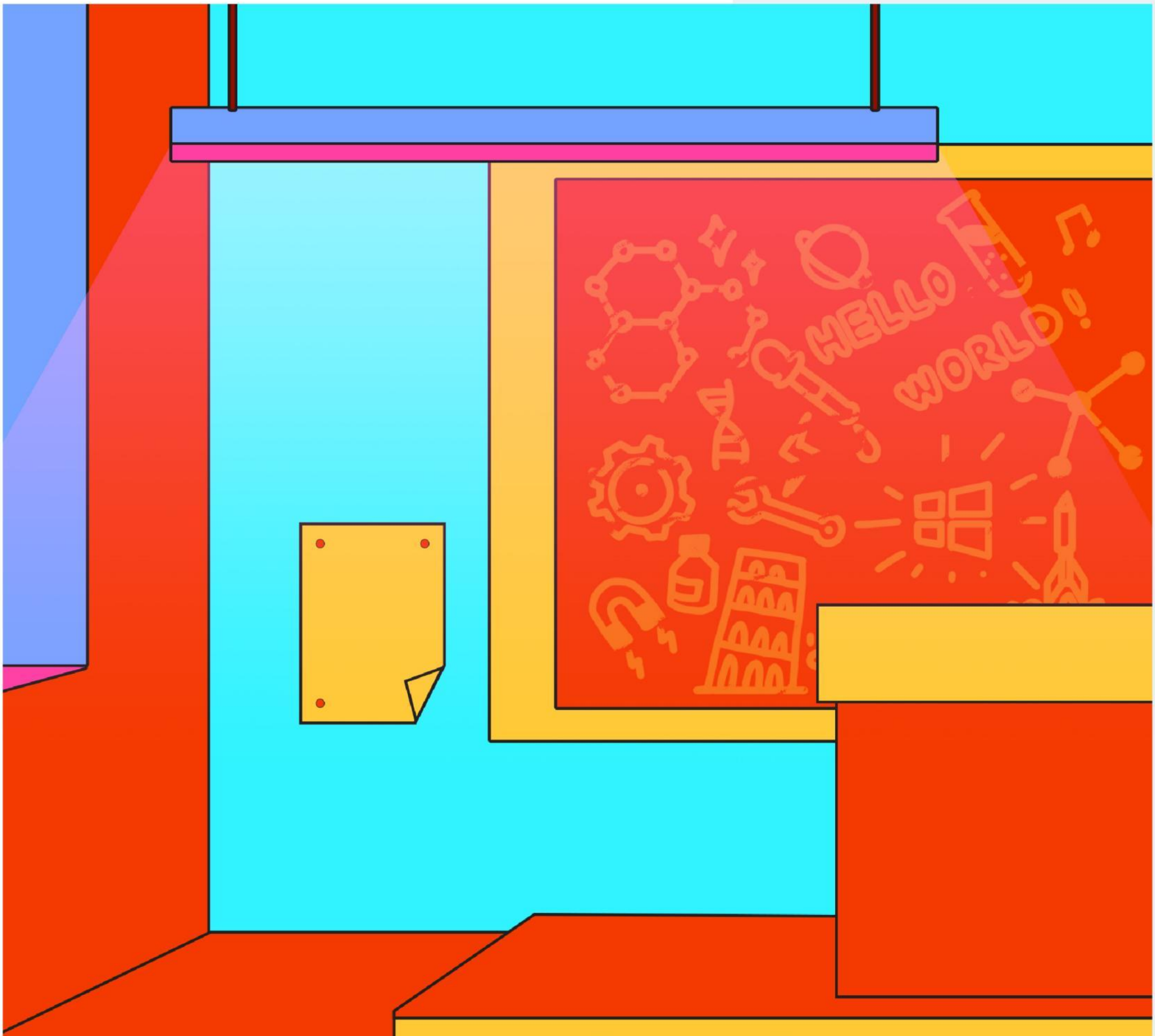
蜂考
FENGKAO



材料力学·突击课

4小时突击

课程讲义

干货福利，互助答疑

江苏博事达
JIANGSU BOOMSTAR

江 苏 博 事 达 律 师 事 务 所

JIANGSU BOOMSTAR LAW OFFICE

中国 南京 奥体大街68号国际研发总部园4A栋17楼 邮编：210019
17F 4ABuilding NO.68 Aoti Street, Nanjing, China P.C: 210000
电话(Tel)：(86)-25-82226685 传真(Fax)：(86)-25-82226696

律 师 声 明

江苏博事达律师事务所接受蜂考品牌公司的委托，发表以下律师声明：

“蜂考系列课程”（含视频、讲义、音频等）内容均为蜂考原创，蜂考品牌公司对此依法享有著作权，任何单位或个人不得侵犯。

蜂考品牌公司为维护创作作品的合法权益，已与江苏博事达律师事务所开展长期法律顾问合作，凡侵犯课程版权等知识产权的，蜂考品牌公司将授权江苏博事达律师事务所依据国家法律法规提起民事诉讼。对严重的侵权盗版分子将报送公安部门采取刑事手段予以严厉打击。

感谢大家对蜂考品牌的长期支持，愿与各位携手共同维护知识产权保护。遵守国家法律法规，从自身做起，抵制盗版！

特此声明！

江苏博事达律师事务所
二〇二一年七月十四日

课时一　截面法

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 内容概要	★★★	0～4	填空
2. 截面法	必考	基础知识	填空

1. 基础知识

题 1. 为了保证工程构件的正常工作，构件应满足_____、_____、_____。

解：强度条件、刚度条件、稳定性条件。

题 2. 在材料力学中，变形固体的三个基本假设为：_____、_____、_____。

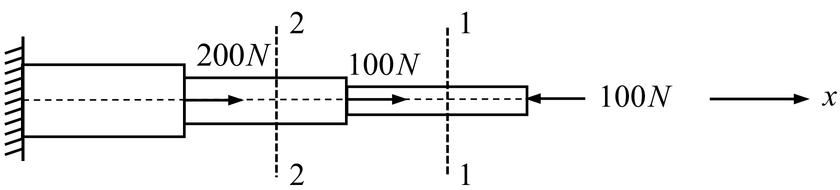
解：连续性假设、均匀性假设、各向同性假设。

题 3. 在材料力学中，变形的四种基本形式为_____、_____、_____、_____。

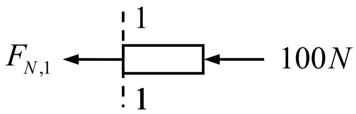
解：拉压、剪切、扭转、弯曲。

2. 截面法

题 1. 杆件受力如图所示，则 1-1 截面的轴力为_____，2-2 截面的轴力为_____。

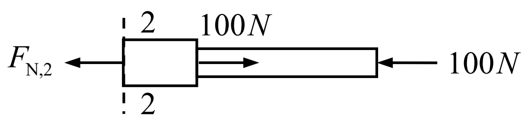


解：1-1 截面：



$$F_{N,1}+100=0 \quad \Rightarrow F_{N,1}=-100N$$

2-2 截面：



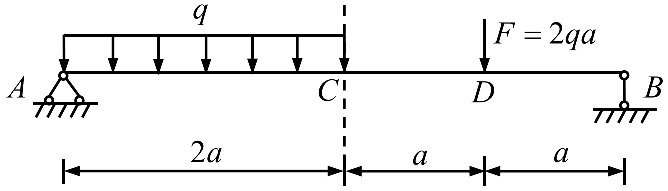
$$F_{N,2}+100=100 \quad \Rightarrow F_{N,2}=0N$$

截面法：截、取、代、平

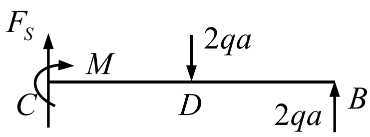
题 2. 材料力学中求内力的基本方法是_____。

解：截面法。

题 3. 图示简支梁，中间截面 C 的内力分别为：______、______。



解：$q\times 2a\times a+2qa\times 3a=F_B\times 4a \quad \Rightarrow F_B=2qa(\uparrow)$



F_S：使隔离体顺时针转动为正

M：下侧受拉为正

$F_S+2qa=2qa \quad \Rightarrow F_S=0$

$2qa\times a+M=2qa\times 2a \quad \Rightarrow M=2qa^2(\circlearrowright)$

答案：$F_S=0$，$M=2qa^2$

课时一　练习题

1．材料力学的主要任务是解决零件设计中的强度问题、______问题和______问题。

2．材料力学中，对可变形固体作出了三个基本假设，即连续性、均匀性和______假设。

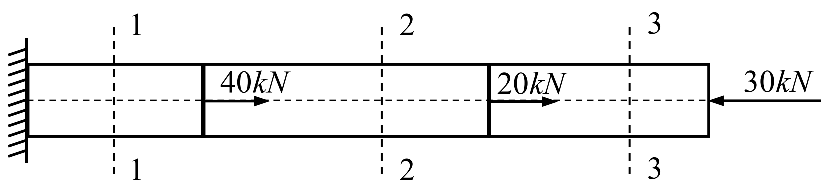
3．下列变形中，不属于基本变形的是（　　）。

A.扭转　　B.剪切　　C.斜弯曲　　D.拉伸与压缩

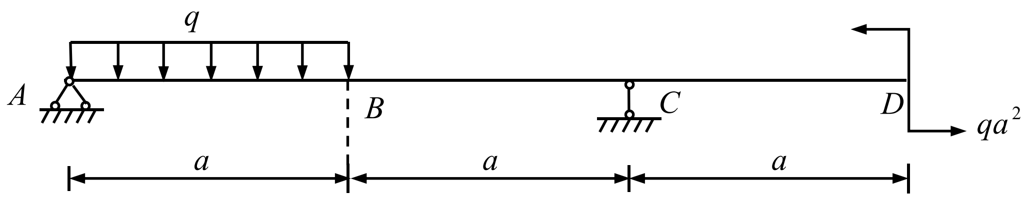
4．在材料力学中，分析计算杆件内力采用的是（　　）。

A.几何法　B.解析法　C.截面法　D.矢量法

5．如图所示结构，截面1−1、2−2、3−3的轴力分别为______、______、______。



6. 如图所示外伸梁，截面 B 的内力分别为：$F_S =$______，$M =$______。

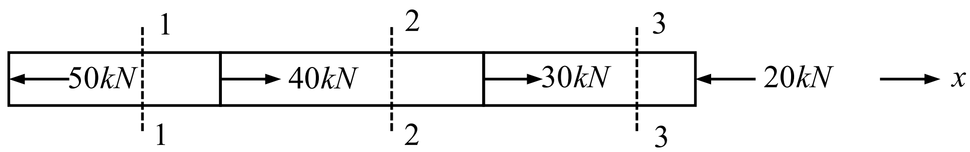


课时二 拉压变形

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 轴力图	必考	5～8	作图题
2. 应力、应变与变形		8～12	大题
3. 应力应变曲线	★★★	0～3	填空、选择

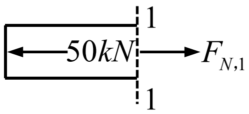
1. 轴力图

题 1. 如图所示杆件，画出轴力图



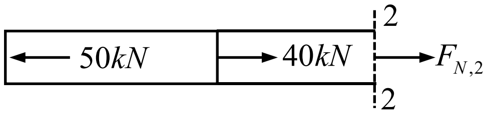
解题思路（考试时不必写出）

（1）1−1 截面：



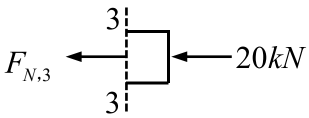
$F_{N,1}=50kN$

（2）2−2 截面：



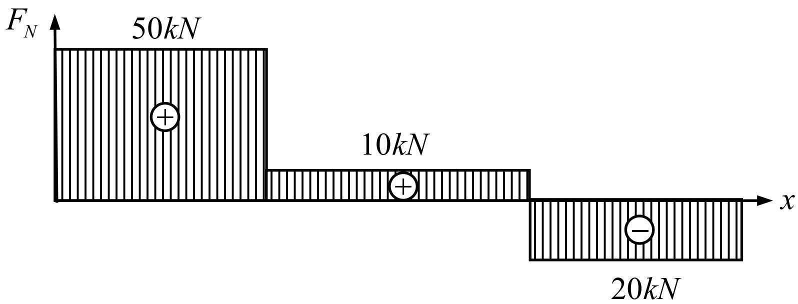
$50=40+F_{N,2}\Rightarrow F_{N,2}=10kN$

（3）3−3 截面：



$F_{N,3}+20=0\Rightarrow F_{N,3}=-20kN$

解：



2. 应力、应变与变形

（1）应力：$\sigma=\dfrac{F_N}{A}$　（单位面积上的内力）

（2）应变：$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F_N}{EA}$　（单位长度变形）

（3）变形：$\Delta l=\varepsilon\cdot l=\dfrac{F_N l}{EA}$

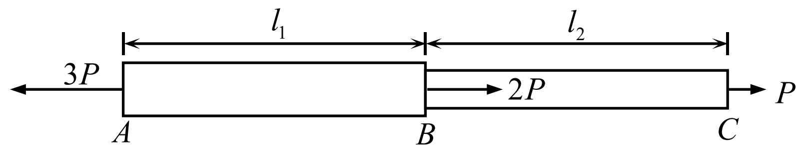
（E:弹性模量）

（以圆截面杆为例）

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{F_N}{\pi\left(d/2\right)^2}=\frac{4F_N}{\pi d^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma=\dfrac{4F_N}{\pi d^2}\le[\sigma] & \Rightarrow \text{强度校核}\\ d\ge\sqrt{\dfrac{4F_N}{\pi[\sigma]}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ F_N\le\dfrac{[\sigma]\cdot\pi d^2}{4} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

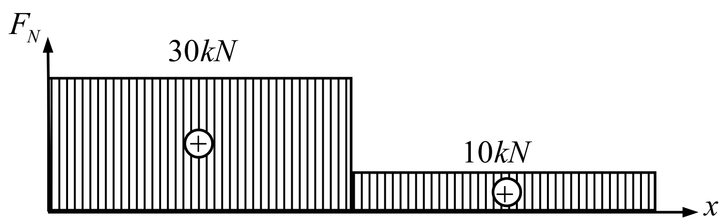
题 1. 图示阶梯形杆 $AC, P=10kN, l_1=l_2=200mm, A_1=100mm^2, A_2=40mm^2, E=200GPa$ ，求：（1）绘制轴力图；（2）确定杆横截面上的最大正应力是多少？处于哪一段？（3）AC 杆轴向总变形 ΔL_{AC}



$1MPa=10^6Pa$

$1GPa=10^9Pa$

解：（1）



（2）$\sigma_{AB}=\dfrac{F_{N_{AB}}}{A_1}=\dfrac{30\times10^3}{100\times10^{-6}}=3\times10^8Pa=300MPa$

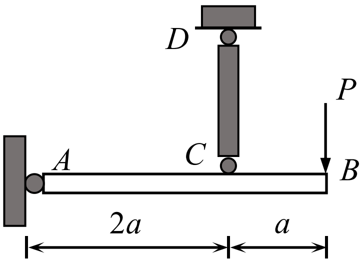
$$\sigma_{BC}=\frac{F_{N_{BC}}}{A_2}=\frac{10\times10^3}{40\times10^{-6}}=2.5\times10^8Pa=250MPa$$

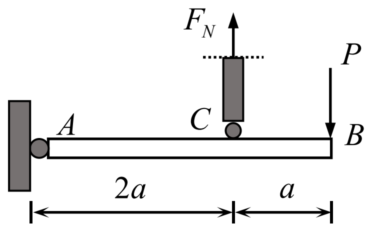
$\sigma_{\max}=\sigma_{AB}=300MPa$ ，处于 AB 段

（3）$\Delta l_{AC}=\Delta l_{AB}+\Delta l_{BC}=\dfrac{F_{N_{AB}}\cdot l_1}{EA_1}+\dfrac{F_{N_{BC}}\cdot l_2}{EA_2}$

$$=\left(\frac{30\times10^3\times200\times10^{-3}}{200\times10^9\times100\times10^{-6}}+\frac{10\times10^3\times200\times10^{-3}}{200\times10^9\times40\times10^{-6}}\right)m=5.5\times10^{-4}m=0.55mm$$

题 2. 刚性杆 ACB 由圆杆 CD 悬挂在 C 点， B 端作用集中力 $P=25kN$ 。已知 CD 杆的直径 $d=20mm$，许用应力 $[\sigma]=160MPa$ 。（1）试校核 CD 杆的强度；2）求结构的许可载荷 $[P]$。





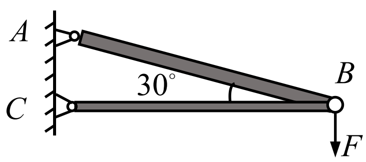
解：（1） $F_N\times 2a=P\times 3a \quad \Rightarrow F_N=\frac{3}{2}P$

