合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

第7讲：三维变换

吴文明
计算机与信息学院

讲义大纲

- 三维几何变换
- 投影变换

三维几何变换

三维几何变换

- 几何变换：对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新图形；

- 复杂图形的几何变换可通过变换矩阵对图形的基本元素点、线、面的作用而实现

基本变换

- 平移变换
- 比例变换
- 错切变换
- 旋转变换
- 对称变换

复合变换

三维几何变换

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

三维几何变换

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ 对点进行比例、对称、旋转、错切变换

$$T_2 = [l \quad m \quad n]$$ 对点进行平移变换

$$T_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$ 作用是进行透视投影变换

$$T_4 = [s]$$ 作用是产生整体比例变换

$$T_{3D} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

平移变换

	前提条件	参数	矩阵
二维	无	$T_x \quad T_y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$
三维	无	$T_x \quad T_y \quad T_z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$

比例变换

	前提条件	参数	矩阵
二维	相对于原点	$S_x \quad S_y$	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
三维	相对于原点	$S_x \quad S_y \quad S_z$	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

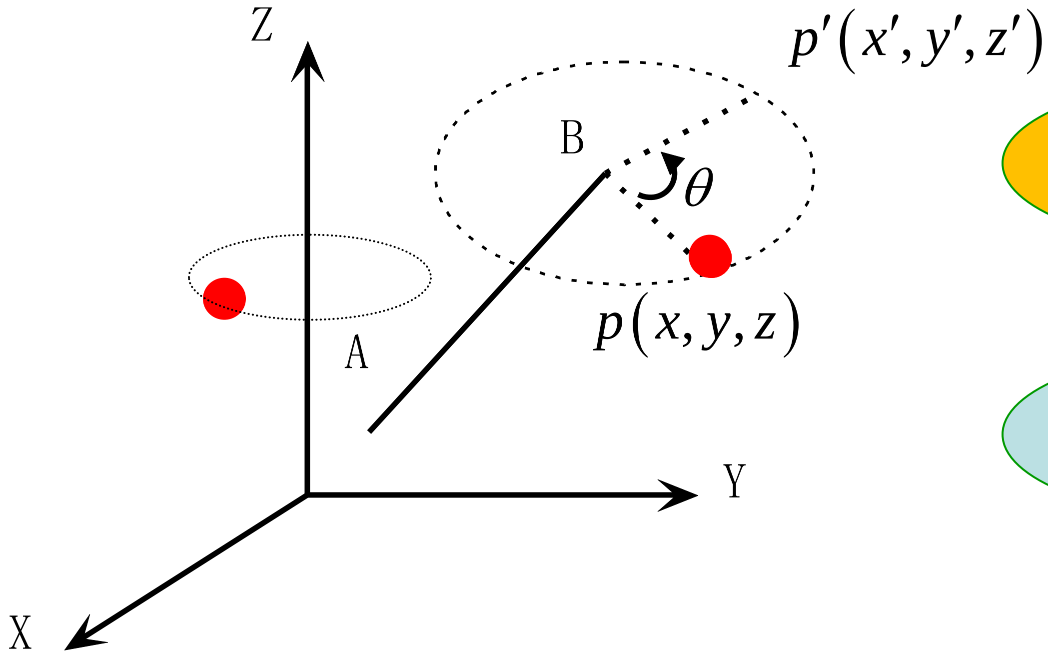
整体比例变换

	前提条件	参数	矩阵
二维	相对于原点	S	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S \end{bmatrix}$
三维	相对于原点	S	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/S \end{bmatrix}$

旋转变换

	前提条件	参　数	矩　阵
二　维	相对于原点	**θ**	$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
三　维	相对于坐标轴	**θ**	由坐标轴 的选择决定

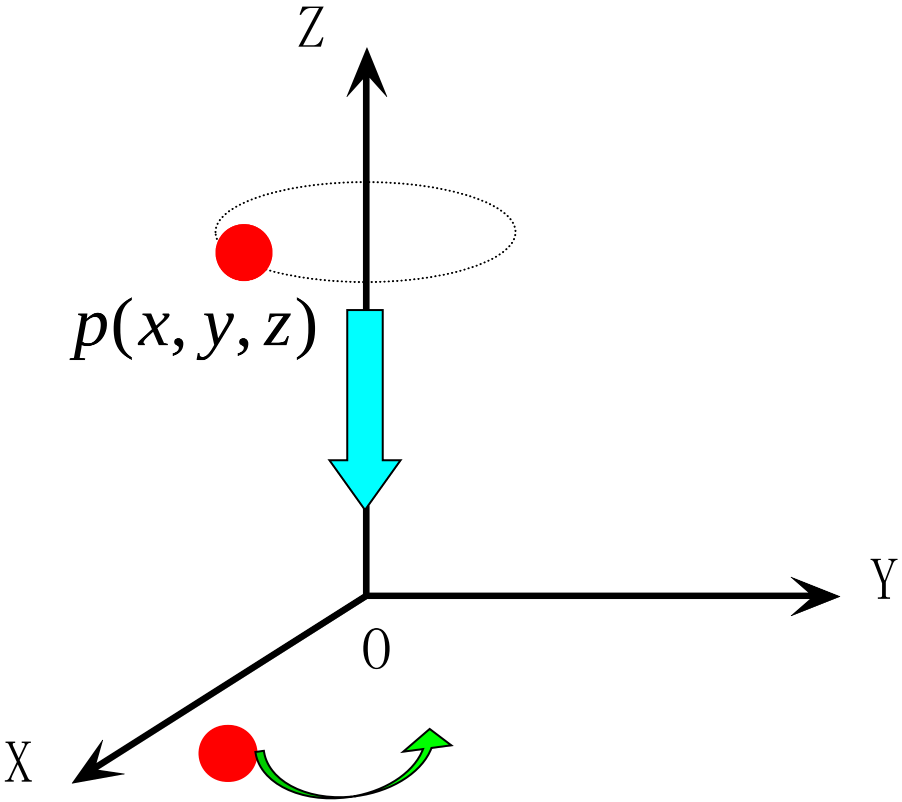
旋转变换



绕坐标轴

绕任意轴

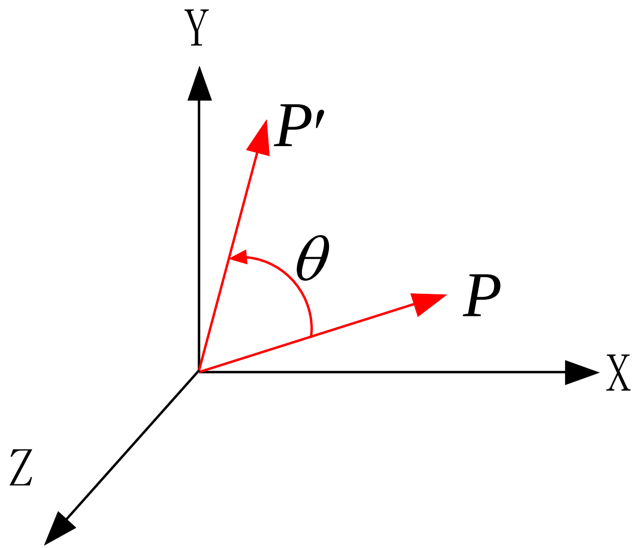
旋转变换：绕Z轴



1. z坐标不变，即$z = z'$

2. 在XOY平面上，$p(x, y, 0)$绕原点旋转α角，得到$p'(x', y', 0)$

旋转变换：Z轴



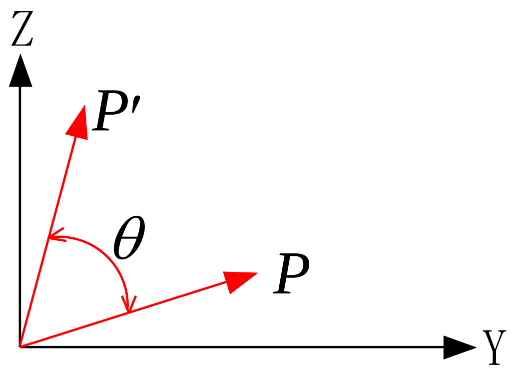
$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ y' = x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换：X轴

