Numerical Algorithms with Case Studies I Final

Collated by Weihao Li. Personal recollection version, for reference only.

Dec 26, 2023

1. 在计算机上用IEEE 754 双精度浮点数计算调和级数的前 n 项和 $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 时,计算结果最终会收敛. 解释这种现象. [荣誉]给出计算结果收敛时 n 的大致范围.

2. 设

$$A=\begin{bmatrix} I_k & & & & & -A_1 \\ -A_2 & I_k & & & & \\ & -A_3 & I_k & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -A_{n-1} & I_k & \\ & & & & -A_n & I_k \end{bmatrix}.$$

写出 A 的 LU 分解, 和计算出 A 的 LU 分解的时间复杂度.

3. 给定列满秩矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, 设已计算出 A 的精简 QR 分解 $A = QR$. 再给定向量 $u \in \mathbb{R}^m, u \notin Range(A)$, 设 $\tilde{A} = [u\ A]$, 设计算法求解最小二乘问题

$$min_x ||\tilde{A}x - b||_2.$$

4

. 介绍计算实对称矩阵所有特征值的分而治之(divide-and-conquer)方法. 要求具体说明如何处理退化的情况.

5. 证明当系数矩阵是严格对角占优阵时, Gauss-Seidel 迭代法收敛.

6. 介绍一般稀疏矩阵线性方程组的GMRES方法, 并给出一种实现方式.

7. 给定大型稀疏矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 设计算法计算 A 最小的 k 个奇异值, 其中 $k = O(1) \ll min\{m, n\}$.

8. 设函数

$$f(u)=\begin{cases}\frac{e^u-1}{u}, u\neq 0,\\ 1, u=0.\end{cases}$$

对稠密矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,设计算法计算矩阵函数 $f(A)$. [荣誉]再设计一种计算$f(A)$的算法.