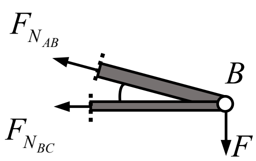
$$\sigma=\frac{4F_N}{\pi d^2}=\frac{6P}{\pi d^2}=\frac{6\times 25\times 10^3}{\pi\times(20\times 10^{-3})^2}=119.37MPa<[\sigma] \quad \Rightarrow CD\text{杆满足强度条件}$$

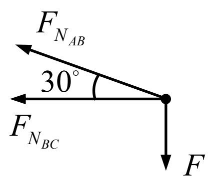
（2） $\sigma=\frac{4F_N}{\pi d^2}=\frac{6P}{\pi d^2}\le[\sigma]$

$$P\le\frac{[\sigma]\pi d^2}{6}=\frac{160\times 10^6\times\pi\times\left(20\times 10^{-3}\right)^2}{6}=33.51kN \quad \Rightarrow [P]=33.51kN$$

题 3. 如图所示平面桁架结构，已知材料为脆性材料，其许用拉应力 $[\sigma_t]=40MPa$, 许用压应力 $[\sigma_c]=100MPa$, AB 杆直径是 BC 杆直径的 2 倍，集中力 $F=100kN$，试按结构强度安全条件设计 AB 杆的直径。







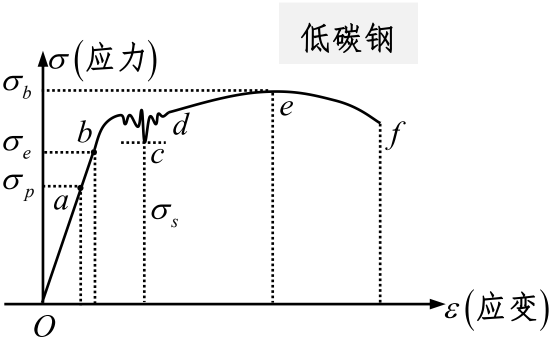
解：$\begin{cases} F_{N_{BC}}+F_{N_{AB}}\cos 30^\circ=0 \\ F-F_{N_{AB}}\sin 30^\circ=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{N_{AB}}=200kN \quad (\text{拉}) \\ F_{N_{BC}}=-100\sqrt{3}kN \quad (\text{压}) \end{cases}$

$$\sigma_{AB}=\frac{4F_{N_{AB}}}{\pi d_{AB}^2}\le[\sigma_t] \qquad \Rightarrow d_{AB}\ge\sqrt{\frac{4F_{N_{AB}}}{\pi[\sigma_t]}}=\sqrt{\frac{4\times 200\times 10^3}{\pi\times 40\times 10^6}}=79.8mm$$

$$\sigma_{BC}=\frac{4\left|F_{N_{BC}}\right|}{\pi d_{BC}^2}\le[\sigma_c] \qquad \Rightarrow d_{BC}\ge\sqrt{\frac{4\left|F_{N_{BC}}\right|}{\pi[\sigma_c]}}=\sqrt{\frac{4\times 100\sqrt{3}\times 10^3}{\pi\times 100\times 10^6}}=46.96mm$$

$d'_{AB}=2d_{BC}=93.9mm$, 故 $[d_{AB}]=93.9mm$

3. 应力、应变曲线



材料	塑性材料	脆性材料
代表	低碳钢	铸铁
变形	塑性屈服	脆性断裂

1. 弹性阶段（ob 段）→弹性变形

（1）σ_p：比例极限

（2）σ_e：弹性极限

2. 屈服阶段（bd 段）→塑性变形

（1）现象：应力变化不大，应变显著增加；

（2）σ_s：屈服极限（塑性材料的极限应力）

3. 强化阶段（de 段）→弹性变形+塑性变形

σ_b：强度极限

4. 局部变形阶段（ef 段）

曲线末端对应横坐标值越大，材料塑性越好

题 1.低碳钢拉伸试验的四个阶段分别为______、______、______、______。

解：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段

题 2. 塑性材料的极限应力是（　　）

A.比例极限　　B.弹性极限　　C.屈服极限　　D.强度极限

答案：C

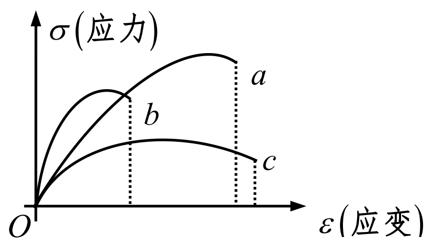
题 3. 塑性材料试件拉伸实验时，在强化阶段（　　）

A.只发生弹性形变　　B.只发生塑性形变

C.只发生线弹性形变　　D.弹性变形与塑性变形同时发生

答案：D

题 4. 用三种不同材料制成尺寸相同的试件，在相同的实验条件下进行拉伸试验，得到应力——应变曲线图，比较三条曲线，可知弹性模量最大的材料是（　　），塑性最好的材料是（　　）。（材料编号填写 a,b,c）



解：_b_、_c_

题 5. 低碳钢冷作硬化后，其比例极限______、塑性______。

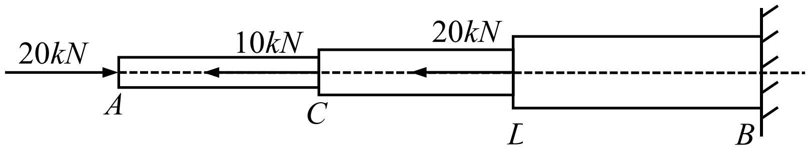
解：提高、降低

题 6. 由杆截面骤然变化（或几何外形局部不规则）而引起的局部应力骤增现象，称为______。

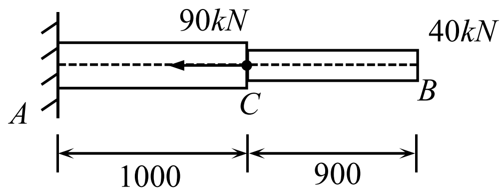
解：应力集中

课时二　练习题

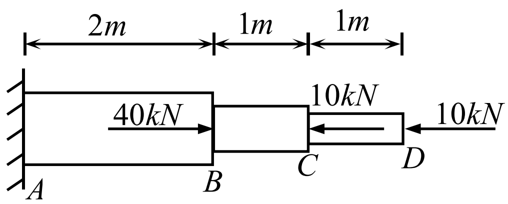
1. 如图所示杆件，画轴力图。



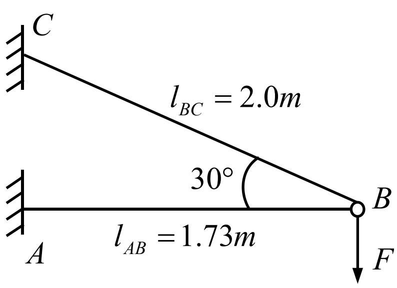
2. 图示阶梯杆，已知 AC 段杆的横截面积 $A_1 = 1000mm^2$。CB 段杆的横截面积 $A_2 = 500mm^2$，材料的弹性模量 $E = 200GPa$。（1）作出该杆的轴力图；（2）求出该杆横截面的最大正应力；（3）求出该杆的总轴向变形量。



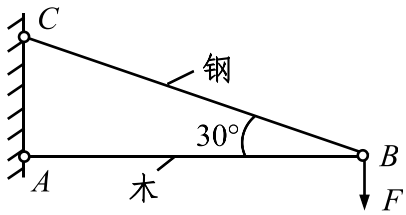
3. 如图所示，阶梯轴 $ABCD$，AB 段直径为 $40mm$，BC 段直径为 $30mm$，CD 段直径为 $20mm$，其它参数见图，弹性模量 $E = 200GPa$。试求（1）杆件 $ABCD$ 的内力图；（2）计算杆件最大应力；（3）D 点位移量。



4. 钢木架构如图所示，$F = 10kN$，BC 杆为钢制圆杆，直径 $d = 20mm$，许用应力 $[\sigma] = 160MPa$。AB 杆为木杆，横截面积为 $A = 500mm^2$，许用应力 $[\sigma] = 40MPa$。试校核两杆的强度。



5. 图示简易吊车中，BC 为钢杆，AB 为木杆。木杆 AB 的横截面积 $A_1 = 100cm^2$，许用应力 $[\sigma]_1 = 7MPa$；钢杆 BC 的横截面积 $A_2 = 6cm^2$，许用拉应力 $[\sigma]_2 = 160MPa$，试求许可吊重 F。



6. 低碳钢拉伸试件的应力、应变关系大致可分为4个阶段，下面（　）结论是正确的。

A.弹性阶段、塑性阶段、强化阶段、局部变形阶段

B.弹性阶段、屈服阶段、塑性阶段、断裂阶段

C.弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、断裂阶段

D.弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段

7. 低碳钢在弹性阶段将发生(　)

A.弹性变形　*B*.塑性变形　*C*.弹塑性变形　*D*.局部变形

8. 低碳钢在拉伸破坏试验过程中所承受的最大应力是（　）

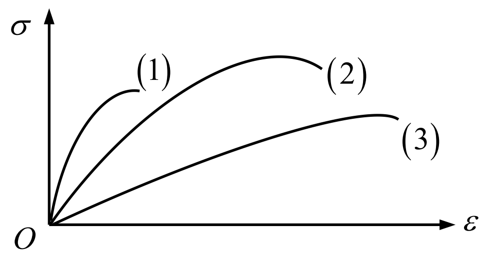
A.比例极限σ_p　*B*.屈服极限σ_s　*C*.强度极限σ_b　*D*.作用应力$[\sigma]$

9. 低碳钢拉伸试验在屈服阶段的力学性能指标为（　）

A.σ_p　*B*.σ_s　*C*.σ_b

10. 用三种不同的材料制成尺寸相同的试件，在相同的试验条件下进行拉伸试验，得到应力-应变曲线如图所示，比较三条曲线，可知材料______的拉伸强度最高，材料_____的弹性模量最大。

A.(1)　*B*.(2)　*C*.(3)



11.低碳钢拉伸经过冷作硬化后，以下四种指标中哪种得到提高（　）

A.强度极限　*B*.比例极限　*C*.截面收缩率　*D*.延伸率

12.应力集中一般出现在（　）

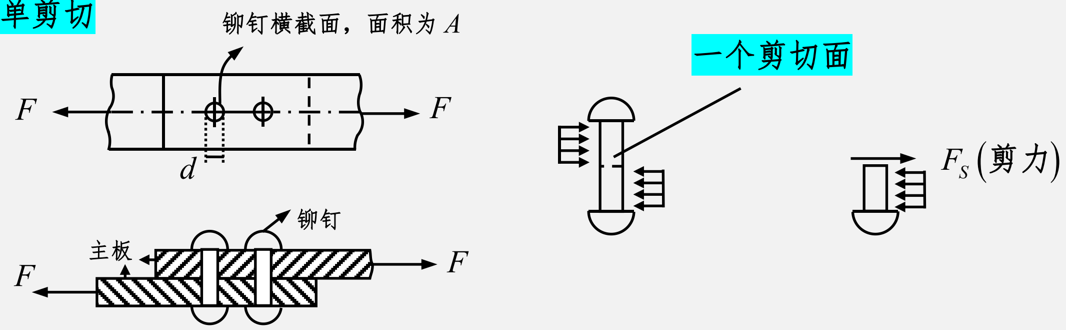
A.光滑圆角处　*B*.孔槽附近　*C*.等直轴段的中点　*D*.截面均匀变化处

课时三　连接件

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 剪切的强度计算	★★★★	0～10	填空、大题
2. 挤压的强度计算			

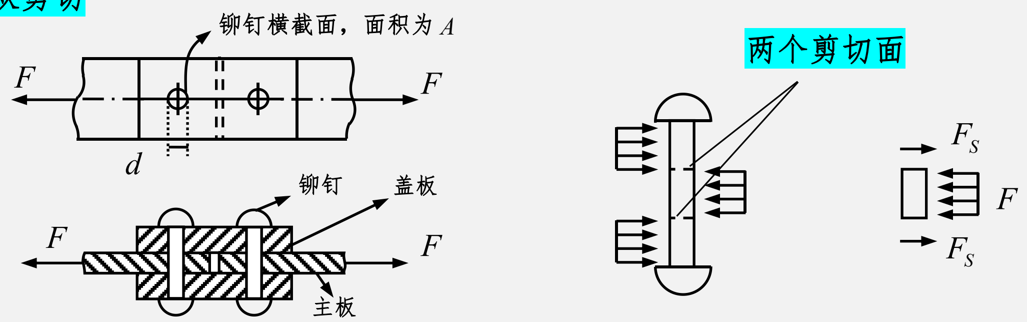
1. 剪切的强度计算

1）单剪切



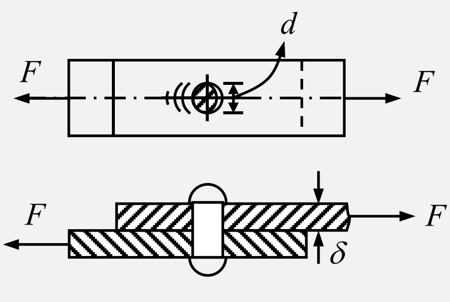
剪力：$F_s=\dfrac{F}{n}$　　切应力：$\tau=\dfrac{F_s}{A}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

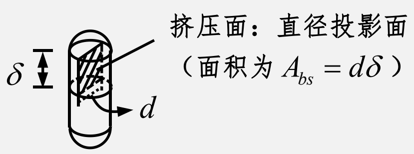
1）双剪切



剪力：$F_s=\dfrac{F}{2n}$　　切应力：$\tau=\dfrac{F_s}{A}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

2. 挤压的强度计算





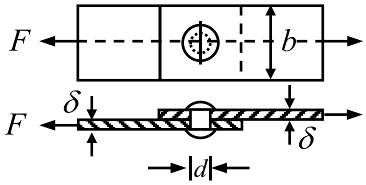
挤压面：与外力方向垂直

挤压力：$F_{bs}=\dfrac{F}{n}$　　挤压应力：$\sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}$　　注：n 为与一个主板直接相连的铆钉个数

题 1. 在连接件上，剪切面和挤压面分别____、____于外力方向。

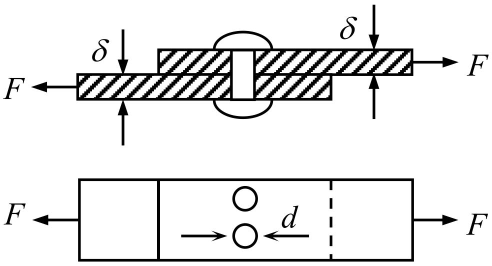
解：平行、垂直

题 2. 如图所示，板受拉力 F 作用，板厚 δ。铆钉直径为 d，则铆钉承受的剪切应力和挤压应力分别为_____、_____

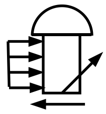


解：$\dfrac{4F}{\pi d^2}$、$\dfrac{F}{d\delta}$

题 3. 图示连接件，用两个铆钉连接两个钢板。已知铆钉的直径是 $d=20mm$，钢板厚度 $\delta=10mm$。铆钉材料的许用应力 $[\tau]=80MPa$，$[\sigma_{bs}]=150MPa$。若 $F=40kN$，请画出铆钉受力图并校核铆钉的强度。



解:(1)铆钉受力图：



(2) $n=2$ $\quad F_S=\dfrac{F}{2}=20kN$

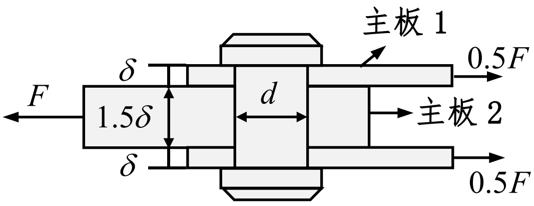
$$\tau=\frac{F_s}{A}=\frac{F_s}{\pi(d/2)^2}=\frac{4F_s}{\pi d^2}=\frac{4\times20\times10^3}{\pi\times\left(20\times10^{-3}\right)^2}=63.66MPa<[\tau]$$

$$n=2 \quad F_{bs}=\frac{F}{2}=20kN$$

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{F_{bs}}{d\delta}=\frac{20\times10^3}{20\times10\times10^{-6}}=100MPa<[\sigma_{bs}]$$

$\Rightarrow$该铆钉满足强度条件。

题 4. 铆接头的尺寸和受力如图，则铆接头的切应力 $\tau=$_____最大挤压应力 $\sigma_{bs}=$_____。



解:双剪切 $F_s=\dfrac{F}{2n}=\dfrac{F}{2}$ $\qquad \tau=\dfrac{F_s}{A}=\dfrac{F/2}{\pi(d/2)^2}=\dfrac{2F}{\pi d^2}$

最大挤压：

主板 1： $F_{bs}=\dfrac{0.5F}{n}=0.5F$ $\qquad \sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}=\dfrac{0.5F}{d\times\delta}=\dfrac{F}{2d\delta}$

主板 2： $F_{bs}=F/n=F$ $\qquad \sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}=\dfrac{F}{d\times1.5\delta}=\dfrac{2F}{3d\delta}$

