Kapittel 11

Funksjoner av 2 variabler

Funksjon av 1 variabel $f(x)$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

For hver x-verdi tilordner funksjonen en funksjonsverdi $f(x)$.

EKS: $y = f(x) = x^2 + 2$.

Funksjon av 2 variabler $f(x,y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

For hver kombinasjon (x,y) [Punkt i xy-planet] tilordner funksjonen en funksjonsverdi $f(x,y)$

<u>EKS</u> $\quad z = f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad$ (EKS1.m)

$$f(1,2) = 1^2 + 2^2 = \underline{\underline{5}}$$

$$f(0,1) = 0^2 + 1^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$f(-2,1) = (-2)^2 + 1 = \underline{\underline{5}}$$

Har et bunnpunkt.

Grafen til f er mengden av alle talltripler i $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) slik at $z = f(x,y)$. Grafen blir normalt en overflate i rommet.

EKS

$$f(x,y) = \sin^2 x + \sin^2 y$$ (EKS2.m)

- Mange toppunkter
- Mange bunnpunkter
- Sadelpunkter

- Hvordan lokalisere slike punkter?
- Hvordan klassifisere slike punkter?

Kontinuitet

For funksjoner av 1 variabel $f(x)$ sier vi at $f(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ dersom

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$ → Høyresidig grense → Venstresidig grense

---

For funksjoner av 2 variabler $f(x,y)$ sier vi at $f(x,y)$ er kontinuerlig i $(x,y) = (a,b)$ dersom

$$f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

Det er mulig å la $(x,y) \to (a,b)$ fra mange mulige retninger. Hvis $f(x,y)$ går mot ulike verdier fra ulike retninger eksisterer ikke grenseverdien. "$\frac{0}{0}$"-uttrykk er utfordrende

EKS

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$\boxed{\text{EKS3.m}}$

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2+y^3) = 3^2+2^3 = \underline{\underline{17}}$$

EKS

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$\boxed{\text{EKS 4.m}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Prøver først å nærme oss (0,0) langs linja x=0.

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \underline{0} = 0$$

Prøver så å nærme oss (0,0) langs linja y=0

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \underline{1} = 1$$

Får ulik verdi alt etter hvilken retning vi nærmer oss (0,0) fra.

Grenseverdien eksisterer ikke.

f(x,y) kan umulig være kontinuerlig i (0,0).

11.1 Partiell deriverte og anvendelser

For funksjoner av en variabel $f(x)$ benytter vi derivasjon til å lokalisere kritiske punkter (stasjonære punkter) $f'(x)=0$ og klassifisere dem som bunnpunkt, toppunkt, sadelpunkt $(f''(x)>0,\ f''(x)<0,\ f''(x)=0)$.

Deriverer vi funksjoner av to variabler med hensyn på den ene variablen (den andre variabelen behandler vi som om den var en konstant) kaller vi det <u>partiell derivasjon</u>.

<u>DEFINISJON</u>

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

EKS

$$f(x,y) = x^2 + 2xy^3 + y^4 - 2 \qquad \boxed{\text{EKS5.m}}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\underline{2x + 2y^3}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \underline{\underline{6xy^2 + 4y^3}}$$

EKS

$$f(x,y) = \sin^2 x + \sin^2 y \qquad \boxed{\text{EKS2.m}}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x = \underline{\underline{\sin 2x}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin y \cos y = \underline{\underline{\sin 2y}}$$

DEFINISJON

Gradientvektoren $\vec{\nabla} f$ til en funksjon av to variabler er lik

$$\vec{\nabla} f(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)]$$

For de to forrige eksemplene:

$\vec{\nabla} f(x,y) = [2x + 2y^3, 6xy^2 + 4y^3]$ $\qquad$ $\underline{\vec{\nabla} f(1,2) = [18, 56]}$

$\vec{\nabla} f(x,y) = [\sin 2x, \sin 2y]$ $\qquad$ $\underline{\vec{\nabla} f(0, \frac{\pi}{4}) = [0, 1]}$

DEFINISJON

Et punkt $(x,y)=(a,b)$ kalles for et stasjonært punkt (kritisk punkt) for funksjonen dersom $\vec{\nabla} f(a,b) = \vec{0}$.

Det er det samme som at $f_x = f_y = 0$

TEOREM

$\vec{\nabla} f$ er gradientvektoren for en deriverbar funksjon $f(x,y)$ i punktet (a,b). Anta at her er $\vec{\nabla} f \neq 0$.

- Da vil $\vec{\nabla} f$ peke i den retningen f vokser raskest
- Og $-\vec{\nabla} f$ peker i den retningen f synker raskest
- Retningene vinkelrett på $\vec{\nabla} f$ er retninger hvor f ikke vokser eller synker.

