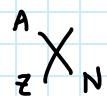
$$\text{con } \eta_a = 1 - \frac{T}{T_{\text{amb}}}$$

Quindi dipende dal tipo di assorbitore.



# ~REAZIONI NUCLEARI~

Vediamo un po' di notazione:



$A$  = numero atomico di massa (tot)

$Z$  = numero protoni;  $N$  = numero neutroni

$$1 \text{ u} \sim M_N \sim M_p \sim M_e \cdot 10^{-4}$$

Per capire la massa di un atomo uso lo spettrometro:  $F_{\text{cent}} = \frac{mv^2}{r} = F_B$

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Un modello usato è il modello a goccia, utile per descriverne  $\frac{B}{A}$  vs  $A$

$$B(Z, A) = a_v \cdot A - a_s \cdot A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A-Z)^2}{A} + a_p \delta(A, Z)$$

- $a_v$  termine di volume  $\sim 15 \text{ MeV}$
- $a_s$  " " superficie  $\sim 17 \text{ MeV}$
- $a_c$  " coulombiano  $\sim 1 \text{ MeV}$
- $a_{\text{sym}}$  " simmetria  $\sim 25 \text{ MeV}$  voglio circa  $N \approx Z$
- $a_p$  " parità  $\sim 12 \text{ MeV}$  +  $Z, N$  pari; -  $Z, N$  dispari; 0  $A$  dispari.

Ho 3 casi:

•  $A \approx 60$  (Fe) stabili

•  $A < 60$  (H) fusione  $A + B \rightarrow C + D + \text{Energia}$

•  $A > 60$  (U) fissione  $A \rightarrow B + C + \text{Energia}$

Voglio  $n \approx p$  quindi: troppi  $n$   $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}$  ( $e^- = \beta^-$ )

troppi  $p$   $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu$  ( $e^+ = \beta^+$ )

Misuro l'attività cioè il rate medio di decadimento. Le disintegrazioni al secondo sono, con  $N(t)$  particelle padre che decadono,

$$A_c(t) = -\frac{dN(t)}{dt} \quad \text{perimentalmente osservo } A_c(t) = B e^{-\lambda t}$$

con  $\lambda$  caratteristica quindi:  $-\frac{dN}{dt} = B e^{-\lambda t}$  con tempo di vita medio  $\tau = \frac{1}{\lambda}$

Infatti se inizialmente ho  $N_0$  particelle e volessi la somma dei lifetimes:

$$\int_0^\infty A_c(t) \cdot t \, dt = \int_0^\infty \lambda N_0 \cdot t e^{-\lambda t} \, dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{N_0}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ per partecella}$$

$$\text{oppure } \tau = \langle t \rangle = \frac{\int_0^\infty t \cdot A_c(t) \, dt}{\int_0^\infty A_c(t) \, dt} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{se } A_c(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Dove  $B = 1 N_0$  dall'integrazione di  $-\frac{dN}{dt} = B e^{-\lambda t}$  con  $N \in [N_0; 0]$

L'attività si misura in Becquerel ( $1 \text{ Bq} = 1 \text{ dec/sec}$ ) o

Cemie ( $1 \text{ Ci} \sim 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ )

L'attività tipica è  $m C_i \div \mu C_i$ .  $1 \text{ mole} \sim 10^{23} \text{ nuclei}$

Posso valutare il tempo di dimezzamento  $\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$  { \* come  $\tau_2$  di crescita exp perché qui ho decrescita.

Importante vedere le catene di decadimento: quando un atomo decade infatti oltre a ridursi la specie padre cresce la specie figlio.

Immaginiamo una catena  $A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C$  con  $C$  stabile.

A  $t=0$  siamo:  $N_A(0) = N_0$   $N_B(0) = N_C(0) = 0$

e  $\forall t$  sia  $N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = N_0$

Vale:  $\textcircled{I} \frac{dN_A(t)}{dt} = -\lambda_A N_A(t)$  quindi  $N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t}$

Ma  $\textcircled{II} \frac{dN_B(t)}{dt} = -\lambda_B N_B(t) + \lambda_A N_A(t)$  cioè:

$$\frac{dN_B(t)}{dt} + \lambda_B N_B(t) = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} \Rightarrow \text{moltiplico per } e^{\lambda_B t}$$

$$\left( \frac{dN_B(t)}{dt} + \lambda_B N_B(t) \right) \cdot e^{\lambda_B t} = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} e^{\lambda_B t} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (N_B(t) e^{\lambda_B t}) = \lambda_A N_0 e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \quad \text{cioè}$$

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A N_0}{(\lambda_B - \lambda_A)} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \cdot e^{-\lambda_B t} + K_B \cdot e^{-\lambda_B t}$$

Per trovare  $K_B$  ricordo che  $N_B(0) = 0$  quindi  $K_B = -\frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}$

Cioè:  $N_B(t) = \frac{\lambda_A N_0}{(\lambda_B - \lambda_A)} \left\{ e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t} \right\}$

Infine  $\textcircled{III} \frac{dN_C(t)}{dt} = \lambda_B N_B(t)$  essendo  $C$  stabile

Ci sono due casi limite di interesse:



Dopo un tempo  $T \gg \tau_A$   $N_B(t) \sim N_0 e^{-\lambda_B t}$



Inizialmente  $N_A \gg N_B$  quindi si formano molti B che però decadono rapidi quindi dopo un po', quando  $e^{-\lambda_A t} \gg e^{-\lambda_B t}$  si raggiunge un equilibrio SECOLARE nel rapporto  $N_A/N_B$  e il rate sarà:

$$\frac{\lambda_B N_B(t)}{\lambda_A N_A(t)} = \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{(\lambda_B - \lambda_A) \lambda_A N_0} \left( 1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t} \right) \quad \text{ma se } \lambda_A \ll \lambda_B$$

$$\lambda_B - \lambda_A \approx \lambda_B$$

$$\frac{\lambda_B N_B(t)}{\lambda_A N_A(t)} = \frac{\lambda_A \cancel{\lambda_B} N_0}{(\cancel{\lambda_B} - \lambda_A) \cancel{\lambda_A} N_0} \left( 1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t} \right)$$

Ad alti  $t$   $e^{-\lambda_B t} \approx 1 \Rightarrow N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A(t)$

~ Tipi di emissioni ~

Ci sono fondamentalmente 3 emissioni:

$\alpha$ -decay) Per nuclei instabili pesanti ( $Z > 80$ )



L'energia rilasciata è:  $Q = (M_{\text{FATHER}} - M_{\text{DAUGHT.}} - m_{\alpha}) \cdot c^2$

Questa energia è cinetica e separata tra  $\alpha$  e D in base alla conservazione del momento:

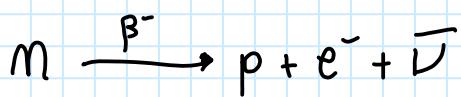
$$Q = K_D + K_{\alpha} \quad \text{e} \quad m_{\alpha} v_{\alpha} + M_D \cdot v_D = 0$$

particella padre ferma

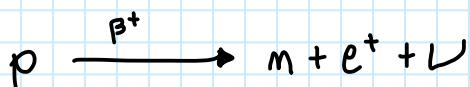
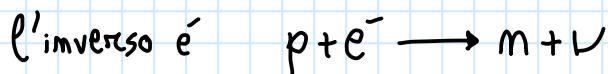
$$\Rightarrow Q = K_{\alpha} \left( \frac{m_{\alpha}}{M_D} + 1 \right) \quad Q \sim 4 \div 10 \text{ MeV}$$

Facili da fermare ma molto energetiche.

$\beta$ -decay) È un processo lento e può essere:



oppure



cattura elettronica

Sono leggeri, penetrano, possono creare elettroni secondari ed emettere Bremsstrahlung.

$\gamma$ -decay) Dati da diseccitazioni nucleari, è veloce ( $\tau \sim 10^{-9}$  s) e

di qualche MeV. Penetraono e possono dare Compton, fotoelettrico

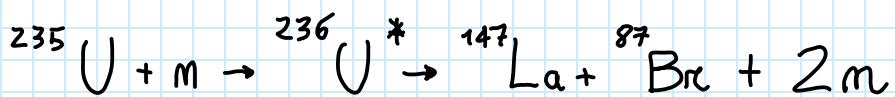
o  $e^+ + e^-$ .  $I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{\mu}}$

## ~ FISSIONE NUCLEARE ~

Un nucleo pesante, di solito  $^{238}_{92}\text{U}$  o  $^{239}_{94}\text{Pu}$  interagendo con un neutrone lento si rompe in due nuclei più leggeri, di solito diversi tra loro e insieme a neutrini. I prodotti a loro volta decadono e i nuclei generano altre reazioni a catena.