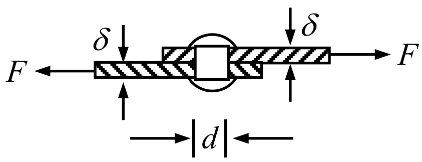
故最大挤压应力：$\sigma_{bs}==\dfrac{2F}{3d\delta}$

课时三　练习题

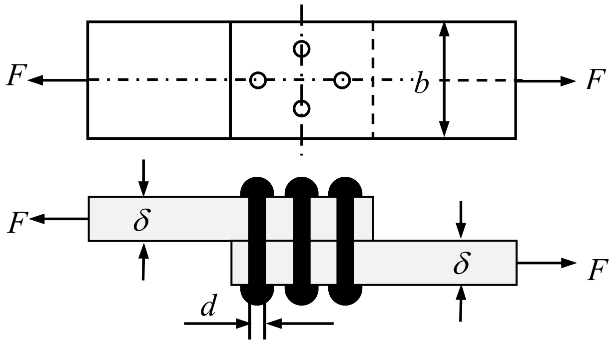
1. 如图示，板受拉力 F 作用，板厚 δ，铆钉杆直径 d。则铆钉承受的剪切应力为（　）。

A. $\dfrac{4F}{\pi d^2}$　　B. $\dfrac{F}{d\delta}$

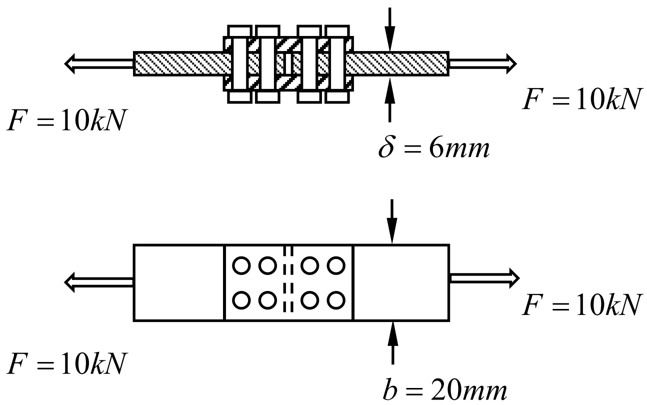
C. $\dfrac{F}{2d\delta}$　　D. $\dfrac{2F}{\pi d\delta}$



2. 图示铆接接头，受力 $F=110kN$，钢板厚度 $\delta=1cm$，宽度 $b=28.5cm$。铆钉直径 $d=1.6cm$，许用剪应力 $[\tau]=140MPa$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=320MPa$。试校核此接头的剪切和挤压强度（假设每个铆钉受力相等）。



3. 图示连接件中，已知：$F=10kN$，主板厚度 $\delta=6mm$，8个铆钉材料、尺寸均相同，横截面直径 $d=5mm$。试计算：（1）在剪切面上每个铆钉所受的剪应力 τ；（2）主板对每个铆钉的挤压力 σ_{bs}。

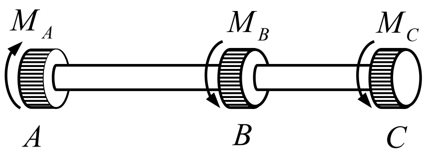


课时四　扭转变形

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 扭矩图	必考	5 ~ 8	作图题
2. 强度和刚度的应用		8 ~ 12	大题

1. 扭矩图

题 1. 如图，传动轴转速为 $n=300r/\min$，主动轮 A 输入功率 $P_1=400kW$，从动轮 B,C 的输出功率分别为 $P_2=160kW,P_3=240kW$。画出传动轴上的扭矩图。



$M_e=9550\times\dfrac{P}{n}$

力偶矩　M_e　$(N\cdot m)$

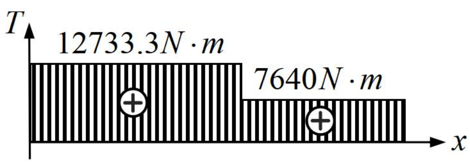
功率　P　(kW)

转速　n　$(r/\min)$

解：$M_A=9550\times\dfrac{P_1}{n}=9550\times\dfrac{400}{300}=12733.3N\cdot m$

$M_B=9550\times\dfrac{P_2}{n}=9550\times\dfrac{160}{300}=5093.3N\cdot m$

$M_C=9550\times\dfrac{P_3}{n}=9550\times\dfrac{240}{300}=7640N\cdot m$

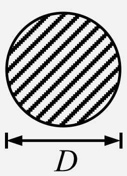


扭矩的正负：
四指环绕和扭矩一致
大拇指背离截面为正
大拇指指向截面为负

2. 强度和刚度的应用

(1) 极惯性矩 I_P 与抗扭转截面系数 W_P

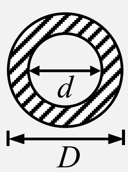
①实心圆截面：



极惯性矩：$I_P=\dfrac{1}{32}\pi D^4$

扭转截面系数：$W_P=\dfrac{1}{16}\pi D^3$

②空心圆截面：



极惯性矩：$I_p=\dfrac{1}{32}\pi D^4\left(1-\alpha^4\right)$，其中 $\alpha=\dfrac{d}{D}$

扭转截面系数：$W_P=\dfrac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)$

(2)强度校核及其应用

切应力：$\tau=\dfrac{T}{I_P}\rho$　　　最大扭转切应力：$\tau=\dfrac{T}{I_P}\cdot R=\dfrac{T}{W_P}$

实心圆截面：$\tau=\dfrac{T}{W_P}=\dfrac{16T}{\pi D^3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tau=\dfrac{16T}{\pi D^3}\le[\tau] & \Rightarrow \text{强度校核}\\ D\ge\sqrt[3]{\dfrac{16T}{\pi[\tau]}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ T\le\dfrac{[\tau]\cdot\pi D^3}{16} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

(3)刚度校核及其应用

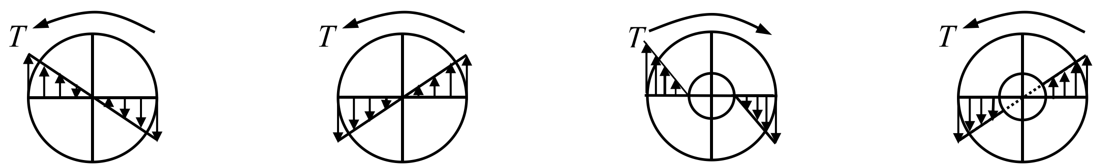
扭转变形：$\varphi'=\dfrac{T}{GI_P}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$　（单位长度扭转角）　　G:切变模量

实心圆截面：$\varphi'=\dfrac{32T}{G\pi D^4}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'=\dfrac{32T}{G\pi D^4}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}\le[\varphi'] & \Rightarrow \text{刚度校核}\\ D\ge\sqrt[4]{\dfrac{32T}{G\pi[\varphi']}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}} & \Rightarrow \text{截面尺寸设计}\\ T\le\dfrac{G\pi D^4[\varphi']}{32}\times\dfrac{\pi}{180^\circ} & \Rightarrow \text{载荷设计}\end{cases}$$

(4)两截面之间的相对扭转角: $\varphi=\dfrac{T\cdot l}{GI_P}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$

题 1.以下应力分布图中哪些是正确的（　　）。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

$A.$图$(a)(b)$正确　　$B.$图$(b)(c)$正确　　$C.$图$(c)(d)$正确　　$D.$图$(b)(d)$正确

答案：D　　1）切应力方向与扭矩T方向一致　　2）切应力沿径向（直径）线性分布

题 2.轴的扭转切应力公式$\tau_P=T\rho/I_P$，适用于如下面轴（　　）。

$A.$矩形截面轴　　$B.$椭圆截面　　$C.$圆形截面　　$D.$任意形状截面轴

答案：C

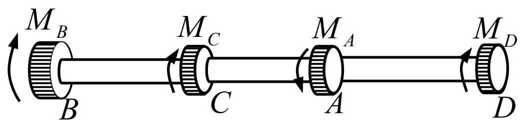
配套课程　习题答案

题 3. 当实心圆轴的直径缩小至原来$\frac{1}{2}$倍，其抗弯刚度将变为原来的（　　）倍。

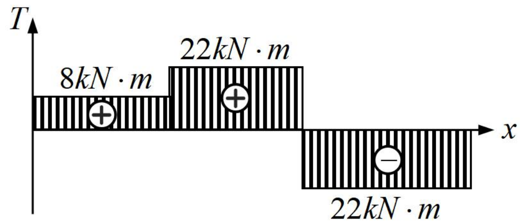
$A.\frac{1}{16}$　　　$B.\frac{1}{8}$　　　$C.\frac{1}{4}$　　　$D.\frac{1}{2}$

答案：A　刚度$=GI_P$，G为定值，$I_P=\frac{1}{32}\pi D^4$，　$I_P'=\frac{1}{32}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\times\frac{1}{32}\pi D^4=\frac{1}{16}I_p$

题 4. 如图所示等直圆轴，直径$d=120mm$，已知外力偶矩$M_A=44kN\cdot m$，$M_B=8kN\cdot m$，$M_C=14kN\cdot m$，$M_D=22kN\cdot m$，已知材料的许用应力$[\tau]$=100MP_a，$G=80GP_a$，许用单位长度扭转角$[\varphi']$=1.0°/m。（1）作扭矩图；（2）试校核该圆轴是否满足强度和刚度要求。



解：

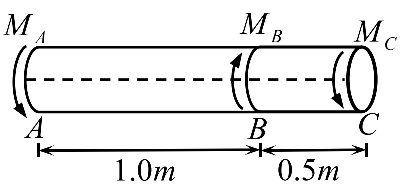


$$\tau=\frac{T}{W_P}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{16\times22\times10^3}{\pi\times\left(120\times10^{-3}\right)^3}=64.8\times10^6P_a=64.8MP_a<[\tau]$$

$$\varphi'=\frac{T}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{32T}{G\pi D^4}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{32\times22\times10^3}{80\times10^9\times\pi\times(120\times10^{-3})^4}\times\frac{180^0}{\pi}=0.77°/m<[\varphi']$$

$\Rightarrow$该圆轴满足强度和刚度要求

题 5. 如图示等截面圆杆，已知外力偶矩$M_A=2.99kN\cdot m,M_B=7.20kN\cdot m,M_C=4.21kN\cdot m$，许用切应力$[\tau]=70MP_a$，许用单位长度扭转角$[\theta]=1°/m$，切变模量$G=80GP_a$。（1）试确定该轴直径$d$；（2）按所确定的直径计算$AC$截面之间的相对扭转角。



解：（1）利用截面法，得 AB 和 BC 段扭矩分别为 $T_1=-2.99kN\cdot m$ $T_2=4.21kN\cdot m$

按强度条件设计 d $\tau=\frac{T}{W_P}=\frac{16T}{\pi d^3}\le[\tau]$

$$\Rightarrow d\ge\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times4.21\times10^3}{\pi\times70\times10^6}}=0.0674m=67.4mm$$

按刚度条件设计 d $\varphi'=\frac{T}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{32T}{G\pi d^4}\times\frac{180°}{\pi}\le[\varphi']$

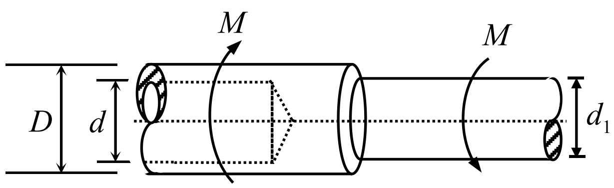
$$d\ge\sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi[\varphi']}\times\frac{180°}{\pi}}=\sqrt[4]{\frac{32\times4.21\times10^3}{80\times10^9\times\pi\times1°}\times\frac{180°}{\pi}}=0.0744m=74.4mm$$

综上：$d=74.4mm$

（2）$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}=\left(\frac{T_1\cdot l_{AB}}{GI_P}+\frac{T_2\cdot l_{BC}}{GI_P}\right)\times\frac{180°}{\pi}$

$$=\frac{(T_1\cdot l_{AB}+T_2\cdot l_{BC})\times32}{G\pi d^4}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{(-2.99\times10^3\times1+4.21\times10^3\times0.5)\times32}{80\times10^9\times\pi\times(74.4\times10^{-3})^4}\times\frac{180°}{\pi}=-0.21°$$

题 6. 图示为一船用推进器主轴，一段是实心的，直径 $d_1=28cm$，另一段是空心的，外径 $D=29.6cm$，内径 $d=14.8cm$，若材料的许用切应力 $[\tau]=50MP_a$，试求此轴所允许传递的转矩 M。



解：$\alpha=\frac{d}{D}=\frac{14.8}{29.6}=0.5$

按实心段确定 M：$\tau=\frac{T}{W_{P1}}=\frac{16M}{\pi d_1^3}\le[\tau]$

$$M\le\frac{[\tau]\cdot\pi d_1^3}{16}=\frac{50\times10^6\times\pi\times(28\times10^{-2})^3}{16}=215.5kN\cdot m$$

按空心段确定 M：$\tau=\frac{T}{W_{P2}}=\frac{M}{\frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)}\le[\tau]$

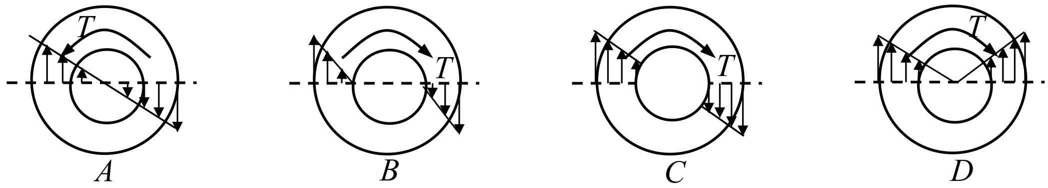
$$M\le\frac{[\tau]\cdot\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}=\frac{50\times10^6\times\pi\times(29.6\times10^{-2})^3\times(1-0.5^4)}{16}=238.7kN\cdot m$$

故 $[M]=215.5kN\cdot m$

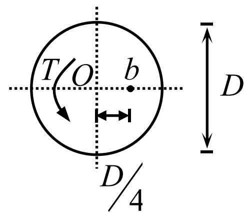
课时四 练习题

1. 已知圆轴扭转时，传递的功率为 $P=15kW$，转速为 $n=150r/\min$。则相应的外力偶矩为______$N\cdot m$。

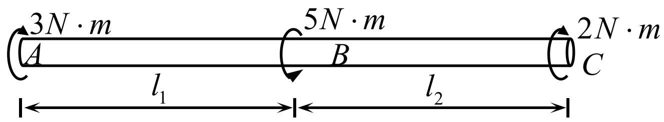
2. 空心圆轴扭转时横截面上的切应力分布图如下所示，其中正确的分布是（　　）。



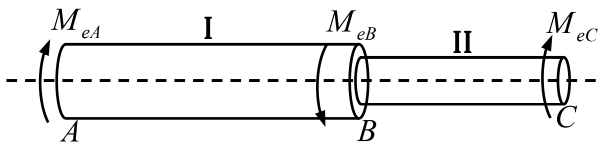
3. 一根实心截面圆轴。其直径为 D，则其极惯性矩 I_P 为_____。若该截面扭矩 $T=6kN\cdot m$，直径 $D=100mm$，则横截面上 b 点的切应力 τ_b =______（注明单位）



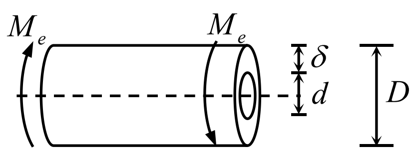
4. 图示轴受钮，若使两端面间相对扭转角为零，则 $\frac{l_1}{l_2}$=______。



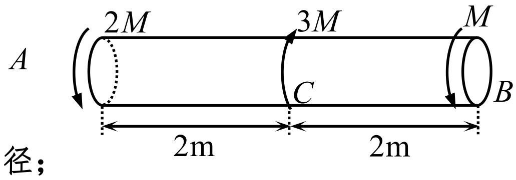
5. 如图所示阶梯状圆轴，AB 段直径 $d_1=120mm$，BC 段直径 $d_2=100mm$。扭转力偶矩为 $M_{eA}=22kN\cdot m, M_{eB}=36kN\cdot m, M_{eC}=14kN\cdot m$。已知材料的许用切应力 $[\tau]=80MP_a$，（1）试作出扭矩图；（2）试校核轴的强度。



6. 某汽车的主传动轴是用 40 号钢的电焊钢管制成，钢管外径 $D=76mm$，壁厚 $\delta=2.5mm$。材料的许用切应力 $[\tau]=100MP_a$，切变模量为 $G=80GP_a$，轴的许用单位扭转角 $[\varphi']=1°/m$，试按轴的强度和刚度条件设计 M_e。



