

homework 20241210

陈皓阳 23307130004@m.fudan.edu.cn

第一题

$$1. \|x - A^{-1}b\|_A = (x - A^{-1}b)^T A (x - A^{-1}b) = x^T A x - 2x^T b + b^T A^{-1}b =: f(x)$$

记 V 的正交基排列成矩阵 V_m , y 是 x 在该组基下的坐标 $x = V_m y$

$$g(y) = f(V_m y) = (V_m y)^T A (V_m y) - 2(V_m y)^T b + b^T A^{-1}b$$

$$g'(y) = 2V_m^T A V_m y - 2V_m^T b = 2V_m^T (A V_m y - b), \quad g''(y) = V_m^T A V_m \cdot 2 > 0$$

$\|x - A^{-1}b\|_A$ 取最小值, $x = x_0 \Leftrightarrow g'(y_0) = 0 \Leftrightarrow A V_m y_0 - b \in V^\perp$. $x_0 = V_m y_0$.

第二题

2. 对 $A^T A x = A^T b$ 应用 CG method

$$r_0 = p_0 = A^T b - A^T A x_0 = \underline{A^T (b - A x_0)}$$

$$\text{loop: } \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A^T A p_k} = \frac{r_k^T r_k}{(A p_k)^T (A p_k)} \quad \text{可先计算 } A p_k$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$$

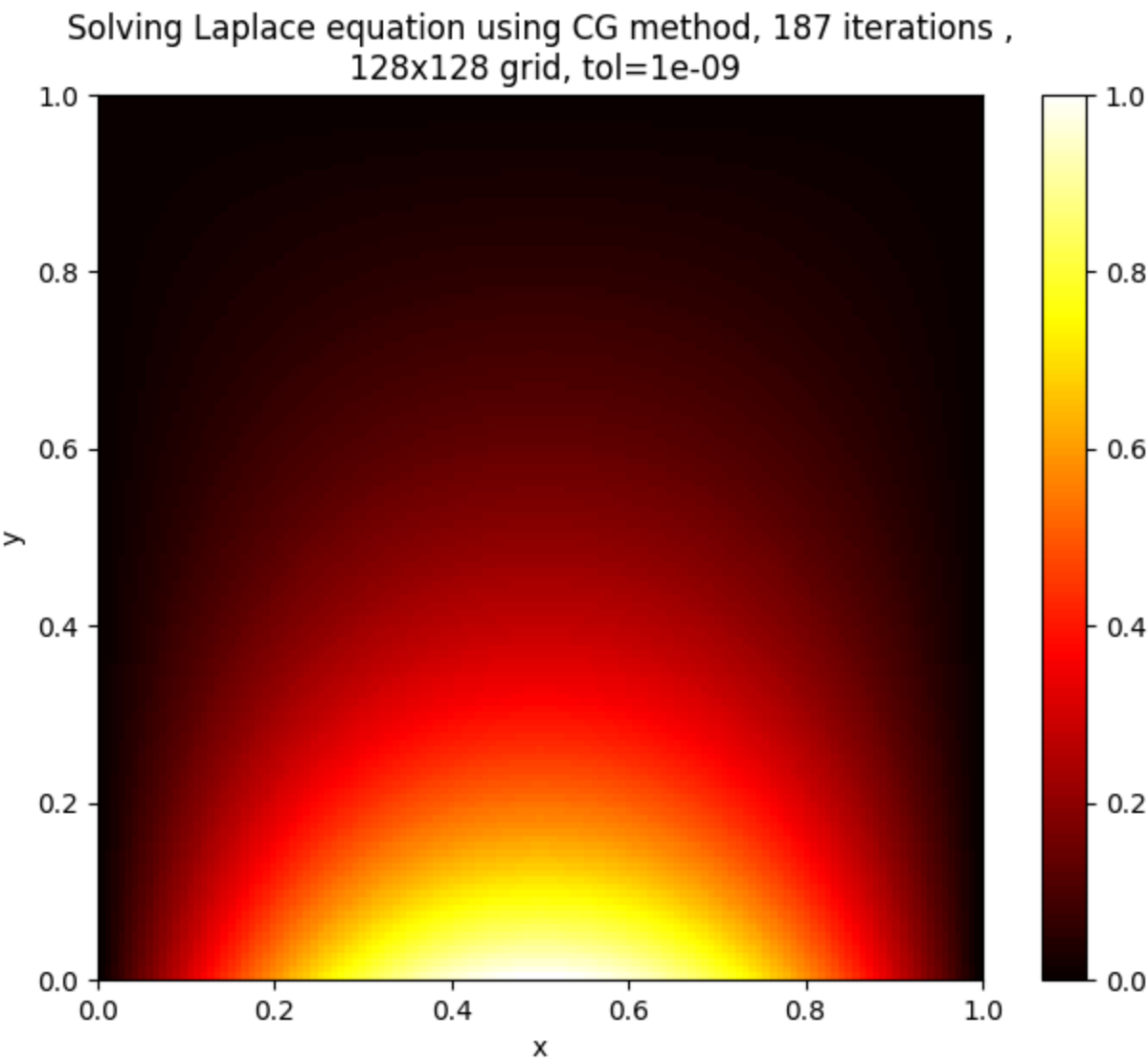
$$r_{k+1} = \underline{r_k - A^T (A p_k) \alpha_k} \quad A p_k \text{ 已计算过}$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

第三题

代码文件 [T3.py](#)



第四题

代码文件 [T4.py](#)