EKS $f(x,y) = x^4 - 3x^2y + 2y^3$ $\boxed{\text{EKS6.m}}$

Finn $\vec{\nabla} f(1,2)$

$f_x = 4x^3 - 6xy$ $\qquad f_x(1,2) = -8$

$f_y = -3x^2 + 6y^2$ $\qquad f_y(1,2) = 21$

$$\vec{\nabla} f(1,2) = [-8, 21]$$

EKS $g(x,y) = \sin(2x+y)$ $\boxed{\text{EKS7.m}}$

Finn retningen hvor $g(x,y)$ vokser raskest i punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

$g_x = 2\cos(2x+y)$ $\qquad g_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$g_y = \cos(2x+y)$ $\qquad g_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\vec{\nabla} g\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left[-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

EKS Temperaturen på en flate er gitt ved $T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$ $\boxed{\text{EKS8.m}}$

Maur står i $P(-1,2)$.

a) Hva er temperaturen i $P(-1,2)$?

$$\underline{T(-1,2)} = 2(-1)^2 - 4 \cdot 2^2 = \underline{\underline{-14}}$$

b) I hvilken retning vokser temperaturen raskest?

$$T_x = 4x$$

$$T_y = -8y$$

$$\vec{\nabla} T(x,y) = [4x, -8y] \qquad \vec{\nabla} T(-1,2) = \underline{[-4,-16]}$$

c) I hvilken retning minker temperaturen raskest?

$$-\vec{\nabla} T(-1,2) = -[-4,-16] = \underline{\underline{[4, 16]}}$$

d) I hvilke retninger er temperaturen uforandret?

La oss kalle retningen $[g,h]$

$$[-4,-16] \cdot [g,h] = 0$$

$$-4g - 16h = 0$$

$$g = -4h$$

$$[g,h] = [-4h, h] = h[-4,1]$$ (h kan være både positiv og negativ)

Retningen $\underline{\underline{[-4,1] \text{ og } [4,-1]}}$

EKS $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\boxed{\text{EKS1.m}}$

Finn alle stasjonære punkt for $f(x,y)$.

$f_x = 2x$ $2x = 0$ og $2y = 0$

$f_y = 2y$ $x = 0$ og $y = 0$

Stasjonært punkt: $\underline{\underline{(x,y) = (0,0)}}$

Ser av grafen at det er et bunnpunkt, men hvordan finne det ved regning?

Vi må introdusere andreordens partielt deriverte

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

$\to$ $f_{xy} = f_{yx}$ dersom andre ordens deriverte er kontinuerlige funksjoner.

DEFINISJON

Hessematrisen til $f(x,y)$ er gitt ved

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

TEOREM

Gitt funksjonen $f(x,y)$ som er deriverbar.

Punktet (a,b) er et stasjonært punkt.

Regn ut determinanten til Hessematrisen i punktet (a,b).

$$\Delta = \det(H) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

$$= f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - \left[f_{yx}(a,b)\right]^2$$

a) Hvis $\Delta > 0$ og $f_{xx}(a,b) > 0$ er (a,b) et lokalt minimum

b) Hvis $\Delta > 0$ og $f_{xx}(a,b) < 0$ er (a,b) et lokalt maksimum

c) Hvis $\Delta < 0$ er (a,b) ikke minimum eller maksimum, men et sadelpunkt.

d) Hvis $\Delta = 0$ kan vi ikke konkludere (må studere tredje ordens partielt deriverte)

EKS $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\boxed{\text{EKS1,m}}$

Finn og klassifiser alle stasjonære punkter.

$f_x = 2x$ $f_y = 2y$ Stasjonært pkt: (0,0)

$f_{xx} = 2$ $f_{xy} = 0$

$f_{yy} = 2$ $f_{yx} = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = \underline{4}$$

Siden $\Delta > 0$ og $f_{xx} > 0$ er (0,0) et lokalt minimum

EKS $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\boxed{\text{EKS9,m}}$

Finn og klassifiser alle stasjonære punkter.