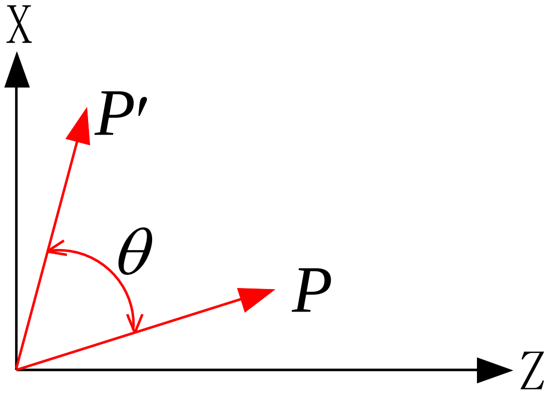


$$\begin{cases} y' = y\cdot\cos\theta - z\cdot\sin\theta \\ z' = y\cdot\sin\theta + z\cdot\cos\theta \\ x' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ y' = x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换：Y轴



$$\begin{cases} x' = z\cdot\sin\theta + x\cdot\cos\theta \\ y' = y \\ z' = z\cdot\cos\theta - x\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ y' = x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕三个坐标轴旋转

绕Z轴

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

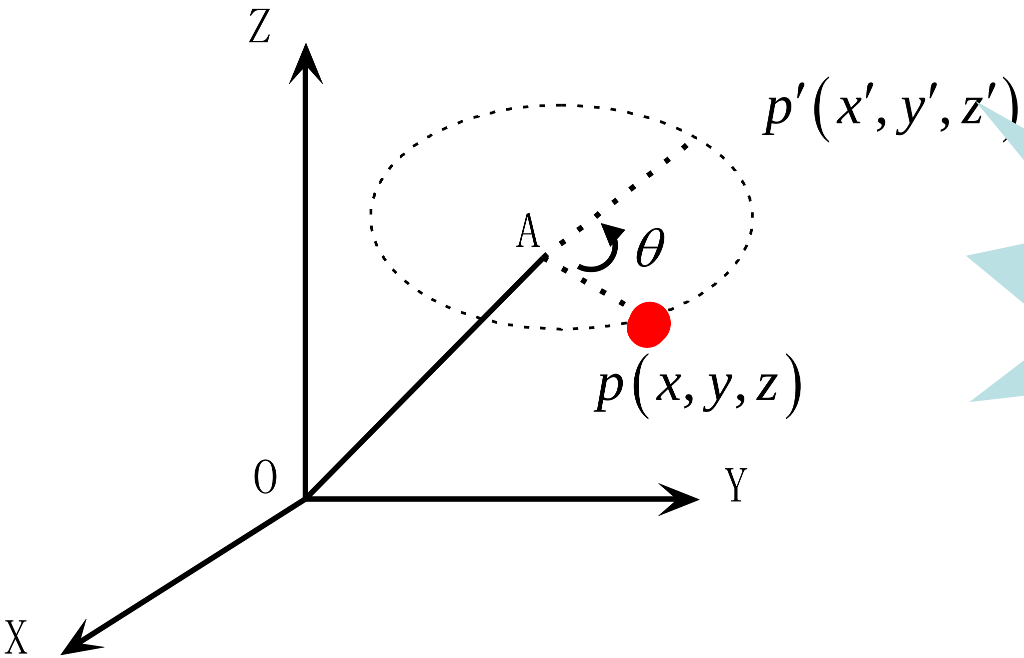
绕X轴

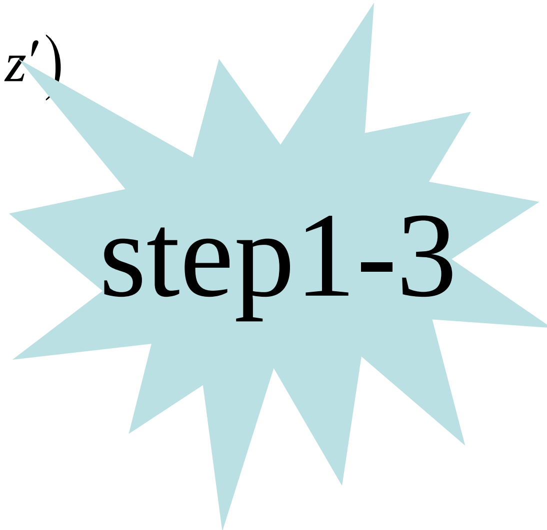
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕Y轴

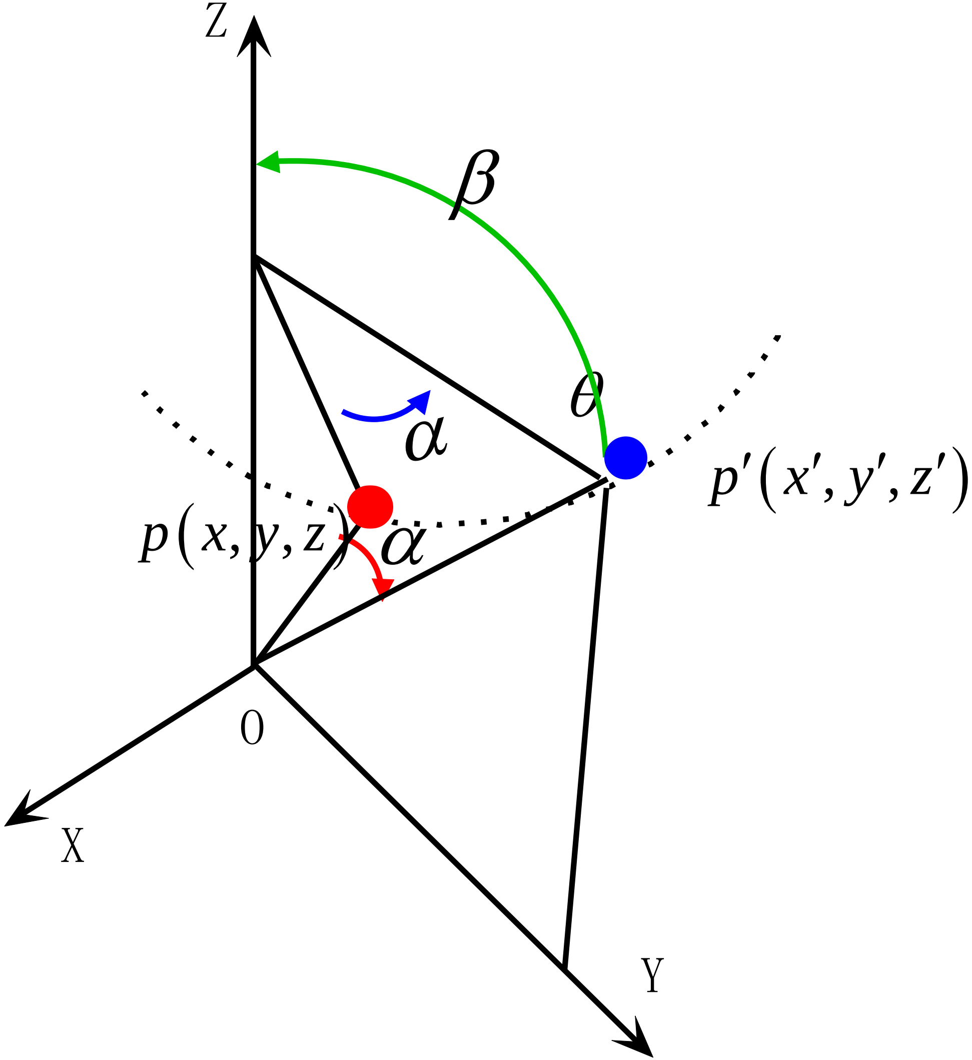
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴旋转