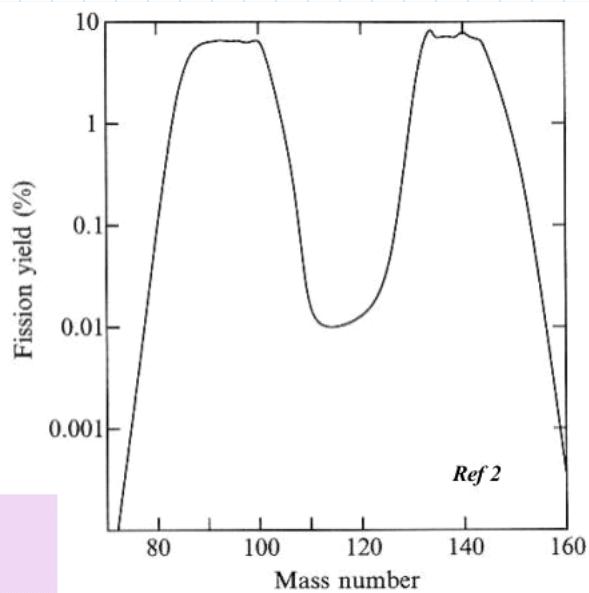
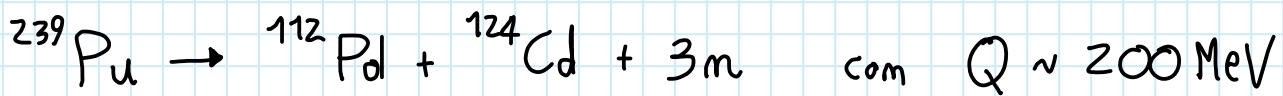
Nell'Uranio i nucleoni hanno circa 7,6 MeV di legame l'uno.

Ci sono varie reazioni possibili e generalmente la fissione spontanea è estremamente rara ed è coperta da decadimento  $\alpha$ . Quindi si arricchisce il nucleo e si "attiva". A questo punto i prodotti possono essere vari ma solitamente è più probabile siamo diversi. Nell'Uranio per esempio ho:



Di base i prodotti più probabili hanno  $A = 70 \div 96$  o  $A = 135 \div 160$  e possono rilasciare da uno a tre neutrini.

Altro esempio con il plutonio ho:

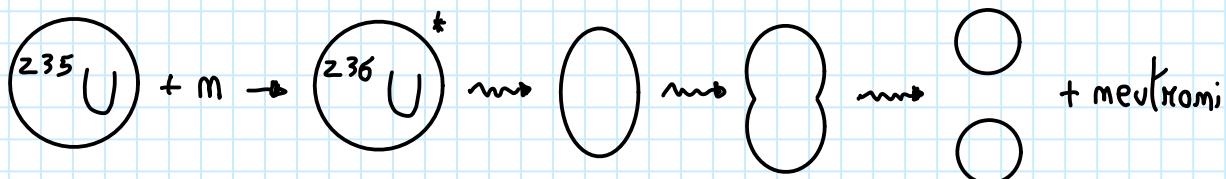


Abbiamo detto che il processo non è spontaneo ma si attiva con un meccanismo, perché?

Riprendiamo il modello a goccia:

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} + [\dots]$$

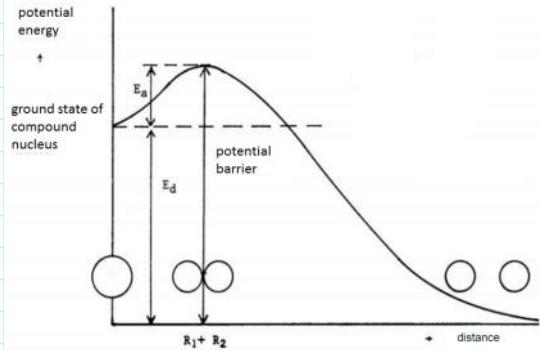
Sostanzialmente ci sono due termini che concorrono alla separazione del nucleo: gli effetti di superficie (se il nucleo si rompe aumenta la superficie) e quelli coulombiani che tendono a respingere i protoni tra loro.



Supera la barriera data dalla forza forte che tende a tenere uniti i nuclei ma agisce a breve distanza anche la fissione. Usando il modello a shell si avrebbe un risultato più dettagliato ma

va bene così. In prima approssimazione l'energia cinetica della fissione è data dalla repulsione Coulombiana delle parti coinvolte quindi sarà:

$$E_K = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})^2} \cdot 1.8 \text{ MeV} \quad \text{con 1,8 coefficiente di deformazione nucleare}$$



Vedendo l'uranio nello specifico ho che:

- L'energia di attivazione per  $^{235}\text{U}$  è 6,2 MeV quindi se ho:

$^{235}\text{U} + n \rightarrow ^{236}\text{U}^*$  posso trovare l'energia dello stato formato ipotizzando il neutrone ferma quindi:

$$Q_{\text{ex}} = [m(^{236}\text{U}^*) - m(^{235}\text{U})] \cdot c^2$$

Ipotizzando  $m(^{236}\text{U}^*) = m(^{235}\text{U}) + M_m$  (neutrone ferma)

ottengo  $Q_{\text{ex}} = 6,5 \text{ MeV} > \text{energia di attivazione (6,2 MeV)}$

quindi: il processo è spontaneo.

Perciò  $^{238}\text{U}$  la situazione cambia:  $E_{\text{att}} \approx 6,6 \text{ MeV}$  e ottengo

$$Q_{\text{ex}} = 4,8 \text{ MeV} < E_{\text{att}}$$
 quindi è meno probabile il processo

In media 1 neutrone induce 2,4 neutroni di fissione nel  $^{235}\text{U}$  quindi è possibile una reazione a catena. In natura l'Uranio ha abbondanza isotopica di  $^{235}\text{U} \approx 0,7\%$ ;  $^{238}\text{U} \approx 99,3\%$ .

Molti neutroni si perdono prima di indurre fissione quindi si cerca di arricchire l'uranio circa al 3% di 235.

Per esempio per la fissione indotta da neutroni termici in  $^{235}\text{U}$ , in cui genero circa 2,4 neutroni per fissione in media, ho l'energia divisa così:

- 87% del rilascio è nei reagenti circa 168 MeV nei prodotti } molta e circa 5 MeV in neutroni: }  $E_{KIN}$
- 13% in decadimenti radioattivi.

I neutroni coinvolti sono al 99% origine di fissioni precedenti, circa  $10^{-14}\text{s}$  dopo la reazione e l'energia è ampia:

- |                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| • Termici: 25 meV  | • Lenti: 1 KeV            |
| • Epitermici: 1 eV | • Veloci: 10 KeV ÷ 10 MeV |

L'1% si rilascia con  $\beta^-$ -decay dei prodotti dopo un po' di tempo.

### ~ CROSS - SECTION ~

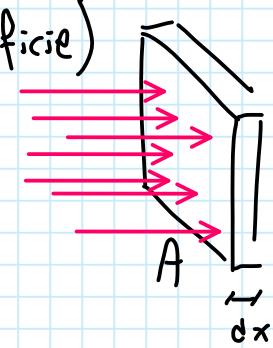
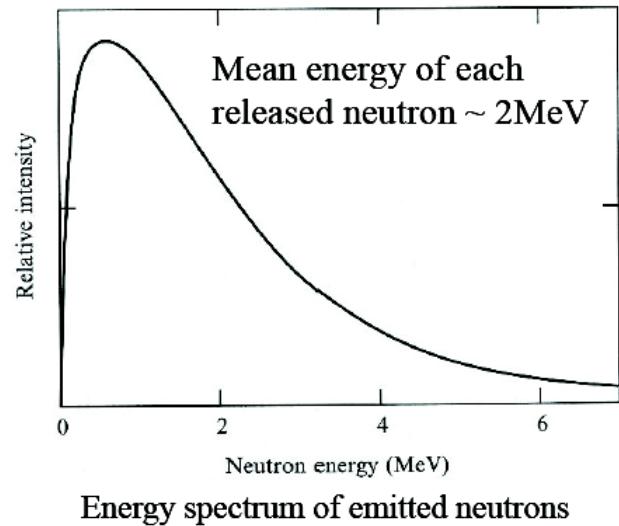
Cerchiamo di capire meglio come descrivere le reazioni possibili.

