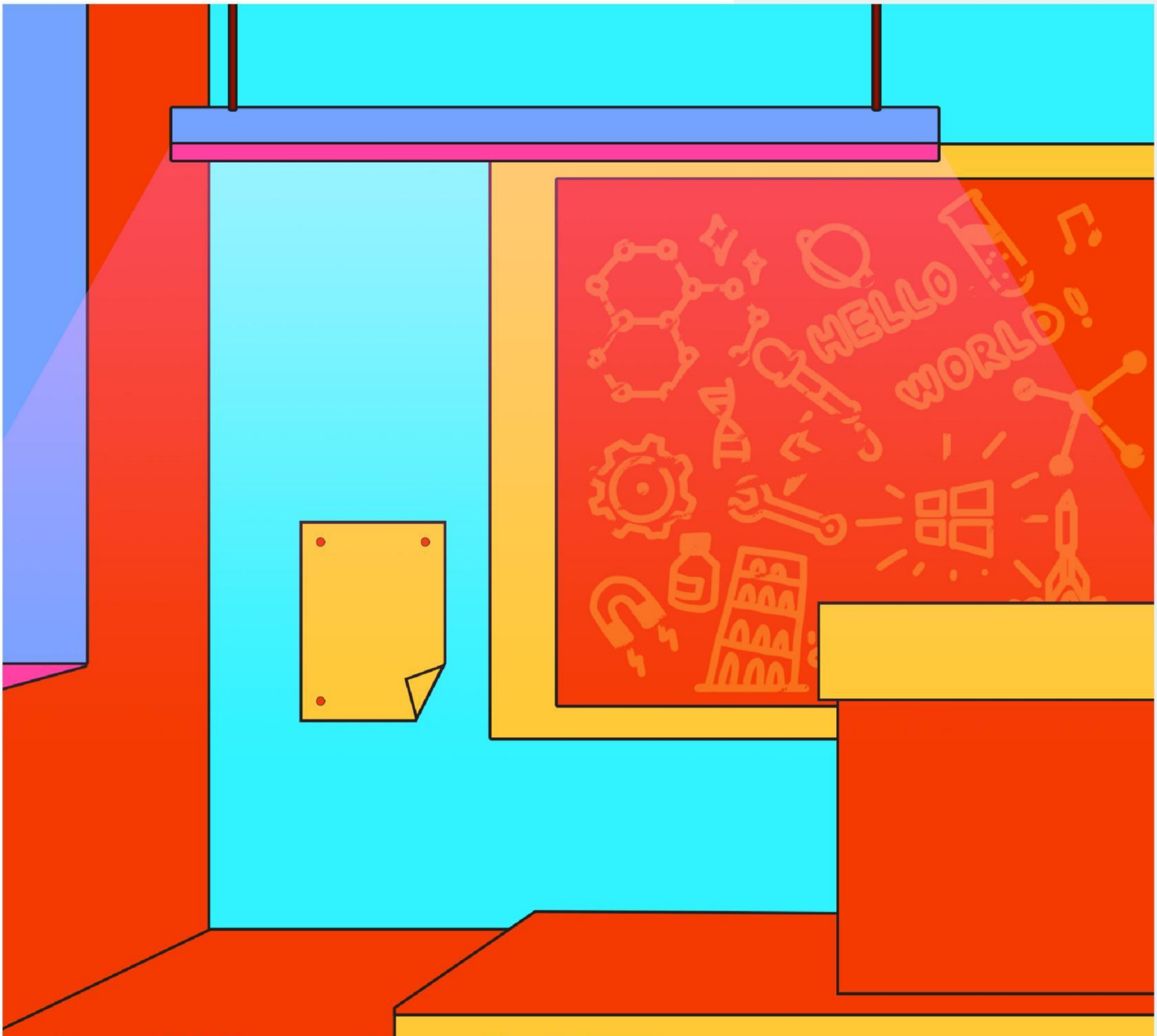


力学·突击课

3小时突击

课程讲义

干货福利，互助答疑

江苏博事达
JIANGSU BOOMSTAR

江 苏 博 事 达 律 师 事 务 所

J I A N G S U B O O M S T A R L A W O F F I C E

中国 南京 奥体大街 68 号国际研发总部园 4A 栋 17 楼　　邮编：210019
17F 4ABuilding NO.68 Aoti Street, Nanjing, China　　P.C：210000
电话(Tel)：(86)-25-82226685　　传真(Fax)：(86)-25-82226696

律 师 声 明

江苏博事达律师事务所接受蜂考品牌公司的委托，发表以下律师声明：

“蜂考系列课程”（含视频、讲义、音频等）内容均为蜂考原创，蜂考品牌公司对此依法享有著作权，任何单位或个人不得侵犯。

蜂考品牌公司为维护创作作品的合法权益，已与江苏博事达律师事务所开展长期法律顾问合作，凡侵犯课程版权等知识产权的，蜂考品牌公司将授权江苏博事达律师事务所依据国家法律法规提起民事诉讼。对严重的侵权盗版分子将报送公安部门采取刑事手段予以严厉打击。

感谢大家对蜂考品牌的长期支持，愿与各位携手共同维护知识产权保护。遵守国家法律法规，从自身做起，抵制盗版！

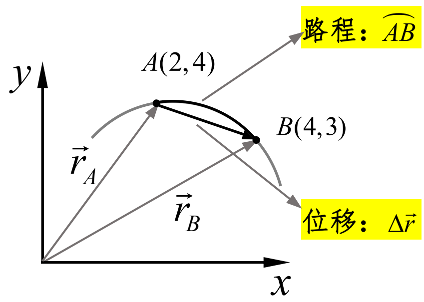
特此声明！

江苏博事达律师事务所
二〇二一年七月十四日

课时一　质点运动学(一)

考点	重要程度	占　分	常见题型
1. 位移/速度/加速度	基础知识	$0\sim3$	选择
2. $\vec r\to\vec v\to\vec a$ 型	必考	$5\sim10$	大题
3. $\vec a\to\vec v\to\vec r$ 型			
4. 相对运动	★★	$0\sim3$	填空

1. 位移、速度、加速度



①位矢（位置矢量）：描述质点位置

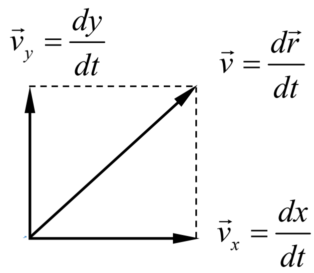
$\vec r_A=2\vec i+4\vec j\qquad \vec r_B=4\vec i+3\vec j$

②位移：起点指向终点，矢量有大小，有方向

$\Delta\vec r=\vec r_B-\vec r_A=(4-2)\vec i+(3-4)\vec j=2\vec i-\vec j$

③路程：$\overset{\frown}{AB}$（弧长）

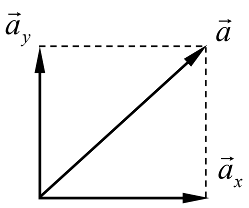
④速度（矢量有大小，有方向）

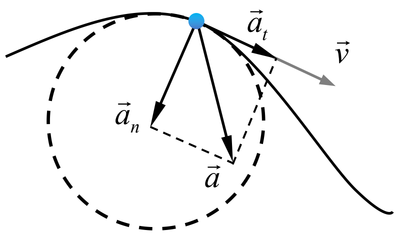


平均速度：$\bar{\vec v}=\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\dfrac{\vec r_B-\vec r_A}{t_2-t_1}$

速度（瞬时速度）：$\vec v=\dfrac{d\vec r}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec i+\dfrac{dy}{dt}\vec j$

速度大小：$|\vec v|=\left|\dfrac{d\vec r}{dt}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\dfrac{ds}{dt}$





⑤加速度:

$\vec a=\dfrac{d\vec v}{dt}=\dfrac{dv_x}{dt}\vec i+\dfrac{dv_y}{dt}\vec j$

一个是速度对时间导数，表示加速度

$\vec a=\vec a_t+\vec a_n=\dfrac{dv}{dt}\vec t+\dfrac{v^2}{R}\vec n$

一个是速度大小对时间导数，表示切向加速度大小

大小：$|\vec a|=\left|\dfrac{d\vec v}{dt}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

补充知识点：

圆周运动向心加速度：$a_n=\dfrac{v^2}{R}$，方向指向圆心

题 1. 一质点在 xoy 平面内运动，其运动学方程为 $x=3cos4t$，$y=3sin4t$，则t时刻质点的位矢 $\vec r(t)=$ ________

解：$\vec r = x\vec i + y\vec j = 3cos4t\ \vec i + 3sin4t\ \vec j$

题 2. 已知平面内运动方程为 $x=at^2, y=bt^2$（其中 a,b 为常量），则该质点运动轨迹为（ ）

$A.$双曲线　　$B.$抛物线　　$C.$圆周　　$D.$直线

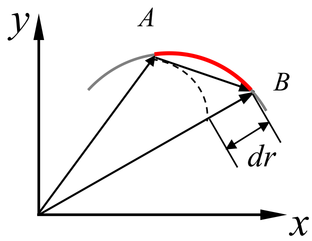
解：$\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b} \Rightarrow y=\dfrac{b}{a}x$ 是直线方程，故选 D。

题 3. 一运动质点在某瞬间矢径 $\vec r(x,y)$ 的端点处，其速度大小为（ ）

$A.\dfrac{dr}{dt}$　　$B.\dfrac{d\vec r}{dt}$　　$C.\dfrac{d|\vec r|}{dt}$　　$D.\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

解：$A.\ \dfrac{dr}{dt}$ 表示 $|\vec r|$ 大小的变化量，为径向变化，故错误。

$B.\ \dfrac{d\vec r}{dt}=\vec v$，表示速度，即有大小又有方向，故错误。



$C.\ d|\vec r|=dr$，和 A 一样，故错误。

$D.\ v=\sqrt{v_x^{\ 2}+v_y^{\ 2}}=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$，故正确。

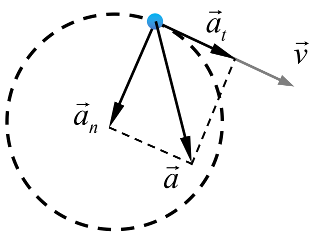
题 4. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（v 表示任一时刻质点的速率）（ ）

$A.\dfrac{dv}{dt}$　　$B.\dfrac{v^2}{R}$　　$C.\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v^2}{R}$　　$D.\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

解：质点作圆周运动，故有切向加速度和法向加速度

$A.\ \dfrac{dv}{dt}=a_t$　　切向加速度大小

$B.\ \dfrac{v^2}{R}=a_n$　　法向加速度大小



$C.\ a_t+a_n$ 为代数和，错误。

$D.\ a=\sqrt{a_t^{\ 2}+a_n^{\ 2}}=\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$，正确

2. $\vec{r} \to \vec{v} \to \vec{a}$ 型

题 1. 质点的运动方程为 $\vec{r}=\left(2+2t^2\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{3}t^3+2t\right)\vec{j}$，求 $t=2$ 时的速度和加速度。

解：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=4t\vec{i}+\left(t^2+2\right)\vec{j}=8\vec{i}+6\vec{j}$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=4\vec{i}+2t\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$

> 解题步骤：
>
> $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ $\qquad$ $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

题 2. 已知某质点的运动方程为 $x=2t$，$y=2-t^2$，式中 x 以 m 计，t 以 s 计，求：

1）位置矢量表达式，速度和加速度表达式；

2）前 $2s$ 内质点的平均速度和平均加速度；

3）第 $2s$ 内质点的平均速度；

4）计算 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度。

解：（1）$\vec{r}=2t\vec{i}+\left(2-t^2\right)\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}-2\vec{j}$