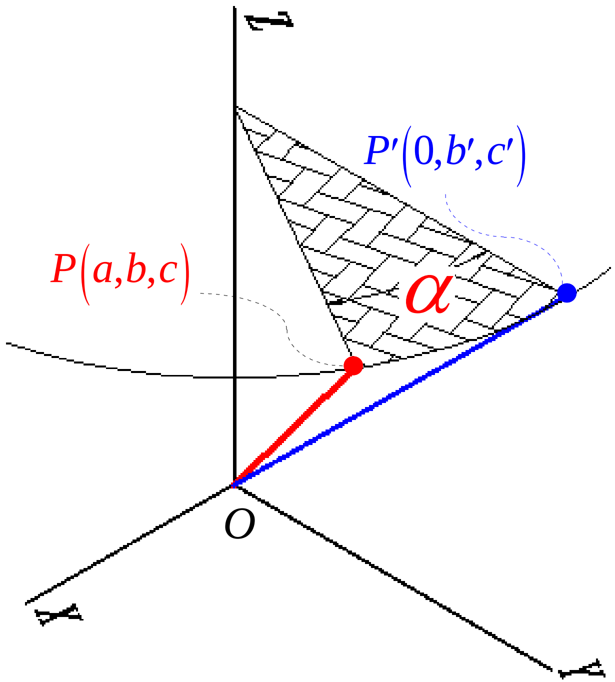


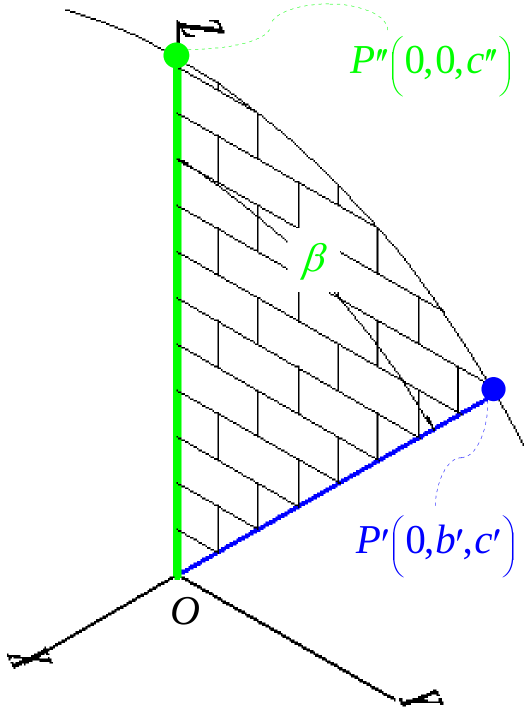


将任意轴旋转到Z轴

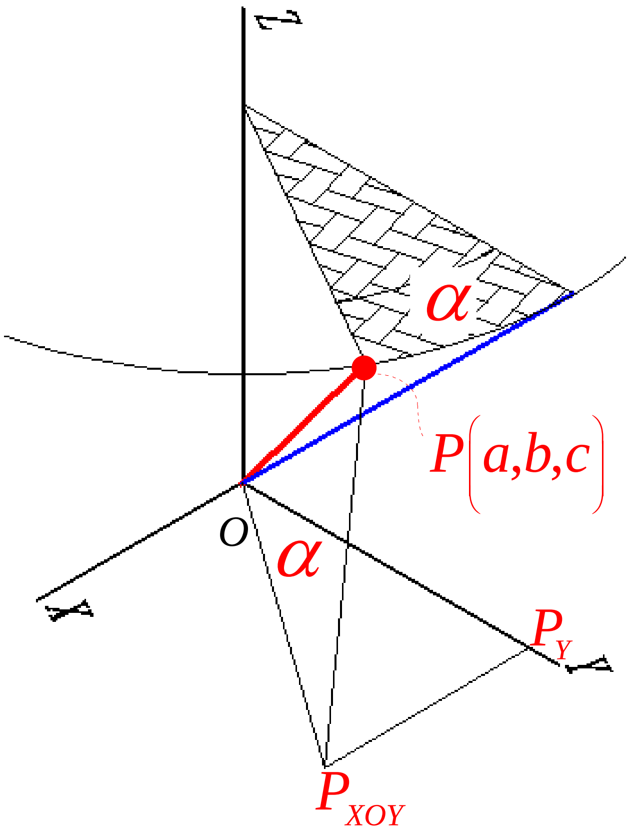


将任意轴旋转到Z轴





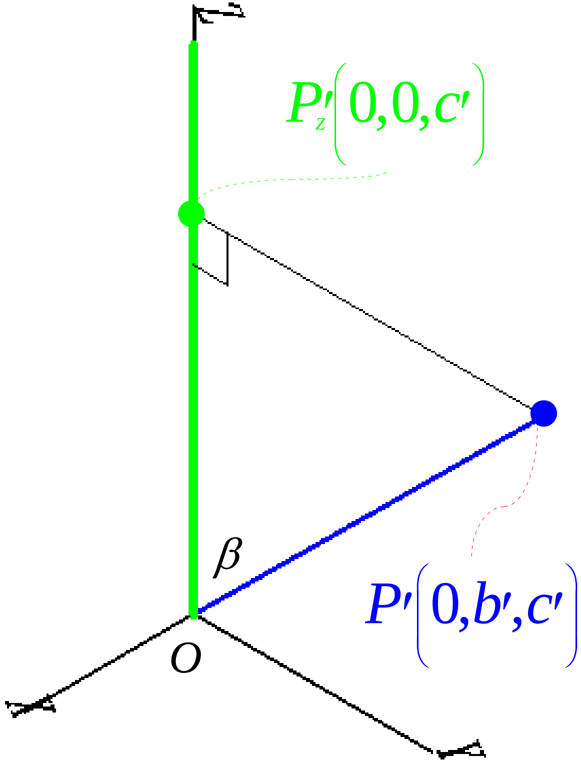
如何求 α



$$tg\alpha = \frac{|P_{XOY}P_Y|}{|OP_Y|} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