Per farlo usiamo il concetto di sezione d'urto:

Considero un flusso di particelle  $\Phi$  (per unità di tempo e superficie) incidente su una superficie A spessa  $dx$ . L'intensità è:

$$I = \Phi \cdot A \quad \text{e il numero di nuclei esposti al fascio sono}$$

$$N = P_N \cdot A \cdot dx$$



Suppongo che ci sia una reazione tra il fascio e gli atomi sulla placchetta. (Es. fascio di neutrini su uranio). Se i nuclei target agiscono indipendentemente tra loro allora il rate di reazione è:

$$R \propto \phi \cdot N \text{ cioè } R \propto P_N \cdot A \cdot dx \cdot \phi$$

Definisco la sezione d'urto come probabilità che il processo accada, cioè è il rate di reazione per atomo per unità di flusso.

Quindi il numero di reazioni al secondo è:

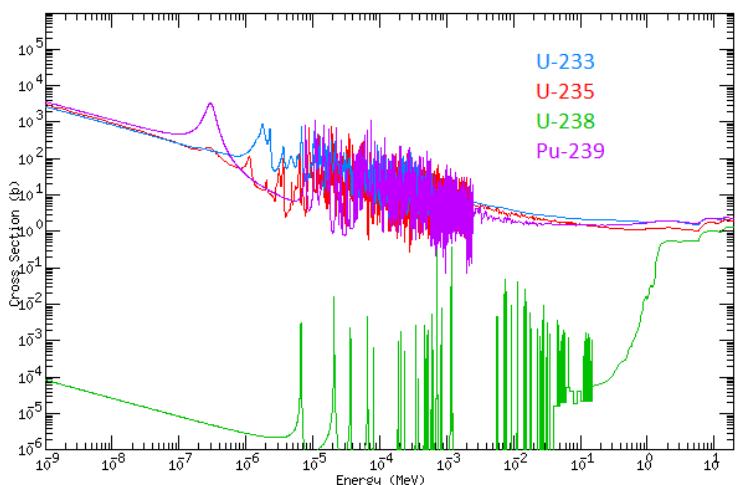
$$R = N \sigma \phi$$

$$\text{Di norma } \sigma \sim 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

Quando la calcolo considero tutte le possibili reazioni, vale infatti:

$$\sigma_{TOT} = \sum_i \sigma_i$$

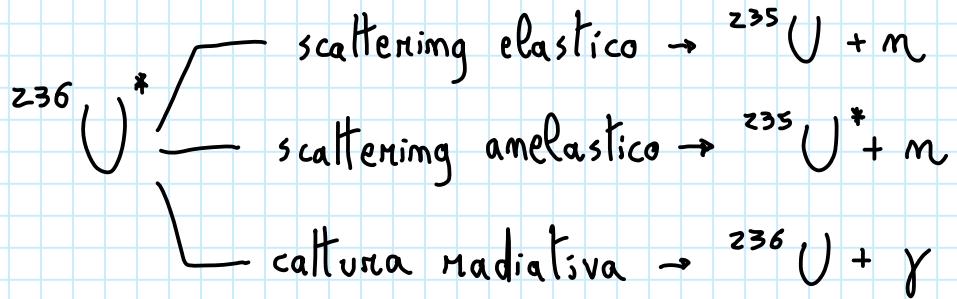
Vedendo il caso dell'Uranio  
osservo la cross-section alta  
mei neutrini termici e bassa  
mei veloci per il 235. Il 238  
invece ha  $\sigma$  più alta mei veloci.



Ma in media i neutrini rilasciati sono di 2 MeV quindi dei moderatori li rallentano fino a energie cinetiche ad alta  $\sigma$ . Il processo deve essere efficiente e non catturare neutrini.

~neutroni ed energia ~

Vediamo cosa può succedere ai neutroni oltre ad essere coinvolti in una fissione. Ci sono infatti reazioni che competono come:



Ogni reazione ha la sua sezione d'urto e in totale:

$$\sigma_{\text{TOT}} = \overline{\sigma_{\text{Ass}}} + \overline{\sigma_{\text{SCAT}}} = \overline{\sigma_{\text{FIS}}} + \overline{\sigma_{\gamma}} + \overline{\sigma_{\text{el}}} + \overline{\sigma_{\text{anel}}}$$

I neutroni scatterati comunque saranno prima o poi assorbiti. Quindi, se ogni fissione libera  $\sim 2,4$  neutroni quelli coinvolti in fissioni successive saranno:

$$n_{\text{FIS}} = n \frac{\sigma_{\text{FIS}}}{\sigma_{\gamma} + \sigma_{\text{FIS}}} \sim 2,06$$

Ricordando che per gli isotopi

|          | $\sigma_{\text{FIS}}$ | $\sigma_{\gamma}$ |
|----------|-----------------------|-------------------|
| $^{235}$ | 584                   | 96                |
| $^{238}$ | //                    | 2,72              |

possiamo vedere in abbondanza

naturale:

$$n_{\text{FIS}} = 2,4 \cdot \frac{584 \cdot 0,72}{96 \cdot 0,72 + 2,72 \cdot 99,28} \sim 1,3$$

Introduciamo il fattore di riproduzione  $K$ , cioè il numero di neutroni generati da un passo al successivo.

Considerando una costante di vita media  $\tau_g$  prima di un assorbimento, cioè il tempo di diffusione ( $10^{-3}$  s) e termalizzazione ( $10^{-6}$  s), posso dire che, se al tempo  $t$  ho  $N$  neutroni allora avrò  $KN$  neutroni a  $t + \tau_g$ ,  $K^2N$  in  $t + 2\tau_g$  etc.. Cioè:

$$\frac{dN}{dt} = (KN - N) \cdot \frac{1}{\tau_g} \quad \text{con } KN \text{ prodotti e } N \text{ consumati}$$

Cioè  $N(t) = N_0 \cdot e^{(K-1) \frac{t}{\tau_g}}$

Ci sono quindi 3 casi:

$K < 1$ ) I neutroni diminuiscono (così come l'energia prodotta).

È lo stato SUB-CRITICO, finirà la reazione a catena.

$K \approx 1$ ) I neutroni sono costanti e la reazione procede. Stato CRITICO.

$K > 1$ ) I neutroni crescono esponenzialmente. Caso SUPER-CRITICO, crea una bomba.

Questo è semplificato, dovremo considerare i neutroni ritardati generati da  $\beta$ -decay e altro.

L'energia prodotta nell'unità di tempo è data da quella prodotta per fissione  $Q$  per il numero di neutroni assorbiti (cioè di fissioni):

$$dE = Q N(t) dt = Q \cdot N_0 \cdot \exp \left[ (K-1) \cdot \frac{t}{\tau_g} \right] dt \Rightarrow E \propto \exp \left[ (K-1) \cdot \frac{t}{\tau_g} \right]$$

Il fattore K tiene conto di vari fattori. Non tutti i neutroni prodotti, abbiamo visto, partecipano alle fissioni.

Può accadere che:

- Alcuni neutroni veloci partecipano prima di rallentare quindi c'è un aumento dei partecipanti di un fattore  $\varepsilon$  di fissione veloce;
- Alcuni a causa del moderatore sono catturati entrando in resonanza con  $^{238}\text{U}$ , un fattore  $p$  mi dà la probabilità di fuga;
- Una porzione è assorbita dal reattore, nel fuel di come, nel moderatore etc... dando un fattore di utilizzo  $f$ ;
- Una parte di neutroni termici  $I_T$  e veloci  $I_F$  esce dal reattore.

Quindi  $K = \mathcal{M}_{\text{FIS}} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot f \cdot (1 - I_T)(1 - I_F)$  e lo voglio  $K \geq 1$

In un reattore infinito  $K = \mathcal{M}_{\text{FIS}} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot f$ .

Idealmente  $\mathcal{M}_{\text{FIS}} = K$ . In realtà  $\varepsilon \approx 1,03$ ;  $p \approx 0,75$ ;  $f \approx 0,83$   
 $(1 - I_T)(1 - I_F) \approx 0,97$

quindi  $\mathcal{M}_{\text{FIS}} \approx \frac{K}{0,97 \varepsilon p f} \approx 1,65$

Per avere  $K \approx 1$  si arricchisce l'uranio a circa 1,5%.

## ~ Altri fenomeni ~

Noi vogliamo  $K \approx 1$  o  $K < 1$  per la sicurezza. I neutrini ritardati possono aiutare a sostenere le reazioni e le banche di controllo non si muovono immediatamente.

Alcuni contaminanti generati da fissione + decadimenti hanno alta  $\sigma$  di cattura neutronica come lo Xeno (135). Inizialmente se ne forma molto poi si stabilizza la quantità.