7． 如图示，传动轴系钢制实心圆截面轴，且各力偶矩的作用面是轴的横截面，已知力偶矩 $M=40kN\cdot m$，钢的切变模量 $G=80GP_a$，许用切应力 $[\tau]=40MP_a$，轴的许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1°/m$。求：



（1）作该传动轴的扭矩图；

（2）综合考虑强度条件和刚度条件确定该传动轴的直径；

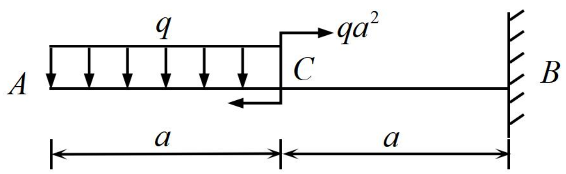
（3）试按所确定的传动轴直径计算截面 B 相对截面 A 的扭转角（用弧度表示）

课时五 弯曲应力

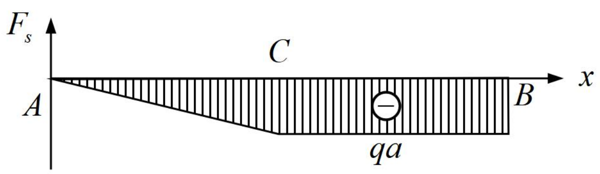
考点	重要程度	占分	题型
1. 内力图	必考	5～10	作图
2. 应力计算		8～12	大题

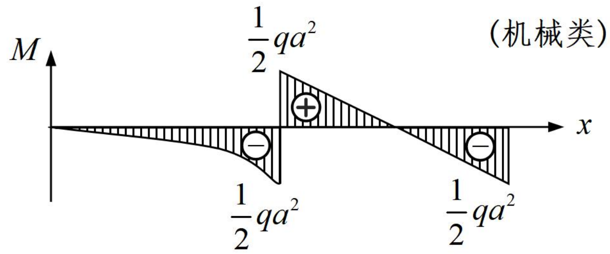
1. 内力图

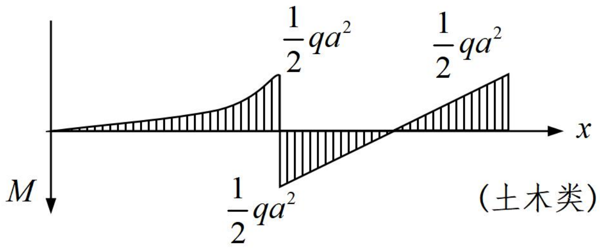
题 1. 试作图示梁的剪力图与弯矩图。



解：

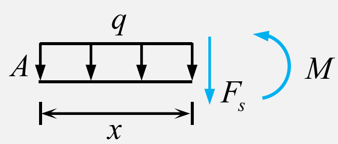






解题思路（不必在试卷上呈现）

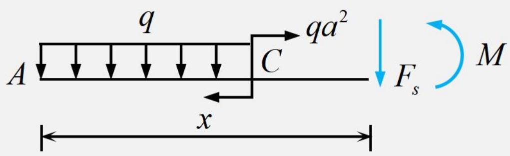
①1-1 截面：（$0 \le x < a$）



剪力方程：$qx + F_s = 0 \quad \Rightarrow F_s = -qx$

弯矩方程：$qx \cdot \frac{x}{2} + M = 0 \quad \Rightarrow M = -\frac{1}{2}qx^2$

②2-2 截面：（$a \le x < 2a$）



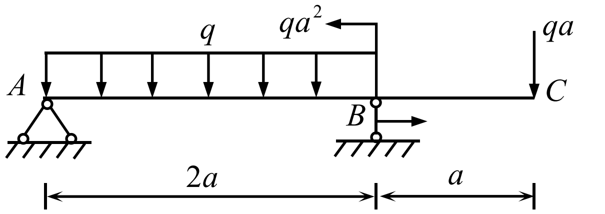
剪力方程：$qa + F_s = 0 \quad \Rightarrow F_s = -qa$

弯矩方程：$qa \cdot (x - \frac{a}{2}) + M = qa^2$

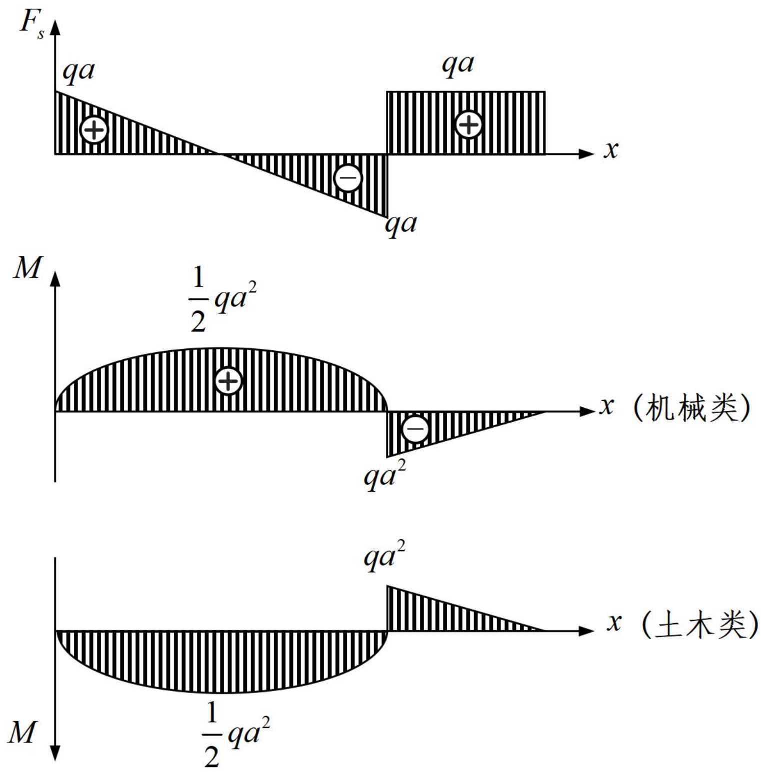
$$\Rightarrow M = -qax + \frac{3}{2}qa^2$$

注：画剪力图和弯矩图的时候，一般不通过列方程求函数的方法，简单方法见视频课程

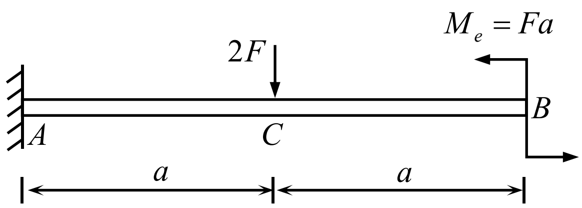
题 2. 求出支座反力并作图示外伸梁的剪力图与弯矩图。



解：$\begin{cases} F_A + F_B = 2qa + qa \\ 2qa \times a + qa \times 3a = F_B \times 2a + qa^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_A = qa \\ F_B = 2qa \end{cases}$

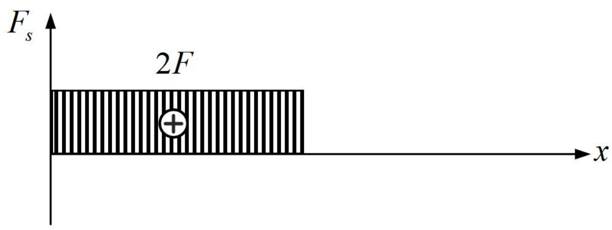


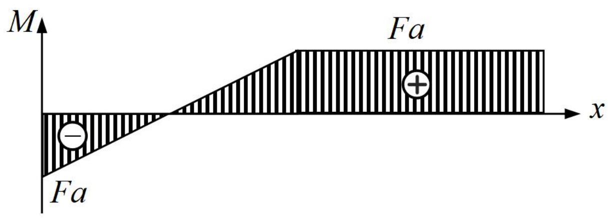
题 3. 试作梁的剪力图和弯矩图。



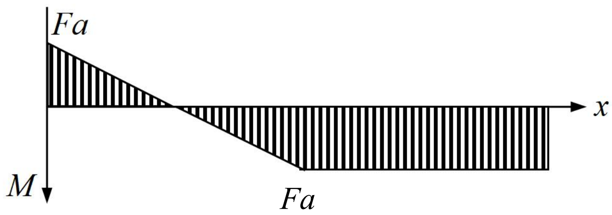
解：A 端支座反力：$F_A = 2F$

A 端弯矩：$M_A + 2F \times a = Fa \quad \Rightarrow M_A = -Fa$





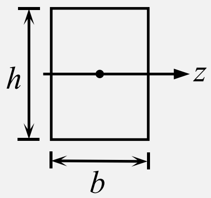
（机械类）



（土木类）

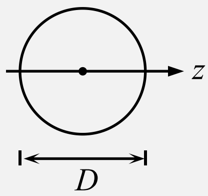
2. 应力计算

（1）中性轴惯性矩 I_z、抗弯曲截面系数 W_z



$$I_z=\frac{1}{12}bh^3$$

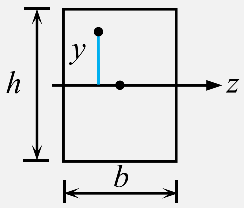
$$W_z=\frac{1}{6}bh^2$$



$$I_z=\frac{1}{64}\pi D^4$$

$$W_z=\frac{1}{32}\pi D^3$$

（2）正应力计算：



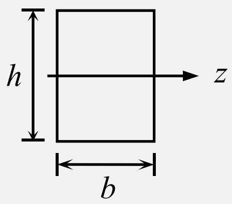
正应力 $\sigma=\dfrac{M}{I_z}y$

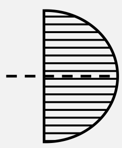
最大正应力：$y=\dfrac{h}{2}$ 时　$\sigma_{\max}=\dfrac{M}{I_z}\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{M}{W_z}$

最小正应力：$y=0$ 时　$\sigma_{\min}=0$

（3）切应力计算：

1）应力分布



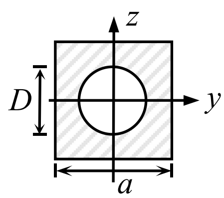


2）两种特殊截面的最大切应力 $\tau_{\max}$

矩形截面：$\tau_{\max}=\dfrac{3}{2}\dfrac{F_s}{A}$

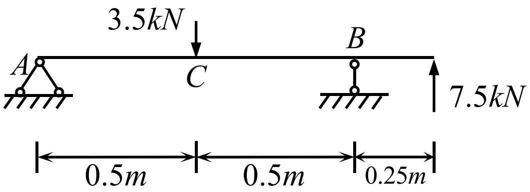
圆形截面：$\tau_{\max}=\dfrac{4}{3}\dfrac{F_s}{A}$

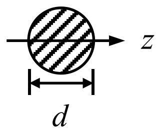
题 1. 图示正方形边长为 a，圆孔直径为 D，若在该正方形中间位置挖去此圆孔，则剩下部分图形的惯性矩 $I_y=I_z=$______。



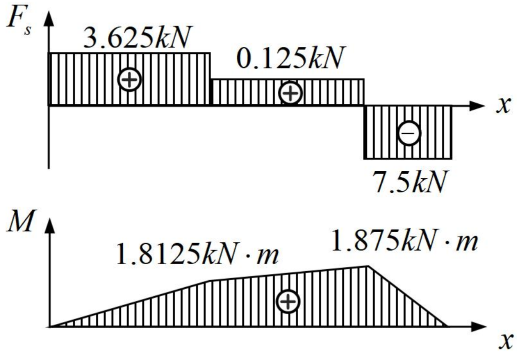
解：$I_y=I_z=\dfrac{1}{12}a^4-\dfrac{1}{64}\pi D^4$

题 2. 图示圆形截面木梁，已知 $d=130mm$，材料的许用正应力 $[\sigma]=10MPa$，许用切应力 $[\tau]=2MPa$，试作出其剪力图和弯矩图，并校核梁的强度。





解：



（机械类）

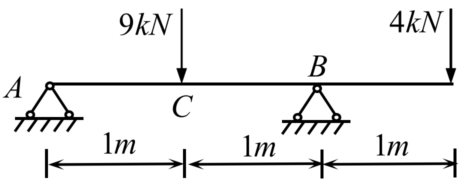
剪力最大值：$F_s=7.5kN$　　弯矩最大值：$M=1.875kN\cdot m$

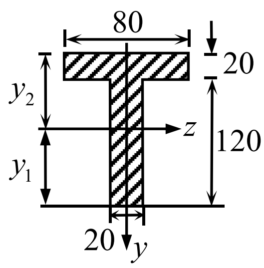
$$\sigma=\frac{M}{W_Z}=\frac{M}{\frac{1}{32}\pi d^3}=\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{32\times 1.875\times 10^3}{\pi\times(130\times 10^{-3})^3}=8.7MPa<[\sigma]$$

$$\tau=\frac{4}{3}\frac{F_s}{A}=\frac{4}{3}\times\frac{F_s}{\pi\cdot(d/2)^2}=\frac{4}{3}\times\frac{4F_s}{\pi d^2}=\frac{4}{3}\times\frac{4\times 7.5\times 10^3}{\pi\times(130\times 10^{-3})^2}=0.75MPa<[\tau]$$

$\Rightarrow$ 满足强度条件

题 3. 图示 T 型截面铸铁梁，已知截面惯性矩 $I_z=763cm^4$，$y_1=88mm$，最大正弯矩在截面 C 上，$M_c=2.5kN\cdot m$，最大负弯矩在截面 B 上，$M_B=4kN\cdot m$，材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=30MPa$，许用压应力 $[\sigma_c]=60MPa$，试校核此梁的强度。





解：由题知：$M_C = 2.5kN\cdot m$（下拉上压） $M_B = 4kN\cdot m$（上拉下压）

①对 C 点：

$$\sigma_t = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times88\times10^{-3}}{763\times10^{-8}} = 28.8MPa < [\sigma_t]$$

$$\sigma_c = \frac{M_C y_2}{I_z} = \frac{2.5\times10^3\times52\times10^{-3}}{763\times10^{-8}} = 17.04MPa < [\sigma_c]$$

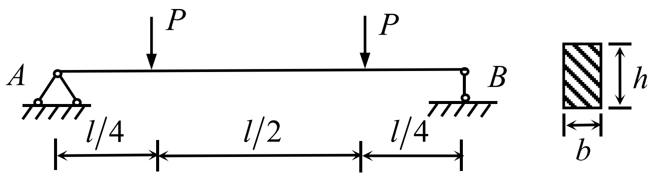
②对 B 点：

$$\sigma_t = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{4\times10^3\times52\times10^{-3}}{763\times10^{-8}} = 27.3MPa < [\sigma_t]$$

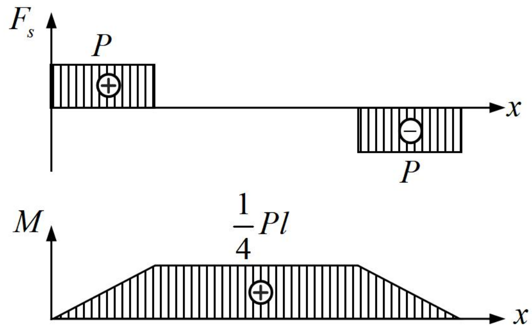
$$\sigma_c = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{4\times10^3\times88\times10^{-3}}{763\times10^{-8}} = 46.1MPa < [\sigma_c]$$

$\Rightarrow$ 满足强度条件

题 4. 一矩形截面简支木梁，梁上载荷如图所示，已知 $l = 4m$，梁的弯曲许用正应力 $[\sigma] = 10MPa$，截面尺寸 $h = 200mm$，$b = 100mm$，试确定许用载荷 P。



解：



（机械类）

求支座反力：

$$\begin{cases} F_A + F_B = P + P \\ P\times1 + P\times3 = F_B\times4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_A = P \\ F_B = P \end{cases}$$

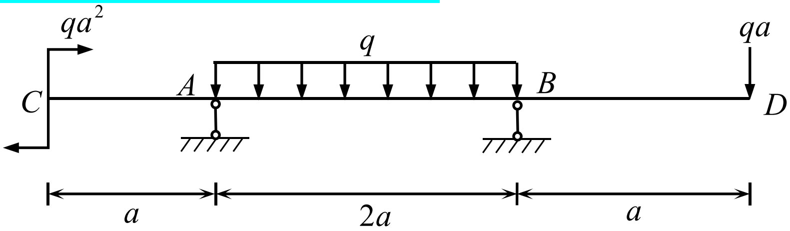
$$\Rightarrow M_{max} = \frac{1}{4}Pl$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{4}Pl}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3Pl}{2bh^2} \le [\sigma]$$

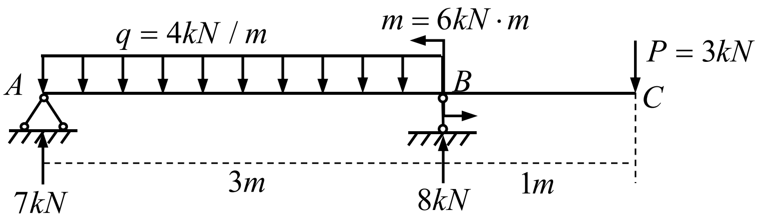
$$P \le \frac{2bh^2[\sigma]}{3l} = \frac{2\times100\times200^2\times10^{-9}\times10\times10^6}{3\times4} = 6.67kN$$