如何求 β



$$c' = c$$

$$|OP'| = |OP|$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos\beta = c \big/ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(c \big/ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

绕任意轴进行三维几何变换

绕z轴旋转α 角

绕x轴旋转β 角

沿Z轴进行三维几何变换

绕x轴旋转-β 角

绕z轴旋转-α 角

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(c \Big/ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

思考

这个过程是否唯一？

复合变换

- 相对任一参考点的三维几何变换
  - 将参考点移至坐标原点
  - 针对原点进行三维几何变换
  - 将参考点移回原来的位置
- 相对于任意方向的三维几何变换
  - 将任意方向旋转到某一坐标轴（如Z轴）
  - 相对于坐标轴进行三维几何变换
  - 将坐标轴旋转恢复至原位置

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n) \qquad (n > 1)$$

对称变换

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{Fzx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T_{Fx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

错切变换

$$T_{SH}=\begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

错切变换

$$T_{SHx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\d&1&0&0\\g&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{SHy}=\begin{bmatrix}1&b&0&0\\0&1&0&0\\0&h&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad T_{SHz}=\begin{bmatrix}1&0&c&0\\0&1&f&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

逆变换

- 所谓**逆变换**即是与上述过程相反的变换；
  - 根据数学意义进行求解；
  - 按几何意义进行求解；

$$A = \frac{1}{|A|} A^{*}$$

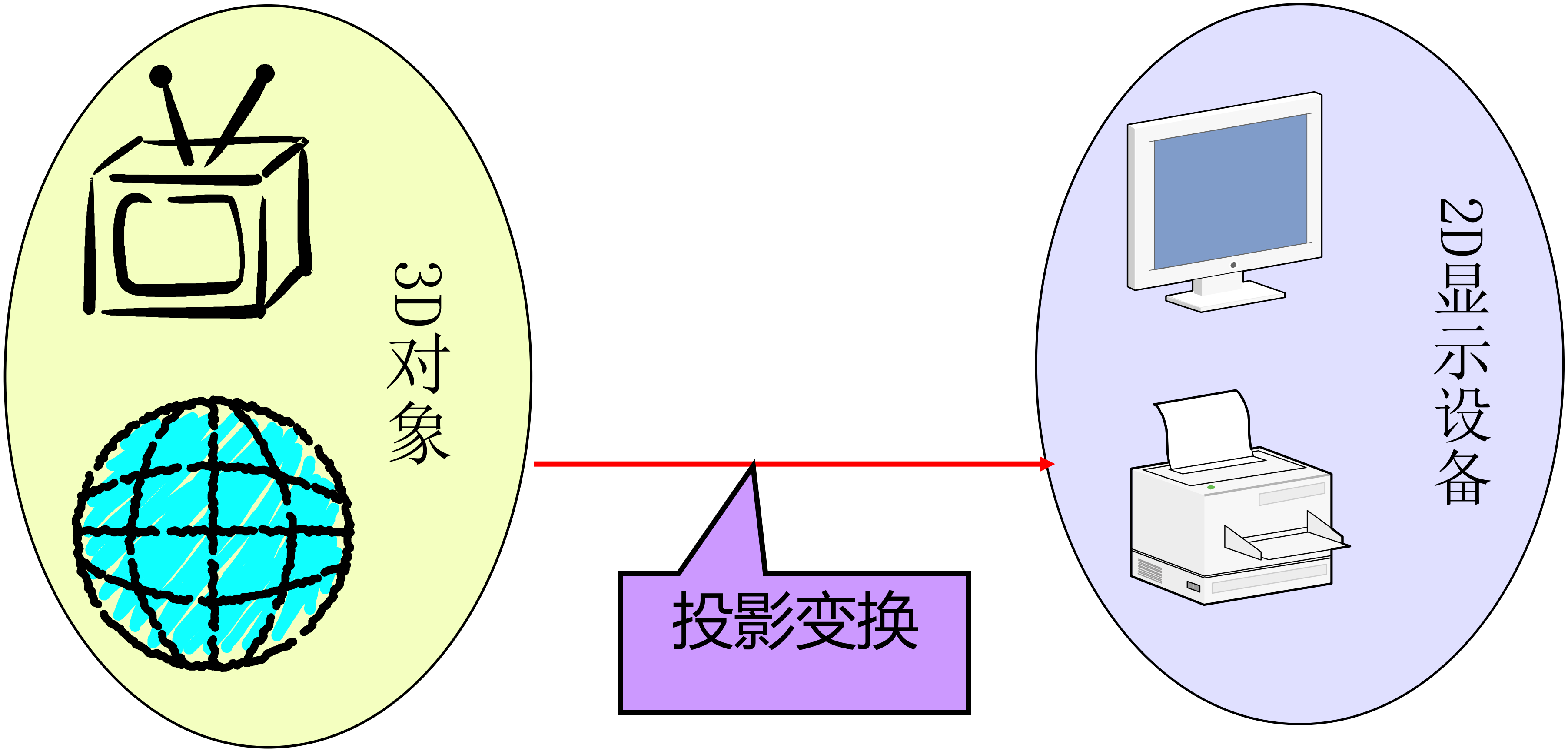
平移的逆变换

$$T_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

投影变换

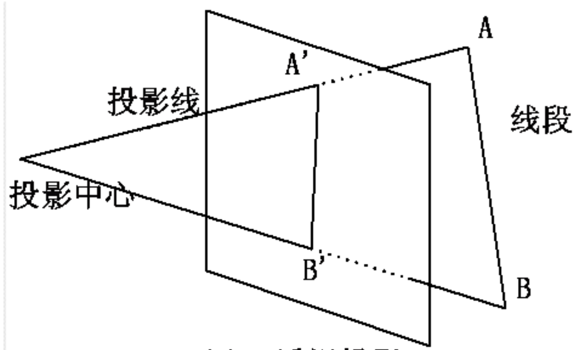
投影变换

投影变换：把三维对象投射到投影面上得到二维平面图形。

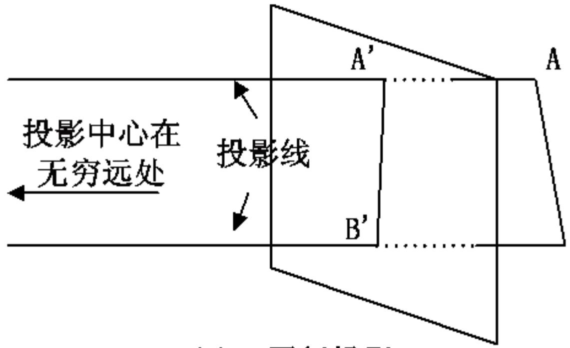


投影变换

- 在三维空间中选择一个点为**投影中心**（或称投影参考点），再定义一个不经过投影中心的**投影面**，连接投影中心与三维物体（如线段AB）的线，称为**投影线**，投影线或其延长线将与投影面相交，在投影面上形成物体的像，这个像称为三维物体在二维投影面上的**投影**。
- **投影中心**相当于人的**视点**，**投影线**相当于**视线**。