## ~ Moderatori ~

I neutrini veloci vanno raffreddati e questa cosa viene fatta con scattering con i nuclei moderatori. Cerchiamo di vedere l'energia persa in uno scontro. Considero un nucleo moderatore fermo di massa  $M$  ed un neutrone di massa  $m_N$  e velocità  $v$ . Assumendo scattering di  $180^\circ$  (backscattering) ho la conservazione di energia e momento:

$$\frac{1}{2} m_N v^2 = \frac{1}{2} m_N v_{NF}^2 + \frac{1}{2} M v_{MF}^2$$

$$m_N v = -m_N v_{NF} + M v_{MF}$$

Per ogni neutrone risolvendo otengo:  $\frac{v_{FN}}{v} = \frac{(M - m_N)}{(M + m_N)}$

quindi 
$$\frac{E_{KNF,m}}{E_{KN,ini}} = \left( \frac{M - m_N}{M + m_N} \right)^2$$
 un buon moderatore ha  $M \approx m_N \Rightarrow$  basso A

In generale voglio:

- Basso costo;
- Basso A;
- Stabilità chimica;
- Alta densità;
- Buona sezione d'urto di scattering;
- Bassa  $\sigma$  di cattura.

I migliori sono:

- Grafite. Come contro è infiammabile;
- $H_2O$ . Come contro usa neutroni dando devesio;
- $D_2O$  (acqua pesante). Come contro costa.

Qui abbiamo semplificato molto, in realtà la situazione è più complessa e deve tenere conto di ogni angolo di scattering.

Definendo  $\xi = \ln\left(\frac{E_0}{E_1}\right)$  si può trovare che

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) \sim \frac{Z}{A} - \frac{4}{3A^2}$$

Dopo N collisioni quindi avrò:

$$\ln(E_N) = \ln(E_0) - N\xi$$

La più usata è la grafite.

## ~ FOTOVOLTAICO ~

I pannelli solari sono progettati per assorbire i raggi solari e generare da questa energia elettricità o calore. I pannelli sono costituiti da moduli che a loro volta si compongono di celle.

Ci sono alcuni termini importanti da citare prima di iniziare:

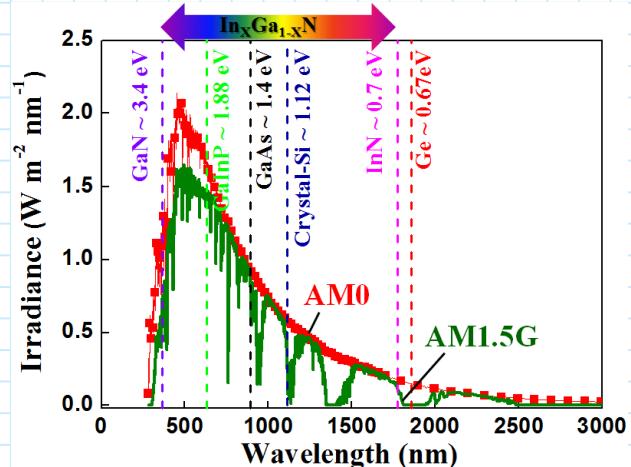
- **WATT DI PICCO**: è la potenza nominale di un dispositivo in laboratorio a condizioni standard di illuminazione (STC). Ci sono vari standard ma in genere la luce ha intensità 1000 W/m<sup>2</sup> con uno spettro simile a quello solare quando colpisce la superficie terrestre a latitudine 35°N massa d'aria 1,5 (quanto è filtrata dall'atmosfera) e con la cella a 25°C; Ci sono valori standard dell'airmass: AM0 = fuori atmosfera, AM1 = all'equatore; AM1.5 = a Milano (circa).

- **EFFICIENZA ( $\eta$ )**: è il rapporto tra l'energia prodotta dalla luce nelle condizioni standard e quella prodotta dalla cella.

- **AIRMASS**: È l'effetto dell'atmosfera sulla luce in una giornata senza nuvole, indica il cammino del raggio nell'atmosfera confrontato con un percorso verticale diretto nel mare. Per un'atmosfera omogenea e ideale dipende solo dalla latitudine (inclinazione del raggio). Vale:

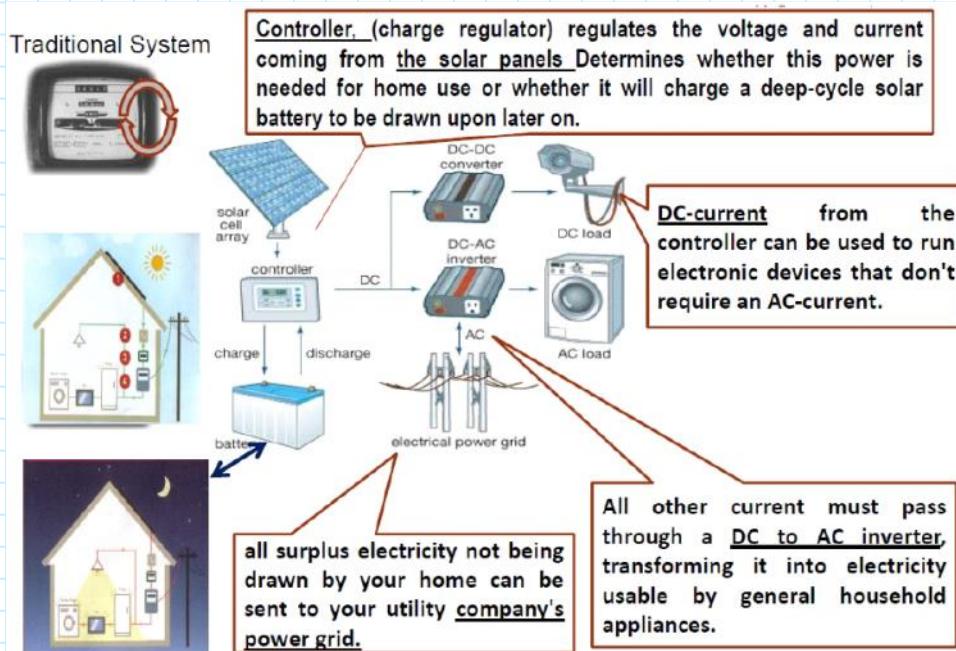
$$AM = \frac{l_\alpha}{h} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

a Milano  $\alpha \approx 48,5^\circ$



Quando si parla di fotovoltaico si coinvolgono tanti aspetti: le celle sono fatte principalmente di semiconduttori ma quando si parla di un intero ARRAY (insieme di moduli) si coinvolgono circa 36 celle connesse in serie e ci sono sistemi di controllo e tracking del sole, lenti e specchi... Tutto questo ha un costo. In genere la spesa si separa in: COMPONENTS MATERIALI e BALANCE OF SYSTEM

|                        |       |         |
|------------------------|-------|---------|
| Suddivise (in passato) | 70 %. | + 30 %. |
| (oggi)                 | 40 %. | + 60 %. |



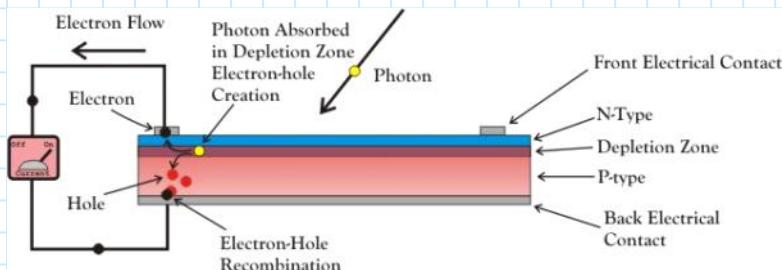
## ~ LA FISICA DEL PV ~

Alla base dei sistemi fotovoltaici ci sono due effetti noti da molto tempo:

- L'effetto fotovoltaico (Bequerel, 1839): elettroni sono nella VB, assorbono energia dalla luce e dall'eccitamento salta nella CB e diventa libero;
- L'effetto fotoelettrico (Einstein, 1905): elettroni sono emessi da solidi, liquidi o gas nel vuoto dopo aver assorbito la luce.

Una cella PV per funzionare richiede quattro fondamentali caratteristiche:

- I) L'assorbimento della luce che genera coppie elettroni-buche nella regione attiva;
- II) La separazione delle cariche opposte alle giunzioni a causa del potenziale;
- III) La diffusione delle cariche verso il potenziale avviene per una distanza media uguale alla lunghezza di diffusione prima di ricombinarsi;
- IV) La collezione in un circuito esterno delle cariche.



Alla base di queste operazioni ci sono i semiconduttori, il cui funzionamento è stato descritto per la prima volta nel 1950 da Van Roosbroeck.

