第8讲：自由曲线与曲面

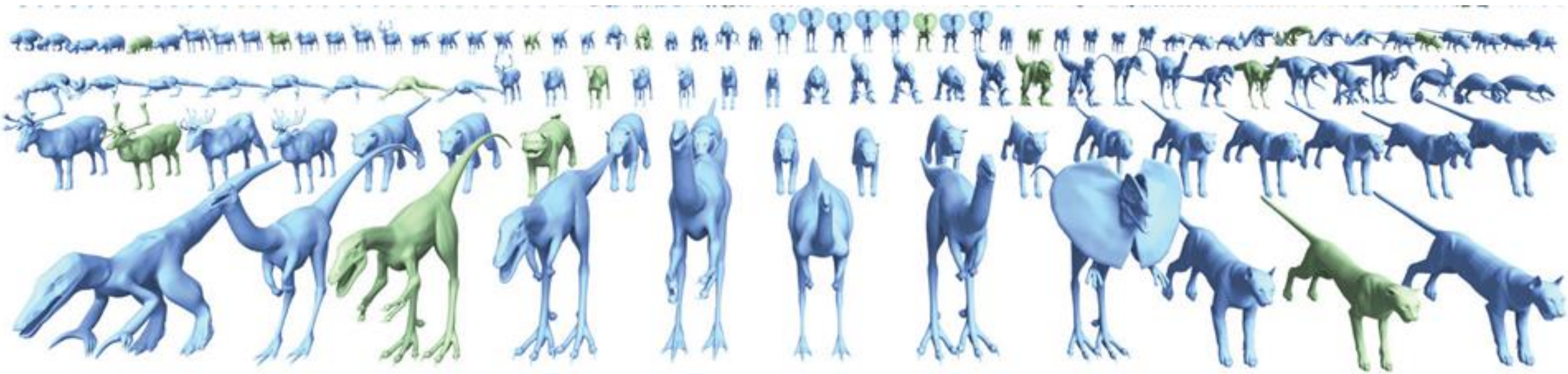
吴文明
计算机与信息学院

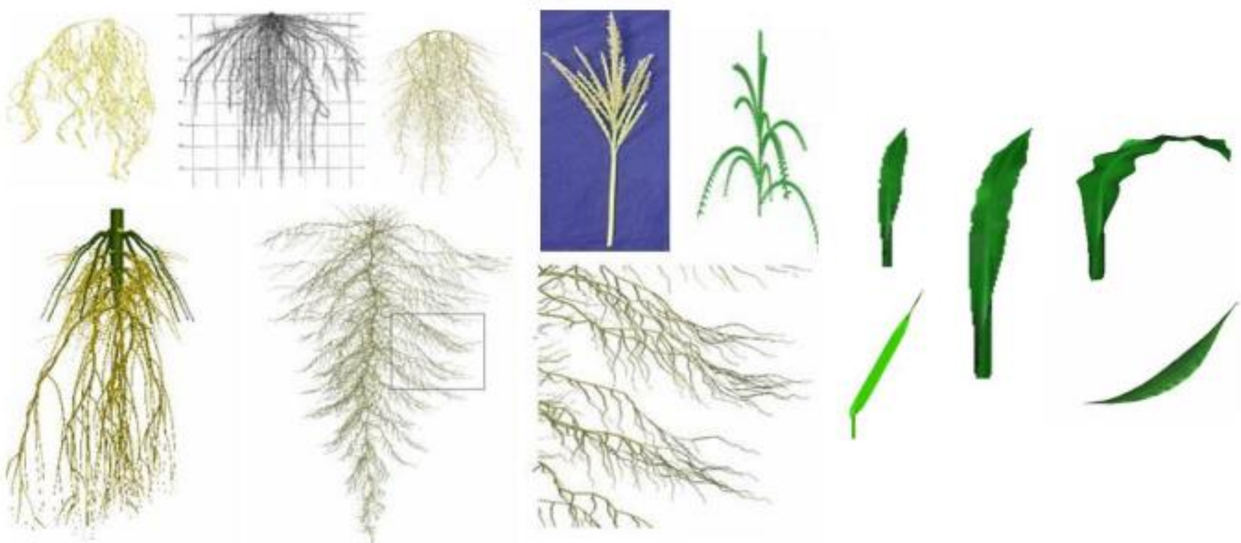
导论

- 计算机图形学两大块内容：
  几何造型
  真实感图形显示

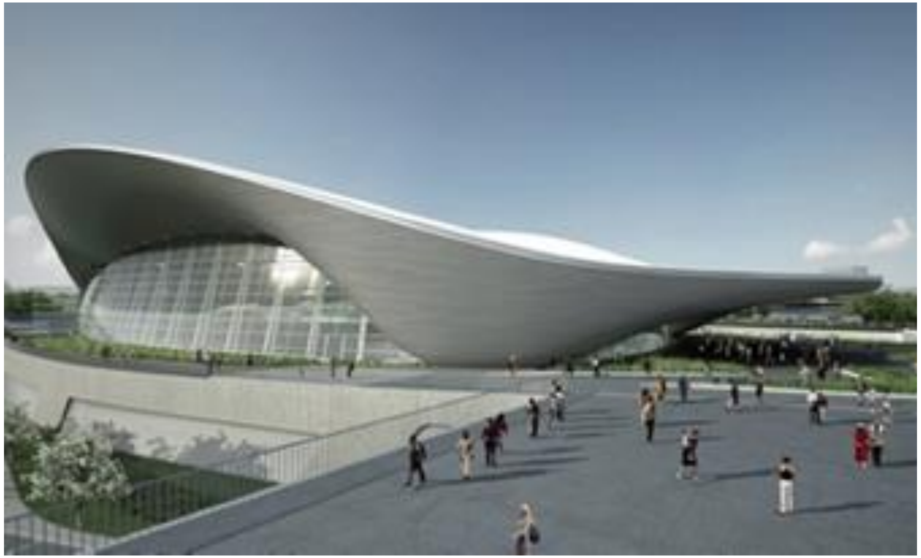
- 几何造型是研究在计算机中，如何表达物体模型形状的技术。

导论

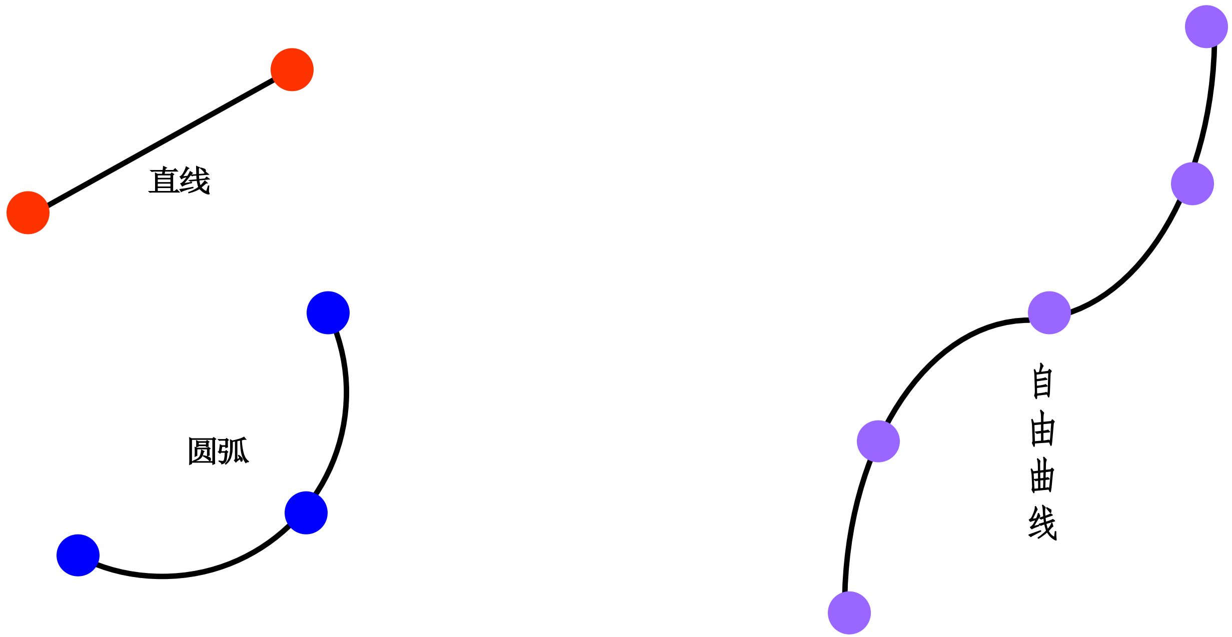




导论

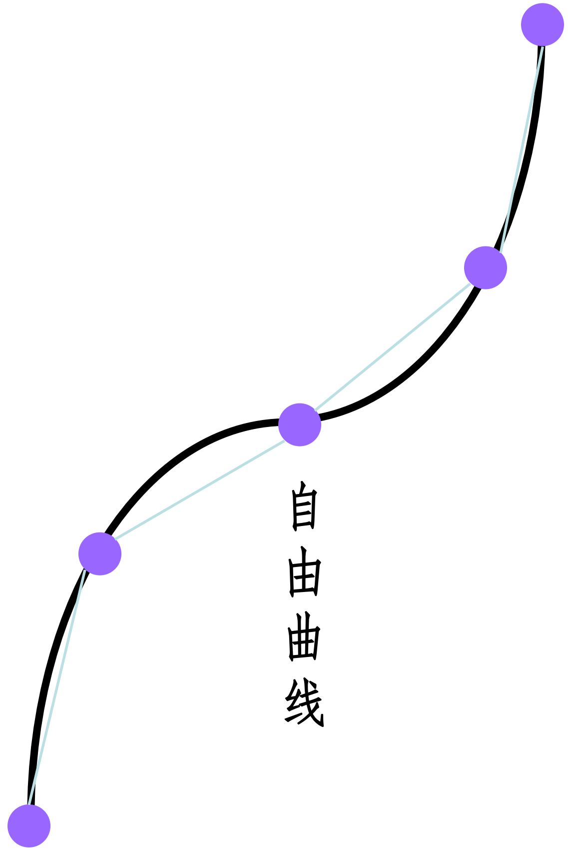


导论

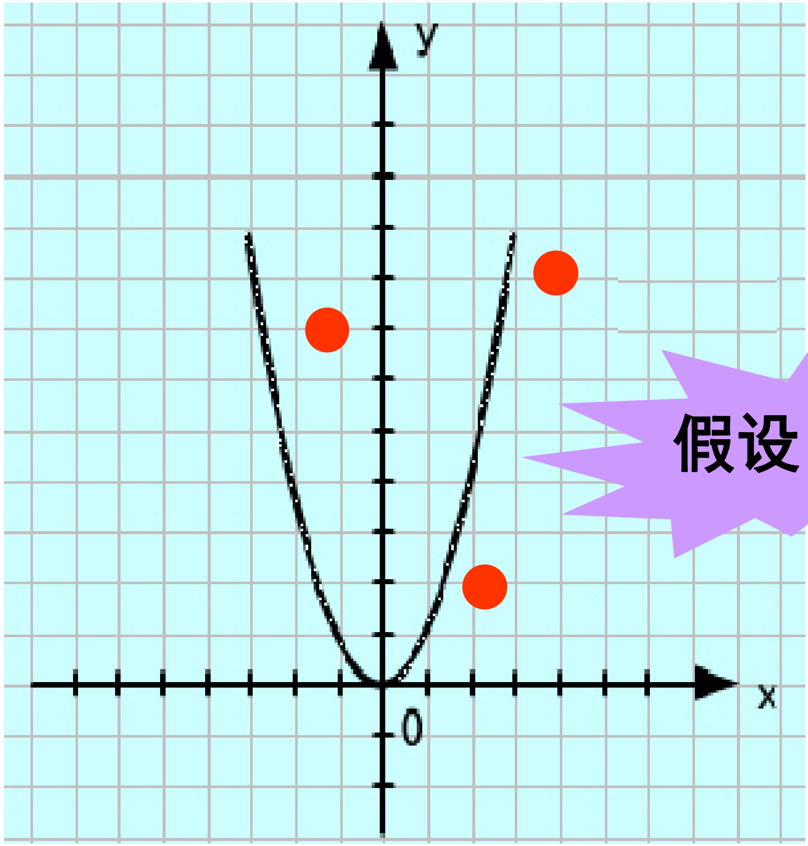


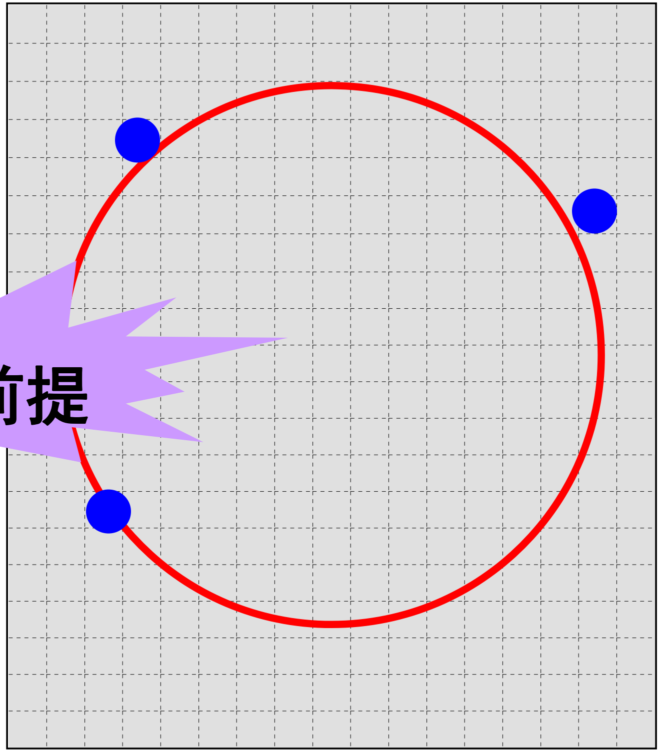
导论

- 基本原则：
  - 用一组点表示、记录曲线
- 关键问题：
  - 如何“连接”这些点生成线？



导论





假设、前提

导论

- 样条曲线曲面
- Bezier曲线曲面
- B样条曲线曲面
- 有理样条曲线曲面
- ……

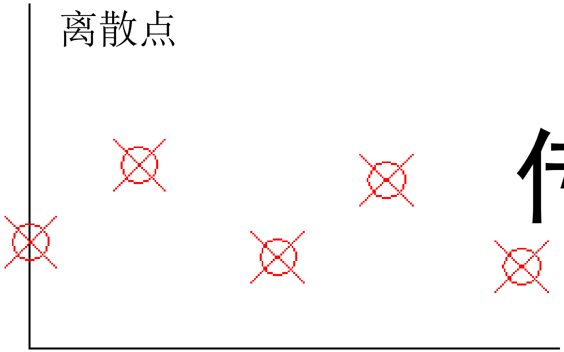
讨论原理
讨论性质

讲义大纲

- 曲线曲面基础
- 三次样条
- Bezier曲线
- B样条曲线
- 有理样条曲线
- 自由曲面的表示

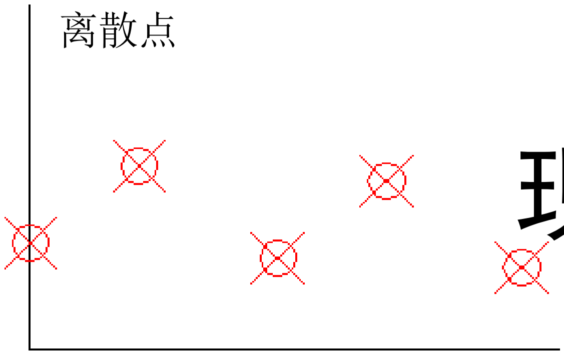
曲线曲面基础

曲线与曲面数学描述的发展

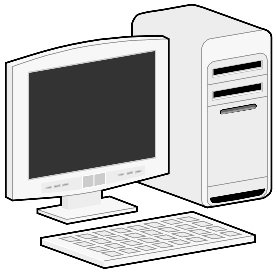


传统

模线样板法



现代



CAGD

曲线与曲面数学描述的发展

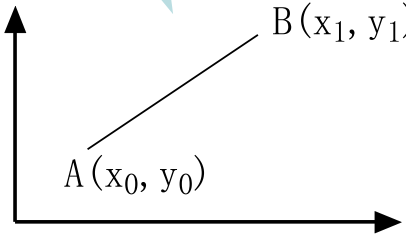
- 早期：
  - y = y(x)
  - F(x, y) = 0
- 现代：
  - 1963年波音公司提出矢函数的方法，成为自由曲线曲面数学描述的标准形式
  - 1964年，MIT的Conns提出孔斯双三次曲面片
  - 1971年法国雷诺公司Pierre Bézier提出 Bezier曲线
  - 同期法国雪铁龙公司 De Casteljau 独立研究出类似于Bezier的方法
  - 1975年美国通用汽车提出B样条方法
  - ……
  - 非均匀有理B样条（NURBS）

曲线曲面表示的要求

- 唯一性(给定已知信息，形状唯一）
- 几何不变性（点相对位置确定，几何形状确定；不同坐标系；标量函数不具备；）
- 易于定界（参数方程描述能确定边界）
- 统一性（统一的数学形式表示不同曲线曲面）
- 易于实现光滑连接（曲线、曲面片间连接）
- 几何直观（几何意义明显，易被工程人员接受）

曲线曲面的表示

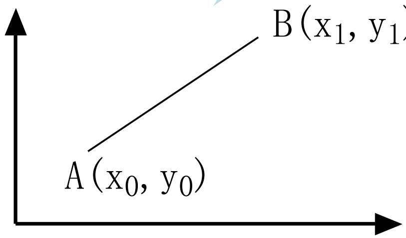
非参数形式



$$z = kx + b$$

$$f(x, y) = 0;$$

参数形式



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

非参数表示存在的问题

显式表示：$y = f(x)$

隐式表示：$f(x，y) = 0$

（1）与坐标轴相关

（2）用隐函数表示不直观，作图不方便

（3）用显函数表示存在多值性

（4）会出现斜率为无穷大的情形

参数表示方法的优点

$$p = p(t) \quad t \in [0,1]$$

1．点动成线

2．选取具有几何不变性的参数曲线曲面表示形式。