（2）$t=0$ 时 $\vec{r}_0=2\vec{j}$，$\vec{v}_0=2\vec{i}$

$t=2$ 时 $\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$，$\vec{v}_2=2\vec{i}-4\vec{j}$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_0=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-2\vec{j}=4\vec{i}-4\vec{j}$$

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{4\vec{i}-4\vec{j}}{2-0}=2\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_0=\left(2\vec{i}-4\vec{j}\right)-2\vec{i}=-4\vec{j}$$

$$\overline{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{-4\vec{j}}{2-0}=-2\vec{j}$$

（3）$t=1$ 时 $\vec{r}_1=2\vec{i}+\vec{j}$ $\qquad$ $t=2$ 时 $\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}-3\vec{j}$$

$$\overline{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}}{2-1}=2\vec{i}-3\vec{j}$$

（4）$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}$ $\qquad$ 故 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度 $\vec{a}=-2\vec{j}$

3. $\vec{a}\to\vec{v}\to\vec{r}$ 型　$a=\dfrac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}adt$　$v=\dfrac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0}^{t}vdt$

题 1. 设质点沿 x 轴作匀变速直线运动，加速度为 a 不随时间变化，初速度为 v_0，初位置为 x_0，试根据速度、加速度的定义求出该质点的速度公式和运动学方程。

解：$a=\dfrac{dv}{dt}\quad\Rightarrow dv=adt\quad\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{0}^{t}adt$

解得：$v-v_0=at\quad\Rightarrow v=v_0+at$

$v=\dfrac{dx}{dt}\quad\Rightarrow dx=vdt=\left(v_0+at\right)dt\quad\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{0}^{t}(v_0+at)dt$

解得：$x-x_0=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2\quad\Rightarrow x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$

匀变速直线运动：

$v=v_0+at$

$x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$

$v_2^{\ 2}-v_1^{\ 2}=2a\left(x_2-x_1\right)$

题 2. 一质点做直线运动，加速度 $a=2m/s^2$，开始时 $v_1=2m/s$，一段时间后 $v_2=6m/s$，问质点在这段时间内的位移大小。

解：由 $v_2^{\ 2}-v_1^{\ 2}=2a\left(x_2-x_1\right)$　$6^2-2^2=2\times2\times\left(x_2-x_1\right)$　$x_2-x_1=8m$

题 3. 质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 a 的单位为 m/s^2，t 的单位为 s，如果当 $t=3s$ 时，$x=9m,v=2m/\mathrm{s}$，求质点的运动方程。

解：$a=4-t^2=\dfrac{dv}{dt}\Rightarrow\ dv=\left(4-t^2\right)dt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{0}^{t}(4-t^2)dt$

解得：$\Rightarrow\ v=v_0+4t-\dfrac{1}{3}t^3$　　①

$v=v_0+4t-\dfrac{1}{3}t^3=\dfrac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\ dx=\left(v_0+4t-\dfrac{1}{3}t^3\right)dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{0}^{t}(v_0+4t-\dfrac{1}{3}t^3)dt$

解得：　$x=x_0+v_0t+2t^2-\dfrac{1}{12}t^4$　　②

$t=3s\quad x=9m\quad v=2m/s$ 代入①②得：$v_0=-1m/s\quad x_0=0.75m$

所以质点的运动方程为：$x=0.75-t+2t^2-\dfrac{1}{12}t^4\ \ (m)$

题 4. 一质点沿一直线运动，其加速度为 $a=-2x$，式中 x 的单位为 m，a 的单位为 m/s^2。试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系。设当 $x_0=1$ 时，$v_0=4m/s$。

解：$a=-2x=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot v$　　$\dfrac{dv}{dx}\cdot v=-2x$

分离变量得：$vdv=-2xdx \quad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv=\int_{x_0}^{x}-2xdx$

解得：$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2=-x^2+x_0^2$

代入 $x_0=1 \quad v_0=4 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}v^2-8=-x^2+1 \quad \Rightarrow v^2=-2x^2+18$

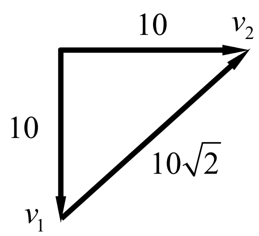
4. 相对运动

题 1. 甲船以 $v_1=10m/s$ 的速度向南航行，乙船以 $v_2=10m/s$ 的速度向东航行，则甲船上的人观察乙船的速度大小为_______

解：v_1：牵连速度；v_2：绝对速度

$\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_{相对}$

$\vec{v}_{相对}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=10\sqrt{2}m/s$



$\vec{v}_{绝对}=\vec{v}_{牵连}+\vec{v}_{相对}$

$\vec{a}_{绝对}=\vec{a}_{牵连}+\vec{a}_{相对}$

课时一 练习题

1. 一质点在平面内运动，其运动方程为 $x=2t, y=4t^2+4t+1$，则此运动的轨迹方程为（ ）

$A.y=x^2+x+1 \qquad B.y=(x+1)^2 \qquad C.y=2(x+1) \qquad D.y=(x+2)^2$

2. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，s 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中正确的( )

①$\frac{dv}{dt}=\vec{a}$ ②$\frac{dr}{dt}=v$ ③$\frac{ds}{dt}=v$ ④$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t$

A.①④ B.②④ C.② D.③

3. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，s 表示路程，v 表示速率，a_t 表示切向加速度，下列表达式中（ ）

$A.\frac{dv}{dt}=a, \frac{d|\vec{r}|}{dt}=v \qquad B.\frac{d|\vec{v}|}{dt}=a_t, \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=v \qquad C.\frac{ds}{dt}=v, \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t \qquad D.\frac{d\vec{r}}{dt}=v, \frac{d|\vec{v}|}{dt}=a$

4. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中 a,b 为常量），则该质点做( )

A.匀速直线运动 B.变速直线运动 C.抛物线运动 D.一般曲线运动

5. 某质点作直线运动的运动方程为 $x=3t-5t^3+6(SI)$，则该质点作（　）

$A.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

$B.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

$C.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

$D.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

6. 已知质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$，质点 $t=1s$ 到 $t=2s$ 内质点的平均速度 $\overline{\vec{v}}=$____ m/s，平均加速度 $\overline{\vec{a}}=$_____ m/s^2

7. 已知质点沿 x 轴作直线运动，运动方程 $x=2+6t^2-2t^3$，x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：

1）质点在运动开始后 $4.0s$ 内的位移的大小；

2）质点在该时间内所通过的路程；

3）$t=4s$ 时质点的速度和加速度。

8. 一物体做直线运动，运动方程为 $x=6t^2-2t^3$，式中各量的单位均为 (SI) 制，求：

(1) 第二秒内的平均速度；

(2) 第三秒末的速度；

(3) 第一秒末的加速度。

9. 已知一质点做直线运动，其加速度 $a=2+t$，其中 a 的单位 m/s，t 的单位 s，求质点的运动方程（已知 $v_0=0, x_0=0$，v_0 为初始速度，x_0 为初始位移）

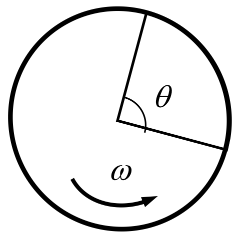
10. 一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度大小平方成正比，即 $dv/dt=-kv^2$，式中 k 为常量，求发动机关闭后又行驶的距离与速度大小的关系（v_0 为发动机关闭时速度，x 为行驶的距离）

11. 雨滴以速率 v 落到静止的车窗玻璃时，方向竖直向下，问当车相对于地面以速率 v_0 向西行驶，车上的人观测的雨的速度。

课时二　质点运动学（二）

考点	重要程度	占　分	题型
1. 角位移/角速度/角加速度	基础知识	不单独出题	无
2. $\vec{\theta}\to\vec{\omega}\to\vec{\beta}$ 型	★★	3～10	选填为主 偶尔大题
3. $\vec{\beta}\to\vec{\omega}\to\vec{\theta}$ 型	★★★		
4. 角量与线量关系	必　考		

1. 角位移、角速度、角加速度



角位移：θ　　单位：rad（弧度）　转过的角度

角速度：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$　　单位：rad/s，单位时间内转过的角度

角加速度：$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$　单位：rad/s^2 单位时间角速度的变化

周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$　　单位：s　　转一周所用的时间

2. $\vec{\theta}\to\vec{\omega}\to\vec{\beta}$ 型　$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$　　$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

题 1. 某质点的角位置和时间关系为 $\theta=4t-3t^2+t^3\,(SI)$，则在 2 秒末的角速度大小 $\omega=$____，角加速度大小 $\beta=$______。在 2 秒末到 4 秒末这段时间内，平均角速度大小 $\bar{\omega}=$______.

解：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=4-6t+3t^2\,|_{t=2}=4\quad rad/s$

$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=-6+6t\,|_{t=2}=6\quad rad/s^2$

$t=2s$ 时 $\theta_2=4$，$t=4s$ 时 $\theta_4=32$　　$\Delta\theta=\theta_4-\theta_2=32-4=28$

$\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{28}{4-2}=14rad/s$

3. $\vec{\beta}\to\vec{\omega}\to\vec{\theta}$ 型

$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}\quad\Rightarrow d\omega=\beta dt\quad\Rightarrow\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\int_{t_0}^{t}\beta dt$　　　$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}\quad\Rightarrow d\theta=\omega dt\quad\Rightarrow\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_{t_0}^{t}\omega dt$

题 1. 已知匀速圆周运动，角加速度为 β，$t=0$ 时，角速度为 ω_0，角位移为 θ_0，试用定义公式，求角速度和角位移表达式。

配套课程　习题答案

解：$\beta=\frac{d\omega}{dt}$　　$d\omega=\beta dt$　　$\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\int_0^t\beta dt$

解得：$\omega-\omega_0=\beta t$　　$\Rightarrow\omega=\omega_0+\beta t$

$\omega=\frac{d\theta}{dt}$　　$d\theta=\omega dt=(\omega_0+\beta t)dt$　　$\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t(\omega_0+\beta t)dt$

解得：$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$　　$\Rightarrow\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$

题 2. 搅拌机叶片以恒定角加速度 $1.50 rad/s^2$ 转动，求：

匀变速圆周运动：

$\omega=\omega_0+\beta t$

$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$

$\omega_2^2-\omega_1^2=2\beta(\theta_2-\theta_1)$

(1) 从静止启动后经过多少时间角速度将达到 $36.0 rad/s$？

(2) 在此时间内共转过多少转？

解：（1）由 $\omega=\omega_0+\beta t$ 得

$36=0+1.5t$　$\Rightarrow t=24s$

（2）由 $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2=0+0+\frac{1}{2}\times1.5\times24^2=432\ rad$

$n=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{432}{2\times3.14}=68.8$　（转）

题 3. 绕定轴转动的飞轮，均匀减速，$t=0$ 时 $\omega_0=5\ rad/s$，$t=20$ 时 $\omega=0.8\omega_0$ 则飞轮的角加速度 $\beta=$__________ rad/s^2，转过的角度 $\theta=$________ rad。

解：依题意知 $t=0$　$\omega_0=5$，$t=20$　$\omega=0.8\omega_0=4$

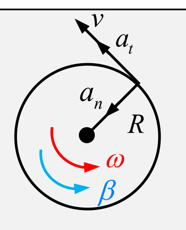
由 $\omega=\omega_0+\beta t$　$\Rightarrow$　$4=5+\beta\times20$　　解得：$\beta=-0.05\ rad/s^2$

由 $\omega^2-\omega_0^2=2\cdot\beta\cdot\Delta\theta$　$\Rightarrow$　$\Delta\theta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\beta}=\frac{4^2-5^2}{-2\times0.05}=90\ rad$

4. 角量与线量关系

题 1. 质点在作半径为 R 的圆周运动，质点的线速度 v 与角速度 ω 的关系为_____，质点的切向加速度 a_t 与角加速度 β 的关系为____；质点的法向加速度 a_n 与角速度 ω 的关系为____。

解：$v=\omega R$　$a_t=\beta R$　$a_n=\omega^2 R$



$v=\omega R$

$a_t=\frac{dv}{dt}=\beta\cdot R$

$a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R$

题 2. 质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2(SI)$，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$_________ ；切向加速度 $a_t=$______ .