课时五　练习题

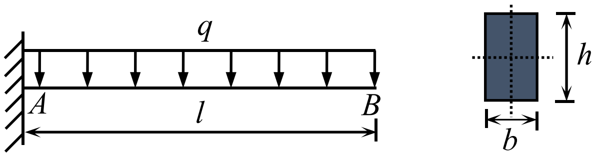
1．画出图示梁的剪力图和弯矩图



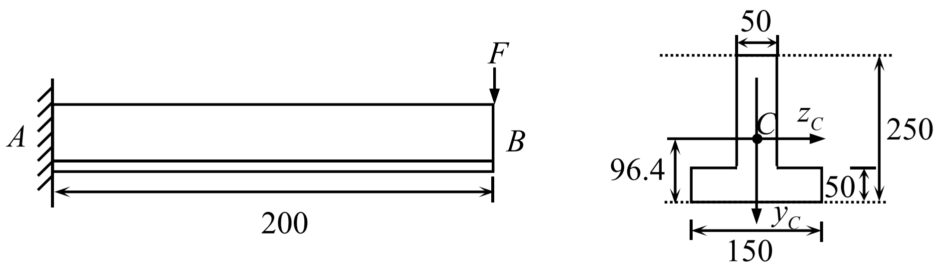
2．画出图示梁的剪力图和弯矩图，约束力大小，方向如图。



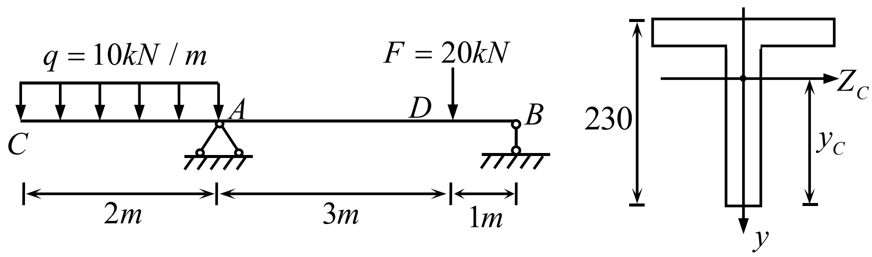
3．下图所示矩形截面悬臂梁，已知 $l=3m$，$b=90mm$，$h=180mm$，若许用应力 $[\sigma_t]=120MP_a$，试求该梁的许可载荷 $[q]$。



4．⊥型截面铸铁悬臂梁，尺寸及载荷如图所示，若材料的拉伸许用应力 $[\sigma_t]=40MP_a$，压缩许用应力 $[\sigma_c]=160MP_a$，截面对形心轴 z_c 的惯性矩为 $10180cm^4$，求许用载荷 $[F]$



5．图示 T 型截面铸铁梁承受载荷作用，已知铸铁的许用拉应力 $[\sigma_t]=40MP_a$，许用压应力 $[\sigma_c]=160MP_a$，$I_{zc}=6.01\times10^7mm^4$，$y_c=157.5mm$，试按正应力条件校核该梁的强度。

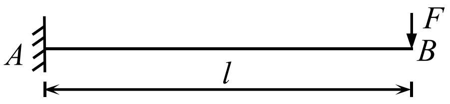


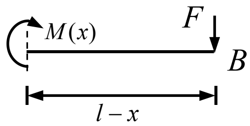
课时六　弯曲变形

考点	重要程度	占分	题型
1. 积分法求变形	★★★	3～8	填空、选择、大题
2. 叠加法求变形	必考	4～10	填空、选择、大题

1. 积分法求变形

题 1. 一悬臂梁受力如图所示，求该梁的挠曲线方程及 B 端的挠度和转角。





转角：

$$\theta(x)=\frac{1}{EI}\int M(x)dx$$

挠度：

$$w(x)=\int\theta(x)dx$$

解：任意 x 位置截断取右侧

由弯矩方程得：$M(x)=F(x-l)$

$$\theta(x)=\frac{1}{EI}\int M(x)dx=\frac{1}{EI}\int F(x-l)dx=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x^2-lx)+C$$

$$w(x)=\int\theta(x)dx=\int\left[\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x^2-lx)+C\right]dx=\frac{F}{EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}lx^2)+Cx+D$$

当 $x=0$ 时，$\theta=0$，$w=0$，解得 $C=0$，$D=0$

故转角：$\theta(x)=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x^2-lx)$

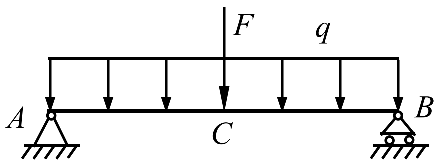
挠度：$w(x)=\frac{F}{EI}(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}lx^2)$

当 $x=l$ 时，$\theta(l)=-\frac{Fl^2}{2EI}$ (↻)　　$w(l)=-\frac{Fl^3}{3EI}$ (↓)

题 2. 积分法求梁弯曲变形时，积分常数通常需要依据_____条件和_____条件求解。

解：边界、连续性。

题 3. 用积分法计算图示梁的弯曲变形时，边界条件是（ ）。



解：$w_A=0$，$w_B=0$。

题 4. 等截面直梁在弯曲变形时，挠曲线的曲率在最大处（ ）一定最大。

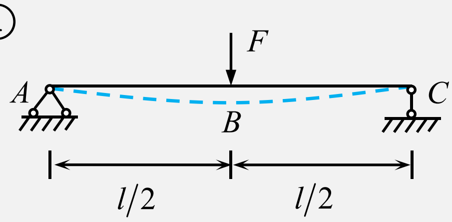
A.挠度　　B.转角　　C.剪力　　D.弯矩

解：D

2. 叠加法求变形

简单载荷作用下的挠度和转角（六个必记）

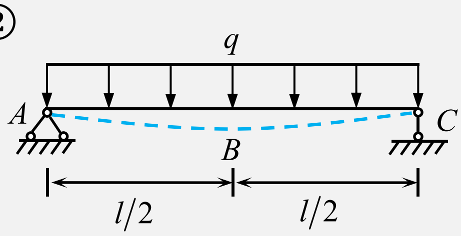
①



$$y_B=\frac{Fl^3}{48EI}(\downarrow)$$

$$\theta_A=\frac{Fl^2}{16EI}(\curvearrowright)\qquad \theta_C=\frac{Fl^2}{16EI}(\curvearrowleft)$$

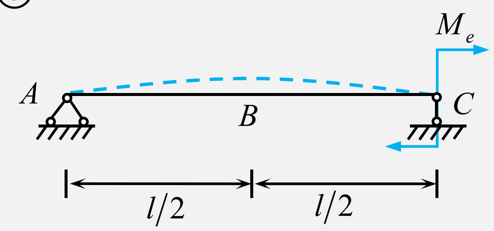
②



$$y_B=\frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

$$\theta_A=\frac{ql^3}{24EI}(\curvearrowright)\qquad \theta_C=\frac{ql^3}{24EI}(\curvearrowleft)$$

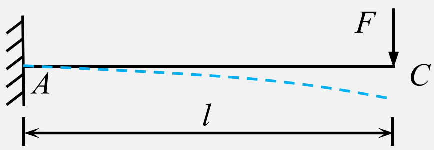
③



$$y_B=\frac{M_el^2}{16EI}(\uparrow)$$

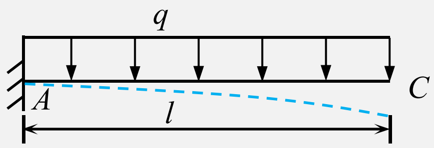
$$\theta_A=\frac{M_el}{6EI}(\curvearrowleft)\qquad \theta_C=\frac{M_el}{3EI}(\curvearrowright)$$

④



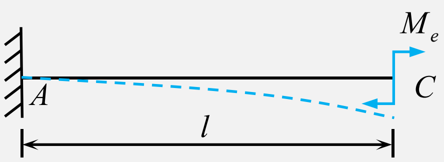
$$y_C=\frac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{Fl^2}{2EI}(\curvearrowright)$$

⑤



$$y_C=\frac{ql^4}{8EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{ql^3}{6EI}(\curvearrowright)$$

⑥

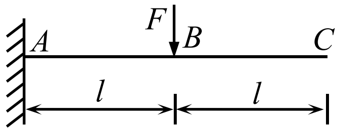


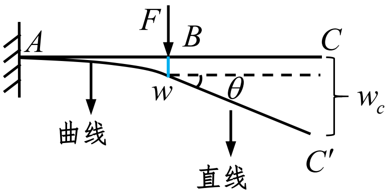
$$y_C=\frac{M_el^2}{2EI}(\downarrow)\qquad \theta_C=\frac{M_el}{EI}(\curvearrowright)$$

题 1. 用叠加法求横梁截面的挠度、转角时，需要满足的条件是______和_______。

解：线弹性、小变形

题 2. 梁 B 点的挠度、转角大小分别是 w 和 θ，则 C 点的挠度大小是_______。

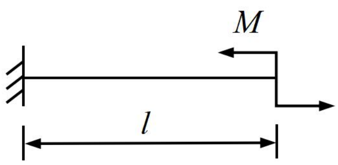




解：$w_C = w + \theta l$

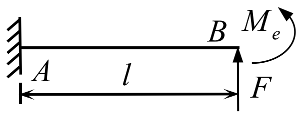
题 3. 图示悬臂梁自由端承受集中力偶。若梁的长度减小一半，则梁的最大挠度是原来的（　）。

$A.\dfrac{1}{2}$　　$B.\dfrac{1}{4}$　　$C.\dfrac{1}{8}$　　$D.\dfrac{1}{16}$

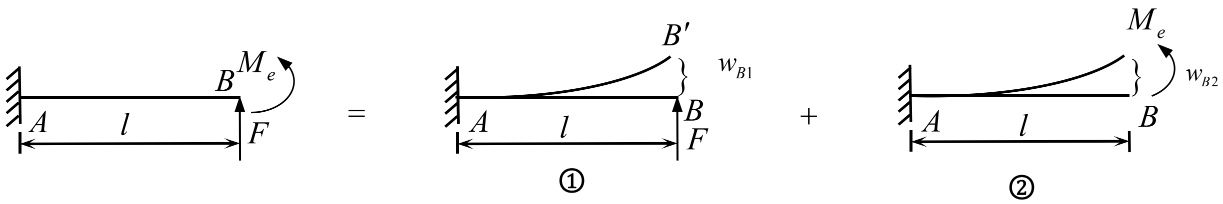


答案：**B**　解：$w_{max} = \dfrac{Ml^2}{2EI}$，$w'_{max} = \dfrac{M(\frac{l}{2})^2}{2EI} = \dfrac{1}{4}\dfrac{Ml^2}{2EI} = \dfrac{1}{4}w_{max}$

题 4. 图示悬臂梁，弯曲刚度为 EI，在自由端承受力 F 和力偶 M_e。若 $w_B = 0$，试求 F 和 M_e 的关系，并求此时的 θ_B。



解：



$$w_B = w_{B1} + w_{B2} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{M_e l^2}{2EI} = \frac{2Fl^3 + 3M_e l^2}{6EI} = 0 \quad \Rightarrow M_e = -\frac{2}{3}Fl$$

$$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{M_e l}{EI} = \frac{Fl^2}{2EI} - \frac{2Fl^2}{3EI} = -\frac{Fl^2}{6EI}$$

课时六　练习题

1. 度量梁变形后横截面位移的两个基本量为：_____和_____。

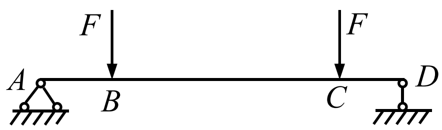
2. 等截面直梁在弯曲变形时，挠曲线曲率最大值所在截面的（　　）

*A.*挠度最大　　*B.*转角最大　　*C.*剪力最大　　*D.*弯矩最大

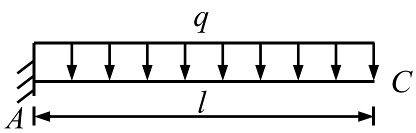
3. 图示结构，用积分法计算 AD 梁的位移时，梁的位移边界条件为（　　）

$A.\ w_A = 0, \theta_D = 0$　　$B.\ \theta_A = 0, w_D = 0$

$C.\ \theta_A = 0, \theta_D = 0$　　$D.\ w_A = 0, w_D = 0$



4. 如图所示，一悬臂梁梁长为 l，作用有均布载荷 q，梁的刚度为 EI，求该梁的挠度曲线方程，以及 C 端的挠度和转角。

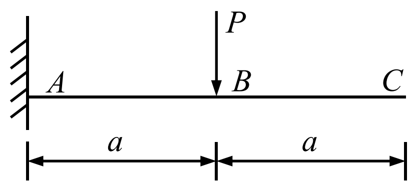


5. 应用叠加原理求梁变形时的条件（　　）

*A.*必须是小变形的梁　　*B.*必须是静定的梁

*C.*必须是等截面的梁　　*D.*必须是平面弯曲的梁

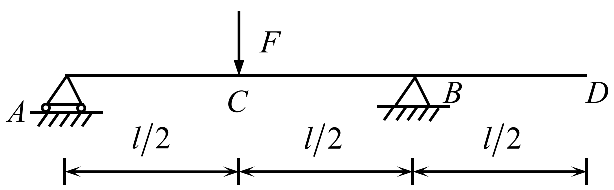
6. 如图所示悬臂梁 AC，如果已知 B 截面的转角和挠度，则 C 截面处的挠度值是_______。



7. 一外伸梁受力如图所示，抗弯刚度为 EI。已知 A 截面的转角 $\theta_A = -\dfrac{Fl^2}{16EI}$，则截面 D 的挠度为（　　）。

$A.\ w_D = \dfrac{Fl^3}{16EI}$　　$B.\ w_D = -\dfrac{Fl^3}{16EI}$

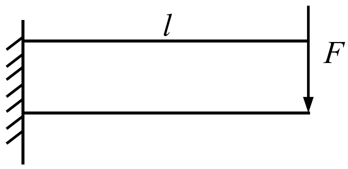
$C.\ w_D = \dfrac{Fl^3}{32EI}$　　$D.\ w_D = -\dfrac{Fl^3}{32EI}$



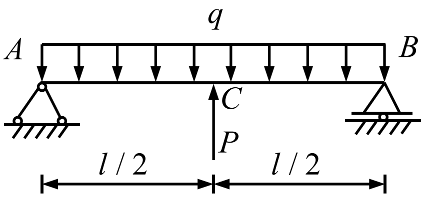
8． 如图所示悬臂梁自由端挠度 $y=\dfrac{Fl^3}{3EI}$，若杆长减少一半，则自由端挠度为（　　）

A.$\dfrac{y}{8}$　　　　B.$\dfrac{y}{2}$

C.$2y$　　　　D.$8y$



9． 求图示梁 C 点挠度为零时 p 与 q 的关系。



课时七 应力状态分析

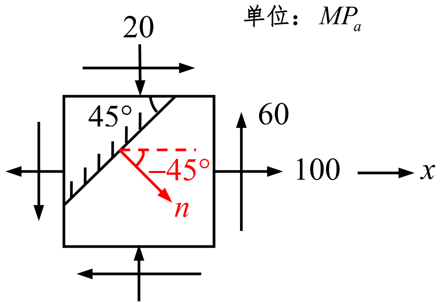
考点	重要程度	占分	常见题型
1. 斜截面上应力	必考	8 ~ 12	大题
2. 主应力与最大切应力			
3. 强度理论	★★★★	0 ~ 3	填空、大题

1. 斜截面上应力

正应力：$\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$ 切应力：$\tau_\alpha = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$

题 1. 已知图示平面应力状态的单元体，试求指定斜截面上的应力 $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$。

单位：MP_a



解：$\sigma_x = 100MP_a$ $\sigma_y = -20MP_a$ $\tau_x = -60MP_a$ $\alpha = -45°$

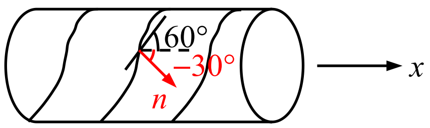
① $\sigma_{-45°} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$

$= \dfrac{100-20}{2} + \dfrac{100-(-20)}{2}\cos(-90°) + 60\sin(-90°) = -20\,MP_a$

② $\tau_{-45°} = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$

$= \dfrac{100-(-20)}{2}\sin(-90°) - 60\cos(-90°) = -60\,MP_a$

题 2. 如图所示，以绕带焊接成的封闭圆管，焊缝为螺旋线。管的内径为 $d = 300mm$，壁厚为 $\delta = 1mm$，内压 $P = 0.5MP_a$。求沿焊缝斜面上的正应力和切应力。