(a) 透视投影



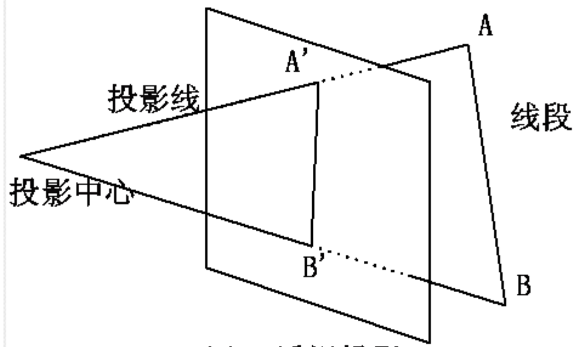
(b) 平行投影

投影变换

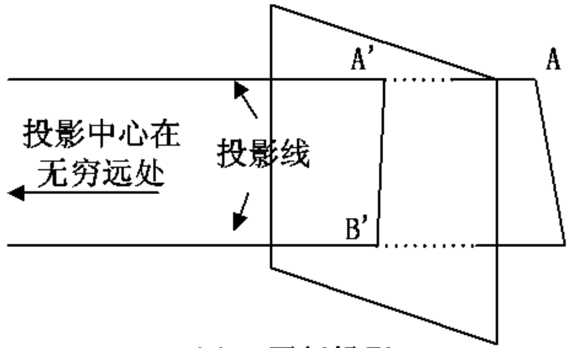
- 二者的本质区别：

  透视投影的投影中心到投影面间的距离是**有限的**。

  平行投影的投影中心到投影面间的距离是**无限的**。



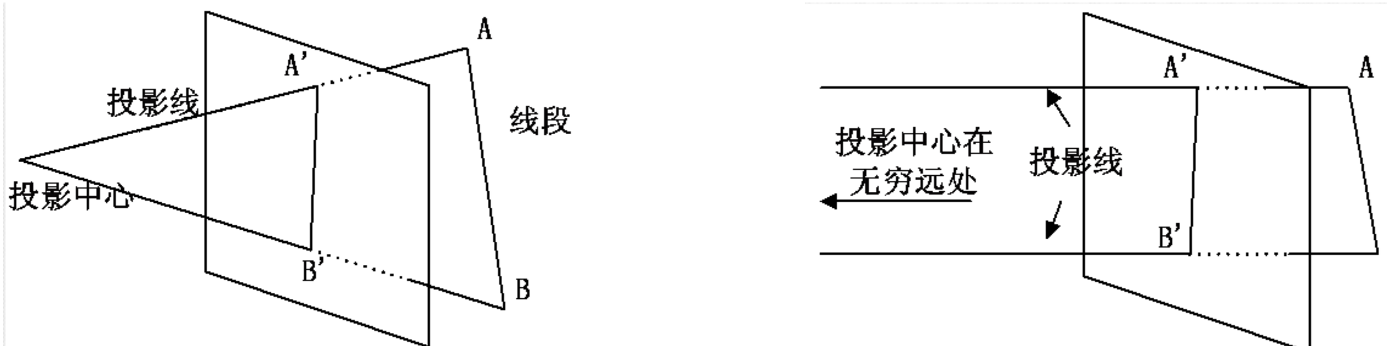
(a) 透视投影



(b) 平行投影

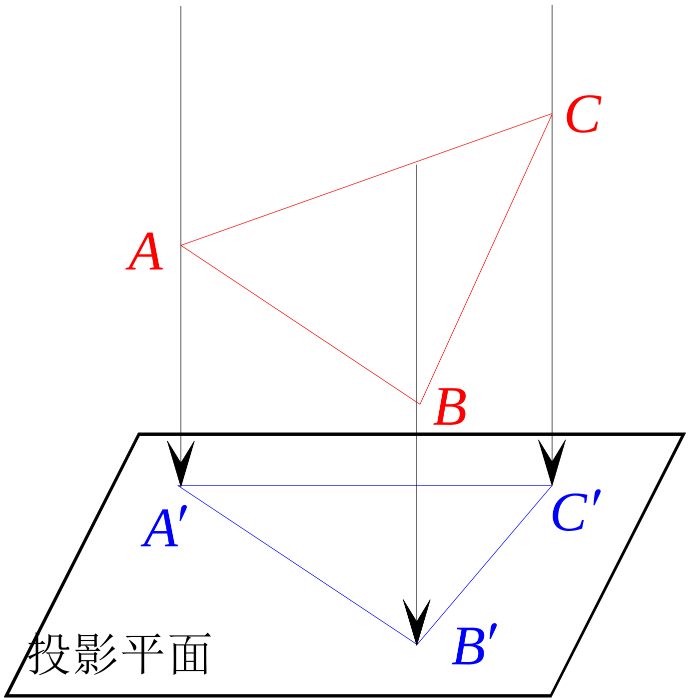
投影变换

投影法
- 透视（中心）投影法　　建筑透视投影法
- 平行投影法
  - 正投影法　工程图样
  - 斜投影法



(a)　透视投影　　　　(b)　平行投影

平行投影

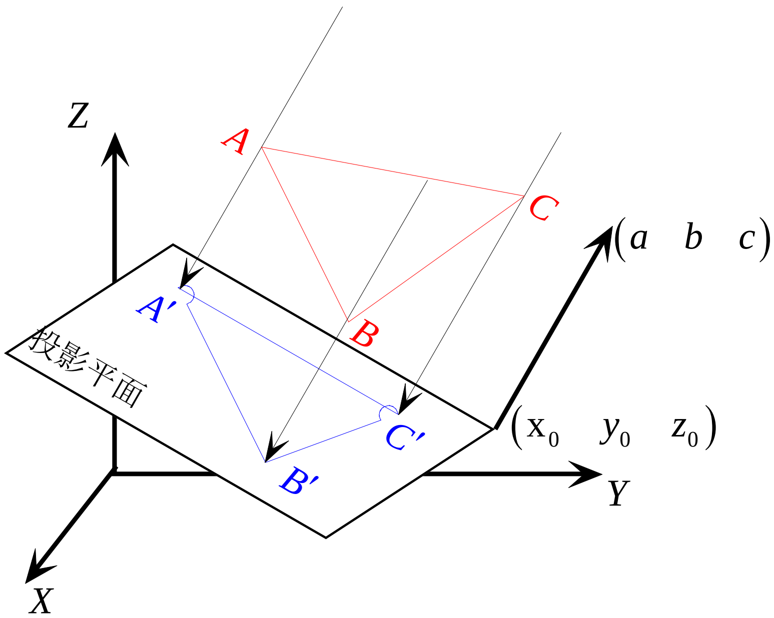


投影面$A'B'C'$在XOY面上

AA′ ⊥ 面$A'B'C'$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平行投影



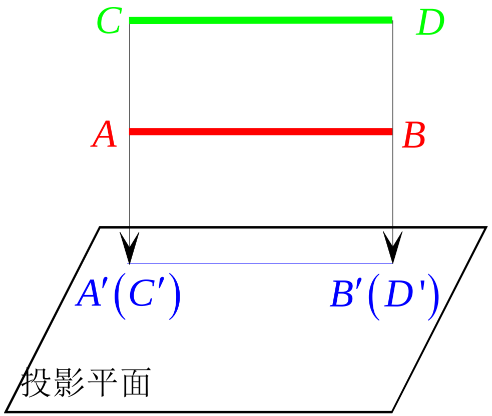
- 平移将（x_0, y_0, z_0）平移至原点
- 将投影方向（a, b, c）旋转和Z轴重合；
- 投影变换
- 恢复投影方向（a, b, c）
- 恢复（x_0, y_0, z_0）