解：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=4t \quad \beta=\dfrac{d\omega}{dt}=4 \quad \Rightarrow a_n=\omega^2R=(4t)^2R=16Rt^2 \qquad a_t=\beta\cdot R=4R$

题 3. 一质点在半径为 $0.1m$ 的圆周上运动，其角位置变化关系为 $\theta=2+4t^3(rad)$。问：

(1) 在 $t=2s$ 时，质点的法向加速度和切向加速度大小各为多少？

(2) 当切向加速度大小恰等于总加速度大小的一半时，θ 值为多少？

(3) 在什么时刻，切向加速度和法向加速度恰好大小相等？

解：（1） $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=12t^2 \quad \beta=\dfrac{d\omega}{dt}=24t$

法向加速度：$a_n=\omega^2R=(12t^2)^2\times0.1=14.4t^4\big|_{t=2}=230.4\ \ m/s^2$

切向加速度：$a_t=\beta R=24t\times0.1=2.4t\big|_{t=2}=4.8\ \ m/s^2$

（2） $a=\sqrt{a_t^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{(14.4t^4)^2+(2.4t)^2}$

依题意：$a_t=\dfrac{1}{2}a \quad \Rightarrow 2.4t=\dfrac{1}{2}\sqrt{(14.4t^4)^2+(2.4t)^2} \Rightarrow t^3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \theta=2+4t^3=2+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=3.15(rad)$

(3) 依题意 $a_t=a_n \quad \Rightarrow 2.4t=14.4t^4 \qquad$ 解得 $\ t=0.55s$

课时二　　练习题

1. 某转盘的角位置和时间关系为 $\theta=2t-t^2+2t^3(SI)$，则在 1 秒末的角速度大小 $\omega=$_____，角加速度大小 $\beta=$______.

2. 若飞轮的运动方程为 $\theta=2+4\pi t+2\pi^2t^2(SI)$，则其角加速度 β 为（ ）

$A.\beta=4\pi^2t+4\pi \qquad B.\beta=4\pi^2 \qquad C.\beta=4\pi^2t \qquad D.\beta=4\pi t$

3. 物体做匀速圆周运动的半径为 r，线速度大小为 v，角速度为 ω，周期为 T，向心加速度为 a，关于这些物理量之间的关系，下列表示正确的是（ ）

A. $v=\dfrac{\omega}{r}$　　B. $a=\dfrac{\omega^2}{r}$　　C. $\omega=\dfrac{2\pi r}{T}$　　D. $a=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$

4. 一个转轮以恒定角加速度 $2rad/s^2$ 转动，从静止启动经过 $30s$ 角速度为________，在此时间内共转过________转。

5. 一质点沿半径 $R=0.01m$ 的圆周运动，其运动方程 $\theta=2+4t^3$，θ,t 分别以弧度和秒计，则当 $t=2$ 秒时，其切向加速度量值 $a_t=0.48m/s^2$，法向加速度量值 $a_n=$_________，当 $a_t=\dfrac{a}{2}$（a 为总加速度量值）时，$\theta=$________

6. 质点沿半径为 r 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=2+3t^2(SI)$，则 $t=2s$ 时质点的法向加速度 $a_n=$_______，切向加速度 $a_t=$________.

7. 质点沿半径为 $0.1m$ 的圆周运动，其角位移 θ 与时间 t 的关系为：$\theta=5+2t^3$，当 $t=1s$ 时，它的加速度大小为( )

$A.3.6m/s^2$　　$B.3.8m/s^2$　　$C.1.2m/s^2$　　$D.2.4m/s^2$

8. 一飞轮转速 $n=1500$ 转每分钟 $(r/\min)$ 转动，受制动后均匀减速，经 $50s$ 后静止，求：

(1) 对角加速度 β 和从制动到静止飞轮的转数 N；

(2) 制动开发后 $t=25s$ 时飞轮角速度 ω；

(3) 设飞轮半径 $R=1m$，求 $t=25s$ 时飞轮边缘任一点的速度和加速度。

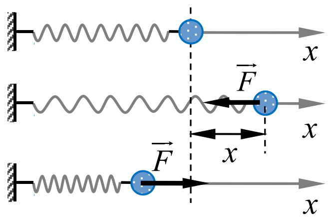
课时三　　常见力和牛顿三定律

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 常见力 2. 牛顿三定律	基础知识	5～10	选择、填空、大题

1. 常见力

1) 重力：$G = mg$　　$g = 9.8N/kg$

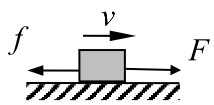
2) 弹力：$F = kx$　　（k 为弹性系数）



3) 摩擦力：

①滑动摩擦 $f = \mu_k N$

u_k：滑动摩擦系数　　N 为支持力

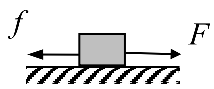


滑动摩擦

$f = \mu_k mg$

②静摩擦力　$0 \le f \le \mu_s N$

μ_s 为最大静摩擦系数



静摩擦

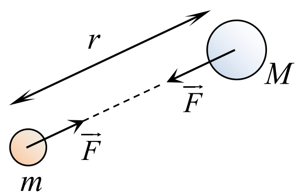
$f = F$　　F 越大，f 越大

$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$

4) 万有引力

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$$



2. 牛顿三定律

1)　不受力或合外力为 0，质点保持静止或匀速直线运动

2)　$F_{合} = ma$　　(力是物体产生加速度的原因)

3)　$F_{作用} = F_{反作用}$　　(作用力等于反作用力)

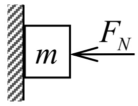
题 1. 关于摩擦力的说法，下列哪一种说法正确（　　）

A. 摩擦力总是阻碍物体运动　　B. 摩擦力的方向总是与物体运动方向相反

C. 摩擦力总是对物体做负功　　D. 以上说法都不对

解：答案：D（详解见视频课程）

题 2. 用水平力 F_N 把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止，当 F_N 逐渐增大时，物体所受到的静摩擦力 F_f 的大小（　　）



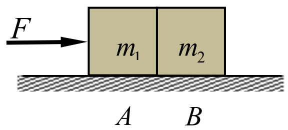
A. 不为零，但保持不变　　　　　B. 随 F_N 成正比增大

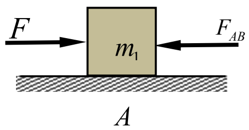
C. 开始随 F_N 增大，达到某一最大值后就保持不变　　　　D. 无法确定

答案：**A**（详解见视频课程）

题 3. 两物体 A 和 B，质量分别是 m_1 和 m_2，互相接触放在光滑水平面上，如图所示。对物体 A 施以水平推力 F，则物体 A 对物体 B 的作用力等于_____。

(1) 选物体
(2) 分析受力
(3) 列方程
(4) 求解

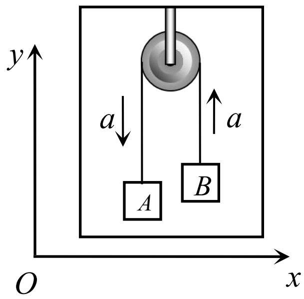


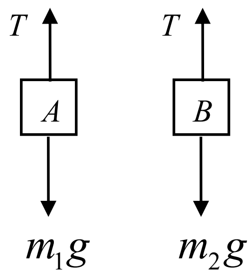


解：① $F=(m_1+m_2)a$

② $F-F_{AB}=m_1a$　　联立两式，解得 $F_{AB}=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}F$

题 4. 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮，在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物 A 和 B，已知 $m_1>m_2$，当电梯匀速上升，求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度 a。





解：对 A 受力分析　　$m_1g-T=m_1a$

对 B 受力分析　　$T-m_2g=m_2a$

解得　$a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$　　　$T=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$

题 5. 一艘行驶的质量为 m 的快艇，在发动机关闭后，受到一阻力作用，且 $f=-kv^2$，式中 k 为正常数，求快艇在关闭发动机后速度与行驶距离的关系。（已知发动机关闭时快艇速度为 v_0）

解：根据牛顿第二定律：

$$f=-kv^2=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}\quad\Rightarrow -kv=m\frac{dv}{dx}$$

分离变量：$\frac{1}{v}dv=-\frac{k}{m}dx$

两边同时积分：$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=\int_0^x-\frac{k}{m}dx$

$$\ln v-\ln v_0=-\frac{k}{m}x\quad\Rightarrow\quad\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow\frac{v}{v_0}=e^{-\frac{k}{m}x}\quad\Rightarrow v=v_0e^{-\frac{k}{m}x}$$

题 6：简述牛顿定律的适用范围

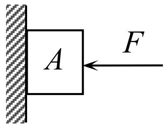
(1)只适用于低速运动的物体(与光速比速度较低)。

(2)只适用于宏观物体，不适用于微观原子。

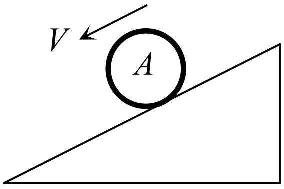
(3)参照系应为惯性系。

课时三　练习题

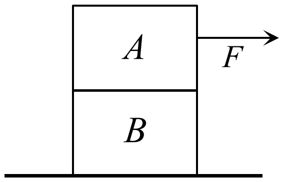
1. 沿水平方向的外力 F 将质量为 m 的物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，物体保持静止，设摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力大小为________



2. 将下列各种情形下的物体 A 进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）

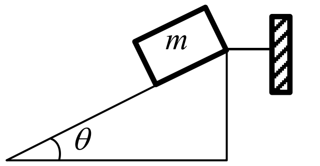


(1) 沿斜面下滚的小球



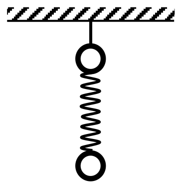
(2) A,B 同时同速度向右行驶

3. 如图所示，质量为 m 的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为 θ 为的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为（　　）



$A.\ mg\cos\theta$　　$B.\ mg\sin\theta$　　$C.\ \dfrac{mg}{\cos\theta}$　　$D.\ \dfrac{mg}{\sin\theta}$

4. 两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（　　）



$A.\ a_1 = g, a_2 = g$　　$B.\ a_1 = 0, a_2 = g$

$C.\ a_1 = g, a_2 = 0$　　$D.\ a_1 = 2g, a_2 = 0$

5. 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f = -k/x^2$，k 是比例常数。设质点在 $x = A$ 时的速度为零，求质点在 $x = A/4$ 处的速度大小。

课时四　动量/冲量/动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 动量定理	必考	$5\sim10$	选/填 大题
2. 动量守恒			

1. 动量定理

动量：$\vec{p}=m\vec{v}$　单位：$kg\cdot m/s$　（矢量，有大小，有方向）

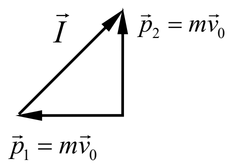
动量定理：$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$　单位 $N\cdot s$

① 冲量为矢量，等于动量的矢量差，也等于冲力对时间的积分

② $\vec{F}$ 为冲力，为合外力

③ F 若为常力，$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\vec{F}\cdot\Delta t$

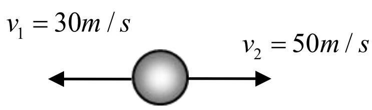
题 1. 一物体质量为 m，t_1 时刻速度大小为 v_0，方向沿 x 负方向，t_2 时刻速度大小仍为 v_0，方向沿 y 轴正方向，t_1 到 t_2 冲量大小为________.