封闭管内压公式

$\sigma_x = \dfrac{Pd}{4\delta}$ $\sigma_y = \dfrac{Pd}{2\delta}$

解：$\sigma_x = \dfrac{Pd}{4\delta} = \dfrac{0.5\times 300}{4\times 1} = 37.5MP_a$ $\sigma_y = \dfrac{Pd}{2\delta} = \dfrac{0.5\times 300}{2\times 1} = 75MP_a$ $\tau_x = 0$ $\alpha = -30°$

$\sigma_{-30°} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$

$= \dfrac{37.5+75}{2} + \dfrac{37.5-75}{2}\times\cos(-60°) - 0 = 46.875\,MP_a$

$\tau_{-30°} = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = \dfrac{37.5-75}{2}\sin(-60°) + 0 = 16.24\,MP_a$

2. 主应力与最大切应力

主应力、方位角、最大切应力公式：

主应力：$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}$　　方位角：$\tan 2\alpha=\dfrac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$

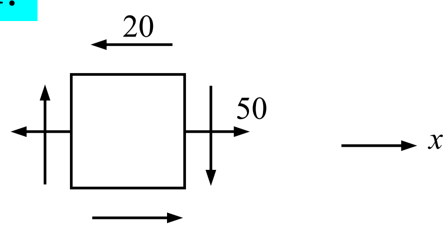
最大切应力：$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

题 1. 已知应力状态如图所示，图中应力单位均为 MP_a，求：

（1）主应力大小，主平面位置；

（2）在单元体上绘出主平面位置及主应力方向；

（3）面内最大切应力。



解：$\sigma_x=50MP_a\quad \sigma_y=0\quad \tau_x=20MP_a$

（1）$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x{}^2}=\dfrac{50+0}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{50-0}{2}\right)^2+20^2}=\begin{cases}57.02MP_a\\-7.02MP_a\end{cases}$

$\sigma_1=57.02MP_a\quad \sigma_2=0MP_a\quad \sigma_3=-7.02MP_a$

$\tan 2\alpha=\dfrac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\dfrac{-2\times 20}{50}=-\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \alpha_1=-19.3°\quad \alpha_2=70.7°$

①求出主应力：$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \sigma_z$

②主应力排序：$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$

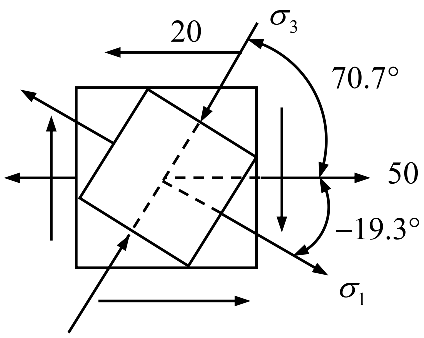
③求方位角

④作图

τ_x 为正，负的角度对应 $\sigma_{\max}$（不为 0）；

τ_x 为负，正的角度对应 $\sigma_{\max}$（不为 0）。

（2）作图：

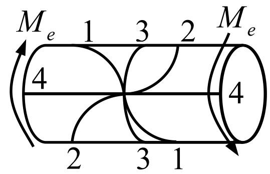


（3）最大切应力：$\tau_{\max}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\dfrac{57.02-(-7.02)}{2}MP_a=32.02MP_a$

题 2. 进行应力分析时，单元体上剪切应力等于0的面称为______，其上正应力称为_____。

解 ：主平面、主应力

题 3. 图示低碳钢圆轴，两端受扭。关于圆轴的破坏截面，正确的是（　）。



$A.$沿纵横面4-4破坏　　$B.$ 沿螺旋面1-1破坏

$C.$ 沿横截面3-3破坏　　$D.$ 沿螺旋面2-2破坏

解：C

题 4. 铸铁试件受扭破坏（　）。

$A.$沿45°斜截面断裂，由最大拉应力引起　　$B.$沿45°斜截面断裂，由最大切应力引起

$C.$沿横截面断裂，由最大切应力引起　$D.$沿横截面断裂，由最大拉应力引起

解：A

3. 强度理论

第一类强度理论（脆性材料）

①第一强度理论（最大拉应力理论）：$\sigma_{r1}=\sigma_1$

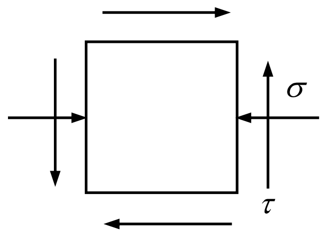
②第二强度理论（最大伸长线应变理论）：$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$

第二类强度理论（塑性材料）

③第三强度理论（最大切应力理论）：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$

④第四强度理论（形状改变比能理论）：$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}$

题 1.如图所示单元体，$\sigma=-8MP_a,\tau=-3MP_a$，则该单元体的主应力分别为_____和_____；用第四强度理论计算强度时的相当应力 $\sigma_{r4}=$________。



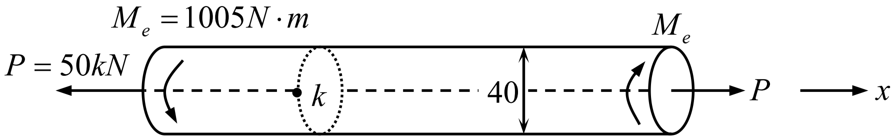
解：$\sigma_x=-8MP_a\quad \sigma_y=0\quad \tau_x=-3MP_a$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^{\ 2}}=-4\pm 5=\begin{cases}1\ \ MP_a\\ -9MP_a\end{cases}$$

$$\sigma_1=1MP_a\quad \sigma_2=0MP_a\quad \sigma_3=-9MP_a$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}=\sqrt{91}MP_a$$

题 2. 圆轴受力如图，试求（1）圆轴表面 k 点的主应力；（2）k 点的第三强度理论相当应力。



解：(1) 由截面法得 k 点：$F_N = 50kN \quad T = -1005N \cdot m$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{4F_N}{\pi d^2}$$

$$\tau = \frac{T}{W_P} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma_x = \frac{4F_N}{\pi d^2} = \frac{4 \times 50 \times 10^3}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 39.79MP_a \qquad \sigma_y = 0$$

$$\tau_x = \frac{T}{W_P} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{-16 \times 1005}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^3} = -79.98MP_a$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x{}^2} = \frac{39.79 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{39.79 - 0}{2}\right)^2 + 79.98^2} = \begin{cases} 102.31MP_a \\ -62.52MP_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 102.31MP_a \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -62.52MP_a$$

(2) 第三强度理论：$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 164.83MP_a$

课时七　练习题

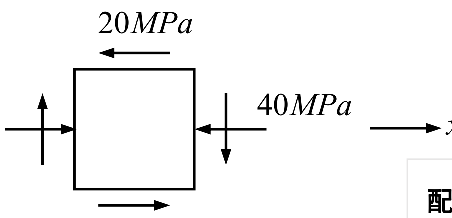
1. 用单元体表示点的应力状态，在主平面上（　　）。

A.正应力一定最大　B.正应力一定为零

C.切应力一定最大　D.切应力一定为零

2. 适用于脆性断裂的强度理论分别为________和_________，适用于塑性屈服的强度理论分别为_______和_________。

3. 图示单元体所描述的应力状态为平面应力状态，单元体第一主应力 $\sigma_1 =$ _____ MP_a，最大切应力 $\tau_{\max} =$ _____ MP_a。

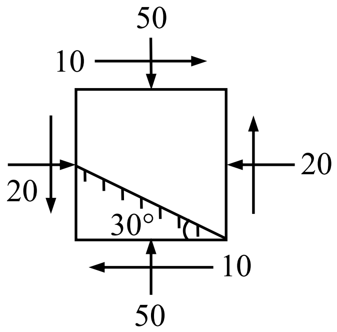


4. 某单元体如图所示，试用解析法求：

（1）指定斜截面上的应力；

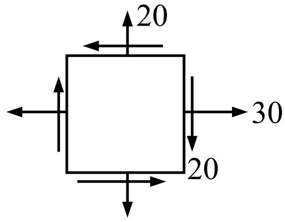
（2）主应力的数值；

（3）在单元体上绘出主应力的位置及主应力的方向。

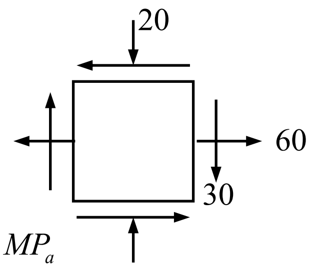


5. 已知某构件危险点处应力状态如图所示，图中应力单位均为 MP_a，求：

（1）主应力的大小及主平面位置；
（2）在单元体上绘出主应力方向；
（3）最大剪应力；
（4）若材料的许用应力为 $80MP_a$，试用第四强度理论校核强度。



6. 构件为钢制件，其危险点应力状态如图所示，$\sigma_x = 60MP_a$，$\sigma_y = -20MP_a$，$\tau_x = 30MP_a$，试按最大切应力理论计算该种情形下的相当应力 σ_{r3}。



单位：MP_a

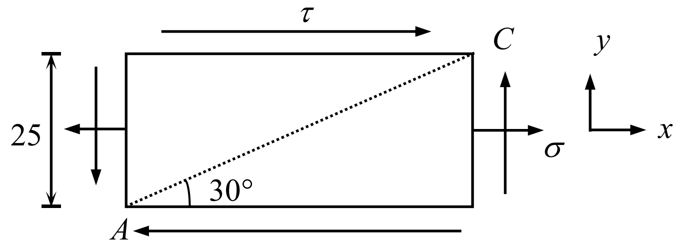
课时八　应变状态分析

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 广义胡克定律	★★★★★	5～10	大题

1. 广义胡克定律

$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}\left[\sigma_\alpha - \mu(\sigma_{\alpha+90^0} + \sigma_z)\right]$（任意角度的应变）

题 1. 从钢构件内取出一单元体，已知 $\sigma = 30MP_a, \tau = 15MP_a$，材料的弹性模量和泊松比分别为 $E = 200GP_a, \mu = 0.30$，试求对角线 AC 的长度改变 Δl。



解: (1) 求给定方向及垂直方向的应力

$\sigma_x = 30MP_a$, $\sigma_y = 0MP_a$, $\tau_x = -15MP_a$

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \frac{30}{2} + \frac{30}{2}\cos 60^\circ - (-15)\sin 60^\circ = 35.49MP_a$$

$$\sigma_{120^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \frac{30}{2} + \frac{30}{2}\cos 240^\circ - (-15)\sin 240^\circ = -5.49MP_a$$

$\sigma_z = 0$

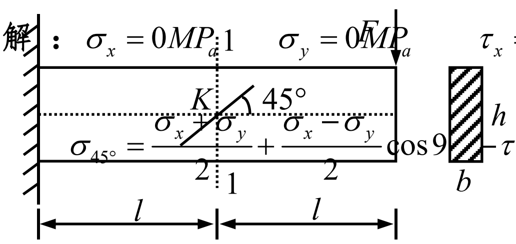
(2) 求给定方位的应变

$$\varepsilon_{30^\circ} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{30^\circ} - \mu(\sigma_{120^\circ} + \sigma_z)\right] = \frac{1}{200\times 10^9}\times\left[35.49 - 0.3\times(-5.49)\right]\times 10^6 \approx 0.1857\times 10^{-3}$$

(3) 求对角线 AC 的长度改变 Δl

$$\Delta l_{AC} = l_{AC}\cdot\varepsilon_{30^\circ} = \frac{25}{\sin 30^\circ}\times 0.1875\times 10^{-3} = 9.285\times 10^{-3}mm$$

题 2. 矩形截面悬臂梁尺寸如图所示，其弹性模量 E，泊松比 μ 均已知，自由端受集中载荷 F 作用。试求悬臂梁外表面中间位置一点 K 点与水平成 45° 方向的线应变 ε_{45°。



解：$\sigma_x = 0MP_a$　$\sigma_y = 0MP_a$　$\tau_x = \frac{3}{2}\frac{F_s}{A} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 90^\circ - \tau_x \sin 90^\circ = 0 + 0 - \frac{3}{2}\frac{F}{bh} = -\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

$$\sigma_{135^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 270^\circ-\tau_x\sin 270^\circ=0+0+\frac{3}{2}\frac{F}{bh}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

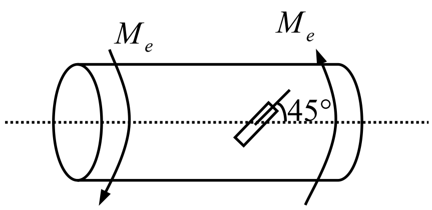
$$\sigma_z=0$$

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{45^\circ}-\mu(\sigma_{135^\circ}+\sigma_z)\right]=\frac{1}{E}\left(-\frac{3}{2}\frac{F}{bh}-\mu\cdot\frac{3}{2}\frac{F}{bh}\right)=\frac{-3(1+\mu)F}{2Ebh}$$

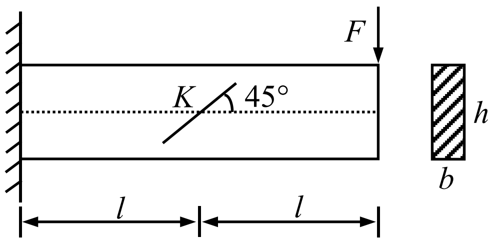
课时八　练习题

1. 图示一受扭圆截面杆，左右两侧面作用外力偶矩 M_e，材料的弹性模量 E、泊松比 μ 已知，杆的直径为 d，求其前侧表面与轴线成 45° 方向的线应变 ε_{45°。

2. 矩形截面悬臂梁尺寸如图所示，其弹性模量为 E，泊松比为 μ，现测得梁外表面中间位置一点 K 点与水平方向成 45° 的线应变为 ε_{45°，试求作用于自由端的集中力 F。



题一



题二

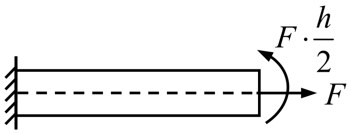
课时九 组合变形

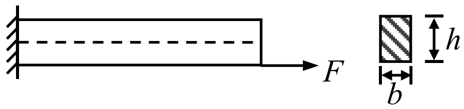
考点	重要程度	占分	常见题型
1. 拉（压）弯组合变形	★★★★	8～10	大题
2. 拉扭组合变形	★★★	8～10	大题
3. 弯扭组合变形	★★★★★	8～12	大题

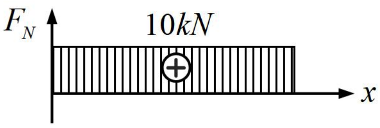
1. 拉（压）弯组合变形

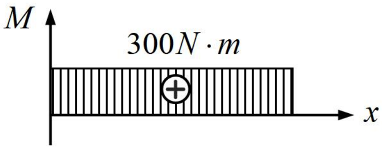
题 1. 如图所示矩形截面悬臂梁，$F=10kN, b=40mm, h=60mm, [\sigma]=20MPa$，试校核该梁的强度。

解：









(机械类)

解题步骤
1. 判断组合类型
2. 画出内力图
3. 找出危险点
4. 代公式校核

危险点在悬臂梁下侧

$$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W_z}=\frac{F_N}{bh}+\frac{6M}{bh^2}$$

$$=\frac{10\times10^3}{40\times10^{-3}\times60\times10^{-3}}+\frac{6\times300}{40\times10^{-3}\times\left(60\times10^{-3}\right)^2}$$

$$=16.67MPa<[\sigma]$$

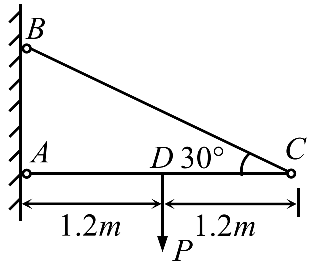
$\Rightarrow$ 该梁满足强度条件。

拉压正应力：$\sigma=\frac{F_N}{A}$

弯曲正应力：$\sigma=\frac{M}{W_z}$

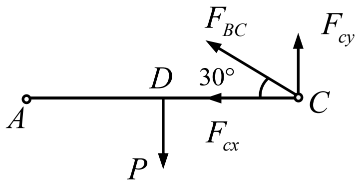
拉弯应力：$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W_z}$

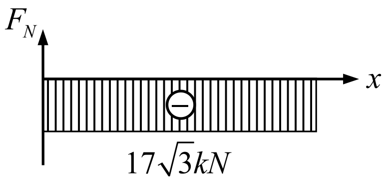
题 2.（压弯）悬臂吊车如图所示。横梁用 20a 工字钢制成。其截面系数 $W_Z=237cm^3$，横截面面积 $A=35.5cm^2$，荷载 $P=34kN$，横梁材料的许用应力 $[\sigma]=125MPa$。试校核该横梁 AC 的强度。

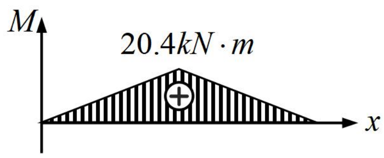


解：设 BC 杆的内力为 F_{BC}

$$\begin{cases} F_{cy}\cdot 2l=P\cdot l \\ F_{cy}=F_{cx}\tan 30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{cx}=17\sqrt{3}kN \\ F_{cy}=17kN \end{cases}$$