3．不会出现没有意义的斜率

4．t∈[0,1]，使其相应的几何分量是有界的

5．可对参数方程直接进行仿射和投影变换

6．参数变化对各因变量的影响可以明显地表示出来

拟合与逼近

拟合

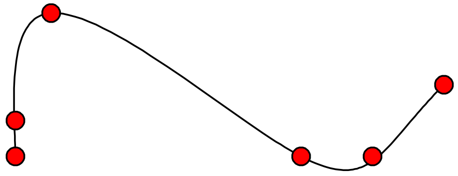


图8-1　曲线的拟合

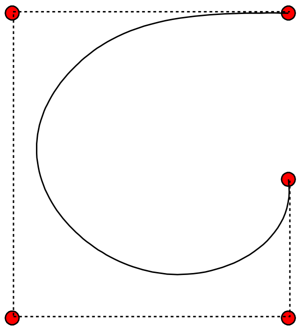
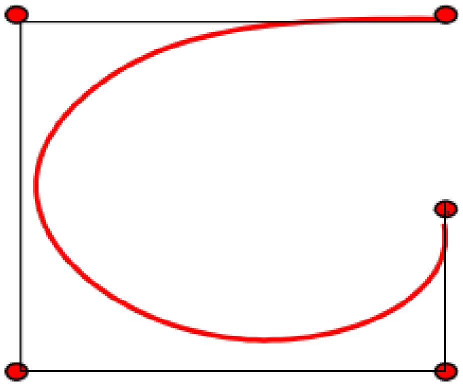


图8-2　曲线的逼近

逼近

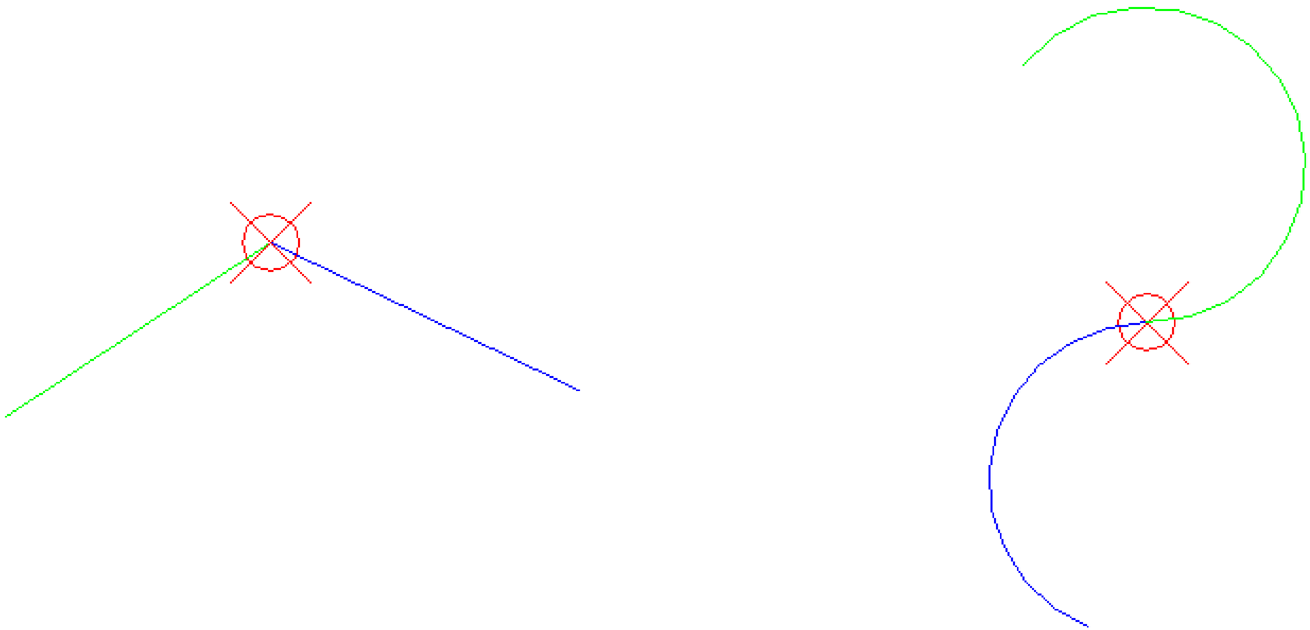
- 曲线完全通过给定的点序列；
  - 点：**型值点**
  - 中间点：**插值**
- 曲线不一定完全通过给定的点序列
  - 点：**控制点**
  - 控制多边形

逼近



- 构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)。
- 对于逼近，连接控制点序列的折线通常被显示出来，以提醒设计者控制点的次序。
- 一般将连接有一定次序控制点的直线序列称为控制多边形或特征多边形。

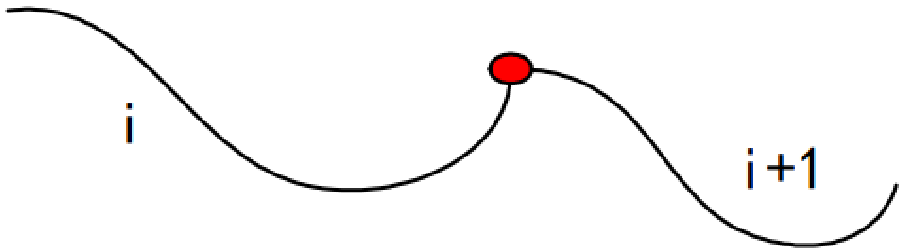
连续性条件



0阶参数连续性

记作C^0连续性，是指曲线的几何位置连接，即第一个曲线段在t_{i1}处的x，y，z值与第二个曲线段在$t_{(i+1)0}$处的x，y，z值相等：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$



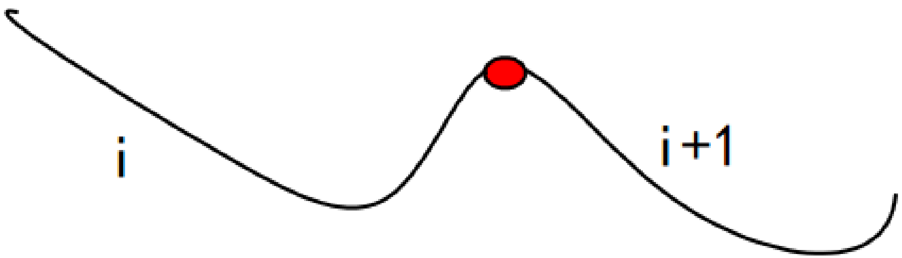
1阶参数连续性

记作C[1]连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数（切线）：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

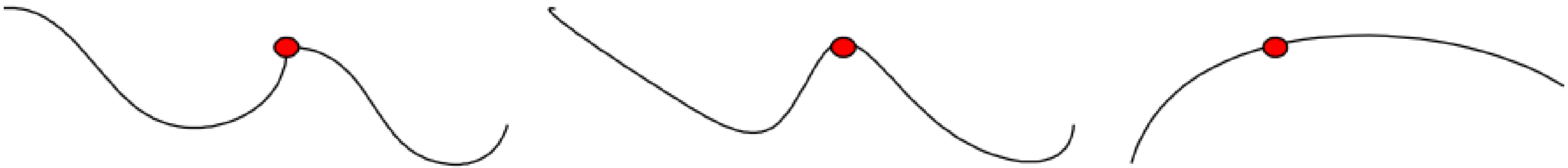
且 $p_i'(t_{i1}) = p_{(i+1)}'(t_{(i+1)0})$

一阶连续性对数字化绘画及一些设计应用已经足够



2阶参数连续性

记作C^2连续性，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。类似地，还可定义高阶参数连续性



(a) 0阶连续性　　(b) 1阶连续性　　(c) 2阶连续性

几何连续性

经典的参数连续性在图形学里是不适合的，因为太苛刻，所以引进了几何连续性的概念

汽车曲面的设计美观要求很高，但有时候车身的一条曲线并不是参数连连续的，但人眼看上去已经是很光滑的了，因此需要一种更弱的连续性

曲线段相连的另一个连续性条件是几何连续性。与参数连续性不同的是，它只需曲线段在相交处的参数导数成比例即可。

0阶几何连续性

0阶几何连续性：记作G^0连续性。与0阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

1阶几何连续性

1阶几何连续性，记作G^1连续性。若要求在结合处达到G^1连续，就是说两条曲线在结合处在满足G0连续的条件下，并有公共的切矢

$$Q'(0) = \alpha P'(1) \qquad (\alpha > 0)$$

2阶几何连续性

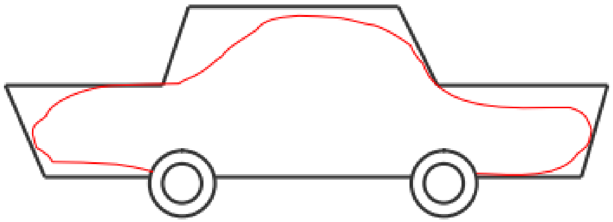
2阶几何连续性，记作G^2连续性。就是说两条曲线在结合处在满足G^1 连续的条件下，并有公共的曲率