解：$I=\sqrt{(mv_0)^2+(mv_0)^2}=\sqrt{2}mv_0$

题 2. 一垒球的质量 $m=0.20kg$，如果其投出时的速度为 $30m/s$，被棒击回的速度为 $50m/s$，方向相反，球的冲量大小为_______，球与棒的接触时间为 $\Delta t=0.0020s$，则棒击打垒球的平均冲力 $F=$_________.

解：$I=mv_2-mv_1=0.2\times50-0.2\times(-30)=16\,N\cdot s$



由 $I=F\cdot\Delta t\Rightarrow16=F\cdot0.002$

解得：$F=8000N$

题 3. 质量为 $3kg$ 的静止物体在水平力 $F=3t^2(N)$ 作用下，在光滑水平面上作直线运动，物体在 $0\sim3$ 秒内获得的冲量_______$N\cdot s$，第 3 秒末物体的速度值________m/s.

解：$I=\int_0^3 3t^2dt=t^3\Big|_0^3=27N\cdot s$　　$I=mv_2-mv_1=mv_2-0$　　$\Rightarrow v_2=\dfrac{I}{m}=\dfrac{27}{3}=9m/s$

题 4. 一静止的质点，在合力为 $\vec{F}=10t\vec{i}+2(2-t)\vec{j}$ 作用下，在 $2s$ 末的动量为________.

解：$F_x=10t \quad F_y=2(2-t)$

在 x 方向冲量：$mv_{x2}-0=\int_0^2 F_x dt=\int_0^2 10tdt=5t^2\Big|_0^2=20\ N\cdot s$

在 y 方向冲量：$mv_{y2}-0=\int_0^2 F_y dt=\int_0^2 2(2-t)dt=(4t-t^2)\Big|_0^2=4\ N\cdot s$

$\Rightarrow \vec{p}_2=20\vec{i}+4\vec{j}$

2. 动量守恒

若 $F_合=0$，则系统总动量守恒：$m_1\vec{v}_1=m_2\vec{v}_2$

(1) $F_合=0$，指不受外力或所受合外力为零

(2) 内力不改变系统的总动量

(3) 内力远大于外力时，也可认为 $F_合=0$

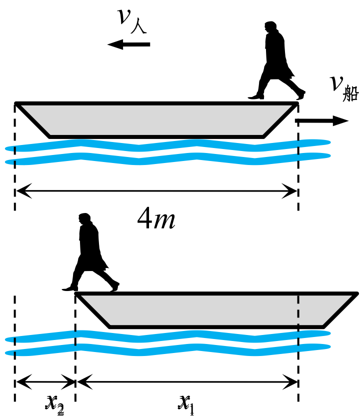
题 1. 粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度为 $3\vec{i}$，粒子 B 的速度为 $2\vec{i}$，由于两者的相互作用，粒子 A 的速度变为 $7\vec{i}$，此时粒子 B 的速度为（ ）

$A.\vec{i}$ $\qquad B.2\vec{i}$ $\qquad C.0$ $\qquad D.5\vec{i}$

答案：A. 水平方向不受外力，动量守恒

$m\cdot 3+4m\cdot 2=m\cdot 7+4m\cdot v \quad \Rightarrow v=1$

题 2. 一人站在长度为 $4m$ 的船一端，船漂浮于静止水面上。船的质量为 $600kg$，人的质量为 $80kg$，若此人从船头走到船尾，则船相对于水面移动了多少米？（忽略水对船的阻力）



解：水平方向动量守恒：$mv_人=Mv_船 \quad \Rightarrow m\dfrac{dx_1}{dt}=M\dfrac{dx_2}{dt}$

整理得：$mdx_1=Mdx_2$

两边同时积分：$\int_0^{x_1} mdx_1=\int_0^{x_2} Mdx_2 \quad \Rightarrow mx_1=Mx_2$

即：$80x_1=600x_2$ 又：$x_1+x_2=4$

联立两式解得：$\begin{cases} x_1=3.53m \\ x_2=0.47m \end{cases}$ 故船移动了 $0.47m$

题 3. 下列几种说法正确的是（　　）

(1) 作用力的冲量与反作用力的冲量总是等值相反的

(2) 系统的内力不能改变系统的总动量

(3) 冲量的方向与物体动量的方向相同

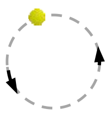
(4) 以恒力作用于物体，时间越长，物体的动量越大

$A.$只有（1）是正确的　　$B.$（1）（2）是正确的

$C.$（1）（3）是正确的　　$D.$（2）（4）是正确的

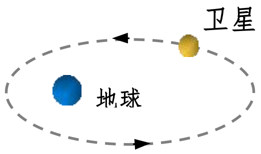
答案：B.（详细解答见视频课程）

题 4. 判断下列运动是否动量守恒



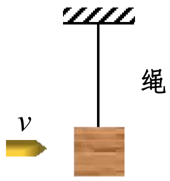
匀速圆周运动

动量______



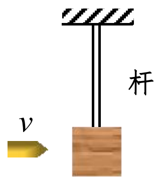
卫星绕地球

卫星动量______



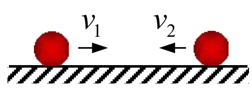
子弹打击木块

系统动量______



子弹打击木块

系统动量______



弹性碰撞，系统动量______

非弹性碰撞，系统动量______

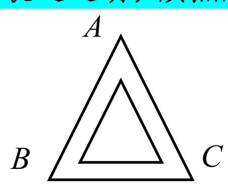
完全非弹性碰撞，系统动量______

（详细解答见视频课程）

课时四　练习题

1. 质量为 m 的质点，以不变速率 V 沿图中正三角形 ABC 的水平光滑轨道运动，质点越过 A 角时，轨道作用于质点的冲量大小为（　　）

$A.\ mV$　　$B.\ \sqrt{2}mV$　　$C.\ \sqrt{3}mV$　　$D.\ 2mV$



2. 设作用于物体上的力 $F = 6t + 3(SI)$。如果物体在这力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 $2.0s$ 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小________

3. 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其速度矢量为 $\vec{V}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$，则 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量是________

4. 一质量为 m 的小球，从 h_1 高度处由静止下落到水平桌面上，反弹高度 h_2。设小球与桌面的接触时间为 τ，则小球对桌面的平均冲力的大小为________

5. 一人用恒力 $\vec{F}$ 推地上的木箱，经历时间 Δt 未能推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受了力 $\vec{F}$ 的冲量，为什么它的动量没有改变？

6. 一质量为 $60kg$ 的人起初站在一条质量为 $300kg$，且正以 $2m/s$ 的速率向湖边驶近的小木船上，湖水是静止的，且阻力不计。现在人相对于船以一水平速率 V 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，V 应为(　　)

$A.2m/s$　　$B.3m/s$　　$C.5m/s$　　$D.6m/s$

7. 质量为 M 的木块静止在光滑的水平面桌面上，质量为 m，速度为 v_0 的子弹水平射入木块，并陷在木块内与木块一起运动，求：

(1) 子弹相对木块静止后，木块的速度和动量；

(2) 子弹相对木块静止后，子弹的动量；

(3) 在这个过程中，子弹施于木块的冲量；

8. 一小船质量为 $100kg$，船头到船尾共长 $3.6m$。现有一质量为 $50kg$ 的人从船尾走到船头时，船头移动多少距离？假定水的阻力不计。

课时五　质点运动的功和能

考点	重要程度	占 分	题型
1. 做功	★★★	$0\sim3$	填空
2. 动能定理	★★★★★	$5\sim10$	大题
3. 保守力、势能			填空
4. 机械能守恒			大题

1. 做功 （恒力：$W=F\cdot s\cdot cos\theta$　变力：$W=\int dW=\int Fds$）

题 1. 某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\ \vec{i}(SI)$ 的作用力下沿 x 轴做直线运动，在从 $x=0$ 移动到 $x=10m$ 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为_____J

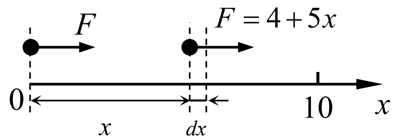
变力做功解题：

①定坐标，取微元 dx

②定 F，表元功 dW

③计算：$W=\int dW$

解：如图建立坐标



x 处：$F=(4+5x)$

$$dW=F\cdot dx=(4+5x)dx$$

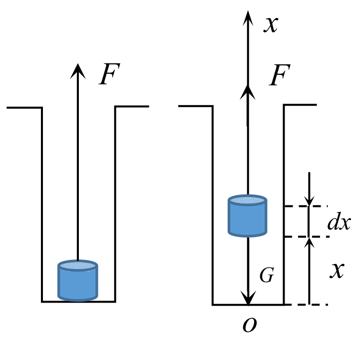
$$W=\int dW=\int_0^{10}(4+5x)dx=290\ \ J$$

题 2. 一质点在恒力为 $\vec{F}=4\vec{i}-5\vec{j}+1\vec{k}$ (SI) 的作用下产生位移为 $\Delta\vec{r}=2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$ (SI) 则此力在该位移过程中所做的功为______

解：$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=4\times2+(-5)\times(-4)+1\times(-3)=25\,J$

题 3. 一人从 $10m$ 深的井中提水，起始桶中装有 $10.0Kg$ 的水，由于水桶漏水，每升高 $1.00m$ 要漏去 $0.20Kg$ 的水，水桶被匀速地从井中提到井口，求人所做的功。

解：如图建立坐标



$$F=G=mg=(10-0.2x)g$$

$$dW=F\cdot dx=(10-0.2x)g\ dx$$

$$W=\int dW=\int_0^{10}(10-0.2x)g\ dx=882J$$

2. 动能定理 （动能：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ 单位：J 标量，有大小，没有方向）

动能定理：$W=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$

(1) 质点：合外力做功＝动能变化

(2) 质点系：合外力做功＋非保守内力做功＝动能变化 （例如爆炸）

题 1. 质量为$1.0Kg$的物体运动速率由$2.0m/s$增加到$4.0m/s$的过程中，合外力对它所做的功为________.