(机械类)

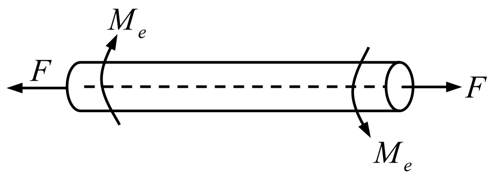
D 截面的最上侧为危险点

$$\sigma=\frac{|F_N|}{A}+\frac{M_{\max}}{W_Z}=\frac{17\sqrt{3}\times10^3}{35.5\times10^{-4}}+\frac{20.4\times10^3}{237\times10^{-6}}=94.37MPa<[\sigma]$$

$\Rightarrow AC$ 满足强度条件

2. 拉扭组合变形

题 1. 如图所示圆轴，直径 $d = 60mm$，轴的两端作用有 $M_e = 4kN \cdot m$，$F = 10kN$，材料的许用应力 $[\sigma] = 200MPa$，试用第三强度理论校核轴的强度。



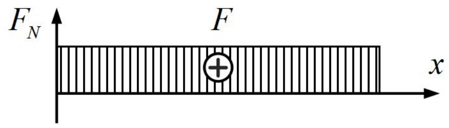
拉压正应力：$\sigma = \dfrac{F_N}{A}$

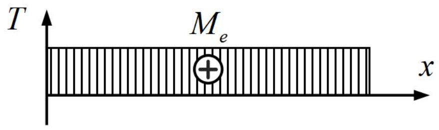
扭转切应力：$\tau_x = \dfrac{T}{W_P}$

第三强度理论：

$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}$

解：由截面法得 $F_N = F$，$T = M_e$





危险点为轴的最外层：

$$\sigma_x = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{\pi \times \left(60 \times 10^{-3}\right)^2} = 3.54MPa$$

$$\tau_x = \frac{T}{W_P} = \frac{M_e}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{16M_e}{\pi d^3} = \frac{16 \times 4 \times 10^3}{\pi \times \left(60 \times 10^{-3}\right)^3} = 94.3MPa$$

第三强度理论：$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} = \sqrt{3.54^2 + 4 \times 94.31^2} = 188.65MPa < 200MPa$

该轴满足强度条件

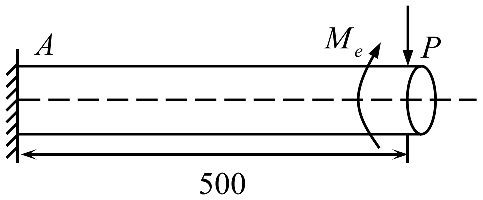
3. 弯扭组合变形

题 1. 如图钢制实心圆截面杆受横向力 P 及扭转力偶矩 M_e 共同作用，且 $P=3kN$，$M_e=2kN\cdot m$，已知杆直径 $d=60mm$，材料的许用应力 $[\sigma]=160MPa$，试求：

1）作出杆件的内力图；

2）用单元体表示杆件固定端截面顶端 A 点的应力状态；

3）校核钢杆的强度。



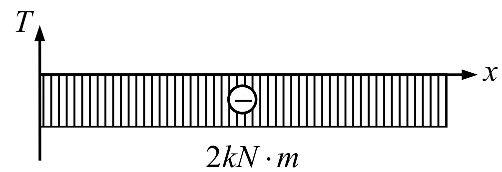
扭转切应力：$\tau_x=\dfrac{T}{W_P}$

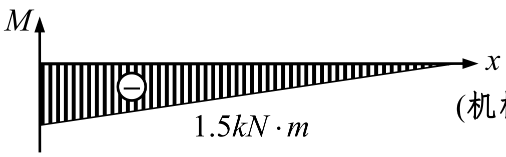
弯曲正应力：$\sigma_x=\dfrac{M}{W_Z}$

第三强度理论：

$\sigma_{r3}=\sqrt{{\sigma_x}^2+4{\tau_x}^2}$

解：（1）



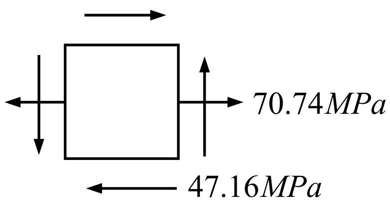


(机械类)

（2）A 点即为危险点

$$\sigma_x=\frac{|M_{\max}|}{W_Z}=\frac{32|M_{\max}|}{\pi d^3}=\frac{32\times1.5\times10^3}{\pi\times(60\times10^{-3})^3}=70.74MPa$$

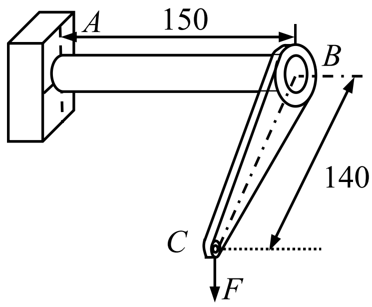
$$\tau_x=\frac{T}{W_P}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{-16\times2\times10^3}{\pi\times(60\times10^{-3})^3}=-47.16MPa$$



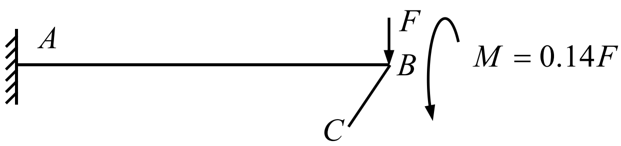
（3）$\sigma_{r3}=\sqrt{{\sigma_x}^2+4{\tau_x}^2}=\sqrt{70.74^2+4\times(-47.16)^2}=117.9\,MPa<[\sigma]$

满足强度条件

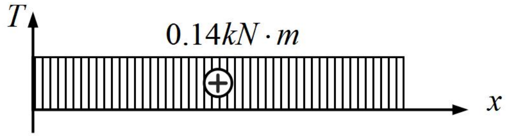
题 2. 如图所示，试按第三强度理论设计轴 AB 的直径。已知载荷 $F=1kN$，许用应力 $[\sigma]$=160MP，画出 AB 轴的受力图及内力图

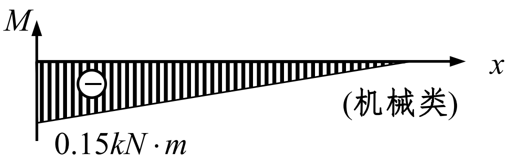


解：（1）



（2）





扭转切应力：$\tau_x=\dfrac{T}{W_P}$

弯曲正应力：$\sigma_x=\dfrac{M}{W_Z}$

第三强度理论：

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}=\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi d^3}$$

（3）$\sigma_{r3}=\dfrac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}=\dfrac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi d^3}\le[\sigma]$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2+T^2}}{\pi[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{0.15^2+0.14^2}\times10^3}{\pi\times160\times10^6}}=0.0236m=23.6mm$$

$$d=23.6mm$$

步骤：

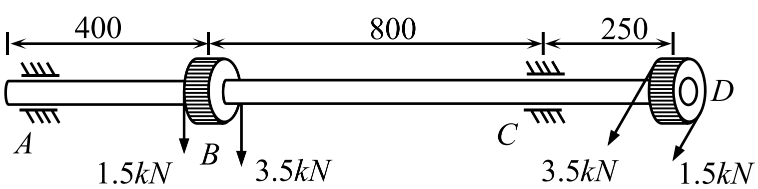
①将力向截面形心简化，生成一个力和一个力偶

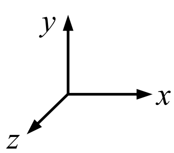
②作出内力图

③用 $M_{\max}=\sqrt{{M_y}^2+{M_z}^2}$ 求 $M_{\max}$

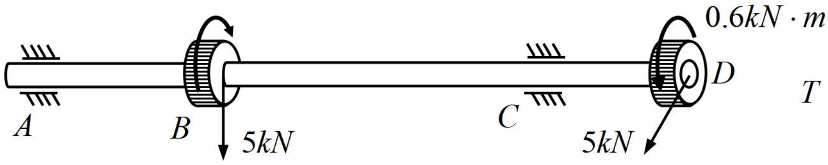
④用 $\sigma_{r,3}=\dfrac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z}\le[\sigma]$ 反求 d

题 3. 如图所示传动轴，轮 B 带的张力铅直向下，轮 D 带的张力沿水平方向，B、D 两轮直径均为 $D=600mm$，轴材料的许用应力 $[\sigma]=80MPa$。试按第三强度理论确定轴的直径 d。



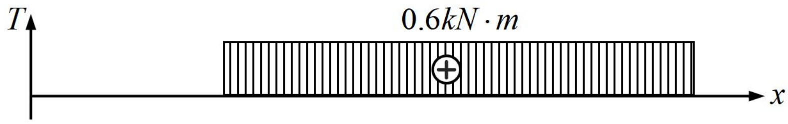


解：将力向截面形心进行简化

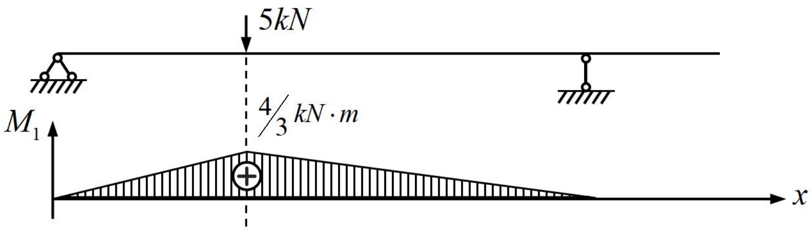


$$T=\left(3.5-1.5\right)\frac{0.6}{2}=0.6kN\cdot m$$

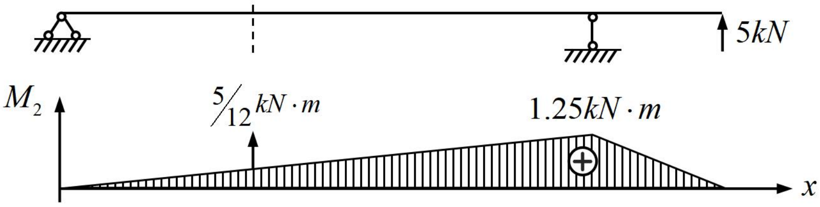
作内力图：①扭矩图



②xoy平面内：



③xoz平面内：



求最大弯矩$M_{\max}$

$$M_B=\sqrt{M_{1,B}{}^2+M_{2,B}{}^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=1.397kN\cdot m$$

$$M_C=1.25kN\cdot m \qquad \Rightarrow M_{\max}=1.397kN\cdot m$$

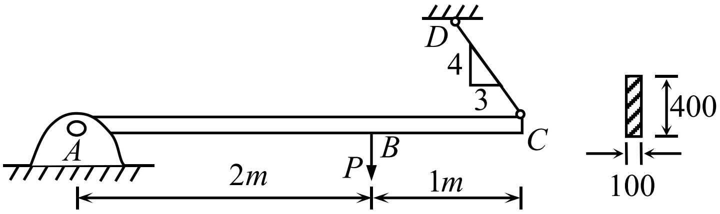
求直径d

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_{\max}{}^2+T_{\max}{}^2}}{W_Z}=\frac{32\sqrt{M_{\max}{}^2+T_{\max}{}^2}}{\pi d^3}\le\left[\sigma\right]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32\times\sqrt{1.397^2+0.6^2}\times10^3}{\pi\times80\times10^6}}=0.0578m=57.8mm$$

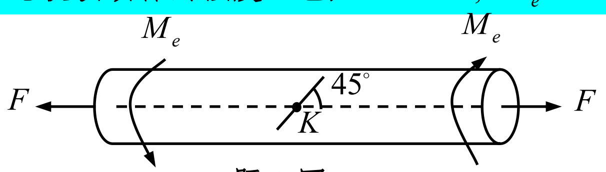
课时九　练习题

1. 已知矩形梁的尺寸为$100mm \times 400mm$, A 点铰支座，梁 ABC 由 CD 拉住，梁的许用应力为 $20MPa$，求竖向力 P 的最大值。

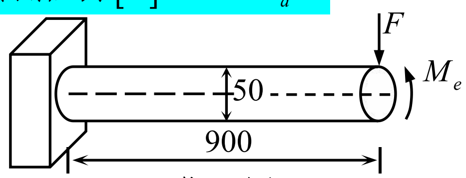


2. 如图所示的圆轴，直径为 d，弹性模量为 E，泊松比为 μ，承受轴向拉力 F 和扭力偶矩 $M_e = Fd$ 的作用，在轴表面 K 处测得与轴线成$45°$方向的正应变 $\varepsilon_{45°}$，试求拉力 F。

3. 圆截面钢杆尺寸如图所示(单位mm)，承受横向载荷 F 和扭力偶矩 M_e 作用。试按第三强度理论校核该杆的强度。已知 $F = 1kN$, $M_e = 1.2kN \cdot m$，许用应力$[\sigma] = 160MP_a$。



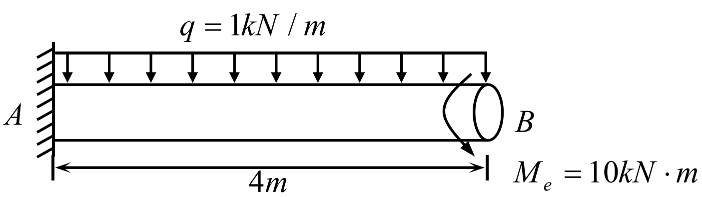
题 2 图



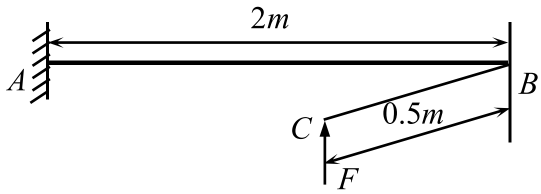
题 3 图

4.图示圆形截面钢杆,已知杆的直径 $d = 100mm$, $[\sigma] = 160MPa$,试按第三强度理论校核其强度。

5. 图示钢制圆杆 AB 的横截面积为 $A = 80 \times 10^{-4} m^2$，抗弯截面系数 $W = 100 \times 10^{-6} m^2$，材料的许用应力$[\sigma] = 180MPa, F = 8kN$，用第三强度理论校核强度。

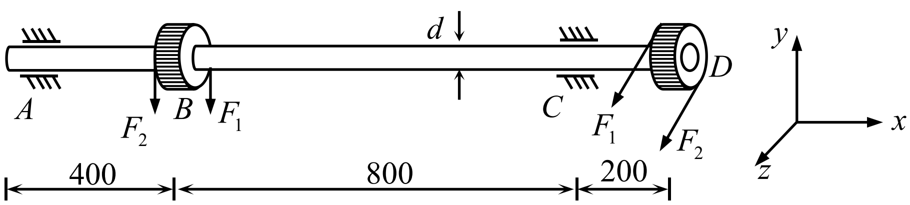


题 4 图



题 5 图

6. 如图所示传动轴，直径 $d = 50mm$。D 轮上的皮带是水平的，B 轮上的皮带是铅直的。若两轮的直径均为 $500mm$，且 $F_1 = 4kN$, $F_2 = 2kN$, $[\sigma] = 160MPa$，试用第三强度理论进行强度校核。



课时十　压杆稳定

考点	重要程度	占分	题型
1. 临界压力	★★★★	3～5	选择、填空
2. 稳定性计算	必考	8～12	大题

1. 基础知识

临界压力：$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

变形公式：$F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$　（适用于长细杆（大柔度杆））

1）$F\le F_{cr}$ 时，杆件稳定；$F>F_{cr}$ 时，杆件失稳

2）μ：压杆的长度因数（杆端约束情况）

支持方式	两端铰支	一端自由 另一端固定	两端固定	一端铰支 另一端固定
μ	1.0	2.0	0.5	0.7

3）E：弹性模量（材料特性）　I：中性轴惯性矩（截面尺寸）　l：杆长

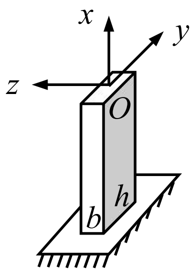
λ：柔度系数　A：横截面积

题 1. 影响细长压杆稳定性的主要因素有__________、__________、__________、__________。

解：材料特性、截面尺寸、杆端约束情况、杆长

题 2. 图示压杆，一端固定一端自由，横截面为矩形，且 $h>b$，压杆失稳时首先__________

A. 在yoz面内弯曲　　*B.* 在xoy面内弯曲　　*C.* 在xoz面内弯曲



答案：*C*

由 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 知，临界压力与 I 成正比，故压杆首先在惯性矩小的平面内失稳。

题 3. 材料和柔韧度都相同的两根压杆（　）

$A.$临界应力一定相等，临界压力不一定相等

$B.$临界应力不一定相等，临界压力一定相等

$C.$临界应力和压力都一定相等

$D.$临界应力和压力都不一定相等

答案：A.