Dall'equazione di Maxwell sappiamo che:  $\nabla \cdot E = q(p - n + N)$

con  $p, n$  cariche libere e  $N$  la carica netta data dal dopante.

L'equazione di continuità o conservazione della carica ha una forma doppia per elettroni e buche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_p = q(G - R_p - \frac{\partial p}{\partial t}) \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_m = q(R_m - G + \frac{\partial n}{\partial t}) \end{array} \right.$$

com

$G$  è il rate di generazione delle coppie elettrone-buca  
mentre  $R_p$  ed  $R_m$  è la generazione termica (o ricombinazione)

In generale il Silicio è il semiconduttore usato. genera strutture  $sp^3$  con GAP tra VB e CB. I gap possono essere diretti o indiretti. Si, Ge è indiretto; GaAs a gap diretto.

L'equazione di partenza è quella di Schrödinger:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \{ E - U(\vec{r}) \} \psi = 0 \quad \text{che con le condizioni al contorno}$$

$$\psi_{m\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{m\vec{k}}(\vec{r}) ; u_{m\vec{k}}(\vec{r}) = u_{m\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) \quad \text{Dove } \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

Definiamo il parametro di spessore  $\alpha$ , esso sarà:

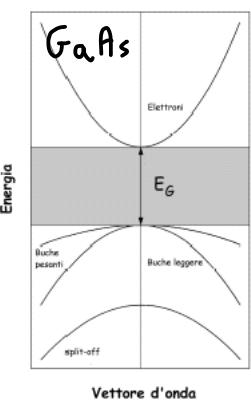
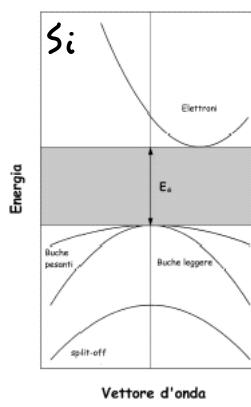
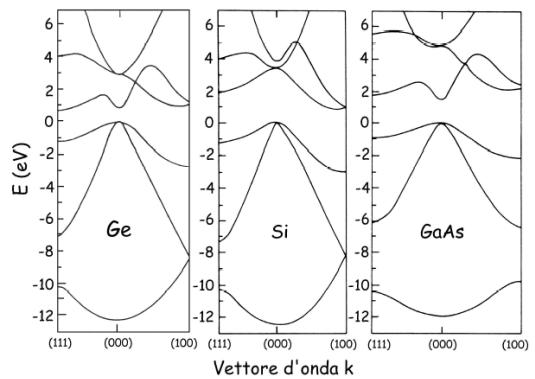
$$\alpha(hv) = A^* (hv - E_g)^{1/2}$$

per i materiali a gap diretto

$$\alpha_e(hv) = \frac{A \cdot (hv - E_g + E_p)^2}{\exp\left[\frac{E_p}{kT}\right] - 1}$$

per l'emissione a gap indiretto

$$\alpha_a(hv) = \frac{A(hv - E_g - E_p)}{1 - \exp\left[-\frac{E_p}{kT}\right]}$$



In generale quindi ho l'assorbimento dei fotoni che genera il flusso di elettroni. Si può scrivere:  $\Phi(\lambda) = \Phi_0 e^{-\alpha(\lambda) \cdot x}$ ; considerando la riflessione ho:

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0 (1 - R(\lambda)) \cdot e^{-\alpha(\lambda) \cdot x}$$

Chiaramente il rate di portatori generati è uguale alla variazione del flusso di fotoni:

$$G(x) = - \frac{d\Phi}{dx} = \alpha \cdot \Phi \cdot e^{-\alpha x}$$

Per studiare l'efficienza può essere utile vedere la concentrazione di portatori nella banda di conduzione. Gli elettroni sono:

$$n_0 = \frac{1}{V} \int_{E_c}^{E_{sup}} N(E) \cdot f(E) dE \quad \text{ma} \quad f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

distribuzione di energia in base a quella di Fermi

Mentre  $N(E) = \frac{8\pi V m}{\hbar^3} \sqrt{2m(E - E_c)}$  è la densità di stati tra energia  $E$  ed  $E + dE$

$$E_F = \frac{k^2 K^2}{2m} \quad \text{ed} \quad e^{-\frac{E-E_F}{kT}} = e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}} \cdot e^{-\frac{E-E_c}{kT}}$$

Quindi:

$$n_0 = N_c(T) e^{\frac{E_F - E_c}{kT}} \quad \text{com} \quad N_c(T) = 2 \left( \frac{2\pi k T m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

Similmente le buche sono:

$$p_0 = N_v(T) e^{\frac{E_v - E_F}{kT}} \quad \text{com} \quad N_v(T) = 2 \left( \frac{2\pi k T m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

La densità di carica segue la legge di ohme:  $n_0 \cdot p_0 = n_i^2$  ( $n_i$  costante).

In particolare com semiconduttori non drogati  $n_0 = p_0 = n_i$

possiamo quindi trovare  $E_F$ .

$$n_0 = N_c(T) \exp\left(\frac{E_F - E_c}{kT}\right) = p_0 = N_v(T) \exp\left(\frac{E_v - E_F}{kT}\right) \quad \text{quindi}$$

$$\exp\left(\frac{E_F - E_c - E_v + E_F}{kT}\right) = \frac{N_v(T)}{N_c(T)} \quad \text{cioè}$$

$$2E_F = kT \ln\left(\frac{N_v(T)}{N_c(T)}\right) + E_c + E_v \quad \text{com} \quad E_g = E_c - E_v$$

$$2(E_c - E_F) = 2(E_F - E_v)$$

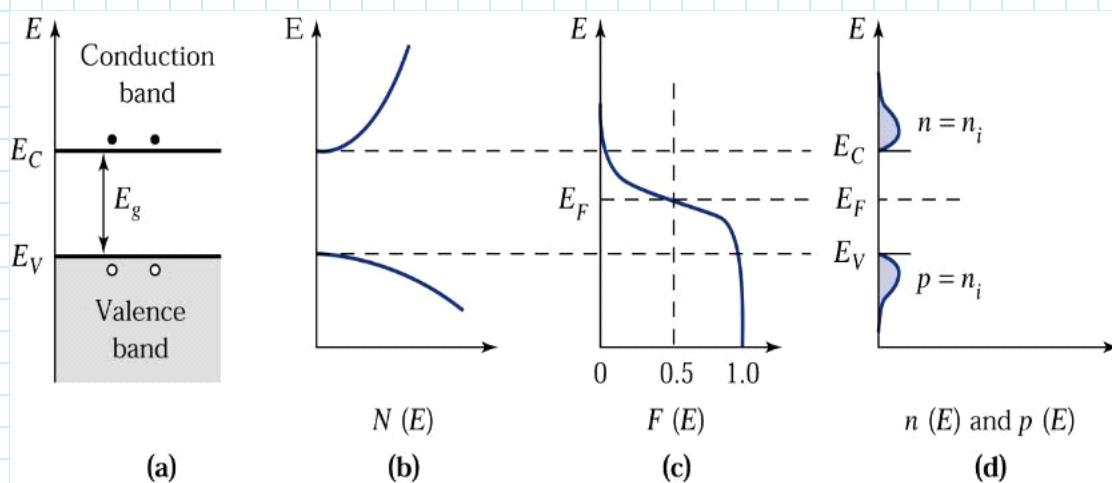
Quindi  $E_F = \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_v}{N_c}\right) + \frac{E_c + E_v}{2} \rightsquigarrow E_g + 2E_v$

[--]

$$E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_v}{N_c}\right) \quad \text{com} \quad E_g = E_g^0 - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} \quad \begin{cases} \alpha = 4,73 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \\ \beta = 636 \text{ K} \\ E_g^0 = 1,170 \text{ eV} \end{cases}$$

Quindi possiamo dire che:  $n_i = \sqrt{n_0 p_0} = \sqrt{N_c N_v} \cdot e^{-\frac{E_g}{kT}}$

Potrei riscrivere:  $n_0 = n_i \cdot e^{\frac{E_F - E_c}{kT}}$  e  $p_0 = n_i \cdot e^{\frac{E_v - E_F}{kT}}$