解；$W=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=\frac{1}{2}\times1\times4^2-\frac{1}{2}\times1\times2^2=6J$

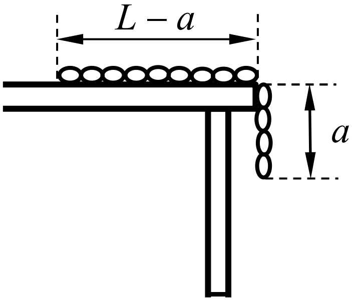
题 2. 用铁锤把钉子敲入墙面木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比，即$F=kx$。若第一次打击时，能把钉子打入木板$1cm$，第二次打击时，保持第一次打击的速度，第二次能把钉子打入的深度为______。

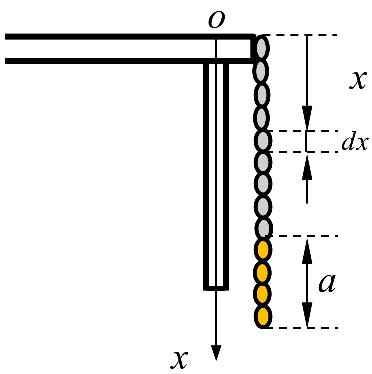
解：第一次打击：$\frac{1}{2}mv^2=\int_0^1 kxdx=\frac{1}{2}k$

第二次打击：$\frac{1}{2}mv^2=\int_1^x kxdx=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}k$

解得$x=\sqrt{2}cm$ 故第二次打击深度为$\left(\sqrt{2}-1\right)(cm)$

题 3. 质量均匀分布的钢性链条，总长为L，伸出光滑桌面的长度为a，若由静止释放求：链条全部脱离光滑桌面时速率。





解：线密度：$\lambda=\frac{m}{L}$

a段：$W_1=\frac{m}{L}a\cdot g\cdot(L-a)=\frac{mga(L-a)}{L}$

$L-a$段：$dW_2=dm\cdot g\cdot x=\frac{m}{L}dx\cdot g\cdot x=\frac{mgx}{L}dx$

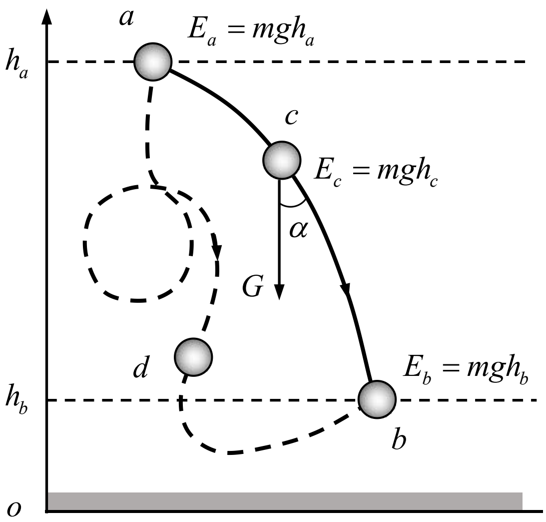
$W_2=\int dW=\int_0^{L-a}\frac{mgx}{L}dx=\frac{mg(L-a)^2}{2L}$

$W=W_1+W_2=\frac{mga(L-a)}{L}+\frac{mg(L-a)^2}{2L}=\frac{mg\left(L^2-a^2\right)}{2L}$

动能定理：$W=\frac{1}{2}mv^2-0$ 解得$v=\sqrt{\frac{g\left(L^2-a^2\right)}{L}}$

3. 保守力、势能

	重力	弹力	万有引力	静电力
保守力	$G=mg$	$F=kx$	$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$	$F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$
势能	$E_p=mgh$	$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$	$E_p=-G\dfrac{Mm}{r}$	$U_p=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$
常用零势能点	地面	平衡位置	无穷远处	无穷远处



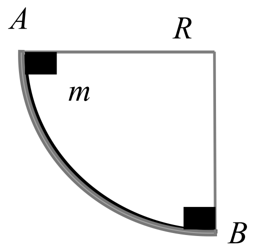
1) 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关
2) 保守力沿一闭合路径运动一周，做功为零
3) 势能的引入是以保守力做功为前提
4) 不同的势能零点，对应的势能值不一样
5) 势能大小=保守力把物体移至势能零点所做的功
6) 保守力做正功，对应势能减小
7) 功能计算时，保守力做功和势能只能计算一个

4. 机械能守恒

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$$

1) 机械能只包含动能和势能
2) 系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 如图所示，质量 $m=2Kg$ 的物体从静止开始，沿 $1/4$ 圆弧从 A 滑到 B，在 B 处的大小为 $v=6m/s$，已知圆的半径 $R=4m$，则物体从 A 到 B 的过程中摩擦力对它所做的功 $W=$________.



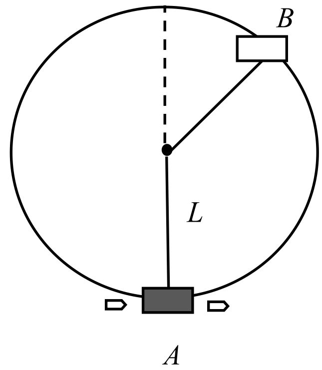
解：A 点机械能：$E_A=\frac{1}{2}mv_A{}^2+mgR=mgR$

B 点机械能：$E_B=\frac{1}{2}mv_B{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv_B{}^2$

$$W_f=E_A-E_B=mgR-\frac{1}{2}mv_B{}^2=2\times 9.8\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 6^2=42.4\ J$$

配套课程　习题答案

题 2. 质量为 m 的子弹，穿过如图所示的摆锤后，速率由 v 变为 $v/2$。已知摆锤的质量为 M，摆线的长度为 L，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度最小值应为多大？



解：穿过的瞬间，动量守恒：$mv = m\cdot\frac{v}{2} + M\cdot V_A \quad \Rightarrow V_A = \frac{mv}{2M}$

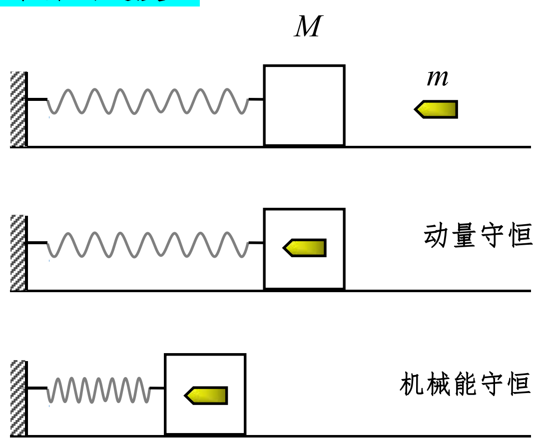
摆锤可以完成圆周运动，则在最高点满足

$$Mg = M\frac{V_B^2}{L} \quad \Rightarrow V_B^2 = gL$$

摆锤开始上扬，满足机械能守恒：$\frac{1}{2}MV_A^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg\cdot 2L$

代入数据：$\frac{1}{2}M\cdot\left(\frac{mv}{2M}\right)^2 = \frac{1}{2}M\cdot gL + 2MgL \quad \Rightarrow v = \frac{2M\sqrt{5gL}}{m}$

题 3. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内，由弹簧压缩的距离求出子弹的速度，已知子弹质量是 $0.02kg$，木块质量是 $8.98kg$。弹簧的劲度系数是 $100N/\mathrm{m}$，子弹射入木块后，弹簧被压缩 $10cm$。设木块与平面间的动摩擦因数为 0.2，求子弹的速度。



解：射入瞬间，动量守恒

$$mv = (m+M)v' \quad \Rightarrow v' = \frac{mv}{m+M} = \frac{0.02}{0.02+8.98}v = \frac{1}{450}v$$

弹簧开始压缩，满足机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \mu(m+M)g\cdot x = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}\times 9\times\left(\frac{v}{450}\right)^2 - 0.2\times 9\times 9.8\times 0.1 = \frac{1}{2}\times 100\times 0.1^2$$

解得 $v = 319.2m/s$

题 4. 对于一个物体来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒（ ）

(A). 合外力为 0　　(B). 合外力不做功

(C). 外力和非保守力都不做功　　(D). 外力和保守内力都不做功

解：机械能守恒条件：外力和非保守力都不做功，故选 C

题 5. 对功的概念有以下几种说法

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；

(3) 作用力与反作用力大小相等，方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。

以上说法正确的是(　)

A.(1)(2)　　*B*.(2)(3)　　*C*.只有 (2)　　*D*.只有 (3)

答案：***C***　*(详细解答见视频课程)*

课时五　练习题

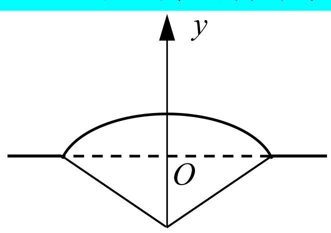
1. 用水平力 F 将置于水平面上的木箱向前拉动距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_1；第二次用相同的水平力 F 将置于粗糙水平面上的同一木箱向前拉动相同距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_2，则（　　）

$A.W_1=W_2$　　$B.W_1>W_2$　　$C.W_1<W_2$　　$D.$无法判断

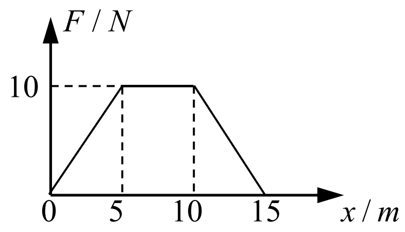
2. 某质点在力 $\vec{F}=(2+6x)\vec{i}\,(SI)$ 的作用下，沿 x 轴从原点移动到 $3m$ 处的过程中，则力 $\vec{F}$ 所做的功为：______J

3. 一个在 xOy 平面内运动的质点，在力 $\vec{F}=(5\vec{i}+2\vec{j})N$ 的作用下移动一段位移 $\Delta\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j})m$，则此过程中该恒力所做的功为______

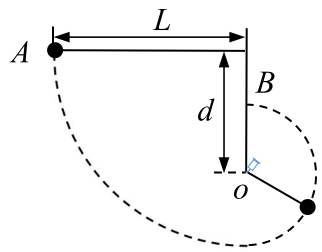
4. 如图，射箭运动员用力 $f=490N$ 使弓弦中点产生 $0.6m$ 的位移，然后把质量 $0.06kg$ 的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比（准弹性力 $f=-k\Delta x$），试求箭离开弓弦时获得的动能。



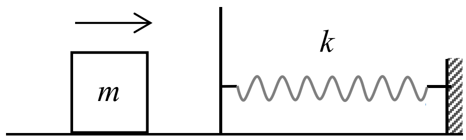
5. 质量为 $2kg$ 的物体，在沿 x 方向的变力作用下，在 $x=0$ 处由静止开始运动，设变力与 x 的关系如图所示，试由动能定理求物体在 $x=5,10,15m$ 处的速率。



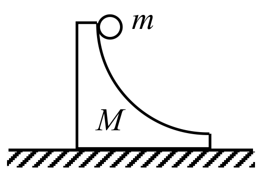
6. 如图所示，长度为 L 的轻绳一端固定，另一端有一个质量为 m 的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为 d 处的 O 点有一钉子，小球从水平位置无初速释放，欲使球在以钉子 O 为中心的圆周上绕一圈，求最小的 d 为多少。



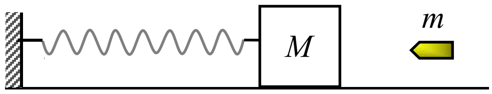
7. 如图所示，质量 m 为 $0.1kg$ 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数 k 为 $20\,N/m$ 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 $x=0.4m$ 。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 μ_k 为 0.25，问在将要发生碰撞时木块的速率 V 为多少？



8. 质量为 M 的大木块具有半径为 R 的四分之一弧形槽，如图所示。质量为 m 的小球从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小球脱离大木块时的速度。



9. 一弹簧振子置于光滑的水平面上，弹簧的劲度系数 $k=900N\cdot m^{-1}$，振子质量 $M=0.99kg$，一质量 $m=0.01kg$ 的子弹水平射入振子内而不穿出，并一起向左压缩弹簧，已知弹簧的最大压缩量 $x_m=0.10m$，求子弹射入 M 前的速度 V_0。



10. 对质点系下列说法正确的是(　　)

$A.$ 质点系总动量的改变和内力无关　　$B.$ 质点系总动能的改变和内力无关

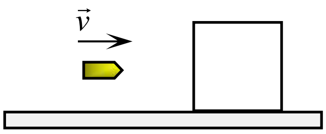
$C.$ 质点系机械能的改变与保守内力有关　　$D.$ 质点系内可选一点代表其转动规律

11. 质点系的内力可以改变(　)

$A.$ 系统的总质量　　$B.$ 系统的总动量

$C.$ 系统的总动能　　$D.$ 系统的总角动量

12. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出，以地面为参考系，下列说法中正确的是(　　)