一阶导数相等和有公共切向量这两个概念差别是什么？导数相等是大小方向都相等，而公共切矢意味着方向相同但大小不等

Bezier曲线

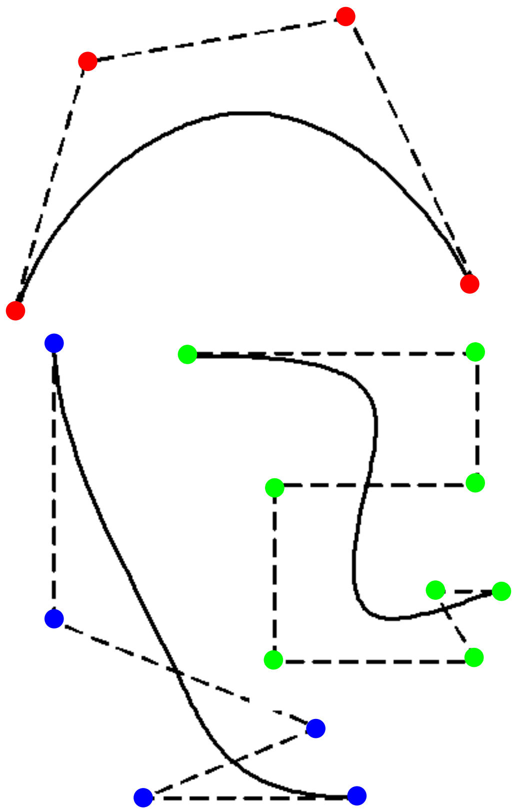
Bezier曲线

想法基点是在进行汽车外形设计时，先用折线段勾画出汽车的外形大致轮廓，然后用光滑的参数曲线去逼近这个折线多边形



这个折线多边形被称为特征多边形。逼近该特征多边形的曲线被称为Bezier曲线

Bezier曲线



- 逼近曲线
- 控制方便、直观
  - 控制多边形反应曲线形状
  - 控制点的数目确定阶次
- 由工程师发明的

Bezier曲线

针对Bezier曲线，给定空间n+1个点的位置矢量P_i（i=0，1，2，…，n），则Bezier曲线段的参数方程表示如下：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

Bezier曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]$$

其中p_i（x_i, y_i, z_i），i=0, 1, 2…n 是控制多边形的n+1个顶点，即构成该曲线的特征多边形；$B_{i,n}$（t）是Bernstein基函数，有如下形式：

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \qquad (i = 0,1,\ldots. \ n)$$

Bezier曲线

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=C_n^i t^i(1-t)^{n-i} \quad (i=0,1,\ldots n)$$

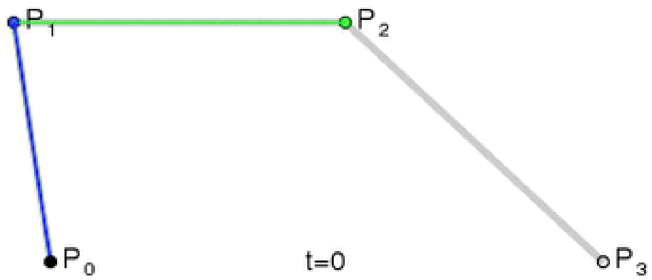
$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)$ 恰好是二项式 $[t+(1-t)]^n$ 的展开式！

注意：当i=0，t=0时，t^i=1，i!=1。即： 0^0=1，0!=1

Bezier曲线

P_i代表空间的很多点，t在0到1之间，把t代进去可以算出一个数--即平面或空间一个点

随着t值的变化，点也在变化。当t从0变到1时，就得到空间的一个图形，这个图形就是bezier曲线



一次Bezier曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]$$

当n=1时，有两个控制点p_0和p_1，Bezier多项式是一次多项式：

$$p(t) = \sum_{i=0}^{1} P_i B_{i,1}(t) = P_0 B_{0,1}(t) + P_1 B_{1,1}(t)$$

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

一次Bezier曲线

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$B_{0,1}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{1!}{0!(1-0)!} t^0 (1-t)^{1-0}$$

$$= (1-t)$$

$$B_{1,1}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{1!}{1!(1-1)!} t^1 (1-1)^{1-1}$$

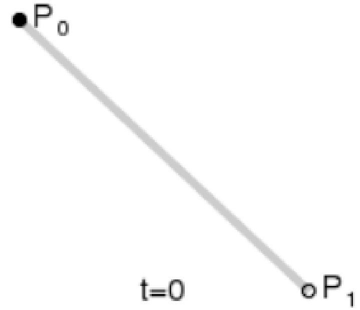
$$= t$$

一次Bezier曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{1}P_iB_{i,1}(t)=P_0B_{0,1}(t)+P_1B_{1,1}(t)$$

$$=(1-t)P_0+tP_1$$

这恰好是连接起点p_0和终点p_1的直线段！



二次Bezier曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

当n=2时，有3个控制点p_0、p_1和p_2，Bezier多项式是二次多项式：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{2} P_i B_{i,2}(t)=P_0 B_{0,2}(t)+P_1 B_{1,2}(t)+P_2 B_{2,2}(t)$$

$$B_{0,2}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{2!}{0!(2-0)!}t^0(1-t)^{2-0}$$

$$=(1-t)^2$$

二次Bezier曲线

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2$$

$$B_{1,2}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{2!}{1!(2-1)!} t^1 (1-t)^{2-1}$$

$$= 2t(1-t)$$

$$B_{2,2}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{2!}{2!(2-2)!} t^2 (1-t)^{2-2}$$

$$= t^2$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i B_{i,2}(t) = P_0 B_{0,2}(t) + P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)$$

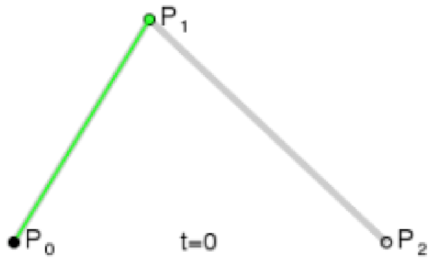
$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

二次Bezier曲线

$$p(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$
$$= (P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0$$

二次Bezier曲线为抛物线，其矩阵形式为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$



三次Bezier曲线

三次Bezier曲线由4个控制点生成，这时n=3，有4个控制点p_0、p_1、p_2和p_3，Bezier多项式是三次多项式：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=P_0B_{0,3}(t)+P_1B_{1,3}(t)+P_2B_{2,3}(t)+P_3B_{3,3}(t)$$

$$B_{0,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{0!(3-0)!}t^0(1-t)^{3-0}=(1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{1!(3-1)!}t^1(1-t)^{3-1}=3t(1-t)^2$$

三次Bezier曲线

$$B_{2,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{i}(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{2!(3-2)!}t^{2}(1-t)^{3-2}=3t^{2}(1-t)$$

$$B_{3,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{i}(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{3!(3-3)!}t^{3}(1-t)^{3-3}=t^{3}$$

$$p(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=(1-t^{3})P_0+3t(1-t)^{2}P_1+3t^{2}(1-t)P_2+t^{3}P_3$$

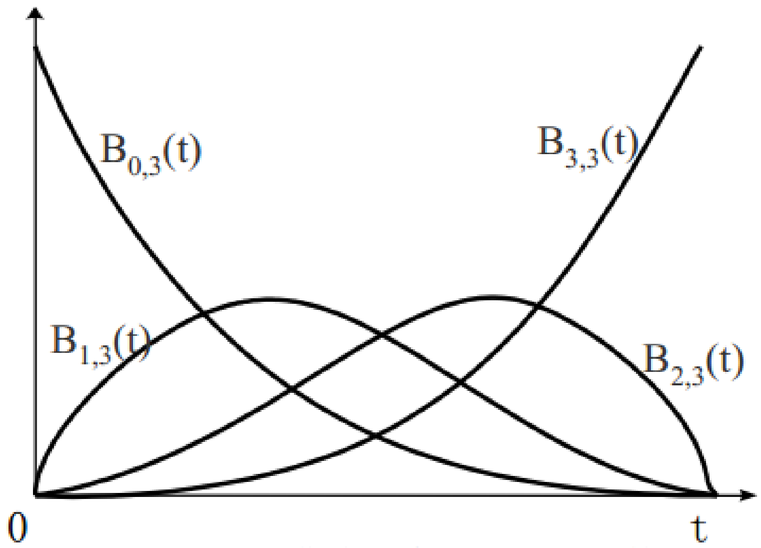
三次Bezier曲线

其中

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$
$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$
$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$
$$B_{3,3}(t) = t^3$$

为三次Bezier曲线的基函数。

这四条曲线均是三次曲线，任何三次Bezier曲线都是这四条曲线的线形组合

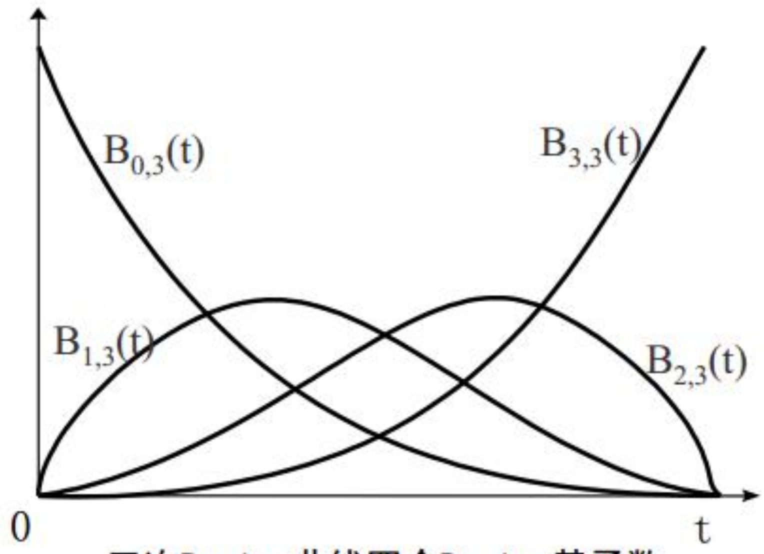


三次Bezier曲线四个Bezier基函数

三次Bezier曲线

注意图中每个基函数在参数t的整个（0，1）的开区间范围内不为0

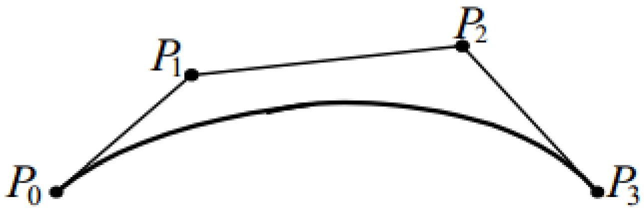
Bezier曲线不可能对曲线形状进行局部控制，如果改变任一控制点位置，整个曲线会受到影响

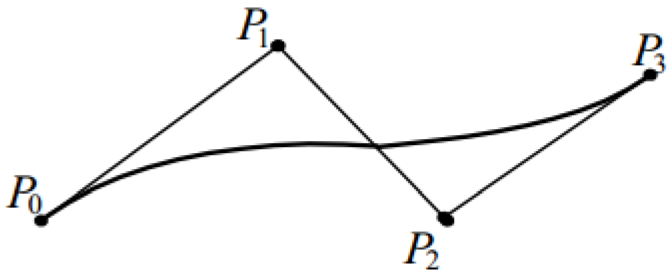


三次Bezier曲线四个Bezier基函数

Bezier曲线的性质

1、端点性质





顶点p_0和p_n分别位于实际曲线段的起点和终点上

Bezier曲线的性质

Bezier曲线段的参数方程表示如下:

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) = P_0 B_{0,n}(t) + P_1 B_{1,n}(t) + \ldots + P_n B_{n,n}(t)$$

$$p(0)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(0) = P_0 B_{0,n}(0) + P_1 B_{1,n}(0) + \ldots + P_n B_{n,n}(0) = P_0$$

$$p(1)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(1) = P_0 B_{0,n}(1) + P_1 B_{1,n}(1) + \ldots + P_n B_{n,n}(1) = P_n$$

Bezier曲线的性质

2、一阶导数

Bernstein基函数的一阶导数为：

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] \qquad i = 0,1,\cdots,n;$$

$$p'(t) = n\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})B_{i-1,n-1}(t)$$

当 t=0：

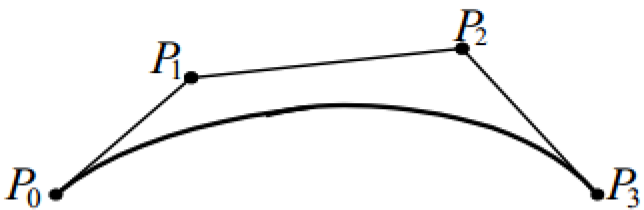
$$p'(0) = n(p_1 - p_0)$$

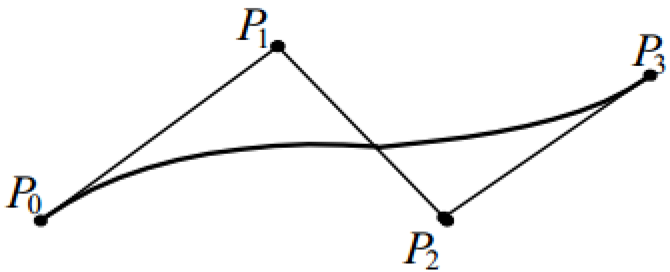
当 t=1：

$$p'(1) = n(p_n - p_{n-1})$$

Bezier曲线的性质

这说明Bezier曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致





Bezier曲线的性质

$$p''(0) = n(n-1)\left(\left(P_2 - P_1\right) - \left(P_1 - P_0\right)\right)$$
$$p''(1) = n(n-1)\left(\left(P_{n-2} - P_{n-1}\right) - \left(P_{n-1} - P_n\right)\right)$$