$2x = 0$ $-2y = 0$

$x = 0$ $y = 0$

$f_x = 2x$ $f_y = -2y$ $f_{xy} = 0$

$f_{xx} = 2$ $f_{yy} = -2$ $f_{yx} = 0$

(0,0) er stasjonært punkt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Siden $\Delta < 0$ er (0,0) et sadelpunkt

(Hestesadel - et bein ned på hver side)

EKS $\quad f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $\quad$ $\boxed{\text{EKS10.m}}$

Finn og klassifiser alle stasjonære punkter

$f_x = 3x^2 - 3y^2 \qquad f_y = -6xy$

$3x^2 - 3y^2 = 0 \qquad -6xy = 0$

$x^2 = y^2 \qquad xy = 0$

$x = y$ eller $x = -y$

$y \cdot y = 0$ eller $-y \cdot y = 0$

$y = 0$

$x = 0$

$(0,0)$ er stasjonært punkt

$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6x \quad f_{xy} = -6y \quad f_{yx} = -6y$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{vmatrix} = -36x^2 - 36y^2 = -36(x^2+y^2)$$

$$\Delta(0,0) = -36(0^2+0^2) = 0$$

Siden $\Delta = 0$ kan vi ikke klassifisere det stasjonære punktet

(Kalles en apesadel - et bein ned på hver side og halen ned bakover)

$$f_{xx} = -8x e^{-2(x^2+y^2)} + (1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)} \cdot (-4x)$$

$$= \underline{-4x(3-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)}}$$

$$f_{yy} = -4x e^{-2(x^2+y^2)} - 4xy e^{-2(x^2+y^2)} \cdot (-4y) = \underline{-4x(1-4y^2)e^{-2(x^2+y^2)}}$$

$$f_{yx} = (1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)}(-4y) = \underline{-4y(1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)}}$$

$$f_{xy} = -4y e^{-2(x^2+y^2)} - 4xy e^{-2(x^2+y^2)}(-4x) = \underline{-4y(1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4x(3-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)} & -4y(1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)} \\ -4y(1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)} & -4x(1-4y^2)e^{-2(x^2+y^2)} \end{vmatrix}$$

$$= 16x^2(3-4x^2)(1-4y^2)e^{-4(x^2+y^2)} - 16y^2(1-4x^2)^2 e^{-4(x^2+y^2)}$$

$$= \underline{-16(4x^4+4x^2y^2-3x^2+y^2)e^{-4(x^2+y^2)}}$$

$$\Delta\left(-\tfrac{1}{2},0\right) = 8e^{-1} > 0 \qquad f_{xx}\left(-\tfrac{1}{2},0\right) = 4e^{-1/2} > 0$$

$$\Delta\left(\tfrac{1}{2},0\right) = 8e^{-1} > 0 \qquad f_{xx}\left(\tfrac{1}{2},0\right) = -4e^{-1/2} < 0$$

$\left(-\tfrac{1}{2},0\right)$ er lokalt minimum

$\left(\tfrac{1}{2},0\right)$ er lokalt maksimum

EKS $f(x,y) = x e^{-2(x^2+y^2)}$ $\boxed{\text{EKS11.m}}$

Finn og klassifiser alle stasjonære punkter

$$f_x = 1 \cdot e^{-2(x^2+y^2)} + x \cdot e^{-2(x^2+y^2)} \cdot (-4x)$$
$$= (1-4x^2)\, e^{-2(x^2+y^2)}$$

$$f_y = x \cdot e^{-2(x^2+y^2)} \cdot (-4y) = -4xy\, e^{-2(x^2+y^2)}$$

$$(1-4x^2)\, e^{-2(x^2+y^2)} = 0 \qquad -4xy\, e^{-2(x^2+y^2)} = 0$$

$$1-4x^2 = 0 \qquad -4xy = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ eller } x = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$

$$-4\left(-\tfrac{1}{2}\right)y = 0 \qquad -4 \cdot \tfrac{1}{2} y = 0$$
$$2y = 0 \qquad -2y = 0$$
$$\underline{y = 0} \qquad \underline{y = 0}$$

Stasjonære punkt: $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ og } \left(\frac{1}{2}, 0\right)}}$

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - x^2 - y^2$$ EKS12.m

Finn og klassifiser alle stasjonære punkter.

$$f_x = 6xy^2 - 2x = 2x(3y^2-1)$$
$$f_y = 6x^2y - 2y = 2y(3x^2-1)$$

Må løse
$$2x(3y^2-1) = 0$$
$$2y(3x^2-1) = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Stasjonære punkter: $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f_{xx} = 6y^2 - 2 \qquad f_{yy} = 6x^2 - 2 \qquad f_{yx} = f_{xy} = 12xy$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6y^2-2 & 12xy \\ 12xy & 6x^2-2 \end{vmatrix} = (6y^2-2)(6x^2-2) - (12xy)^2$$

Punkt	Δ	f_{xx}	Type
$(0,0)$	4	-2	Toppunkt
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	-16	0	Sadelpunkt
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	-16	0	Sadelpunkt
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	-16	0	Sadelpunkt
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	-16	0	Sadelpunkt