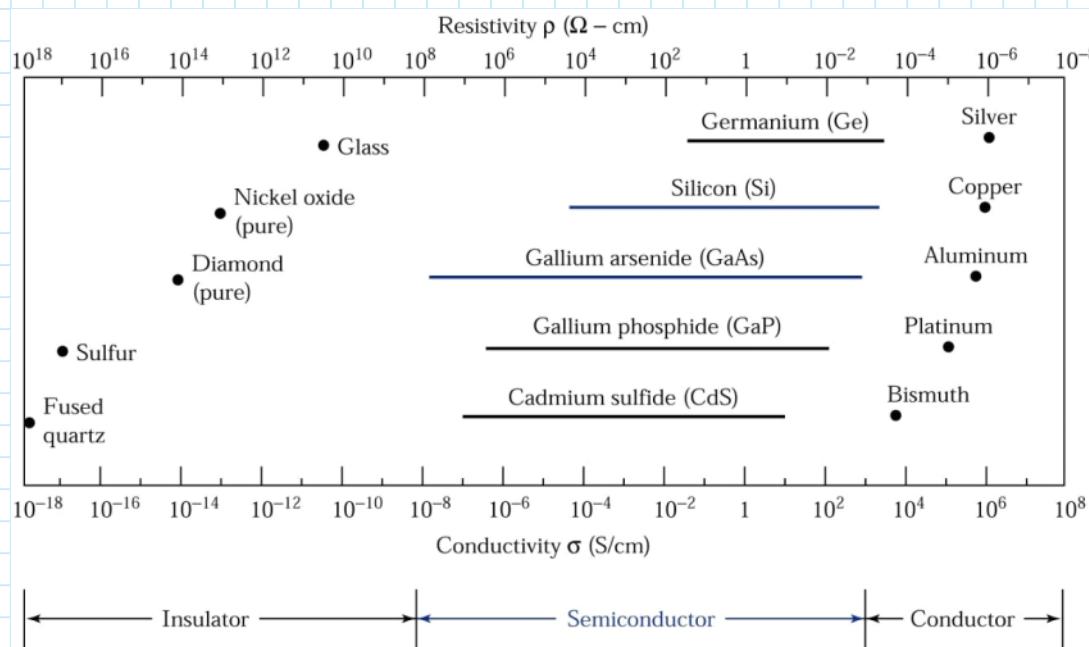
In accordo con il modello di Boltzmann la probabilità che un elettrone assorba un'energia da quella termica è proporzionale a:  $P \sim \exp(-\frac{E_g}{kT})$   
quindi genererebbe una coppia  $e^- - e^+$

La concentrazione di portatori  $n_i p_i \propto e^{-\frac{E_g}{kT}}$

Questi sono detti portatori intrinseci e sono presenti anche nei cristalli puri.

La loro concentrazione è data da:

$$n_i = p_i \propto e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_g \sim 1,12 \text{ eV Si} \\ E_g \sim 0,66 \text{ eV Ge} \\ E_g \sim 1,42 \text{ eV GaAs} \end{array} \right.$$



~ PORTATORI ESTRINSECI, droganti ~

Ci sono due tipi di portatori:

- **DONORI**) Sono materiali del gruppo **IV** con cui drogo un semiconduttore  
**droggaggio**) **IV**. In genere hanno un elettrone in più di quelli necessari all'ottetto. L'elettrone è debolmente legato quindi si separa lasciando una carica positiva.

• **ACCETTOREI**) Sono materiali del gruppo III con cui drogo un semiconduttore  
 droggaggio) IV. In generale hanno un elettronico in meno di quelli necessari  
 p all'ottetto. Rimane quindi una buca localizzata in quanto i legami  
 covalenti non sono sufficienti.

Dal punto di vista delle bande le impurezze si localizzano in mezzo al GAP tra VB e CB. Ci sono forze coulombiane comunque.  
 Il fatto che ci sia energia di legame, anche se inferiore al GAP, implica che a basse T non partecipano alla conduzione.

Nonostante la presenza di droganti la carica totale è zero, ma esistono comunque accettori e donatori.

$$q_{\text{TOT}} = N_D + P_0 - N_A - M_0 = 0 \Rightarrow N_D + P_0 = N_A + M_0$$

prendendo  $M_0 = P_0 = n_i$ : trovo:

$$M_0 = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + m_i^2}$$

Ricordando la definizione dei portatori e dall'equilibrio di carica

$$n + N_A^- = p + N_D^+ \text{ mi da:}$$

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + g_D \cdot \exp\left[\frac{E_F - E_D}{kT}\right]}$$

$$N_A^+ = \frac{N_A}{1 + g_A \cdot \exp\left[\frac{E_A - E_F}{kT}\right]}$$

pomendo  $n = N_D$  ho  $E_c - E_F = kT \ln\left(\frac{N_c}{N_D}\right)$ ;  $p = N_A$  e  $E_F - E_v = kT \ln\left(\frac{N_v}{N_A}\right)$

• Semiconduttori di tipo n abbiamo  $n_0 = n_d + n_i$

$$\text{Per basse temperature } E_F = \frac{E_c - E_D}{2} + \frac{KT}{2} \ln\left(\frac{N_D}{N_c}\right)$$

$$\text{Per medie temperature } E_F = E_c + KT \ln\left(\frac{N_D}{N_c}\right)$$

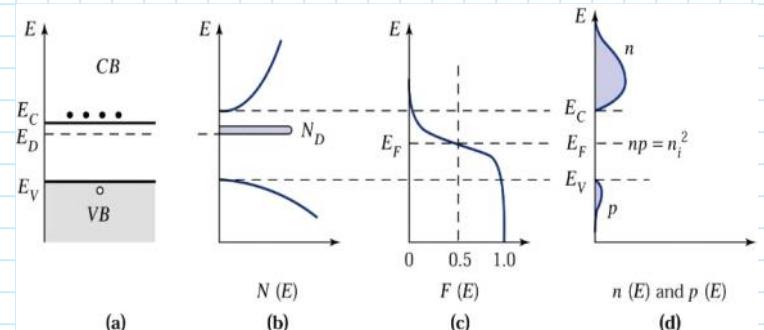
$$\text{Per alte temperature } E_F = \frac{E_g}{2}$$

(a) Schema delle bande

(b) Dos

(c) Distribuzione di Fermi

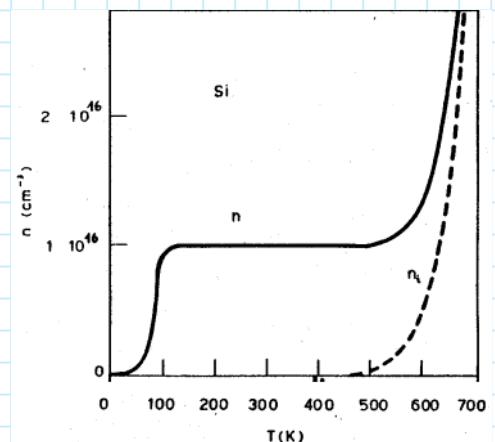
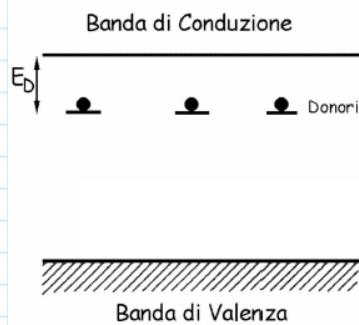
(d) Concentrazione di cariche



Tipicamente i drogaggi sono della ppm o ppb. In alcuni casi di alto drogaggio si parla di semiconduttori degenerati: la banda delle impurità si lega con la CB (o la VB) e il comportamento è quasi metallico.

In genere la temperatura

cambia il numero di elettroni  
di conduzione. Dappressa i  
dopanti sono promossi a basse



$T$  (fino a 100 K, poi sono tutti promossi fino ad  $E_D/2$ ).

Oltre alla formazione di coppie  $e^- - p^+$  ci sono due importanti operazioni:  
la ricombinazione ed il trasporto.

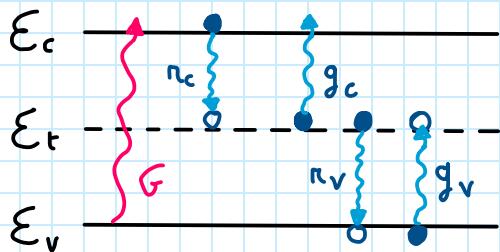
## ~ Processi di ricombinazione ~

Ci sono tre processi fondamentali di ricombinazione:

- **BANDA-BANDA**: è il processo radiativo predominante in cristalli senza difetti e in semiconduttori a gap diretto. In gap indiretti partecipano anche fomomi per conservazione del momento;
- **NON-RADIATIVA DI IMPURITÀ DI BANDA**: anche chiamata SRH (Shockley-Read-Hall) È dominante in semiconduttori a gap indiretto con impurità. È un processo non radiativo e l'energia è rilasciata come fomomi;
- **RICOMBINAZIONE AUGER**: compete con la banda-banda in gap diretti ad alto dopaggio. L'energia e il momento prodotti da una ricombinazione  $e^- + p^+$  sono forniti ad altri elettroni o buche. Essendo a tre compi è un processo estremamente raro a meno di alte concentrazioni.