由 $F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$ 知，当 E、λ 相同时，σ_{cr} 相同。但若截面面积 A 不同时，F_{cr} 则不同。

2. 稳定性计算

稳定性解题步骤：

1) 惯性半径：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}$

2) 柔度系数：$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$

3) 计算：$\lambda_s=\dfrac{a-\sigma_s}{b}$、$\lambda_p=\pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_p}}$

常见横截面惯性半径：

圆截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\dfrac{d}{4}$

圆环截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi(D^4-d^4)}{\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)}}=\dfrac{\sqrt{D^2+d^2}}{4}$

矩形截面：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}}=\dfrac{h}{\sqrt{12}}$（$h$ 为较小边长）

4) 判别类型，计算临界压力 F_{cr}

① $\lambda\le\lambda_s$ 小柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=\sigma_s A$

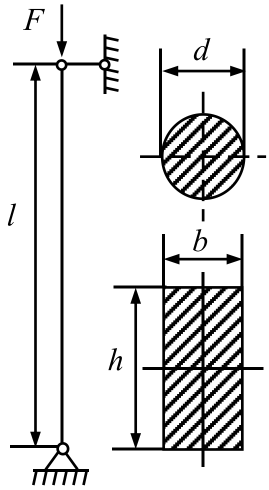
② $\lambda_s<\lambda<\lambda_p$ 中柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=(a-b\lambda)A$

③ $\lambda\ge\lambda_p$ 大柔度杆 $\Rightarrow F_{cr}=\sigma_{cr}A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}A$

题 1. 如图，两端球形铰支细长压杆，弹性模量 $E=200GPa$。试用欧拉公式计算其临界载荷。

（1）圆形截面：$d=25mm, l=1.1m$

（2）矩形截面：$h=2b=40mm, l=1.0m$



解：（1）：1）惯性半径 i

$$i=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\frac{d}{4}$$

2）柔度系数 λ

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{4\mu l}{d}=\frac{4\times1\times1.1}{25\times10^{-3}}=176$$

3）临界力 F_{cr}

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^3Ed^2}{4\lambda^2}=\frac{\pi^3\times200\times10^9\times(25\times10^{-3})^2}{4\times176^2}=31.28kN$$

（2）：1）惯性半径 i

$$i=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}hb^3}{bh}}=\frac{b}{\sqrt{12}}$$

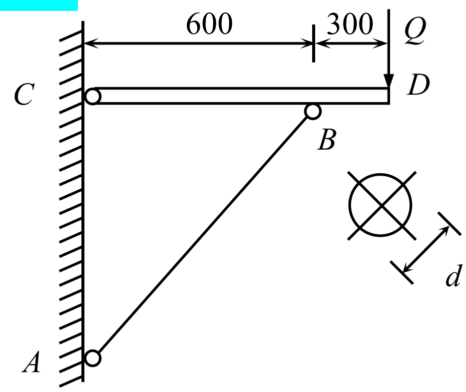
2）柔度系数 λ

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\sqrt{12}\mu l}{b}=\frac{\sqrt{12}\times1\times1.0}{20\times10^{-3}}=173$$

3）临界力 F_{cr}

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{173^2}\times20\times40\times10^{-6}=52.76kN$$

题 2. 题中托架 AB 杆的直径 $d=20mm$，长度 $l=1000mm$，两端可视为铰支，材料为 $Q235$ 钢，$E=200GPa$，$\sigma_p=200MPa$，$\sigma_s=235MPa$，其直线经验公式为 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$。若 $Q=4KN$，AB 杆的稳定安全系数 $n_{st}=2$，则 AB 杆是否安全。



解：①惯性半径：$i=\sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{64}\pi d^4}{\frac{1}{4}\pi d^2}}=\dfrac{d}{4}$

②柔度系数：$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{4\mu l}{d}=\dfrac{4\times1\times1}{20\times10^{-3}}=200$

③由 $\sigma_{cr}=a-b\lambda=304-1.12\lambda \quad \Rightarrow a=304, b=1.12$

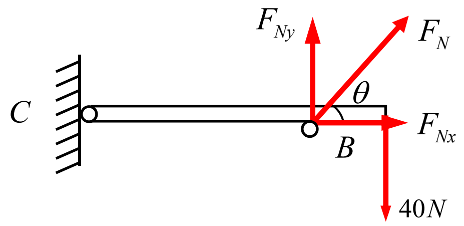
$$\lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{304-235}{1.12}=61.6 \qquad \lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\pi\times\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}}=99.35$$

④判别类型，计算临界压力 F_{cr} $\qquad \lambda>\lambda_p \Rightarrow$ 此杆为大柔度杆

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^3Ed^2}{4\lambda^2}=\frac{\pi^3\times200\times10^9\times(20\times10^{-3})^2}{4\times200^2}=15500N$$

$$\Rightarrow[F_{cr}]=\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{15500}{2}=7.75KN$$

⑤求 AB 的内力



$$\frac{4}{5}F_N\times600=4\times900 \qquad \Rightarrow F_N=7.5KN$$

$$F_N<[F_{cr}] \qquad \Rightarrow AB杆安全$$

$$F_{Ny}=F_N\sin\theta=\frac{4}{5}F_N$$

课时十　练习题

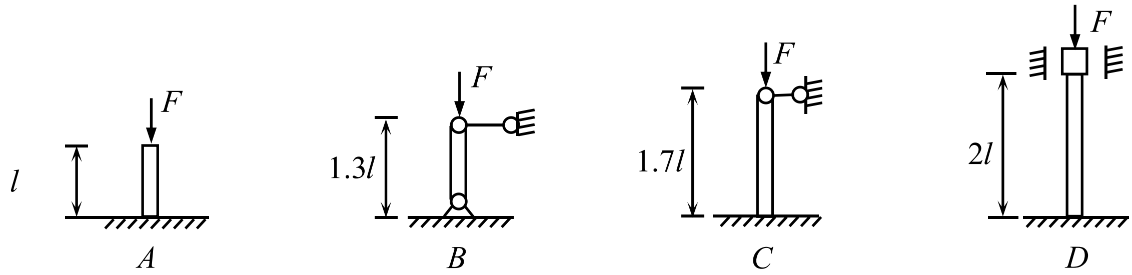
1. 压杆的临界力与________、________和________等因素有关。

2. <判断题>细长压杆总是在惯性矩较小的方向最先失稳（　　）。

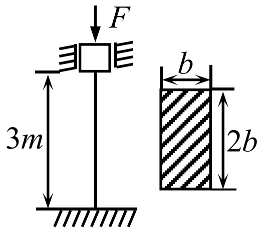
3. 一圆截面的细长压杆，保持其它条件不变，若仅将压杆直径缩小一半，则临界力变为原来

的________倍；若仅将压杆长度缩小一半，则临界力变为原来的_______倍。

4. 直径、材料相同，而约束不同的圆截面细长压杆，哪个临界力最大（　　）



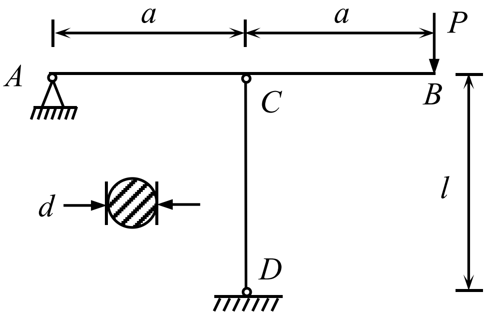
5. 如图所示，两端固定的压杆，材料为 $Q235$ 钢，$b=40mm$, $E=200GPa$，$\sigma_p=200MPa$。试计算图示矩形截面压杆的临界力。



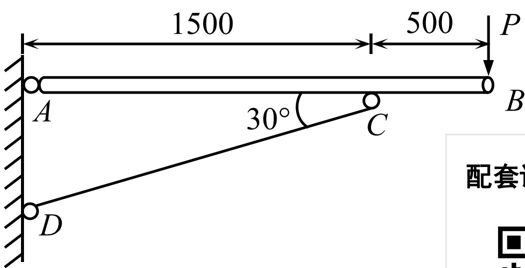
6. 图示结构中，CD 为圆形截面钢杆，已知 $l=800mm$、$d=20mm$，钢材的弹性模量 $E=2\times10^5 MPa$，比例极限 $\sigma_p=200MPa$，$\lambda_p=100$，$\lambda_s=60$，稳定安全系数 $n_{st}=3$，经验公式 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda(MPa)$，试求：

（1）计算 CD 杆的柔度；

（2）从 CD 杆的稳定性角度考虑求该结构的容许荷载 $[P]$。



7. 图示所示，AB 为刚性梁。CD 为钢管，其外径 $D=4cm$，内径 $d=3cm$，长度 $l=1m$，弹性模量 $E=200GPa$，直线公式中对应的 $a=300MPa$，$b=1.12MPa$，用欧拉公式的下限柔度值 $\lambda_1=100$（即 $\lambda_p=100$），应用直线公式的下限柔度值 $\lambda_2=60$（即 $\lambda_s=60$），规定安全因数 $n_{st}=4$，试按压杆 CD 的稳定条件求许可荷载 P 的最大值。

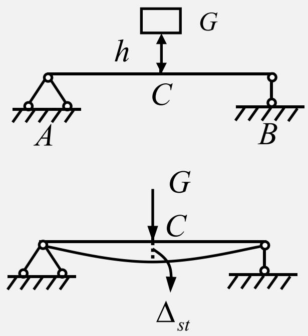


课时十一　冲击载荷与交变应力

考点	重要程度	占分	题型
1. 冲击载荷	★★★	3～10	填空、大题
2. 交变应力	★★	0～3	填空

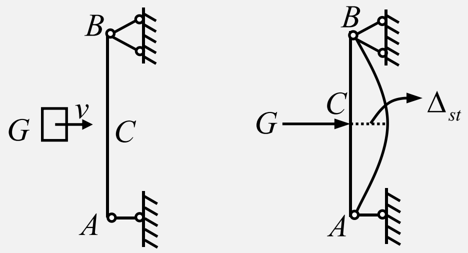
1. 冲击载荷

（1）竖直冲击



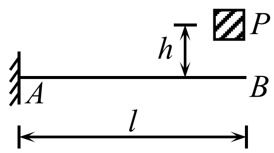
冲击载荷因数：$K_d = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\Delta_{st}}}$

（2）水平冲击



冲击载荷因数：$K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

题 1. 图示梁的抗弯刚度为 EI，若在梁的端点 B 截面正上方高 h 处受到重量为 P 的物体冲击，则梁的最大挠度应为________。



解：（1）求对应静载荷作用下的静位移

$$\Delta_{st} = w_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$

（2）求冲击载荷因数 K_d

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Pl^3}}$$

（3）计算最大挠度 w_d

$$w_d = K_d w_B = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6EIh}{Pl^3}}\right)\frac{Pl^3}{3EI}$$

解题步骤：

①求静物理量

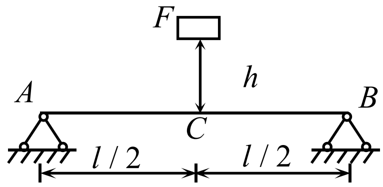
②求冲击载荷因数 K_d

③欲求量等于静物理量乘以 K_d

题 2. 图示简支梁抗弯刚度为 EI，重量为 F 的物体从高度 h 处自由下落冲击中点 C。跨长为 l 的简支梁中点作用有集中力 F 时，梁中点的挠度 $w=\frac{Fl^3}{48EI}$，梁的弯曲截面系数为 W_Z，试求：

（1）动荷系数 K_d 表达式（用 G、h、l、EI、W_Z 表示）；

（2）AB 梁的最大正应力。



解：（1）$\Delta_{st}=w_C=\frac{Fl^3}{48EI}$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{96EIh}{Fl^3}}$$

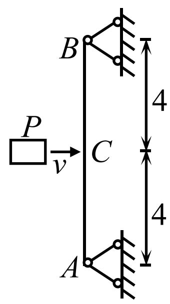
（2）①求 AB 梁的静最大应力

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Fl \qquad \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_Z}=\frac{Fl}{4W_Z}$$

②求 AB 梁的动最大应力

$$\sigma_d=K_d\sigma_{\max}=\left(1+\sqrt{1+\frac{96EIh}{Fl^3}}\right)\frac{Fl}{4W_Z}$$

题 3. 如图示，冲击物的重量 $P=500kN$，冲向梁时的速度 $v=0.35m/s$，冲击载荷作用在梁的中点处，梁的抗弯截面模量 $W=10\times10^{-3}m^3$，截面对中性轴的惯性矩 $I=5\times10^{-3}m^4$，弹性模量 $E=200GPa$，许用应力 $[\sigma]=160MPa$，试校核梁在承受水平冲击载荷作用时强度



解:(1)求静最大应力:

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Pl \qquad \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{Pl}{4W}=\frac{500\times10^3\times8}{4\times10\times10^{-3}}=100MPa$$

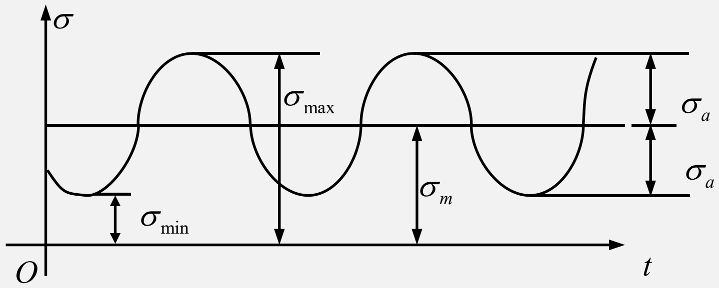
(2)求冲击载荷因数 K_d：

$$\Delta st=\frac{Pl^3}{48EI} \qquad K_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}=\sqrt{\frac{48EIv^2}{gPl^3}}=\sqrt{\frac{48\times200\times10^9\times5\times10^{-3}\times0.35^2}{9.8\times500\times10^3\times8^3}}=1.531$$

(3)求动最大应力，并校核

$$\sigma_d=K_d\cdot\sigma_{\max}=1.531\times100=153.1MPa<[\sigma]$$ 满足强度条件

2. 交变应力

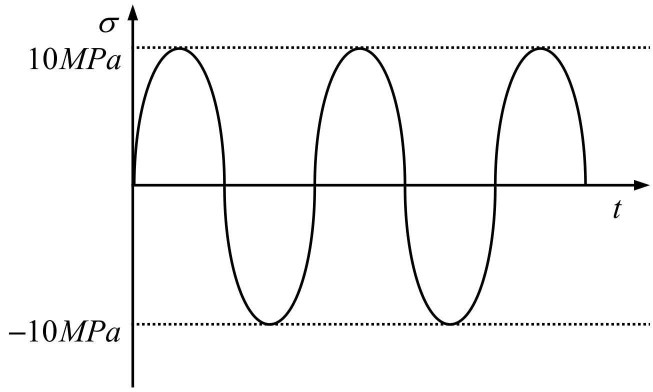


（1）循环特征：$r=\dfrac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$

（2）应力幅值：$\sigma_a=\dfrac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2}$

（3）平均应力：$\sigma_m=\dfrac{\sigma_{\max}+\sigma_{\min}}{2}$

题 1. 交变应力随时间变化的曲线如图示，其所表示的交变应力对应的循环特征 $r=$______，应力幅值 $\sigma_a=$______平均应力 $\sigma_m=$______



解：$-1,\ 10,\ 0$

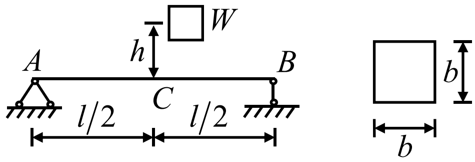
解析：$r=\dfrac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=\dfrac{-10}{10}=-1$

$$\sigma_a=\frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2}=\frac{10-(-10)}{2}=10$$

$$\sigma_m=\frac{\sigma_{\max}+\sigma_{\min}}{2}=\frac{10+(-10)}{2}=0$$

课时十一　练习题

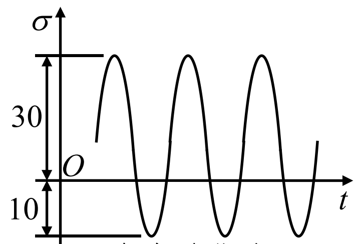
1. 正方形横截面简支梁如图所示，重物重量 $W=1kN$，至高度 $h=50mm$ 自由下落冲击梁的中点 C。已知梁的跨度 $l=3m$，正方形横截面边长 $b=120mm$，材料的弹性模量 $E=200GPa$，求梁的最大弯曲正应力。



2. 图示，交变应力的循环特征 r，平均应力 σ_m，应力幅度 σ_a 分别为_______。

$A.\ -10,20,10$　　$B.\ 30,10,20$

$C.\ -\dfrac{1}{3},20,10$　　$D.\ -\dfrac{1}{3},10,20$



(应力单位为MPa)