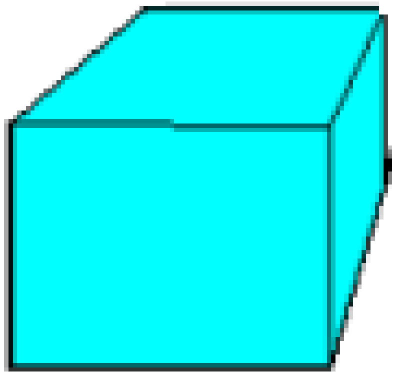
平行投影的性质

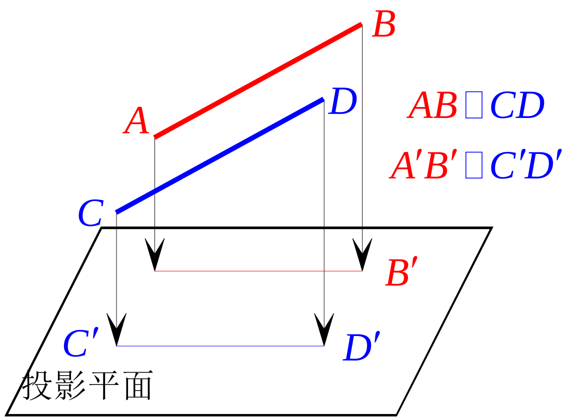
能精确反映物体的**实际尺寸**

平行线经过投影后仍保持平行

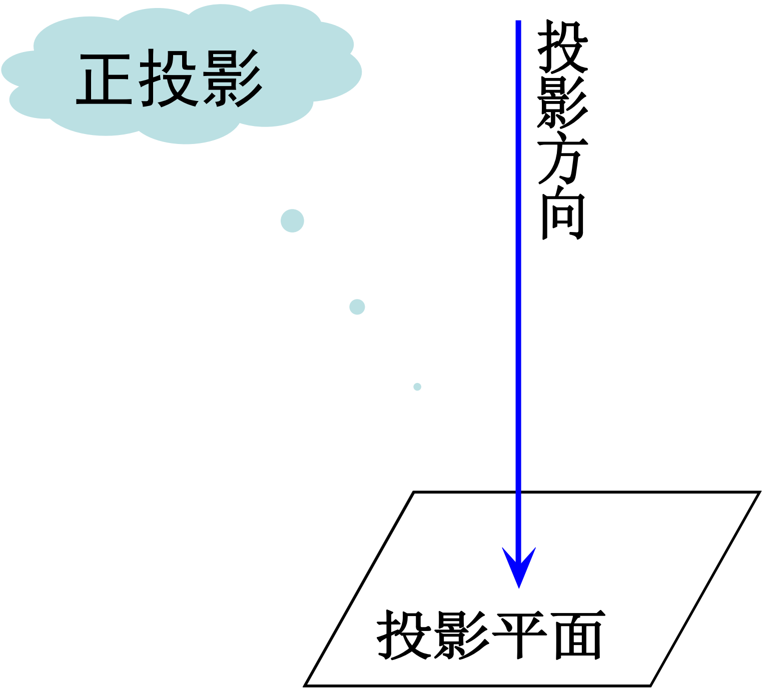
在工程领域应用广泛

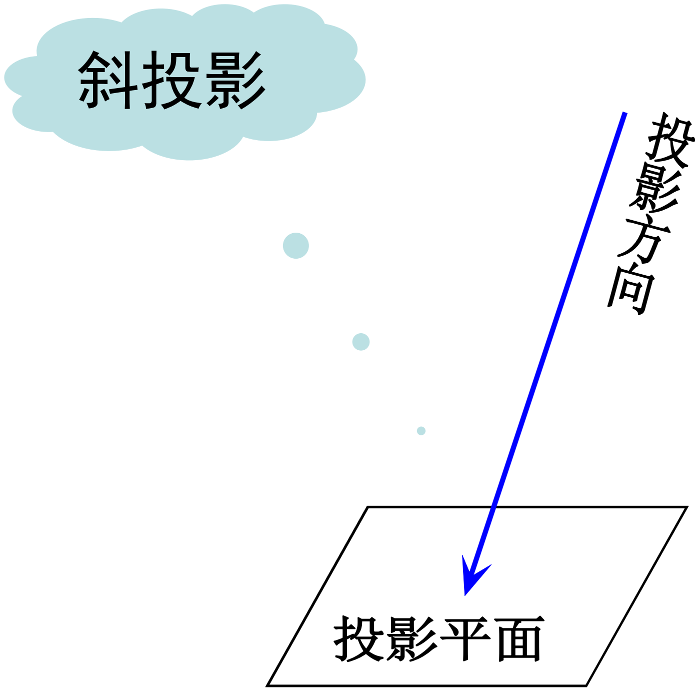




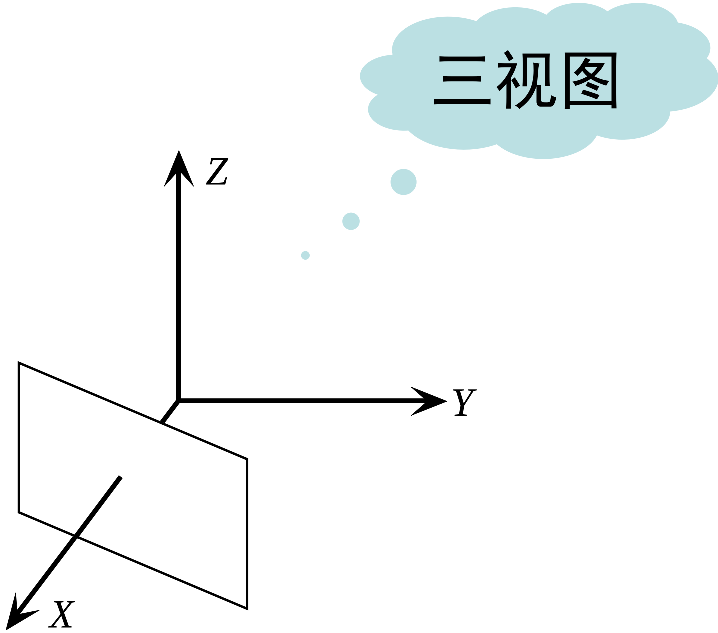


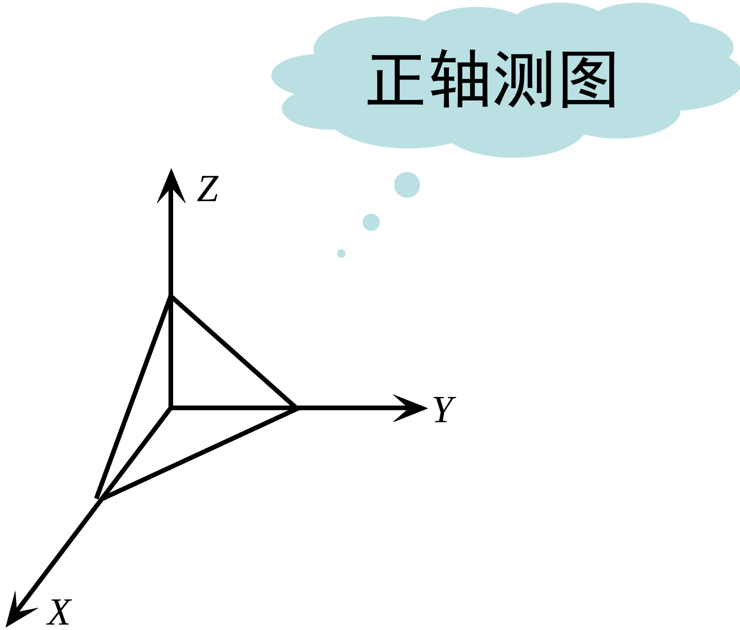
平行投影



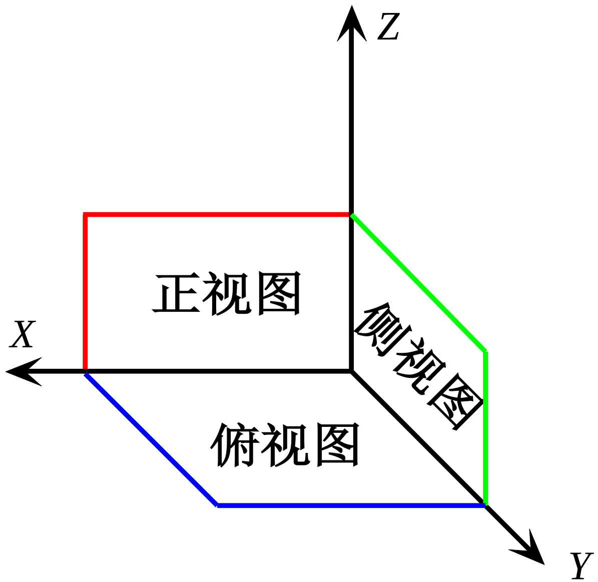


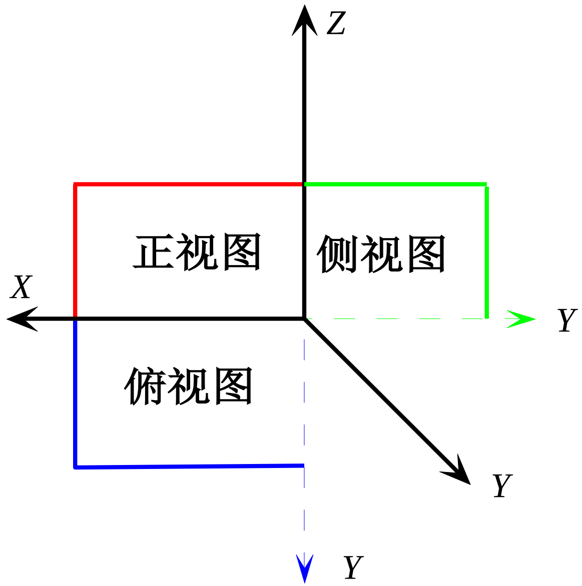
常用正投影