- 起始点或终止点的r阶导数是由起始点或终止点和它们的r个邻近的控制多边形的顶点来决定的。

Bezier曲线的性质

3、几何不变性

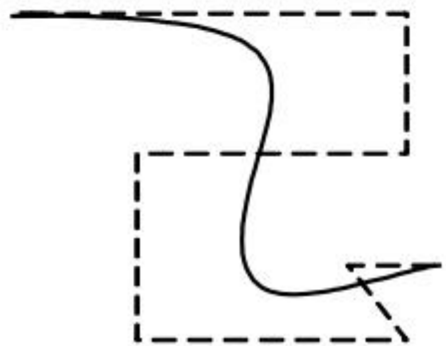
指某些几何特性不随坐标变换而变化的特性。Bezier曲线的形状仅与控制多边形各顶点的相对位置有关，而与坐标系的的选择无关

Bezier曲线的性质

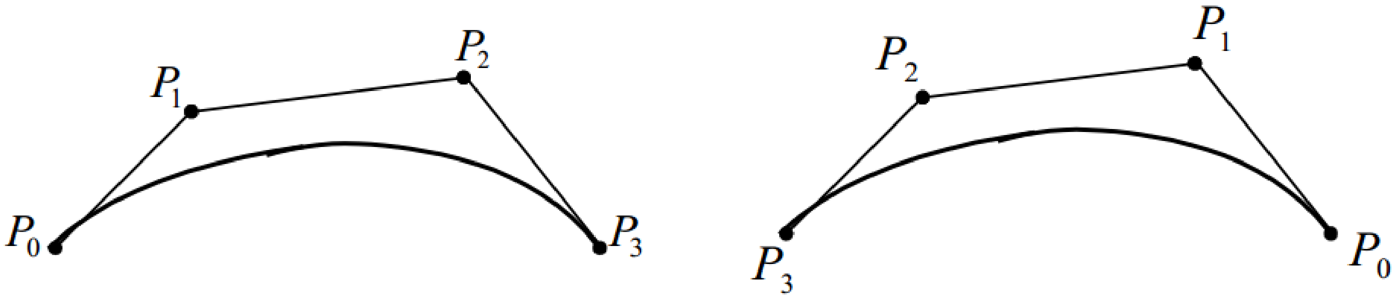
4、变差缩减性

若Bezier曲线的特征多边形是一个平面图形，则平面内任意直线与p(t)的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数，这一性质叫变差缩减性质

此性质反映了Bezier曲线比其特征多边形的波动还小，也就是说Bezier曲线比特征多边形的折线更光顺



Bezier曲线的性质



$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

$$B_{n-i,n}(1-t) = C_n^{n-i}[1-(1-t)]^{n-(n-i)} \cdot (1-t)^{n-i}$$

$$= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t)$$

对称性

Bezier曲线拼接

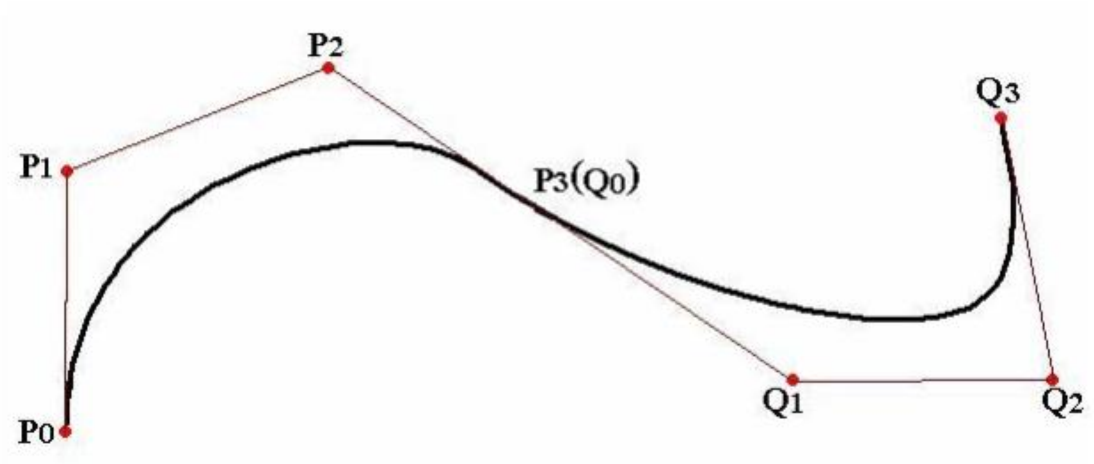
几何设计中，一条Bezier曲线往往难以描述复杂的曲线形状。这是由于增加特征多边形的顶点数，会引起Bezier曲线次数的提高，而高次多项式又会带来计算上的困难

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]$$

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \qquad (i = 0,1,\ldots n)$$

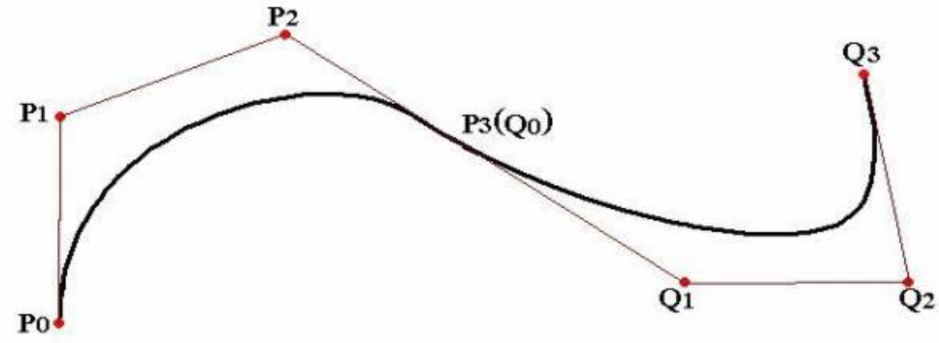
Bezier曲线拼接

给定两条Bezier曲线 P(t)和 Q(t)，相应控制点为 $P_i(i=0,1,...,n)$和 $Q_i(i=0,1,...,m)$



Bezier曲线拼接

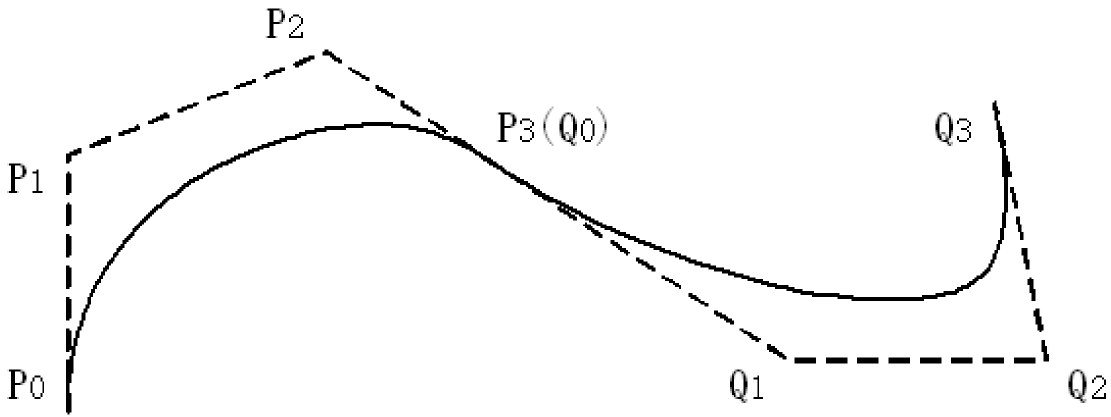
（1）要使它们达到G^0连续，则：$P_n= Q_0$



（2）要使它们达到G^1连续，只要保证P_{n-1}，P_n=Q，Q_1三点共线就行了

Bezier曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致

Bezier曲线拼接



$$p_1'(1) = 3(P_3 - P_2)$$
$$p_2'(0) = 3(Q_1 - Q_0)$$

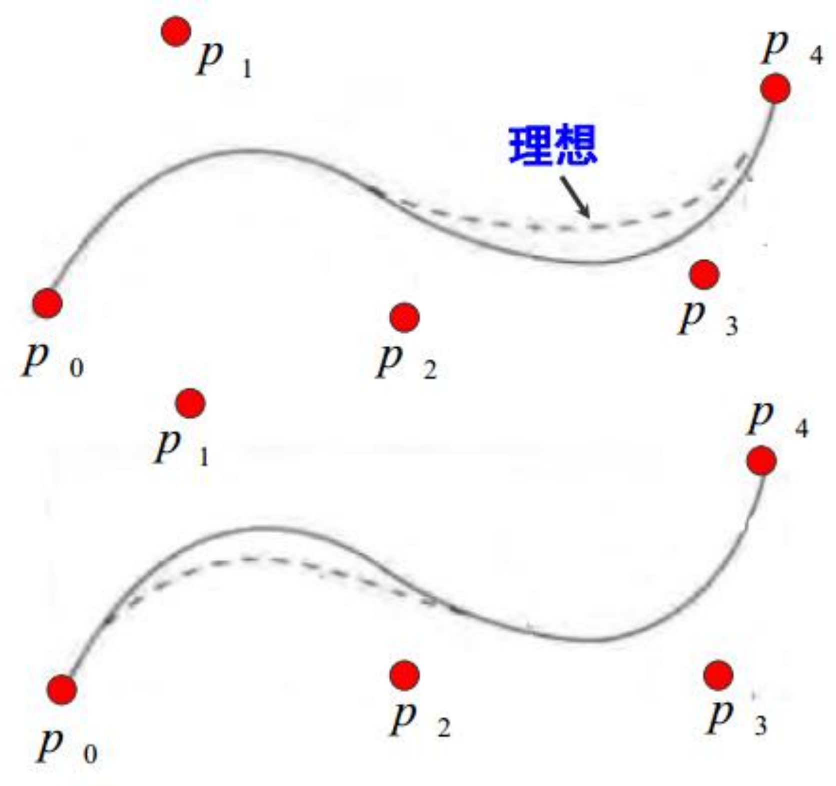
$$p_2'(0) = \alpha \cdot p_1'(1)$$

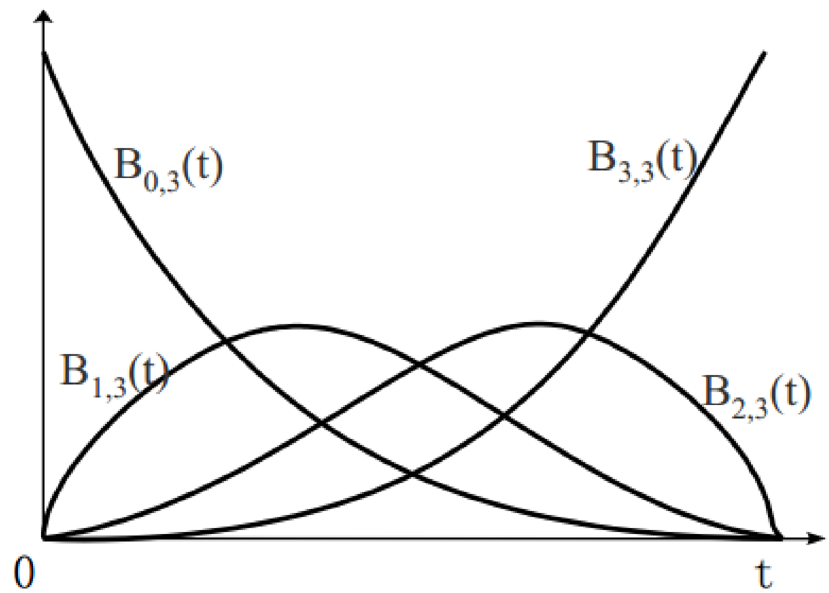
$$Q_1 - Q_0 = \alpha \cdot (P_3 - P_2)$$

一般不使用G^2连续

B样条曲线

Bezier曲面片的拼接





三次Bezier曲线四个Bezier基函数

Bezier曲面片的拼接

- 阶次和控制点个数**无关**？
- 每个控制点只影响曲线的**一部分**？
- ……

改变基函数

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k BEN_{k,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

B样条曲线

Bezier曲线 $$p(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u) \quad u \in [0,1]$$

B样条曲线 $$p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,m}(t), m \in [1, n+1]$$

B样条曲线

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_k\boxed{B_{k,m}(t)},m\in[1,n+1]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & 若\,\mathrm{t_k}\le t<t_{k+1}\\ 0 & 其它\end{cases}\\ &B_{k,m}(t)=\frac{t-t_k}{t_{k+m-1}-t_k}B_{k,m-1}(t)+\frac{t_{k+m}-t}{t_{k+m}-t_{k+1}}B_{k+1,m-1}(t)\end{aligned}}$$

B样条曲线

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_k \boxed{B_{k,m}(t),} m\in[1,n+1]$$

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & 若 t_k \le t < t_{k+1} \\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$B_{k,m}(t)=\frac{t-t_k}{t_{k+m-1}-t_k}B_{k,m-1}(t)+\frac{t_{k+m}-t}{t_{k+m}-t_{k+1}}B_{k+1,m-1}(t)$$

