homework 20241126

陈皓阳 23307130004@m.fudan.edu.cn

第一题

1. 考虑 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&&\\-1&0&\\-2&-2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-2&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=:D_1-L_1-U_1$

$=\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\2&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-2&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=:(D_2-L_2)-U_2$

Jacobi迭代法: $B_1=D_1^{-1}(L_1+U_1)=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$.

$\det(\lambda I-B_1)=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-2)-2(\lambda-2)-2(2-2\lambda)=\lambda^3=0$. $\rho(B_1)=0<1$.

故Jacobi法收敛.

Gauss-Seidel法: $B_2=(D_2-L_2)^{-1}U_2=\begin{bmatrix}1&&\\-1&1&\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&2\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\&2&-3\\&&2\end{bmatrix}$

$\rho(B_2)=2>1$ 故G-S法不收敛.

第二题

2、考虑正定阵 $A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.15 \\ 0.15 & 0.25 & 0.15 \\ 0.15 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$

• Gauss-Seidel 对正定阵总是收敛的：

$B = (D-L)^{-1}U$, $U^* = L$

考虑 B 的特征对 (λ, x)：$(D-L)^{-1}Ux = \lambda x$

$Ux = (D-L)\lambda x$

两边乘以 x^*：$x^*Ux = x^*Dx\lambda - x^*Lx\lambda$、

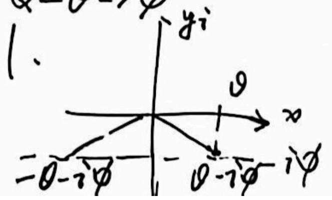
记 $x^*Ux = \bar\beta$, $x^*Lx = \beta$, 因为 $U^* = L$.

$x^*Dx = \alpha$, 即 $\alpha\lambda - \beta\lambda = \bar\beta$, $\lambda = \dfrac{\bar\beta}{\alpha-\beta}$

Gauss-Seidel 收敛 $\iff \rho(B) < 1$, 即 $|\lambda| < 1$.

进一步设 $\beta = \theta + i\varphi$, $\lambda = \dfrac{\theta - i\varphi}{\alpha - \theta - i\varphi}$

故 $|\lambda| < 1 \iff |\theta| < |\alpha - \theta|$.



$|\theta| < |\alpha-\theta| \iff \theta^2 < \alpha^2 - 2\alpha\theta + \theta^2$

$\iff \alpha(\alpha - 2\theta) > 0$.

$\begin{cases} \alpha = x^*Dx > 0 \\ 0 < x^*Ax = \alpha - \beta - \bar\beta = \alpha - 2\theta \end{cases}$

故 $\alpha(\alpha-2\theta) > 0$. $\rho(B) < 1$. G-S 收敛.

• Jacobi法：

$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.15 & -0.15 \\ -0.15 & 0 & -0.15 \\ -0.15 & -0.15 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & -0.6 \\ -0.6 & 0 & -0.6 \\ -0.6 & -0.6 & 0 \end{bmatrix}$.

$\det(\lambda I - B_J) = (\lambda + 1.2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 0.6 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 0.6 \end{vmatrix}$

$= (\lambda + 1.2)(\lambda - 0.6)^2$

$\rho(B_J) = 1.2 > 1$

故Jacobi法不收敛、

第三题

3、$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$

解 x_*：$x_*=Bx_*+g$

故 $x^{(k+1)}-x_*=B(x^{(k)}-x_*)$

进而 $x^{(k)}-x_*=B^k(x^{(0)}-x_*)$、

对 B 有 Jordan 型分解，$\rho(B)=0$，说明 $\lambda(B)=0$.

故 $B=PJP^{-1}=P\begin{bmatrix}J_1(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_s(0)\end{bmatrix}P^{-1}$ 其中各 Jordan 块阶数不超过 n

$B^n=PJ^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}J_1^n(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^n(0)\end{bmatrix}P^{-1}=P\cdot 0\cdot P^{-1}=0$.

代入则有 $x^{(n)}-x_*=0\cdot(x^{(0)}-x_*)=0$. $x^{(n)}=x_*$

说明 n 步可以得到解、

第四题

4、对 $\forall x\in\mathbb{C}^n$，有 $x^*(M-B^*MB)x>0$

$x^*Mx>(Bx)^*M(Bx)$.

假设 $\rho(B)\geq 1$，即 $\exists\lambda_*$，$|\lambda_*|\geq 1$，此时取 x_* 是对应 λ_* 的特征向量

$x_*^*Mx_*>x_*^*Mx_*(\lambda_*^*\lambda_*)=x_*^*Mx_*|\lambda_*|^2$ 矛盾.

故 $\rho(B)<1$，进而说明 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 是收敛的、

第五题

代码文件 **T5.py**