$A.$ 子弹减少的动能转变为木块的动能

$B.$ 子弹—木块系统的机械能守恒

$C.$ 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功

$D.$ 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量

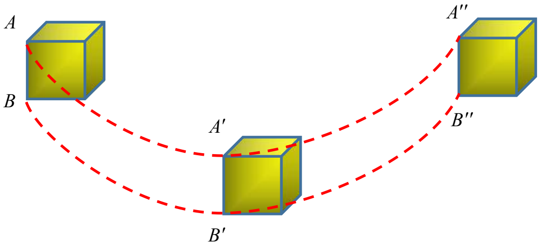
13. 在光滑的水平面内有两个物体 A 和 B，已知 $m_A=2m_B$，物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全弹性碰撞，则碰撞后两物体的总动能为________

14. 物体的动量发生变化，它的动能是否一定发生变化？为什么？

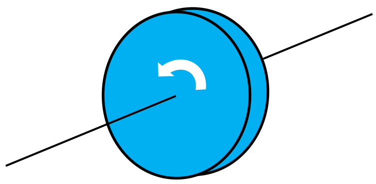
课时六　刚体转动惯量

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识刚体	基础知识	不单独考	无
2. 转动惯量	★★★★★	0～3	填空、大题
3. 平行轴定理	★★	0～3	填空

1. 认识刚体



(a) 刚体的平动



(b) 刚体的转动

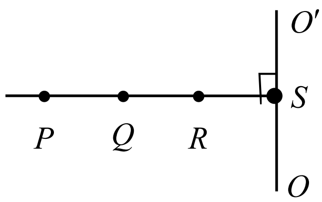
① 刚体具有一定形状和大小，并且在外力作用下，形变并不显著。

② 刚体分为平动和转动，若可以忽略形状和大小，刚体平动即质点运动，1～5 课时所讲

③ 6～9 课时，只研究刚体转动

2. 转动惯量 （离散型：$J=\sum r_i^2\cdot m_i$　连续型：$dJ=r^2dm$　$J=\int dJ$　单位：$kg\cdot m^2$）

题 1. 如图所示，P、Q、R 和 S 是附于刚性轻质细杆上的质量分别为 $4m,3m,2m$ 和 m 的四个质点，$PQ=QR=RS=d$，则系统对 OO' 轴的转动惯量为______。

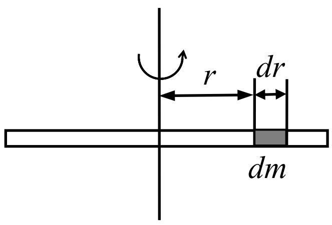


解：$J=\sum r_i^2 m_i$

$$=4m\cdot(3d)^2+3m\cdot(2d)^2+2m\cdot d^2+m\cdot 0^2$$

$$=50md^2$$

题 2. 一根均质细棒长度为 l，质量为 m，绕着与棒垂直且通过中心的转轴转动，则其转动惯量为______。

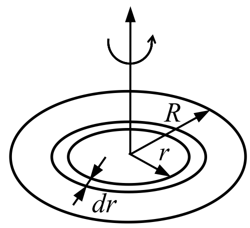


解：$dm=\lambda\cdot dr=\frac{m}{l}\cdot dr$　　$dJ=r^2\cdot dm=r^2\cdot\frac{m}{l}dr$

$$J=\int r^2dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2\cdot\frac{m}{l}\,dr=\frac{1}{12}ml^2$$

题 3. 一均质圆盘，质量为 m，半径为 R，绕着通过圆盘中心且与盘面垂直的转轴转动，则其转动惯量________。

解：面密度 $\lambda=\dfrac{m}{\pi R^2}$



取宽度为 dr 的圆环

$$dm=\lambda\cdot dS=\frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\cdot dr=\frac{2m}{R^2}\cdot rdr$$

$$dJ=r^2\cdot dm==\frac{2m}{R^2}\cdot r^3dr$$

$$J=\int r^2dm=\int_0^R\frac{2m}{R^2}\cdot r^3dr=\frac{1}{2}mR^2$$

题 4. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

A.刚体的总质量大小　　　　B.刚体的转轴的位置

C.刚体所受合外力矩的大小　　　　D.刚体质量的分布情况

解：由定义 $J=\sum m_ir_i^2$ 知：

决定转动惯量大小的因素：

1） 刚体的总质量

2） 质量的分布

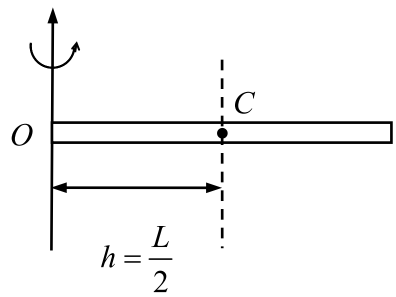
3） 给定转轴的位置

故本题答案：C

3. 平行轴定理 $J=J_C+mh^2$

题 1. 一质量为 m 的均质杆长为 L，绕通过其一端且垂直于杆的轴转动，其转动惯量为_______。

解：已知绕 C 点轴：$J_C=\dfrac{1}{12}mL^2$

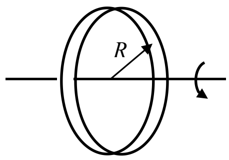
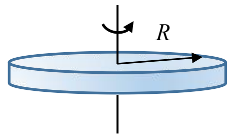
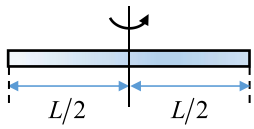
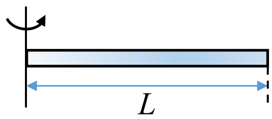
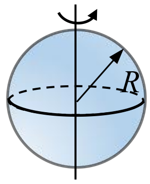
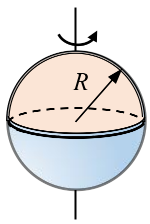
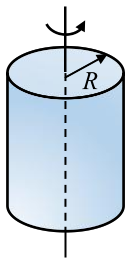


将转轴从 C 点移动到 O 点

根据平行轴定理：

$$J=J_C+mh^2=\frac{1}{12}mL^2+m\cdot(\frac{L}{2})^2=\frac{1}{3}mL^2$$

常用刚体的转动惯量

刚体	转轴	转动惯量	图
均质圆环 （质量为 M，半径为 R）	通过圆环中心与环面垂直	MR^2	
均质圆盘 （质量为 M，半径为 R）	通过圆盘中心与盘面垂直	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆 （质量为 M，长为 L）	通过中心与杆垂直	$\frac{1}{12}ML^2$	
均质细杆 （质量为 M，长为 L）	沿细棒一端与棒垂直	$\frac{1}{3}ML^2$	
均质球体 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{5}MR^2$	
均质球壳 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{3}MR^2$	
均质柱体 （质量为 M，半径为 R）	沿几何轴	$\frac{1}{2}MR^2$	

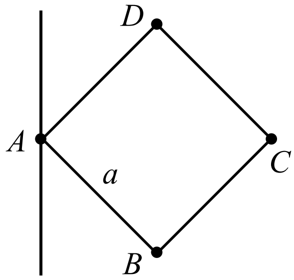
课时六 练习题

1. 刚体作定轴转动时，刚体上各点具有相同的_____(填“速度”，“加速度”，“角速度”，“角加速度”)

2. 如图所示，在边长为 a 的正方形的顶点上，分别有质量为 m 的 4 个质点，质点之间用轻质杆连接，求此系统绕下列转轴的转动惯量：

(1) 通过其中一个质点 A，并平行于对角线 BD 的转轴；

(2) 通过质点 A 并垂直于质点所在平面的转轴。



3. 半径为 R，质量为 M 的圆轮(当作均匀原盘)可绕通过其中心的水平光滑固定轴自由旋转。一质量为 m 的杂技演员(当作质点)抓住圆轮水平半径的末端，与圆轮一起从静止开始自由旋转。杂技演员和圆轮整体对固定轴的转动惯量 $J=$______

4. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B， A 环的质量分布均匀， B 环的质量分布不均匀。它们与通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B， 则 J_A 和 J_B 的大小关系为

5. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是(　　)

A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

C. 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置

D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和空间分布无关

6. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是(　　)

A. 刚体的总质量大小　　B. 刚体的转轴的位置

C. 刚体所含外力矩的大小　　D. 刚体质量的分布情况

课时七 力矩 转动定理

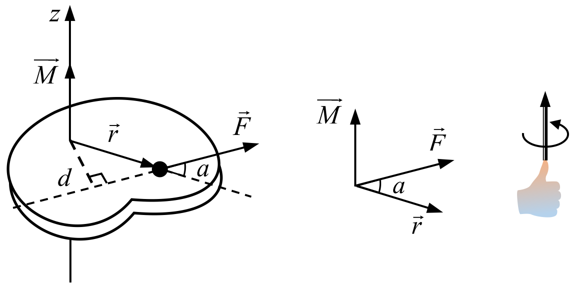
考点	重要程度	占分	题型
1. 力矩	★★	$0\sim3$	选择填空
2. 转动定理	必考	$5\sim10$	大题

1. 力矩

矢量：$\overrightarrow{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

大小：$M=F\cdot r\sin\alpha=F\cdot d$

单位：$N\cdot m$



2. 转动定理

转动定理：$M=J\cdot\beta$ （力矩等于转动惯量乘角加速度）

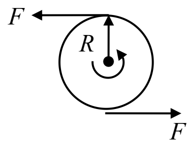
对比：$F=ma$ 牛二定理：合外力 使物体运动

$M=J\cdot\beta$ 转动定理：合外力矩 使刚体转动

题 1. 几个力同时作用在一个具有光滑固定轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此物体（ ）

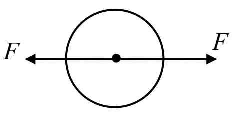
(A) 必然不会转动 (B) 转速必然不变

(C) 转速必然改变 (D) 转速可能不变，也可能改变



$F_{合}=0$，但不在一条直线上。

合外力矩：$M=F\cdot R+F\cdot R=2FR \quad \Rightarrow \beta\neq0$ 转速改变



$F_{合}=0$，合外力矩：$M=0 \quad \Rightarrow \beta=0$ 转速不变

题 2. 电动机带动一个转动惯量为 $50kg\cdot m^2$ 的系统作定轴转动，在 $0.5s$ 内由静止开始最后达到 $120\ r/\min$ 的转速，假定转速是均匀增加的，则该转动系统在上述过程中的角加速度为____，电动机对转动系统施加的力矩为____。

解：角速度：$\omega=\dfrac{n\cdot2\pi}{60}=\dfrac{120\times2\pi}{60}=4\pi \quad rad/s$

由 $\omega=\beta\cdot t \quad \Rightarrow \beta=\dfrac{\omega}{t}=\dfrac{4\pi}{0.5}=8\pi \quad rad/s^2$

$M=J\cdot\beta=50\times8\pi=1256\ N\cdot m$

匀变速转动

$\omega=\omega_0+\beta t$

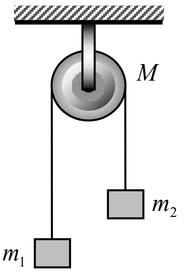
$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$

$\omega_2^2-\omega_1^2=2\beta(\theta_2-\theta_1)$

题 3. 定滑轮质量 $M=4.0kg$，可看成均质圆盘，一条不可伸长的轻绳绕过定滑轮，绳的两端分别悬挂两物块，$m_1=10kg, m_2=8.0kg$，忽略滑轮与轴间的摩擦，g 取 $10\,m/s^2$，求：