B样条曲线

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & \text{若}t_k \le t < t_{k+1} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

阶次为m

$$B_{k,m}(t)=\frac{t-t_k}{t_{k+m-1}-t_k}B_{k,m-1}(t)+\frac{t_{k+m}-t}{t_{k+m}-t_{k+1}}B_{k+1,m-1}(t)$$

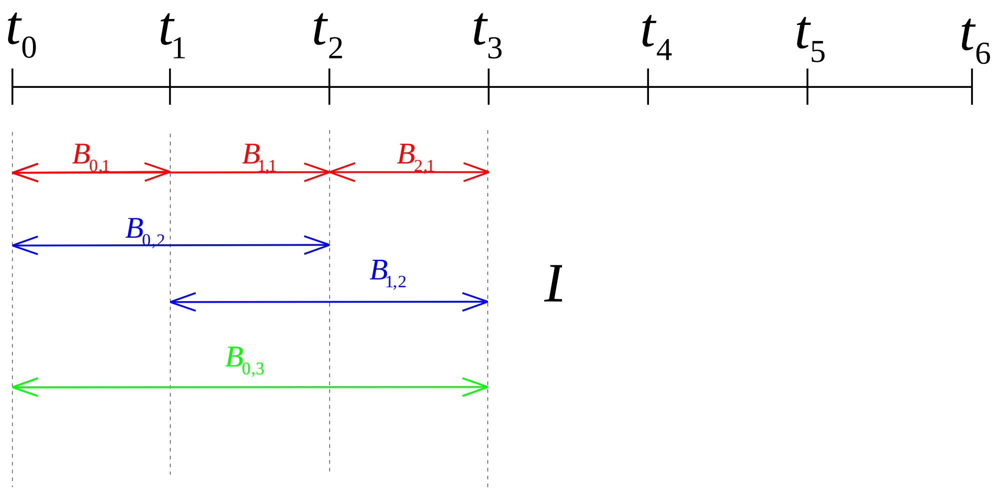
$B_{k,m}(t)$的阶次=$B_{k,m-1}(t)$的阶次+1

$B_{k,m}(t)$ 非零区域为$B_{k,m-1}(t)$和$B_{k+1,m-1}(t)$的并集

B样条曲线

- m-1是B样条曲线的次数；
- t_k是节点值，$T=(t_0, t_1, \cdots, t_{n+m})$构成B样条的节点矢量；
  - 节点非递减排序
  - 所生成曲线定义在$[t_{m-1}, t_{n+1}]$
  - 每个基函数定义在t的取值范围：$[t_k, t_{k+m}]$
- 每个控制点最多影响m个曲线段；

B样条曲线



B样条类型

- 均匀周期性B样条曲线
  - $t_{k+1}-t_k$ = 常数
  - T=（-2，-1.5，-1，-0.5，0，0.5，1，1.5，2）
  - T=（0，1，2，3，4，5，6，7）

- 非均匀周期性B样条曲线
  - $t_{k+1}-t_k$!= 常数
  - T=（-2，-1.5，-1，-0.5，0，0.5，1，1.5，2）
  - T=（0，1，2，3，4，5，6，7）

- 开放均匀B样条曲线
  - 在两个端点重复m次，其余节点的节点间距是均匀的；
  - T=(0，0，0，1，2，3，4，5，5，5)

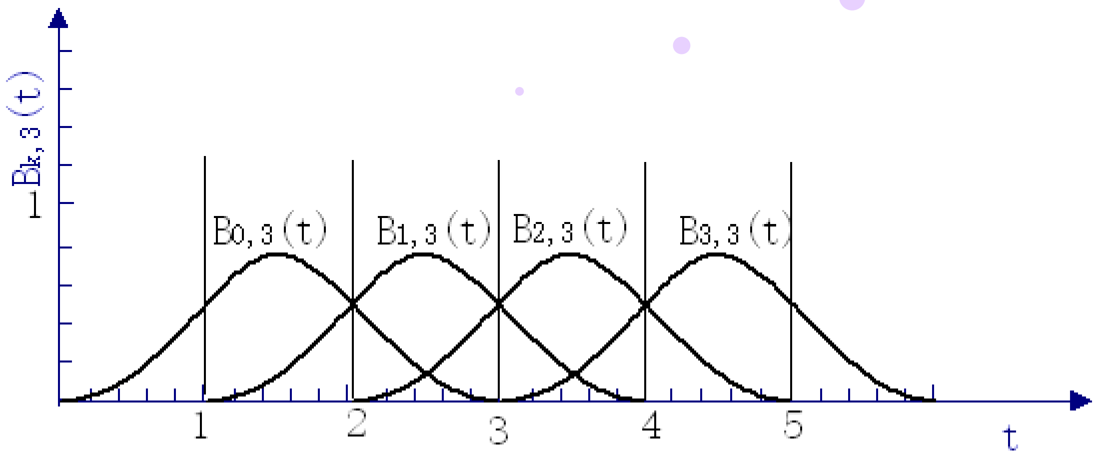
均匀周期性B样条曲线

- 均匀B样条的基函数呈**周期性**

$$B_{k,m}(t) = B_{k+1,m}(t+\Delta t) = B_{k+2,m}(t+2\Delta t)$$

$$B_{k,m}(t) = B_{0,m}(t-k\Delta t)$$

$[t_{m-1}, t_{n+1}]$



均匀二次（三阶）B样条曲线

- 取n=3，m=3，则n+m=6，不妨设节点矢量为：
  T=(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)：

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & k\le t<k+1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$B_{k,m}(t)=\frac{t-k}{m-1}B_{k,m-1}(t)+\frac{k+m-t}{m-1}B_{k+1,m-1}(t)$$

均匀二次（三阶）B样条曲线

$$B_{0,1}(t)=\begin{cases}1 & 0\le \mathrm{t}<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}B_{0,2}(t)&=tB_{0,1}(t)+(2-t)B_{1,1}(t)\\&=tB_{0,1}(t)+(2-t)B_{0,1}(t-1)\\&=\begin{cases}t & 0\le \mathrm{t}<1\\ 2-t & 1\le \mathrm{t}<2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{0,3}(t)&=\frac{t}{2}B_{0,1}(t)+\frac{3-t}{2}B_{0,2}(t-1)\\&=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\le \mathrm{t}<1\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1\le \mathrm{t}<2\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2\le \mathrm{t}<3\end{cases}\end{aligned}$$

均匀二次（三阶）B样条曲线

$$B_{0,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

t=t−1

$$B_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2 & 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}(t-1)(3-t)+\frac{1}{2}(t-2)(4-t) & 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & 3 \le t < 4 \end{cases}$$

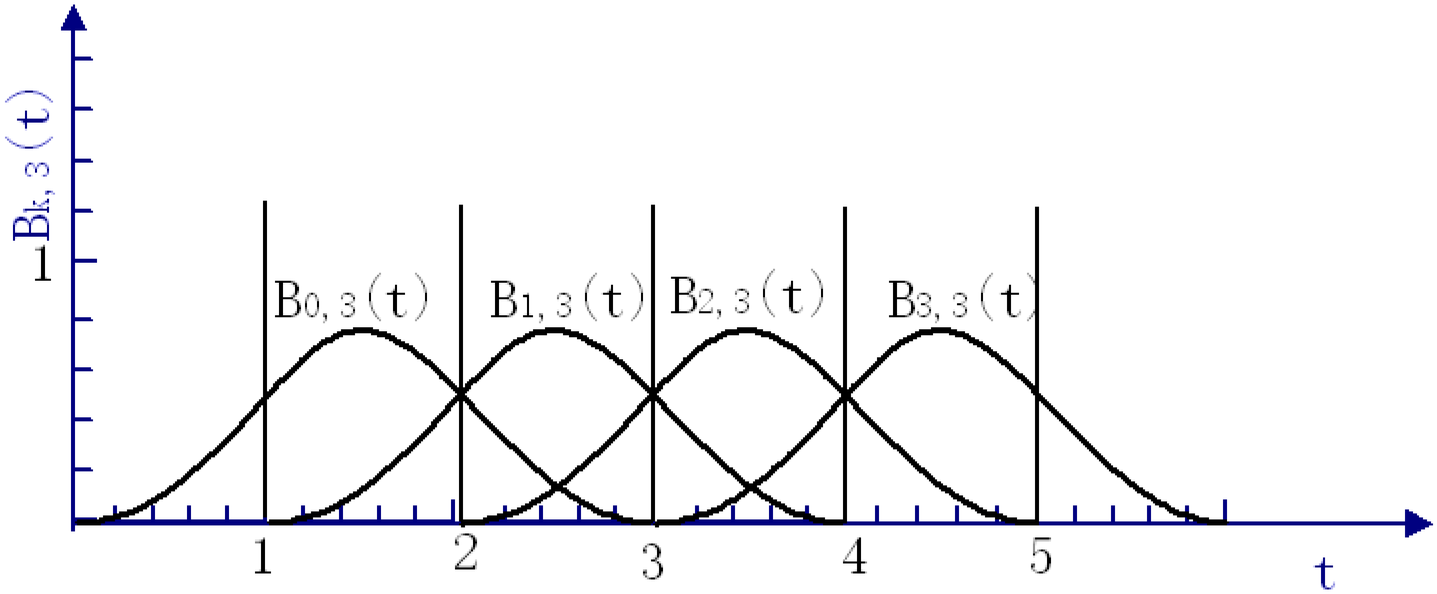
均匀二次（三阶）B样条曲线

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-2)^2 & 2\le t<3\\ \frac{1}{2}(t-2)(4-t)+\frac{1}{2}(t-3)(5-t) & 3\le t<4\\ \frac{1}{2}(5-t)^2 & 4\le t<5\end{cases}$$

$$B_{3,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-3)^2 & 3\le t<4\\ \frac{1}{2}(t-3)(5-t)+\frac{1}{2}(t-4)(6-t) & 4\le t<5\\ \frac{1}{2}(6-t)^2 & 5\le t<6\end{cases}$$

二次（三阶）均匀B样条基函数

$$D\left(p(t)\right)=\left[t_{m-1},\quad t_{n+1}\right)$$



二次（三阶）均匀B样条基函数

曲线的起点和终点值

$$p(start)=\frac{1}{2}(P_0+P_1),\ p(end)=\frac{1}{2}(P_2+P_3)$$

$$p'(start)=P_1-P_0,\ p'(end)=P_3-P_2$$

t=2, t=4

结论

- 对于由任意数目的控制点构造的二次周期性B样条曲线来说，曲线的起始点位于头两个控制点之间，终止点位于最后两个控制点之间。
- 对于高次多项式，起点和终点是m-1个控制点的加权平均值点。**若某一控制点出现多次，样条曲线会更加接近该点**。

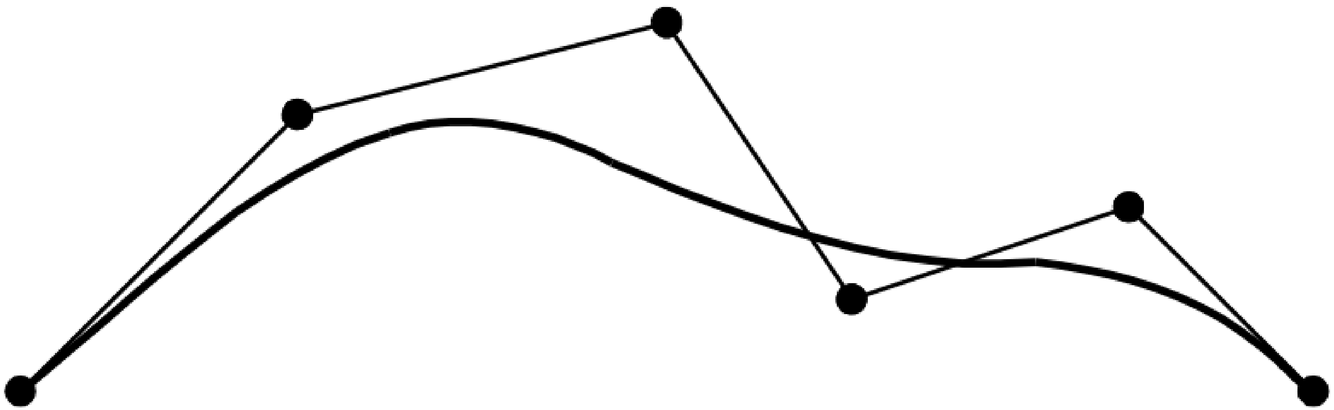
开放均匀B样条

$$L = n - m$$

$$T = (\underbrace{0,\ldots,0}_{m},1,2,\ldots,L+1,\underbrace{L+2,\ldots,L+2}_{m})$$

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \le i < m \\ i - m + 1 & m \le i \le L + m \\ L + 2 & i > L + m \end{cases}$$

开放均匀B样条



开放均匀的二次（三阶）B样条曲线

- 假设m=3，n=4，
- 节点矢量为：T=(t_0，t_1，…，t_{n+m}）=(t_0，t_1， t_2， t_3， t_4， t_5， t_6， t_7）=(0,0,0,1,2, 3,3,3)。

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^2 \qquad 0 \le t < 1$$

$$B_{1,3}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t(4-3t)^2 & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2}t^2 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