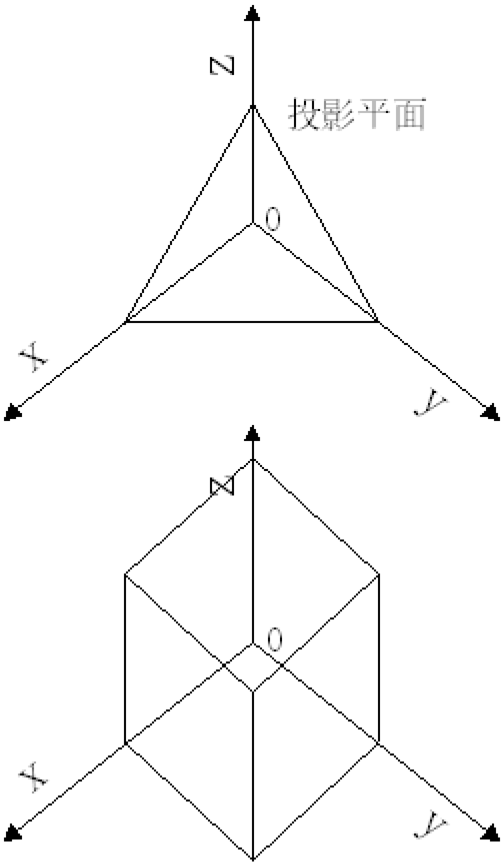


三视图



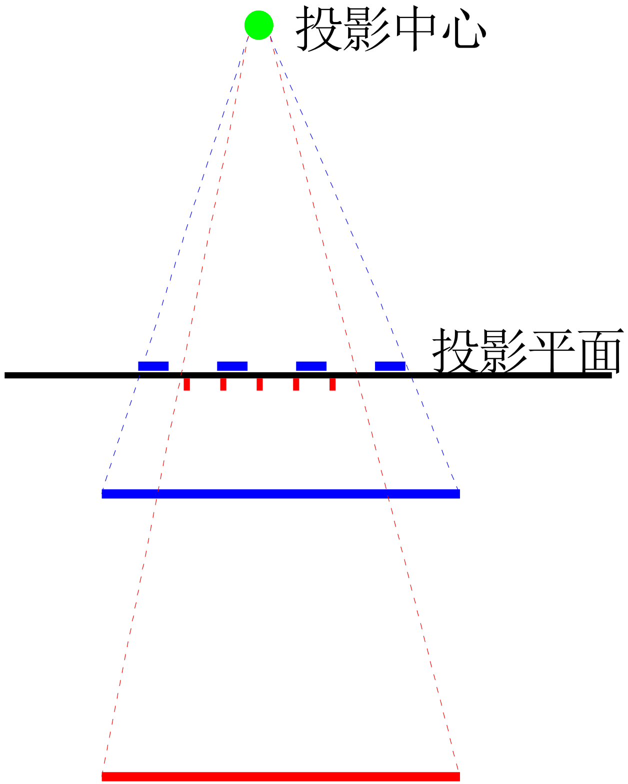


正轴测图



(a) 等轴测　　(b) 正二测　　(c) 正三测

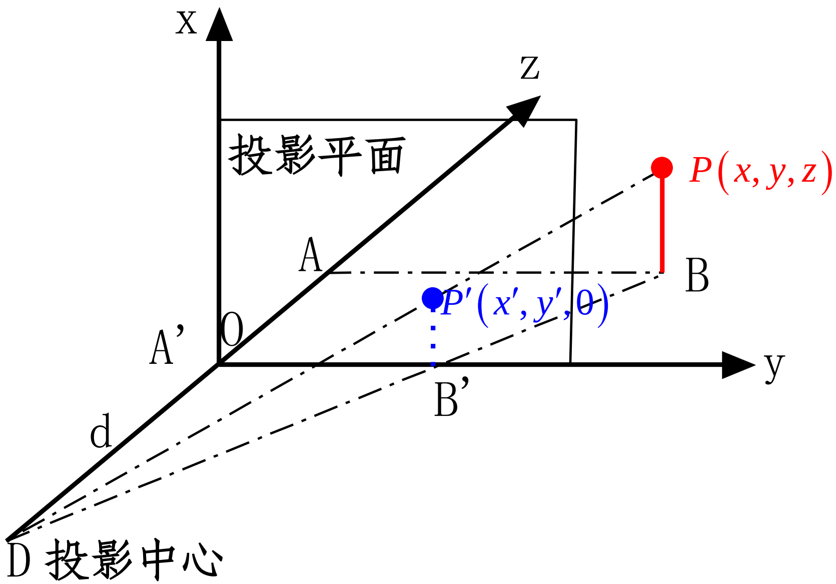
透视投影



- 性质：透视缩小性，近大远小
- 优点：符合人的视觉特性
- 一般情况下，投影物体、投影中心位于投影面的两侧


土拨鼠网

透视投影



$$\Delta DB'P' \sim \Delta DBP$$

$$\Delta DB'A' \sim \Delta DBA$$

$$\frac{B'P'}{BP}=\frac{DB'}{DB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{DO}{DA}$$