（1）两物块的加速度。

（2）滑轮两边绳中张力。



(1) 选物体

(2) 分析受力

(3) 列方程

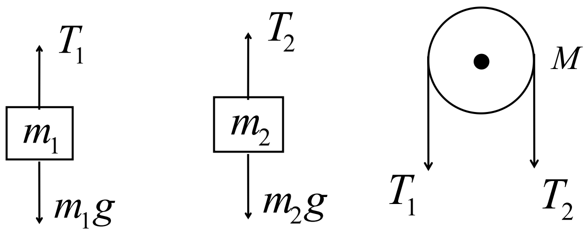
(4) 求解

解：$m_1g-T_1=m_1a$

$T_2-m_2g=m_2a$

$T_1R-T_2R=J\cdot\beta$

角量和线量关系：$a=\beta\cdot R$



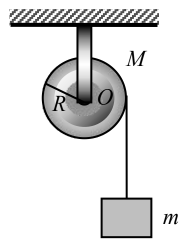
联立方程可得

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}=\frac{(10-8)\times10}{10+8+\frac{1}{2}\times4}=1\ m/s^2$$

$$T_1=m_1g-m_1a=10\times10-10\times1=90\ N$$

$$T_2=m_2g+m_2a=8\times10+8\times1=88N$$

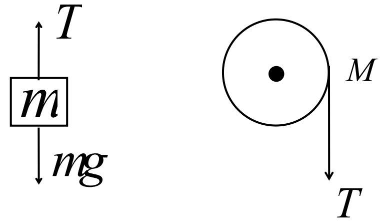
题 4. 如图，有一半径为 R，质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘心 O 垂直盘面的水平轴无摩擦转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$，圆盘上绕轻绳，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为 m 的物体，物体从静止开始下落，试求物块下落速度随时间的变化关系。



解：$mg-T=ma$

$$T\cdot R=J\cdot\beta=\frac{1}{2}MR^2\cdot\beta$$

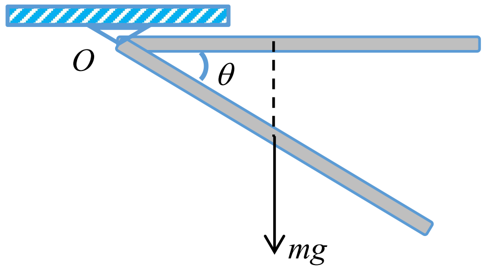
$$a=\beta\cdot R$$



联立解得　$a=\dfrac{2mg}{2m+M}$

$$v=v_o+at\ =0+at=\frac{2mg}{2m+M}\cdot t$$

题 5. 一均匀细棒可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动，已知棒长为 L，质量为 m，转动惯量为 $J=\frac{1}{3}mL^2$，令棒由水平位置自由摆下，求棒与水平方向的夹角为 θ 时的角加速度。



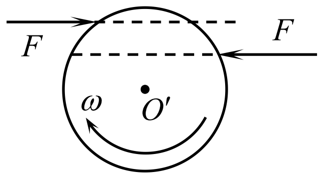
解：绕 O 点力矩：$M=mg\cdot\frac{1}{2}L\cdot\cos\theta$

由 $M=J\cdot\beta$ 得

$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{\frac{1}{2}mgL\cos\theta}{\frac{1}{3}mL^2}=\frac{3g\cos\theta}{2L}$$

课时七 练习题

1. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴 O' 以角速度 ω 按图示方向转动，如图所示，若将两个大小相等，方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度 ω（　）

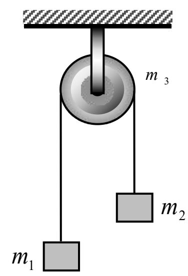


A. 必然增大　　*B.* 必然减少

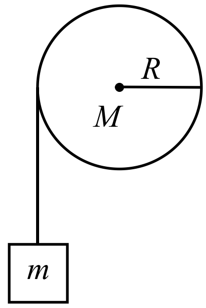
C. 不会改变　　*D.* 如何变化，不能确定

2. 一定轴转动的飞轮转动惯量 $J=10kg\cdot m^2$，其转速在 5 秒内由 $900\,rev/\min$（转/分）均匀减至 $600\,rev/\min$，则飞轮所受的外力矩 $M=$______ Nm，这 5 秒内飞轮的角位移 $\Delta\theta=$______ rad

3. 一轻绳跨过定滑轮 C，滑轮视为均匀质圆盘，绳的两端分别悬挂有质量为 m_1 和 m_2 的物体 A 和物体 B，其中 $m_1<m_2$，如图所示。设滑轮的质量为 m_3，半径为 R，其转动惯量为 $m_3R^2/2$，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。绳与滑轮之间无相对滑动，试求物体的加速度和绳中的张力。



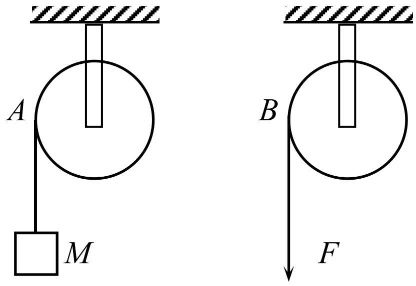
4. 如图所示，一个质量为 m 的物体与绕在定滑轮上的绳子相连，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为 M，半径为 R，其转动惯量为 $MR^2/2$，滑轮轴光滑，试求：求两滑块系统的加速度大小



(1) 该物体由静止开始下落的过程中，物体的加速度和滑轮的角加速度；
(2) 绳子的张力。

5. 一匀质圆盘对某轴的转动惯量 $J=50kg\cdot m^2$，若它受到对于该轴的合外力矩 $M=100N\cdot m$，则圆盘的角加速度 $\beta=$ ______ rad/s^2

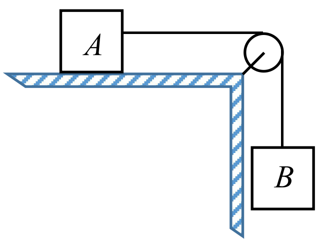
6. 如图所示，A,B 两个相同的绕着轻绳的定滑轮，A 滑轮挂一质量为的 M 物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$。设 A,B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有（　）



$A.\ \beta_A=\beta_B$　　$B.\ \beta_A>\beta_B$

$C.\ \beta_A<\beta_B$　　$D.$ 开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$

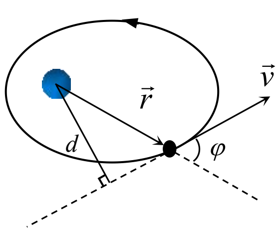
7. 质量分别为 m_A 和 m_B 的 A,B 两滑块，通过一理想的细线相连接。细线穿过一不计摩擦的滑轮，其中滑块 A 放在光滑的水平桌面上，如图所示。
(1) 不计滑轮的质量，计算两滑块的加速度和绳子张力的大小；
(2) 假若滑轮为一质量为 m，半径为 R 的圆盘（圆盘的转动惯量为 $J=mR^2/2$）



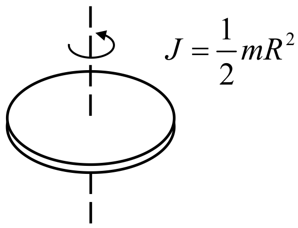
课时八　角动量、角动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识角动量	基础知识	不单独出题	无
2. 角动量守恒	必考	5～10	选择、填空、大题

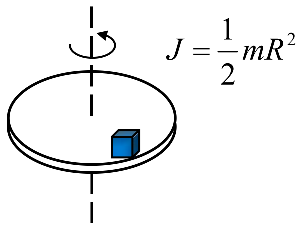
1. 认识角动量



质点角动量
$L = mv \cdot d$



刚体角动量
$L = J \cdot \omega$



混合角动量
$L = L_1 + L_2 = mv \cdot R + J \cdot \omega$

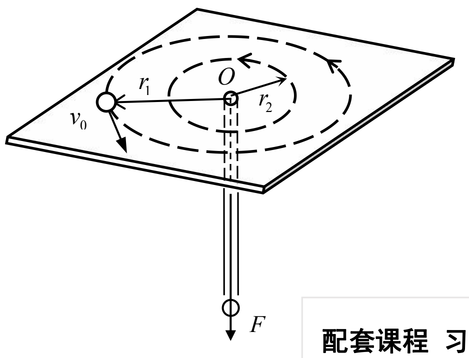
2. 角动量守恒(若合外力矩：$M = F \cdot d = 0$，则角动量守恒：$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$)

题 1. 花样滑冰运动员绕自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$，此时它转动的角速度变为（ ）

$A. 3\omega_0$　　$B. 4\omega_0$　　$C. \frac{\omega_0}{3}$　　$D. \frac{\omega_0}{4}$

答案：*A*.　力矩 $M = 0$，角动量守恒：$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ 即：$J_0\omega_0 = \frac{1}{3}J_0 \cdot \omega$　$\Rightarrow \omega = 3\omega_0$

题 2. 质量为 $0.05kg$ 的小块物体，置于一光滑水平面上，有一绳一端连接此物，另一端穿过桌面中心的小孔（如图所示）。该物体原以 $3rad/s$ 的角速度在距孔 $0.2m$ 的圆周上转动，今将绳从小孔缓慢往下拉，使该物体的转动半径减为 $0.1m$，则该物体的角速度 $\omega =$ ________



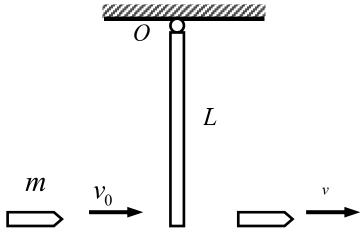
解：物块受力沿绳子通过转轴中心，故 $M = 0$，角动量守恒

$r_1 = 0.2$ 时，$L_1 = mv_1 \cdot r_1 = m\omega_1 r_1 \cdot r_1 = 0.05 \times 3 \times 0.2^2 = 6 \times 10^{-3}$

$r_2 = 0.1$ 时，$L_2 = mv_2 \cdot r_2 = m\omega_2 r_2 \cdot r_2 = 0.05 \times 0.1^2 \omega_2 = 0.5 \times 10^{-3} \omega_2$

角动量守恒：$L_1 = L_2$　解得：$\omega_2 = 12rad/s$

题 3. 如图，杆的长度为 L，它的上端悬挂在水平轴 O 上，杆对 O 的转动惯量为 J，起初杆处于静止状态，现有一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 击中杆的端点并以速度 v 穿出，则动量_____（守恒，不守恒），角动量______（守恒，不守恒），此杆的角速度为_________

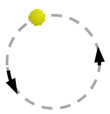


解：动量不守恒，角动量守恒

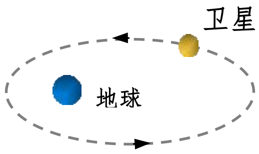
$$mv_0 \cdot L = mv \cdot L + J \cdot \omega$$

解得 $$\omega = \frac{mv_0L - mvL}{J}$$

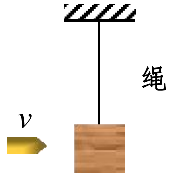
题 4. 判断下列运动角动量是否守恒



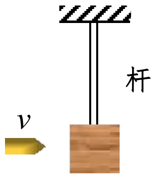
匀速圆周运动
角动量______



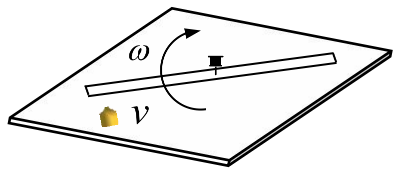
卫星绕地球
卫星角动量______



子弹打击木块
系统角动量______



子弹打击木块
系统角动量______



水平面内物块打击杆
系统角动量______

解：守恒；守恒；守恒；守恒；守恒（详细解答见视频课程）

课时八　练习题

1. 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为(　　)

$A.\ \dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$　　$B.\ \dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$