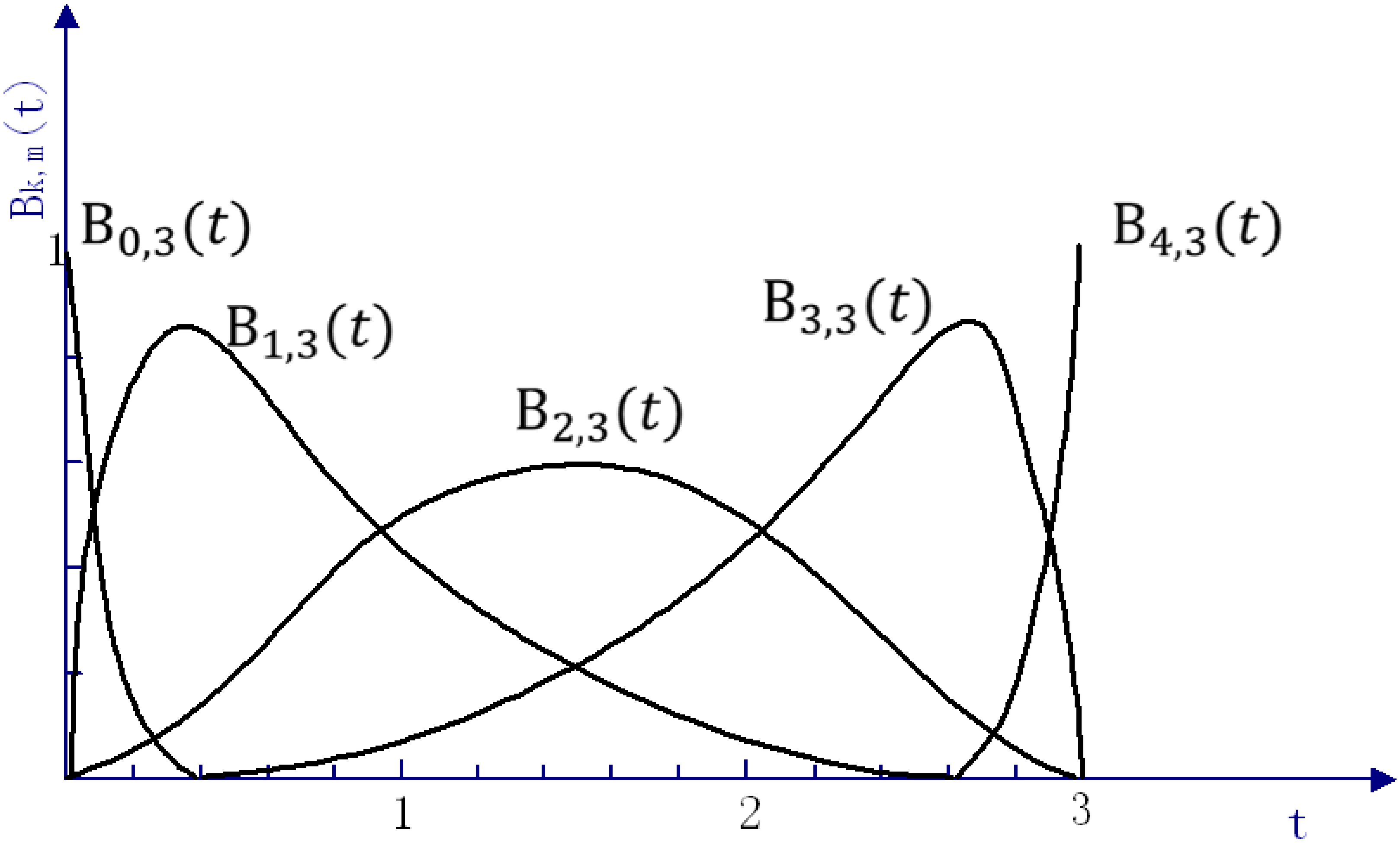
开放均匀的二次（三阶）B样条曲线

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2\le t<3\end{cases}$$

$$B_{3,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2 & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(3t-5)(3-t) & 2\le t<3\end{cases}$$

$$B_{4,3}(t)=(t-2)^2 \qquad 2\le t<3$$

开放均匀B样条曲线



非均匀B样条曲线

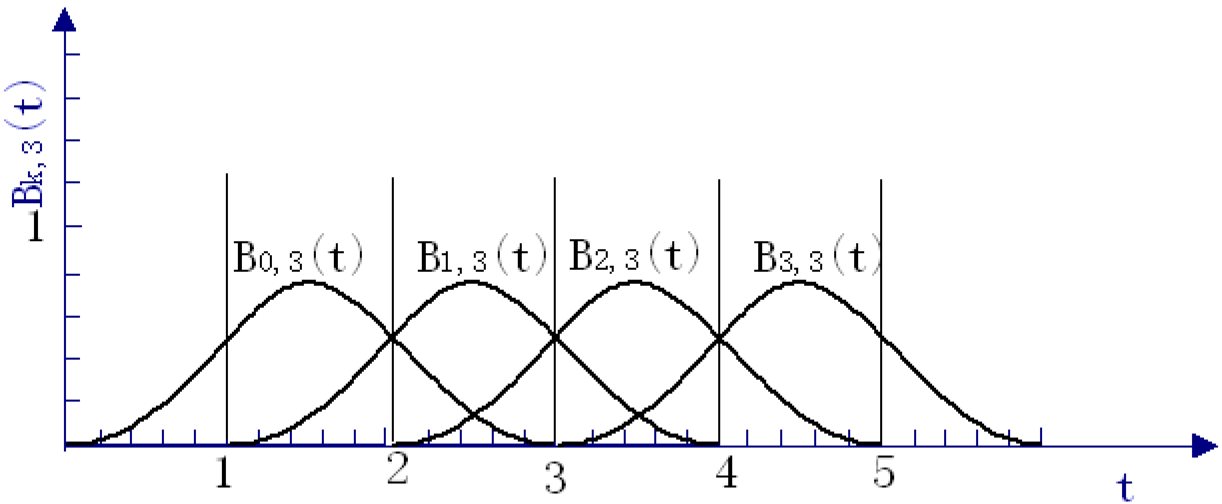
- 基函数不具有平移性质，基函数形状各不相同——**计算量大**；
- 可以随意插入、删除或修改节点——**方便控制节点局部形状**；

B样条曲线性质

- 局部支柱性
- 凸组合性
- 导　　数
- 连续性

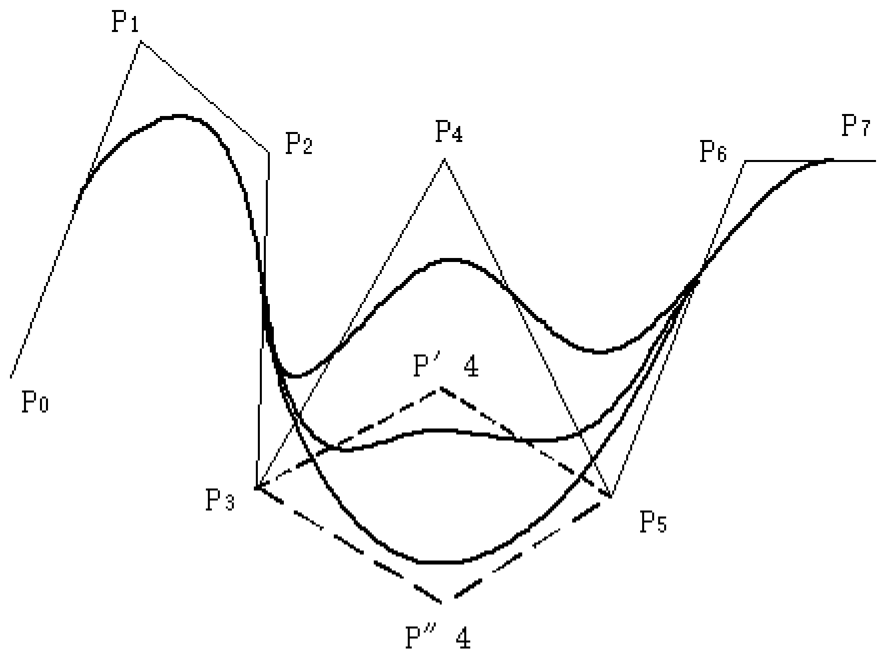
局部支柱性

- B样条的基函数是一个分段函数，其重要特征是**在参数变化范围内，每个基函数在t_k到t_{k+m}的子区间内函数值不为零，在其余区间内均为零，**通常也将该特征称为**局部支柱性**



局部支柱性

- 第k段曲线段仅由m个控制点P_{k-m+1}，P_{k-m+1}，…，P_k控制；
- 修改控制点对曲线的影响是局部的，P_k最多影响m个曲线段；

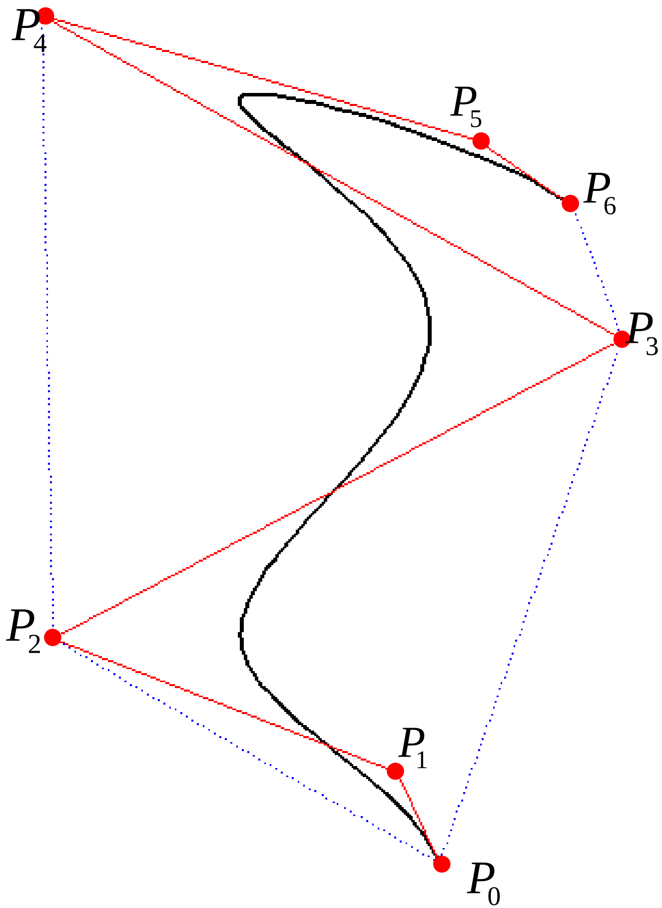


B样条的凸组合性

$$B_{k,m}(t) \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,m}(t) \equiv 1$$

$$t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$



导数

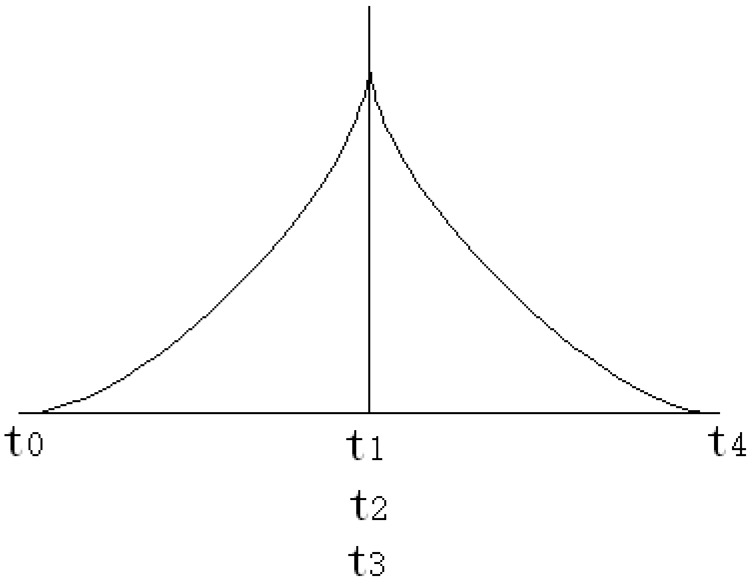
$$B'_{k,m}(t) = (m-1)\left[\frac{B_{k,m-1}(t)}{t_{k+m-1}-t_k} - \frac{B_{k+1,m-1}(t)}{t_{k+m}-t_{k+1}}\right]$$

B样条曲线

$$p'(t) = (m-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k - P_{k-1}}{t_{k+m-1}-t_k}B_{k,m-1}(t) \qquad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

B样条曲线性质

- 若一节点矢量中节点均不相同，则m阶（m-1次）B样条曲线在节点处为m-2阶连续。
- B样条曲线基函数的次数与控制顶点个数无关
- 重节点问题



B样条曲线性质

- 变差缩减性：设平面内 n+1 个控制顶点 构成B样条曲线 P(t) 的特征多边形。在该平面内的任意一条直线与 P(t) 的交点个数不多于该直线和特征多边形的交点个数
- 几何不变性：B样条曲线的形状和位置与坐标系的选择无关
- 凸包性：B样条曲线落在Pi构成的凸包之中。其凸包区域小于或等于同一组控制顶点定义的Bezier曲线凸包区域

三次样条

参数曲线

过三点P_0、P_1和P_2构造参数表示的插值多项式是唯一的还是有多个呢？

插值多项式可以有无数条，这是因为对应地参数t在[0, 1]中可以有无数种取法

参数曲线

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \qquad t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 1$$

参数方程：

$$x(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$
$$y(t) = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$$