$$\frac{x'}{x}=\frac{DB'}{DB}=\frac{y'}{y}=\frac{d}{d+z}$$

$$\begin{cases} x'=x/(1+z/d) \\ y'=y/(1+z/d) \\ z'=0 \end{cases}$$

透视投影

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & 0 & \dfrac{z+d}{d} \end{bmatrix}$$

可以对该矩阵进行分解

透视投影

透视矩阵

平行投影是透视投影的特例！

$r = 1/d$

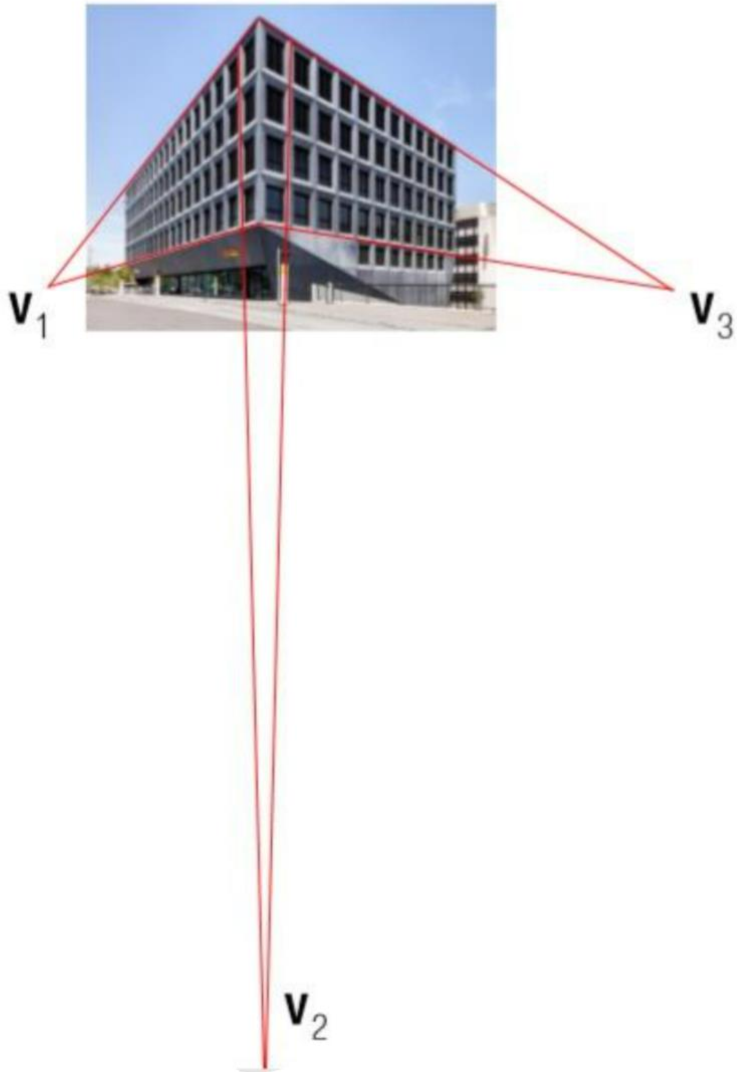
$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

透视矩阵

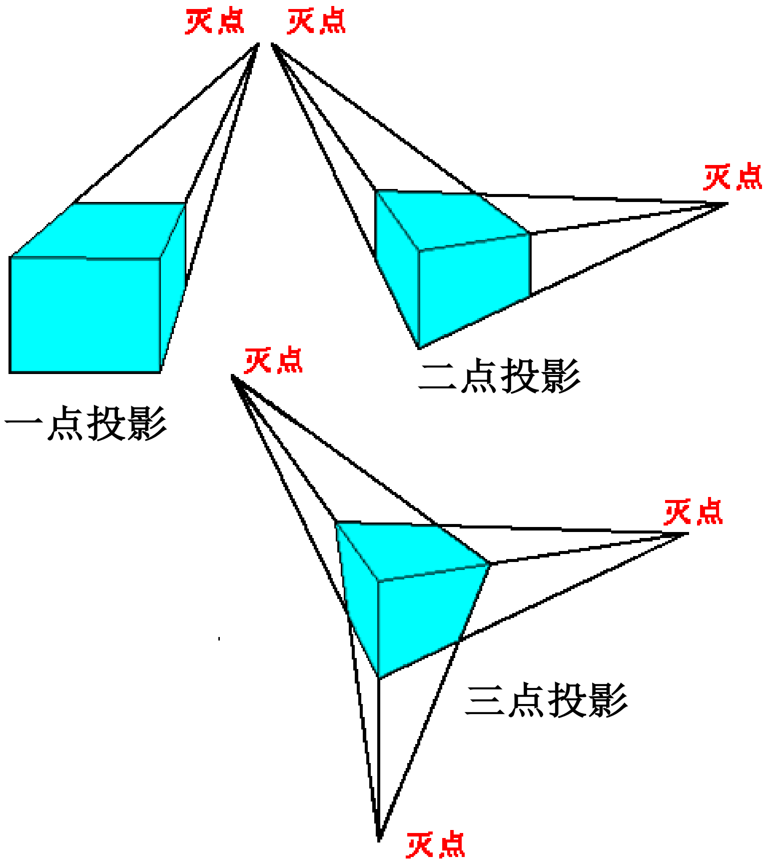
$$
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
&
\begin{array}{l} \text{X方向透视} \\ \text{Y方向透视} \\ \text{Z方向透视} \\ \end{array}
\end{array}
$$

灭点（Vanishing Point）

- 透视投影：
  - 一束平行于投影面的平行线的投影保持平行；
  - 否则平行线的投影汇聚于一点——灭点；
- 主灭点：与坐标轴平行的线形成的灭点；
- 思考题：
  - 在一个投影中，最多有多少主灭点？最少有多少主灭点？



X点透视



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X点透视

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一点透视

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二点透视

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三点透视

投影变换

- 投影变换
  - 透视投影
    - 一点透视投影
    - 二点透视投影
    - 三点透视投影
  - 平行投影
    - 正投影
      - 三视图
        - 主视图、俯视图、侧视图
        - 其他…
      - 正轴测
        - 等轴测
        - 正二测
        - 正三测
    - 斜投影
      - 斜等测、斜二测
      - 其他…

投影变换

透视投影变换

投影变换

比例、对称、旋转、错切

齐次坐标

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

平移

整体比例

三维几何变换

谢 谢