$C.\ \dfrac{J}{mR^2}\omega_0$　　$D.\ \omega_0$

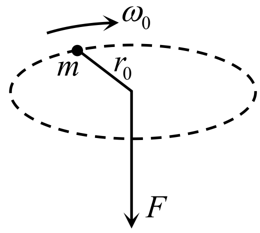
2. 一人站在无摩擦的转动平台上，双臂水平地举着二哑铃，当他把二哑铃水平地收缩到胸前的过程中，人与哑铃组成的系统应满足(　　)

$A.$ 机械能守恒，角动量守恒　　$B.$ 机械能守恒，角动量不守恒

$C.$ 机械能不守恒，角动量守恒　　$D.$ 机械能不守恒，角动量不守恒

3. 一质点的角动量守恒的条件是外力对O点的________为零

4. 如图所示，一质量为$m = 0.5kg$的小球由一绳索系着，以角速度$\omega_0 = 5rad/s$在无摩擦的水平面上，作半径为$r_0 = 0.4m$的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力，使小球作半径$r = 0.2m$的圆周运动。则小球新的角速度$\omega =$________rad/s；拉力所作的功为$W =$________J



5. 人造卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的(　　)

A. 动量不守恒，动能守恒

B. 动量守恒，动能不守恒

C. 角动量守恒，动能不守恒

D. 角动量不守恒，动能守恒

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统(　　)

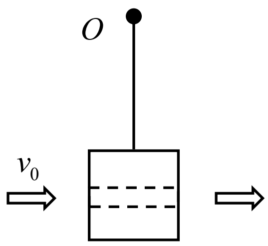
A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变

B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变

C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化

D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 一个子弹以v_0射入一冲击摆(如图)，假若子弹非常迅速地穿过该摆，该过程中子弹和冲击摆所构成的系统(　　)



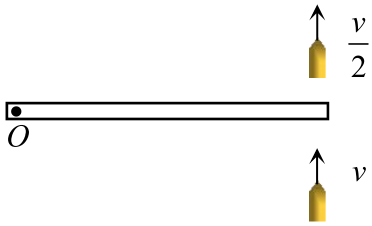
A. 动量守恒；关于O点的角动量守恒

B. 动量不守恒；关于O点的角动量守恒

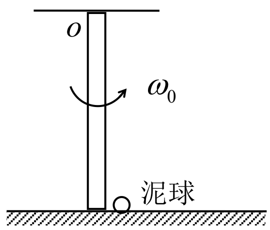
C. 动量守恒；关于O点的角动量不守恒

D. 动量不守恒；关于O点的角动量不守恒

8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L，质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $ML^2/3$。一质量为 m，速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿过棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $v/2$，则此时棒的角速度应为________



9. 一根长度为 $L=0.60m$ 的均匀棒，绕其端点 O 转动时的转动惯量为 $J=0.12kg\cdot m^2$。当棒摆到竖直位置时，其角速度为 $\omega=2.4rad\cdot s^{-1}$。此时棒的下端和一质量为 $m=0.20kg$ 的泥球相碰并粘在一起，问棒粘有泥球后的角速度是多少？



课时九 刚体转动的功和能

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 力矩做功	★	0～3	选择、填空
2. 刚体动能定理	必 考	10～15	大 题
3. 刚体机械能守恒			

1. 力矩做功 $W=M\theta$

题 1. 一个滑轮半径为 $0.5m$，质量为 $5kg$，边缘绕有绳子，用恒力 $T=20N$ 拉绳子一端，一段时间后滑轮转过的角度为 $15.7rad$ 求：拉力所做的功。

解：力矩：$M=TR=20\times0.5=10$

力矩做功：$W=M\theta=10\times15.7=157(J)$

2. 动能定理

题 1. 某冲床上飞轮的转动惯量为 $4.00\times10^3 kg\cdot m^2$，当它的转速到 $30\ r/\min$ 时，它的转动动能是多少？冲击一次，其转速降到 $10r/\min$。求每冲一次飞轮对外所作的功。

刚体动能：

$$E_k=\frac{1}{2}J\cdot\omega^2$$

刚体动能定理：

$$A=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

解：（1）$n_1=30r/\min\quad\Rightarrow\omega_1=\dfrac{30\times2\pi}{60}=\pi\ rad/s$

$$E_{k1}=\frac{1}{2}J\omega_1^2=\frac{1}{2}\times4.00\times10^3\times\pi^2=1.97\times10^4\ J$$

（2）$n_2=10\ r/\min\quad\Rightarrow\omega_2=\dfrac{10\times2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{3}\ rad/s$

$$E_{k2}=\frac{1}{2}J\omega_2^2=\frac{1}{2}\times4.00\times10^3\times\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=2.19\times10^3\ J$$

由转动动能定理，得外力矩对飞轮作功为：$A=E_{k2}-E_{k1}=-1.75\times10^4J$

飞轮对外所作的功为：$A'=-A=1.75\times10^4J$

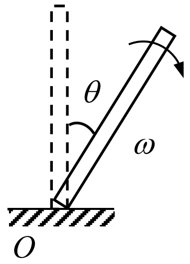
3. 刚体机械能守恒：

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$$

①刚体机械能只包含刚体动能和刚体势能

②系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 长为 L、质量为 m 的匀质细棒，如图所示，可绕水平轴 O 在竖直面内旋转，若轴光滑，今使棒从竖直位置自由下摆（设转轴位于棒的一端时，棒的转动惯量为 $J=\frac{1}{3}mL^2$），求：棒转过 θ 角时的角速度。



解：由机械能守恒得

$$0+mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2+mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

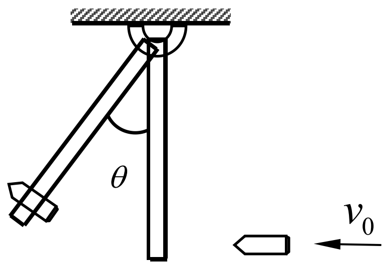
又 $J=\frac{1}{3}mL^2$

解得 $\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$

题 2. 一长为 L 的均质细杆如图悬挂，O 为水平光滑固定转轴，平衡时杆铅直下垂，一速度为 v_0 的子弹水平射入杆的最下端并与杆一起摆动，设杆和子弹的质量均为 m，求：

(1) 杆开始摆动时角速度的大小；

(2) 杆和子弹一起摆动时的最大摆角 θ



解：（1）系统角动量守恒

$$mv_0L=mvL+J\omega=m\omega L\cdot L+\frac{1}{3}mL^2\omega$$

解得：$\omega=\frac{3v_0}{4L}$

（2）机械能守恒 $E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$

$$\frac{1}{2}m(\omega L)^2+\frac{1}{2}J\omega^2+mg\frac{L}{2}=mg(L-L\cos\theta)+mg(L-\frac{L}{2}\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2L^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}mL^2\omega^2+\frac{1}{2}mgL=2mgL-\frac{3}{2}mgL\cos\theta$$

$$\frac{2}{3}\omega^2L-\frac{3}{2}g=-\frac{3}{2}g\cos\theta$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3v_0}{4L}\right)^2L-\frac{3}{2}g=-\frac{3}{2}g\cos\theta$$

$$\cos\theta=1-\frac{v_0^2}{4gL}\quad\Rightarrow\theta=arc\cos\left(1-\frac{v_0^2}{4gL}\right)$$

刚体的平动和定轴转动中的一些重要公式

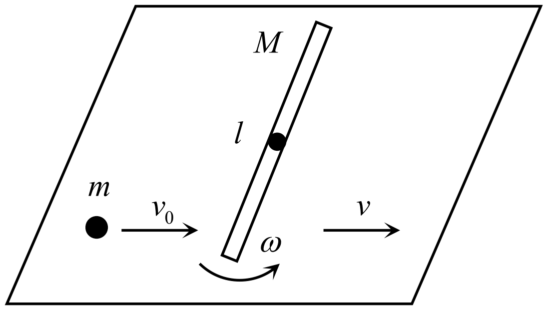
质点的直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度：$v=\dfrac{ds}{dt}$	角速度：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
加速度：$a=\dfrac{dv}{dt}$	角加速度：$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动：$s=vt$	匀角速转动：$\theta=\omega t$
匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0{}^2=2as$	匀变速转动 $\omega=\omega_0+at$ $\theta=\omega_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $\omega^2-\omega_0{}^2=2\alpha\theta$
力 F，质量 m 牛顿第二定律：$F=ma$	力矩 M，转动惯量 J 转动定律：$M=J\alpha$
动量 mv，冲量 Ft（常力） 动量定理：$Ft=mv-mv_0$	角动量 $J\omega$，冲量 Mt（常力矩） 角动量定理：$Mt=J\omega-J_0\omega_0$（常力矩）
动量守恒定律：$\sum mv=$ 常量	角动量守恒定律：$\sum J\omega=$ 常量
平动动能 $\dfrac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A=Fs$ 动能定理（常力）：$Fs=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$	转动动能 $\dfrac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A=M\theta$ 动能定理：$M\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0{}^2$（常力矩）

课时九　练习题

1. 在光滑水平桌面上放置一个静止的质量为 m'，长为 $2l$，可绕过与杆垂直的光滑轴中心转动的细杆，有一质量为 m 的小球以沿水平方向与杆垂直的速度 $\vec{V}_0$ 与杆的一端发生完全弹性碰撞，求小球的反弹速度 $\vec{V}$ 及杆的转动角速度 ω。

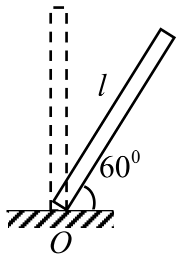
2. 长为 l，质量为 M 的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴，质量为 m 的小球以水平速度 $\vec{v}_0$ 垂直于棒冲击其一端而粘上。已知棒绕 O 点的转动惯量 $J = Ml^2/12, M = 3m$，求：

(1) 碰撞后棒的角速度 ω 和球的速率 V；
(2) 由此而损失的机械能 ΔE

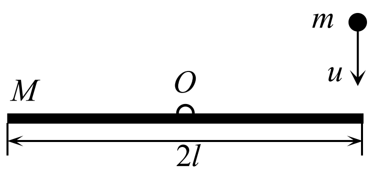


3. 一长为 $l = 1m$ 的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成 60°，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为 $ml^2/3$，其中 m 和 l 分别为棒的质量和长度。($g = 10\,m/s^2$) 求：

(1) 放手时棒的角加速度；
(2) 棒转到水平位置时的角速度



4. 如题图所示，一根长为 $2l$，质量为 M 的匀质细棒，可绕棒中点的水平轴 O 在竖直面内转动，开始时棒静止在水平位置，质量为 m 的小球以速度 u 垂直下落在棒的端点，设小球与棒作弹性碰撞，相互作用时间极短，忽略重力矩，问碰撞后小球的反弹速度 v 及棒转动的角速度 ω 各为多少？



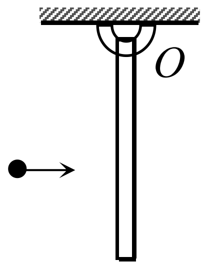
5. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴O旋转，初始状态为静止悬挂，现有一个小球自左方打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统(　　)

$A.$ 只有机械能守恒

$B.$ 只有动量守恒

$C.$ 只有对转轴O的角动量守恒

$D.$ 机械能，动量和角动量均守恒



6. 一均质细杆，长$L=1m$，可绕通过一端的水平光滑轴O在铅垂面内自由转动，如题图所示。开始时杆处于铅垂位置，今有一子弹沿水平方向以$v=10m\cdot s^{-1}$的速度射入细杆。设入射点离O点的距离为$\frac{3}{4}L$，子弹的质量是杆质量的$\frac{1}{9}$，试求：

(1) 子弹和杆开始共同运动的角速度；

(2) 子弹和杆共同摆动能达到的最大角度