插值问题实际上就是解方程组的问题。但如果参数取的不一样的话，结果是不一样的

参数曲线

每个参数值称为节点（knot）。对于一条插值曲线，p_0、p_1、p_2这些点称为型值点

对于一条插值曲线，型值点p_0，p_1，…，p_n与其参数域$t \in [t0, t1]$内的节点之间有一种对应关系。对于一组有序的型值点，所确定一种参数分割，称之这组型值点的参数化

参数曲线

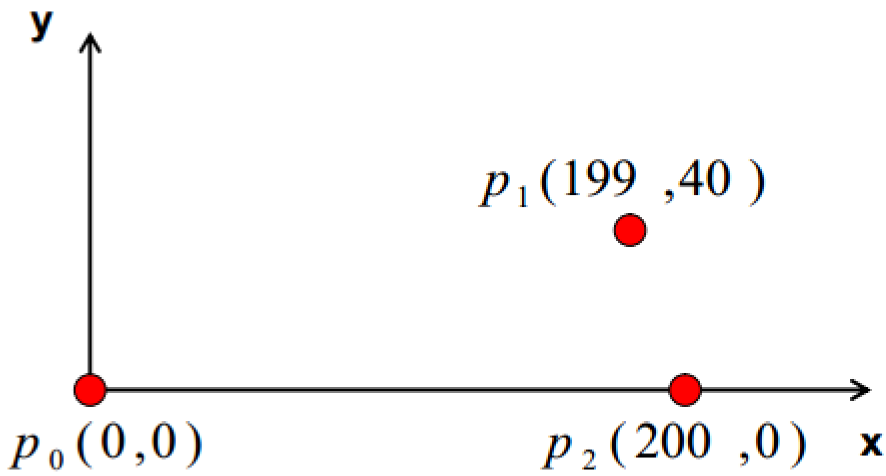
6个方程6个未知数，插值问题的本质是方程的个数和未知数的个数是一致的

现在的问题是凭什么取：t=0，t=1/2，t=1？

为什么t不可以取别的值，如t=0，t=1/3，t=1？哪种取法更科学？

参数曲线

这样一条曲线参数t应该如何取比较好？如果再取成t=0，t=1/2，t=1好不好？



参数化的本质就是找一组恰当的参数t来匹配这一组不同的型值点。给定一组不同的型值点，就要给出不同的参数化即不同的t值，这样才使得这条曲线美观、合理

样条描述

- 采用模线样板法表示和传递自由曲线曲面的形状称为**样条**。
- **样条曲线**是指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续条件。
- **样条曲面**则可以用两组正交样条曲线来描述。

样条描述

n次样条参数多项式曲线：

$$\begin{cases} x(t) = a_n t^n + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 \\ y(t) = b_n t^n + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0 \\ z(t) = c_n t^n + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

样条描述

未知量

$$\begin{cases} x(t) = a_n t^n + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ y(t) = b_n t^n + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \\ z(t) = c_n t^n + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t^n & \cdots & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix} = T \cdot C$$

$$T \cdot M_S \cdot G$$

已知若干个点，如何求解未知量！

样条描述

几何约束

$$C = M_S \cdot G$$

固定不变：基矩阵！

基矩阵

- 每一种自由曲线曲面都有固定的M_S
- 讨论自由曲线曲面时，我们讨论推导M_S的过程。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$C = M_S \bullet G$$

几何约束条件G

- 表示几何约束信息
- 能够根据几何约束信息直接获取

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}$$

$$C = M_S \bullet G$$

Bezier曲线

把Bezier三次曲线多项式写成矩阵形式：

$$p(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix} \qquad t\in[0,1]$$

$$=T\cdot M_{be}\cdot G_{be}$$

其中，M_{be}是三次Bezier曲线系数矩阵，为常数；G_{be}是4个控制点位置矢量。

三次样条

给定n+1个点，可得到通过每个点的分段三次多项式曲线：

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

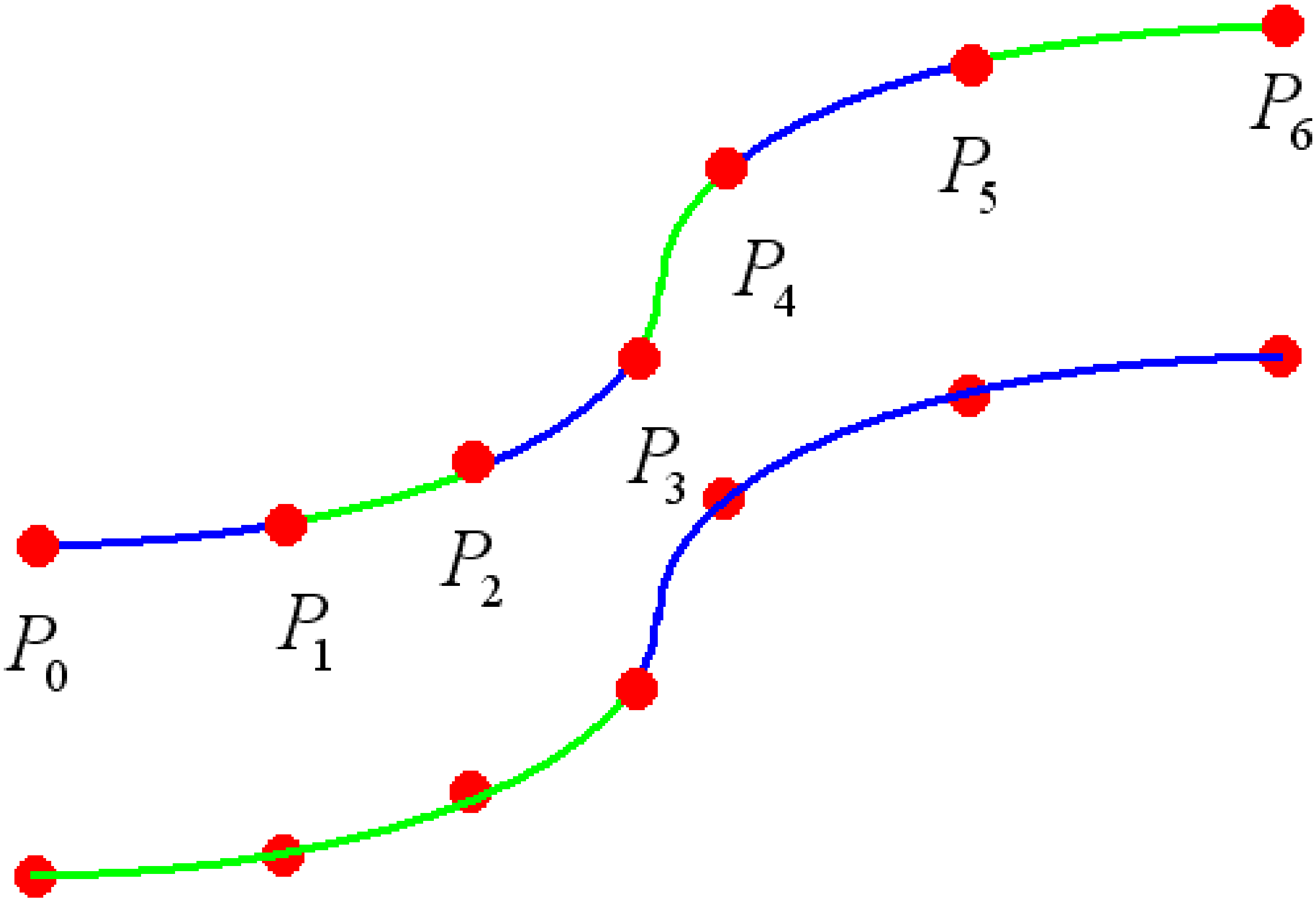
三次样条

$$\begin{cases} x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ y(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \\ z(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \end{cases}$$

$$p(t) =$$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

自然三次样条



自然三次样条的一段

- 给定n+1个**型值点**Pk=(xk,yk,zk), k= 0, 1,2,…,n，自然三次样条曲线在所有连接点处满足二阶连续性
- n段三次样条曲线

自然三次样条的一段

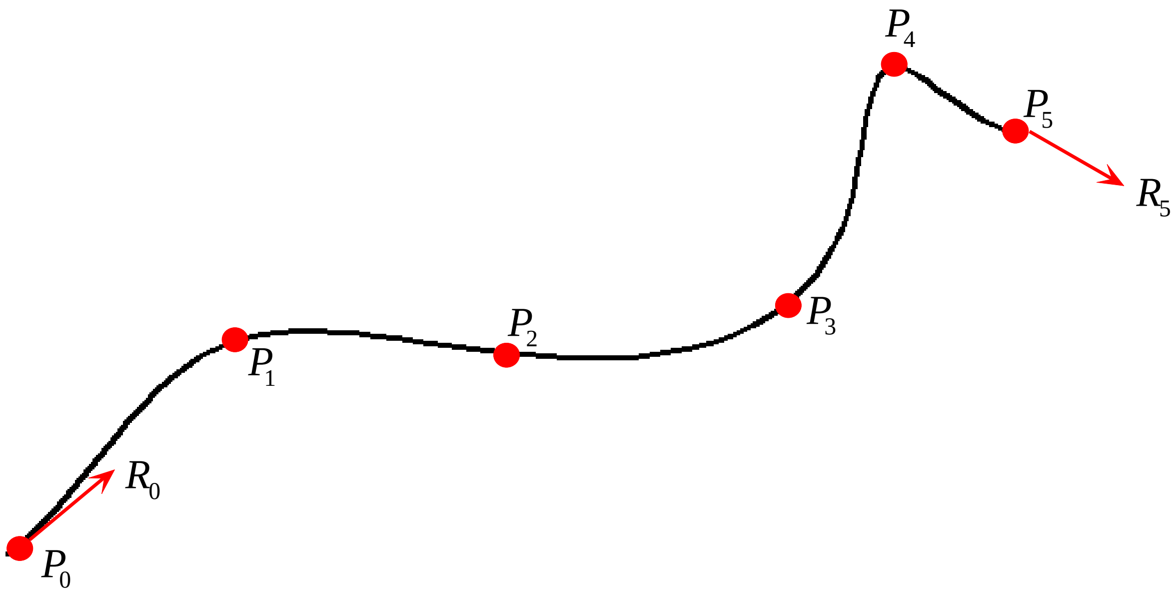
$$
\begin{cases}
x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\
y(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \\
z(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0
\end{cases}
$$

自然三次样条

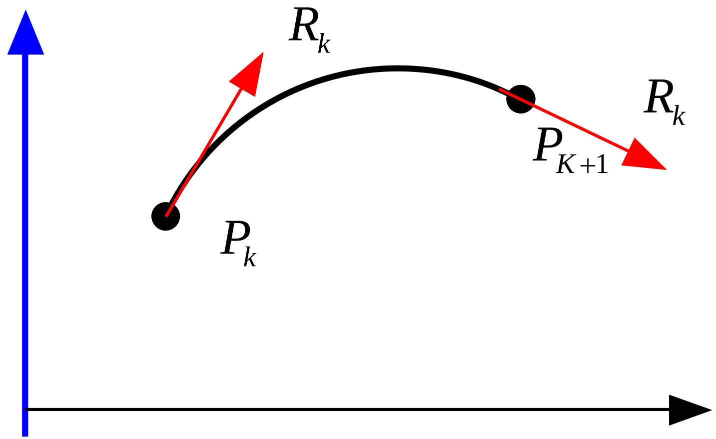
- x(t)未知数：4n
- 可联立的方程数：
  - 内　点：2(n-1) （一内点分别在左右两条曲线上）
  - 一阶导数：n-1（两侧两条曲线在内点上相等）
  - 二阶导数：n-1
  - P_0 , P_1 分别在起点和终点曲线上：2
- 还少两个方程，有多种方法

自然三次样条

- 不能局部控制
- 只适应于型值点分布均匀的情况
- 不好构造……



三次Hermite样条



$$p(0) = P_k \qquad p(1) = P_{k+1}$$
$$p'(0) = R_k \qquad p'(1) = R_{k+1}$$

三次Hermite样条

$$p(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = T \cdot C$$

三次Hermite样条

$$p'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

三次Hermite样条

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \\ p'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C$$

三次Hermite样条

$$C=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\3&2&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}P_k\\P_{k+1}\\R_k\\R_{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_k\\P_{k+1}\\R_k\\R_{k+1}\end{bmatrix}=M_h\cdot G_h$$

三次Hermite曲线

$$p(t) = T \cdot M_h \cdot G_h \qquad t \in [0,1]$$

$$p(t) = \left(t^3, t^2, t, 1\right) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}$$

Hermite基函数

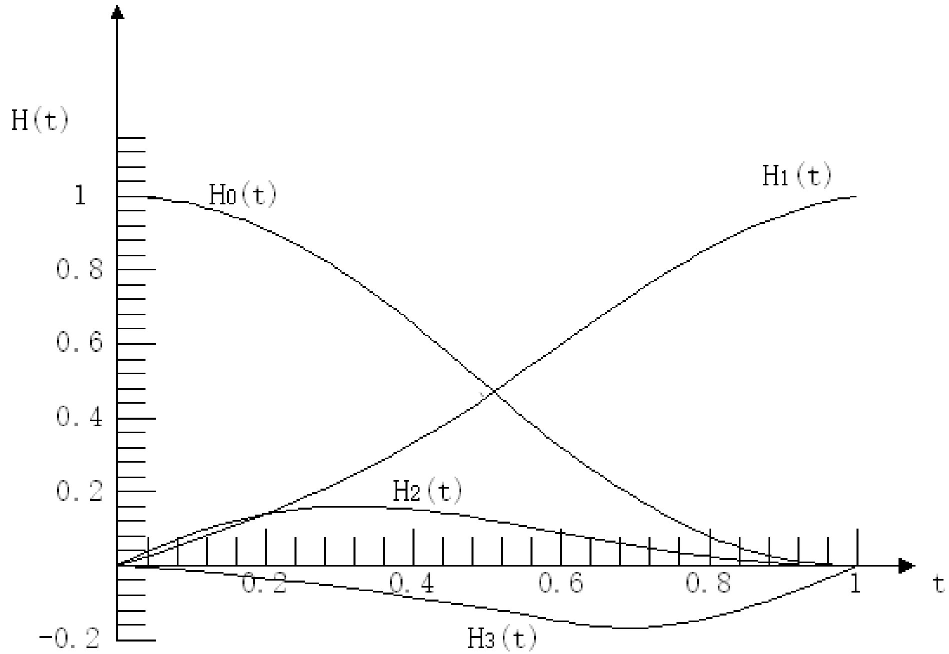
$$
\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$