Si puo' calcolare il tempo di vita medio:  $\frac{1}{\tau_{TOT}} = \frac{1}{\tau_{RAD}} + \frac{1}{\tau_{SRH}} + \frac{1}{\tau_{AUGER}} + \frac{1}{\tau_{SURFACE}}$

Vediamo piu' nel dettaglio la ricombinazione SRH.



$$R(m, p, T) - G_f(T) = - \frac{\partial}{\partial t} (p(t))$$

## ~ Trasporto ~

Usiamo il modello di Drude: gli elettroni sono un gas ideale nei solidi.

Si basa su assunzioni come:

- Non ho interazione e-e'; le interazioni avvengono tramite urti;
- Il cristallo cambia la massa dell'elettrone in una efficace che racchiude le interazioni em;
- Gli e- tendono all'equilibrio termico.

In generale l'elettrone dopo la collisione ha velocità data dalla temperatura del cristallo e da eventuali campi elettrici che danno moti di deriva.

La densità di corrente è:  $J = -ne\bar{v}_g$

I contributi principali agli urti sono:

- Impurezza e difetti di cristalli come dopanti, dislocazioni, vacanze...
- Vibrazioni reticolari.

È possibile definire alcune grandezze caratteristiche. Abbiamo detto che

$\bar{v} = -ev_{avg}$  con  $v_{avg}$  velocità media data dal drift del campo. Se tra due urti passa in media un tempo  $\tau$  allora posso dire:

$$v_{avg} = -\frac{eE\tau}{m^*} \text{ quindi } J = \frac{ne^2\tau}{m^*} \cdot E = \sigma E \text{ com} \begin{array}{l} \text{conducibilità} \\ \text{di Drude} \end{array}$$

Da notare che  $\tau$  dipende dalle impurizzze e dal cristallo. Più ho

impurizzze più  $\tau$  è piccolo e in genere:  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{imp}} + \frac{1}{\tau_{cr}}$

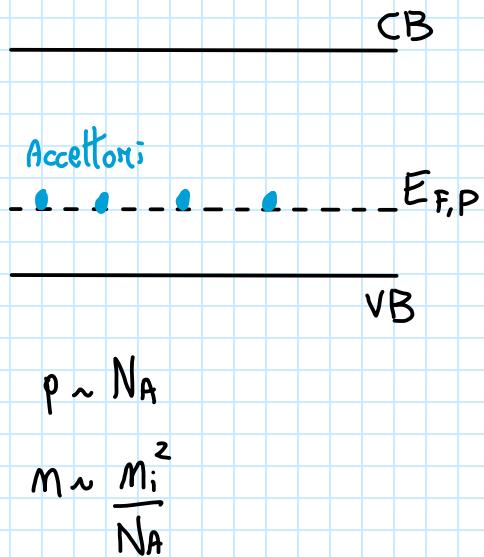
Con poche impurizzze  $\frac{1}{\tau_{imp}} \approx 0$

## ~ GIUNZIONE p-n ~

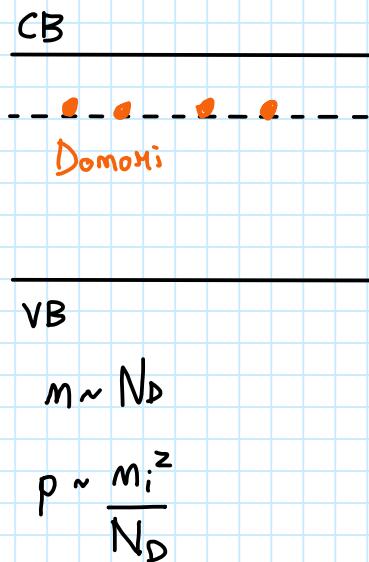
Immaginiamo di avere un semiconduttore, una parte d'oggetto n e una p.

Le due porzioni separate a causa della presenza di droganti avranno livelli di Fermi differenti:

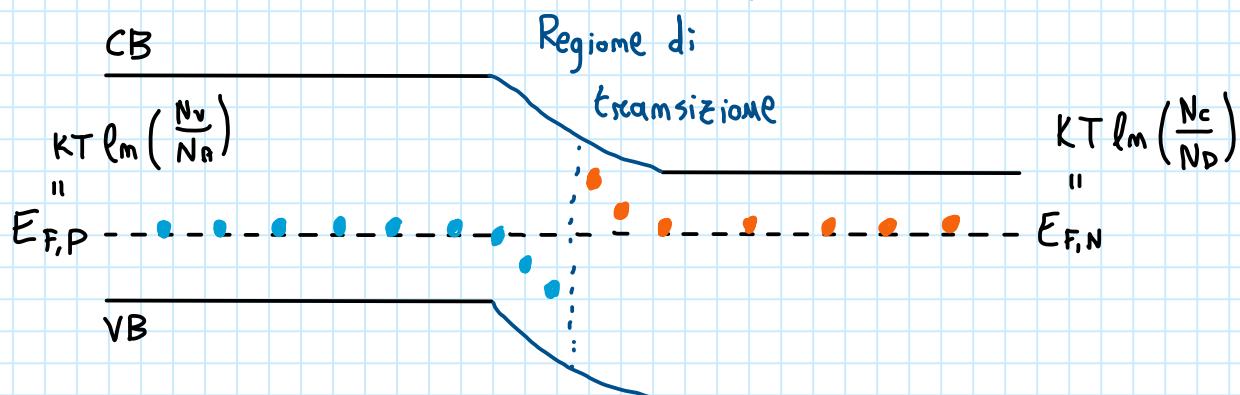
p-junction



n-junction



Una volta unite le giunzioni però il livello di Fermi deve essere uno, quindi le bande subiscono uno shift in energia:



Avendo da un lato un eccesso di accettori e dall'altro di donatori si genera una corrente, che applicando un campo  $E = \nabla\phi$  è data da:

$$\bar{J}_p = \vec{J}_p^{\text{DRIFT}} + \vec{J}_p^{\text{DIFF}} = q M_p p \nabla\phi - q D_p \nabla p \quad \text{con } M_p = + \frac{e \tau_p}{m_p^*}$$

$$\vec{J}_n = \vec{J}_n^{\text{DRIFT}} + \vec{J}_n^{\text{DIFF}} = q M_n m \nabla\phi - q D_n \nabla m \quad \text{con } M_n = - \frac{e \tau_n}{m_n^*}$$

dove  $\vec{J}^{\text{DRIFT}} \sim \sigma E = q M \cdot \#_{\text{PORT}} \cdot \nabla\phi$   $D \sim 1 \div 100 \text{ cm}^2/\text{s}$

$$J^{\text{DIFF}} \sim q v \frac{\partial \#_{\text{PORT}}}{2x} \delta x \sim q v \frac{\partial \#_{\text{PORT}}}{2x} \cdot v \cdot \tau_{\text{SCATT}} \sim q \frac{\partial \#_{\text{PORT}}}{2x} \cdot D$$

Il campo avrà la forma:

$$\frac{d\bar{E}}{dx} = \frac{e}{\epsilon} (p - m + N_D - N_A) \quad \text{quindi le equazioni diventano, derivando,}$$

