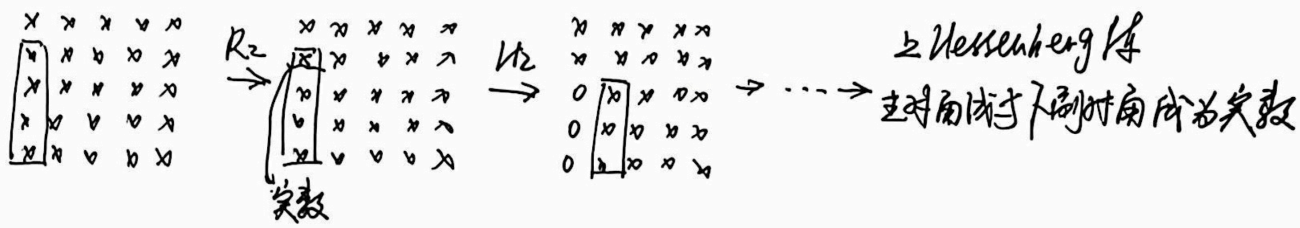
homework 20241119

陈皓阳 23307130004@m.fudan.edu.cn

第一题

1. 对$A[i+1:n, i]$向量作Householder变换前，先确定旋转矩阵 $R_{i+1} = I - e_{i+1}e_{i+1}^T + e_{i+1}e_{i+1}^T e^{-i\theta}$，对应$A[i+1, i]$（$A[i+1:n, i]$的首元素），之后再作Householder变换，使得$A[i+1:n, i]$除首元素以外所有分量为零，且首元素变为$\|A[i+1:n, i]\|_2$为实数。

例如：



故已有 $A = QHQ^*$ 又$A = A^*$，有$H = H^*$，说明H是全为实数的三对角阵。

第二题

2. 由B正定，$\exists L \in R^{n\times n}$为下三角阵，$B = LL^T$。

考虑$AB = ALL^T$，$L^T(ALL^T)L^{-T} = L^TAL$，$(L^TAL)^T = L^TA^TL = L^TAL$是实对称阵。

故$L^TAL = Q\Lambda Q^{-1}$，$Q^TQ = I$，可相似对角化，又$AB \sim L^TAL$，故AB可对角化。

具体而言 $AB = ALL^T = L^{-T}Q\Lambda Q^{-1}L^T$ 取$C^{-1} = Q^{-1}L^T$，$C = L^{-T}Q$，有$AB = C\Lambda C^{-1}$。

算法设计：① 计算B的Cholesky分解：$B = LL^T$

② 计算L^TAL的特征向量Q与特征值Λ，可用对称QR方法或Jacobi方法。

③ AB的特征向量是矩阵$L^{-T}Q$的列向量，特征值储存在Λ中。

第三题

代码文件 **T3.py**

```
2-norm of A: 3.8499224307259965


* scaling-and-squaring algorithm (combined with truncated Taylor series)
relative difference between my e^A and expm()'s e^A: 8.73181258441313e-06


* scaling-and-squaring algorithm (combined with Pad´e approximants)
relative difference between my e^A and expm()'s e^A: 4.381609123223604e-06
```

对于范数较小的 5×5 矩阵来说，测试直接使用截断泰勒展开，矩阵的范数数量级和相对误差（相对 scipy.linalg.expm()）的数量级对有以下结果：$(10^0, 10^{-1}), (10^{-1}, 10^{-3}), (10^{-2}, 10^{-6}),$ $(10^{-3}, 10^{-9})$，于是考虑在 $scaling\ and\ squaring$ 过程中选取特殊的缩放因子 j ，使得 $\|A\|_2/2^j \leq 10^{-2}$，使得缩小范数后的 $exp(A')$ 相对误差在 10^{-6} 左右；输出显示在 $squaring$ 后相对误差也在 10^{-6} 左右

经过测试，帕德逼近在矩阵范数不小于 10^{-5} 左右的相对误差好于截断泰勒展开

进一步调整缩放，使得矩阵的范数在 10^{-5} 左右时，最后的误差达到 10^{-11}，如果进一步缩小矩阵范数的数量级，可能在 $squaring$ 阶段带来更大的误差

第四题

4、A, E 都是Hermite阵且 $AE=EA$，故 A、E 可同时酉合同对角化.

$A=Q\Lambda_A Q^*$. $E=Q\Lambda_E Q^*$. $\Lambda_A=\mathrm{diag}\{a_1\cdots a_n\}$. $\Lambda_E=\mathrm{diag}\{e_1\cdots e_n\}$.

$\|e^{A+E}-e^{A}\|_2=\|e^{\Lambda_A+\Lambda_E}-e^{\Lambda_A}\|_2$ （矩阵函数 $f(Q^*AQ)=Q^*f(A)Q$ 及2-范数的酉不变性）.

$e^{\Lambda_A+\Lambda_E}-e^{\Lambda_A}=\mathrm{diag}\{e^{a_1+e_1}-e^{a_1}\cdots e^{a_n+e_n}-e^{a_n}\}$

$$\|e^{\Lambda_A+\Lambda_E}-e^{\Lambda_E}\|_2=\max_i\left(e^{a_i+e_i}-e^{a_i}\right)\le\left(\max_i e^{a_i}\right)\left(\max_i e^{e_i}-1\right).$$

$$\overset{①}{=}\|e^{\Lambda_A}\|_2\left(\|e^{\Lambda_E}\|_2-1\right)$$

$$=\|e^{A}\|_2\left(\|e^{E}\|_2-1\right).$$

$$\overset{②}{=}\left(e^{\max_i a_i}\right)\left(e^{\max_i e_i}-1\right)$$

$$=e^{\|A\|_2}\left(e^{\|E\|_2}-1\right).$$

估计的上界为 $\|e^{A}\|_2(\|e^{E}\|_2-1)$.

或 $e^{\|A\|_2}(e^{\|E\|_2}-1)$.

第五题

代码文件 **T5.py**