Hermite样条函数

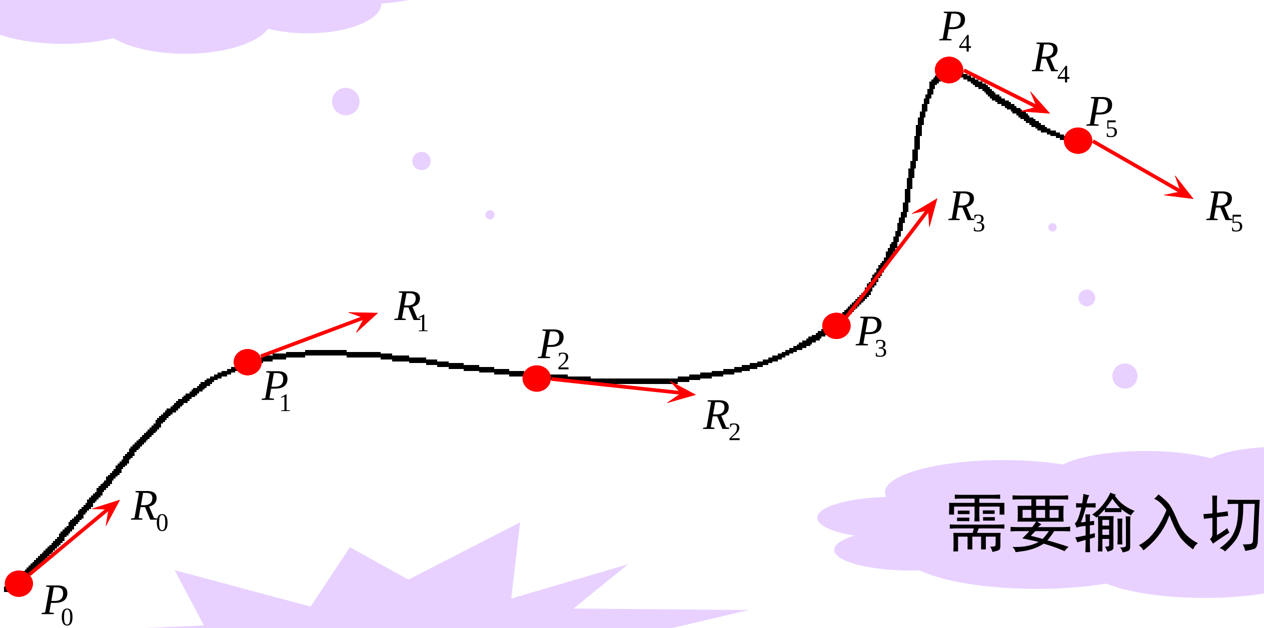
Hermite样条曲线可看着是Hermite基函数加权求和的结果

$$p(t)=P_k H_0(t)+P_{k+1}H_1(t)+R_k H_2(t)+R_{k+1}H_3(t)$$

权重系数

Hermite样条函数

局部控制性



需要输入切向量

连续性条件！

三次样条

- 很多型值点时，都是分段构造
- **局部修改**性很重要……
  - 分而治之

三次Bezier曲线 VS 三次Hermite曲线

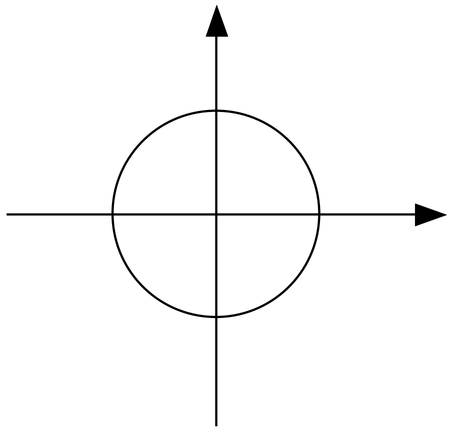
$$p(t) = BEN_{0,3}(t)P_0 + BEN_{1,3}(t)P_1 + BEN_{2,3}(t)P_2 + BEN_{3,3}(t)P_3$$

$$p(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + R_k H_2(t) + R_{k+1} H_3(t)$$

有理样条曲线

有理样条曲线

- 样条曲线、Bezier曲线、Bspline曲线等均用多项式（或分段多项式）表示曲线



- 不能精确表示除抛物线（面）以外的二次曲线（面）

$$\begin{cases} x = r * \sin(t) \\ y = r * \cos(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

有理样条曲线

$$p(t)=\frac{\sum_{k=0}^{n} w_k P_k B_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_{k,m}(t)}$$

- BSpline是有理B样条的特例
- NURBS（最常用）
  - Non-uniform
  - Rational
  - Bspline

表示二次曲线

$$P_0 \quad P_1 \quad P_2$$

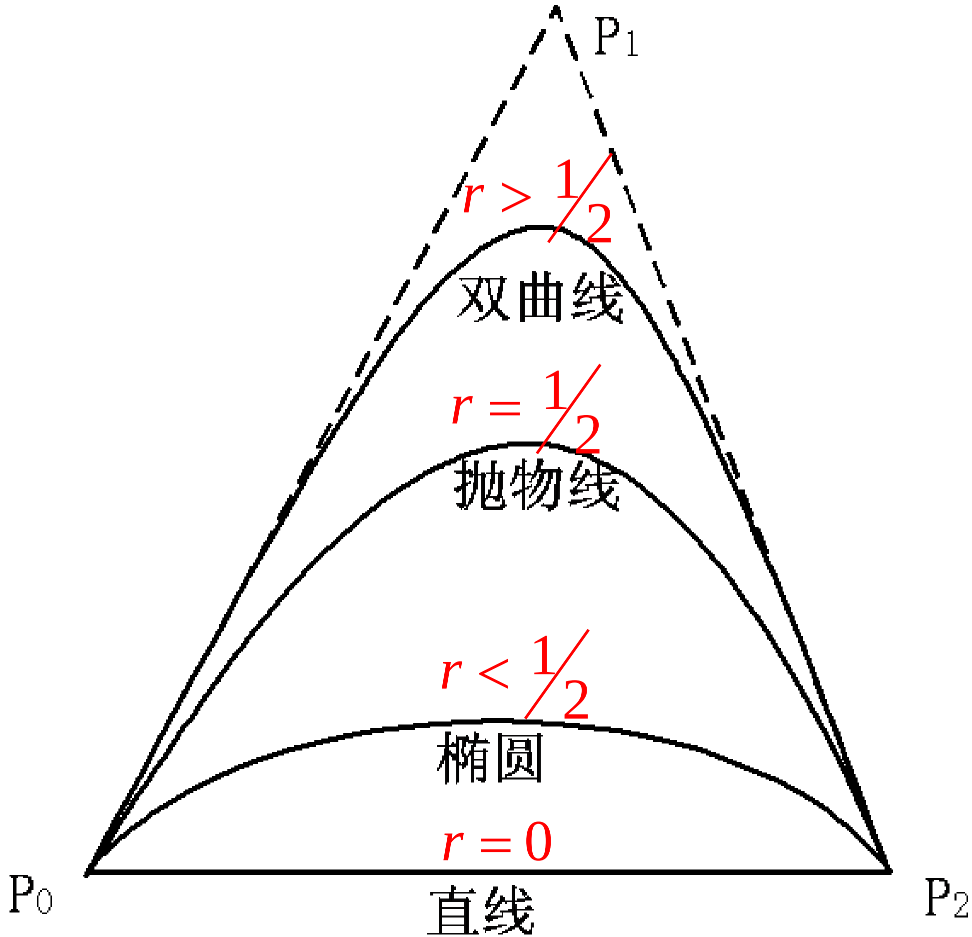
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w0 = w2 = 1$$

$$w1 = \frac{r}{1-r} \qquad 0 \le r < 1$$

$$p(t) = \frac{P_0 B_{0,3(t)} + \frac{r}{1-r} P_1 B_{1,3(t)} + P_2 B_{2,3(t)}}{B_{0,3(t)} + \frac{r}{1-r} B_{1,3(t)} + B_{2,3(t)}}$$

表示二次曲线



有理基函数的性质

NURBS曲线也可用有理基函数的形式表示：

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k R_{k,m}(t)$$

$$R_{k,m}(t) = \frac{w_k B_{k,m}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_{j,m}(t)}$$

有理基函数的性质

1. 普遍性
2. 局部性
3. 凸包性

$$\sum_{k=0}^{n} R_{k,m}(t) = 1$$

4. 可微性
5. 权因子

自由曲面的表示

自由曲面的表示

$$p(u,v)=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}f_{i,m}(u)f_{j,n}(v)$$

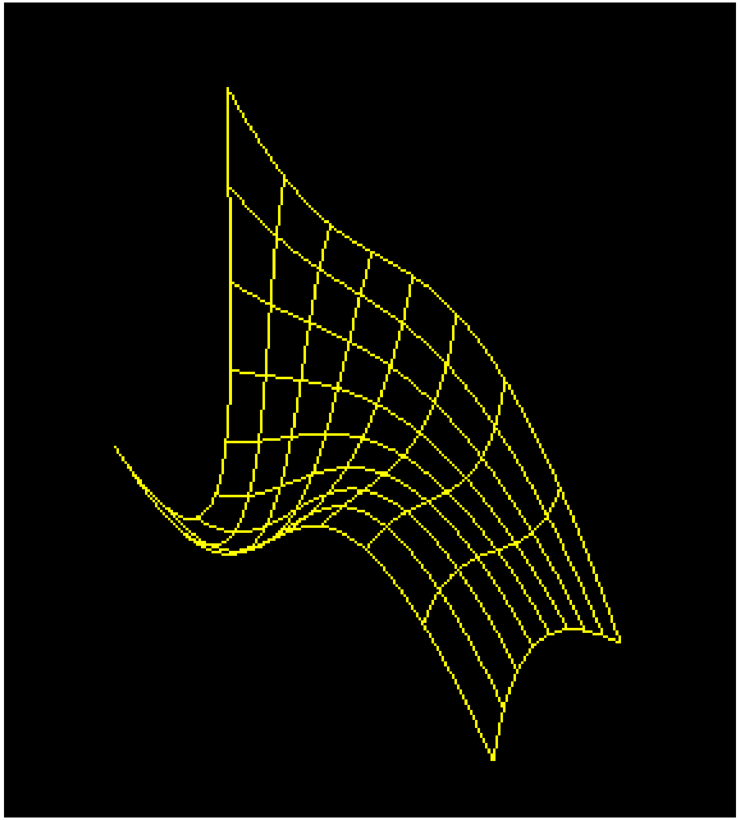
$$m=n=1$$

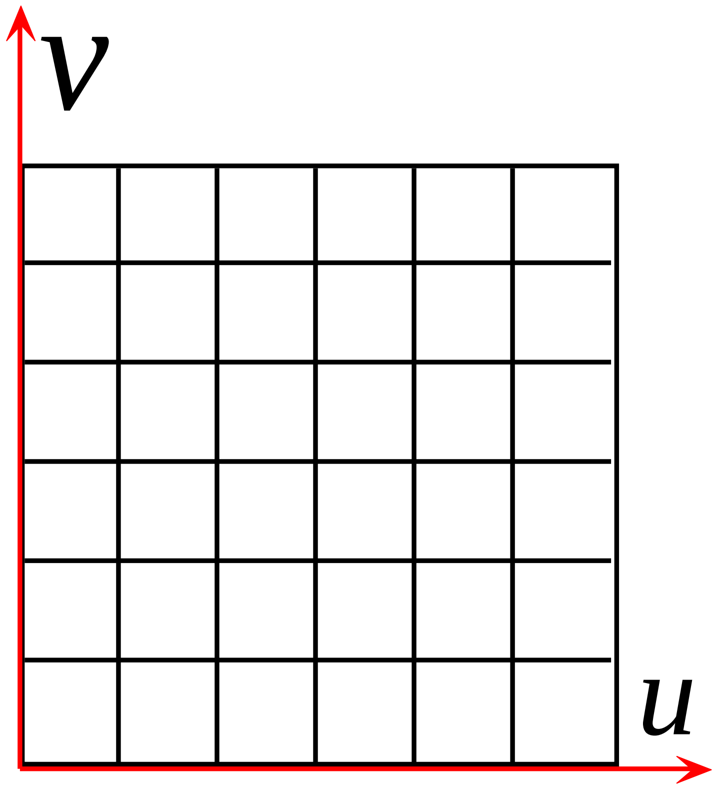
$$p(u,v)=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}BEN_{i,m}(u)BEN_{j,n}(V)$$

$$m=n=1$$

自由曲面的表示





谢 谢