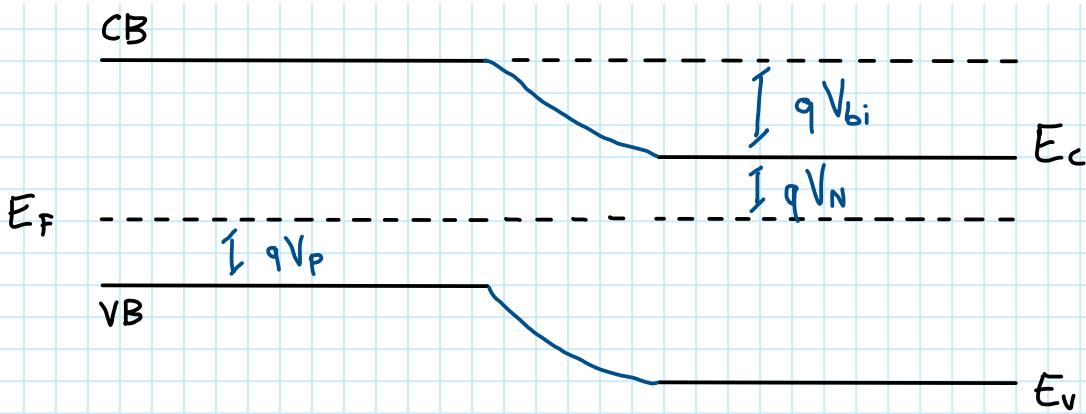
$$q M_p \frac{d(p\bar{E})}{dx} - q D_p \frac{d^2 p}{dx^2} = q (G - R_p) \quad R_p = \frac{\Delta M_p}{\tau_m}$$

$$q M_n \frac{d(m\bar{E})}{dx} + q D_n \frac{d^2 m}{dx^2} = q (R_n - G) \quad R_n = \frac{\Delta P_m}{\tau_p}$$

quindi si ricava:

$$G(x) = \frac{\Delta P_n}{\tau_p} - D_p \frac{d^2 \Delta P_n}{dx^2}$$

$$G(x) = \frac{\Delta M_p}{\tau_m} - D_n \frac{d^2 \Delta M_p}{dx^2}$$



$$qV_{bi} = E_{gap} - (qV_N + qV_p) = KT \left\{ \ell_m \left( \frac{N_c N_v}{m_i^2} \right) - \left[ \ell_m \left( \frac{N_c}{m_{mo}} \right) + \ell_m \left( \frac{N_v}{p_{po}} \right) \right] \right\}$$

$$\Rightarrow qV_{bi} = KT \ell_m \left( \frac{M_{mo} \cdot p_{po}}{m_i^2} \right) \sim KT \ell_m \left( \frac{N_A N_D}{m_i^2} \right)$$

$$\text{Ma } p_{po} = N_A \quad M_{po} = \frac{m_i^2}{N_A} \quad M_{mo} = N_D \quad p_{mo} = \frac{N_D}{m_i}$$

$$\text{quindi } M_{po} \cdot p_{po} = M_{mo} \cdot p_{mo} = m_i^2$$

$$\text{Quindi } V_{bi} = \frac{KT}{q} \ell_m \left( \frac{M_{mo}}{M_{po}} \right) = \frac{KT}{q} \left( \frac{p_{po}}{p_{mo}} \right) \quad \text{quindi senza campo esterno}$$

$$p_{mo} = p_{po} e^{-\frac{qV_{bi}}{KT}} \quad M_{po} = M_{mo} e^{-\frac{qV_{bi}}{KT}}$$

Ma l'equazione di Boltzmann da:

$$n = n_i \exp \left( \frac{E_F - E_N}{KT} \right)$$

$$p = n_i \exp \left( \frac{E_P - E_F}{KT} \right)$$

$$\text{se } \phi_P = -\frac{E_P}{q} \quad \text{e} \quad \phi_N = -\frac{E_N}{q}$$

$$m_p = m_i^2 \exp \left( \frac{q(\phi_P - \phi_N)}{KT} \right)$$

Ma abbiamo visto che

$$\begin{cases} J_m^{\text{D.F.}} = -qM_m \cdot m \nabla \phi_m \\ J_p^{\text{D.F.}} = -qM_p p \nabla \phi_p \end{cases}$$

Se  $V = \phi_p - \phi_n$  vicino alla regione di transizione allora

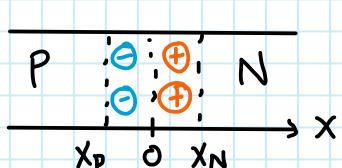
$$M_p = M_{p0} e^{\frac{qV}{kT}}$$

$$p_n = p_{n0} e^{\frac{qV}{kT}}$$

Poiché posso definire quindi una lunghezza di transizione in base al potenziale:

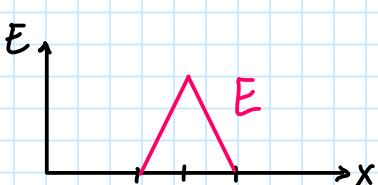
$$W_D(V) = X_N + X_P$$

Ma la regione di svuotamento è t.c. a bordo regione  $E=0$



Mentre in centro ho  $E_p = \frac{q}{\epsilon} N_A x_p$ ;  $E_n = \frac{q}{\epsilon} N_D x_N$

$\Rightarrow [\dots]$



$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q} \left( \frac{N_A + N_D}{N_A \cdot N_D} \right) (V_{bi} - V)}$$

Per equazione di continuità in condizione di basso campo:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial x^2} - \frac{p_m - p_{m0}}{D_T} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$p_m - p_{m0} = p_{m0} \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) \left( e^{-\frac{(x-x_p)}{L_p}} \right) \quad \text{con} \quad L_p = \sqrt{D_T}$$

Quindi  $J_p^{\text{D.F.}} = -qD_p \frac{\partial p_m}{\partial x} \Big|_{x_m} = \frac{qD_p p_{m0}}{L_p} \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right)$

Similmente ricavo  $J_N^{\text{DIF.}} = -qD_N \frac{\partial n_p}{\partial x} \Big|_{x_p} = \frac{qD_N n_p}{L_m} \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right)$

Quindi  $J_{\text{TOT}} = J_p + J_N = J_s \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right)$

Quindi, considerando una photocorrente  $J_L$  legata alla luce incidente o al campo esterno:

$$J = J_s \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) - J_L$$

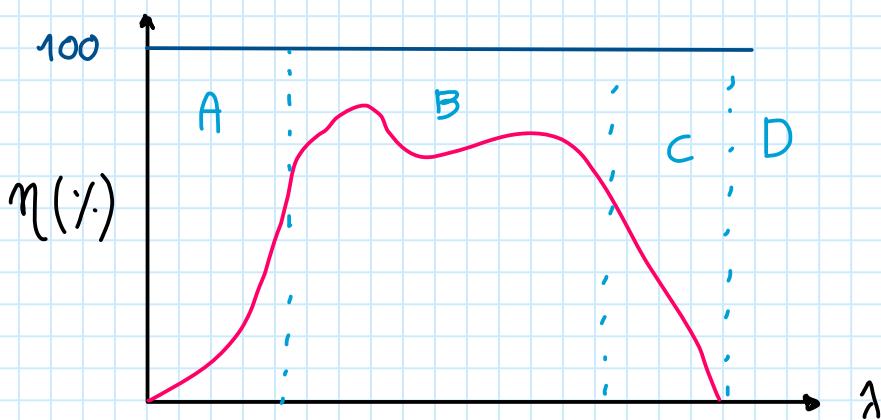
In generale  $J_L$  è data da:

$$J_L = q \cdot \int_0^{\infty} \eta(\lambda) \cdot (1 - R_\lambda) \cdot \Phi_o(\lambda) \cdot e^{-\alpha_\lambda d} d\lambda$$

con  $R_\lambda$  riflessione,  $\alpha_\lambda$  assorbimento,  $\Phi$  flusso incidente

$\eta$  efficienza di conversione  $\gamma \rightarrow e^-$   $\eta = \frac{J_{\text{PH}}}{\Phi(\lambda) \cdot q} \cdot \frac{hc}{\lambda}$

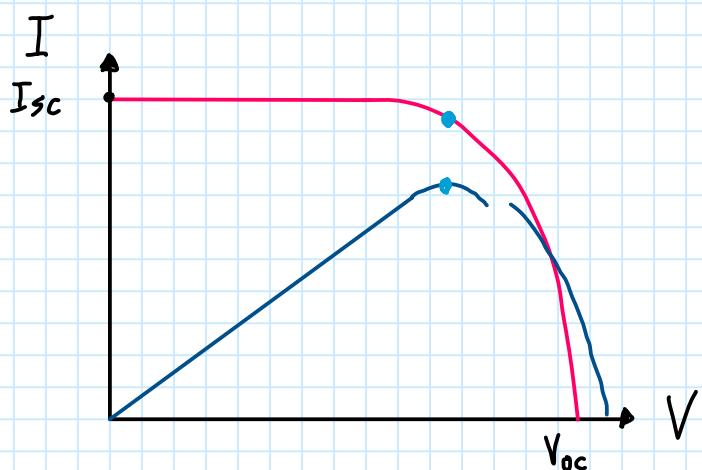
In generale:



Dal grafico osserviamo varie perdite caratterizzate in ogni regime da alcuni fenomeni:

- A) Assorbimento superficiale e ricombinazione
- B) Riflessione e lunghezza di ricombinazione
- C) Effetti di superficie e basso assorbimento
- D) Energia insufficiente a superare il gap.

~ POTENZA MASSIMA ~



$$P_{MAX} = V_{MAX} \cdot I_{MAX}$$

$$\eta = \frac{I_{sc} \cdot V_{oc}}{P_{IN}} \cdot FF$$

Fill Factor

L'assorbimento di luce genera corrente, la separazione di cariche  
voltaggio.