homework 20241103

陈皓阳 23307130004@m.fudan.edu.cn

第一题

1. $\Delta A \hat{x} = \hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}$

$\Delta A = (\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x})\frac{\hat{x}^T}{\|x\|_2}$ 满足以上等式

同时 $\|x\|_2 = 1$. $\Delta A = (\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x})\hat{x}^T$. $\|\Delta A\|_2 = \|(\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x})\hat{x}^T\|_2$

$\|\Delta A\|_2 \le \|(\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x})\|_2 \|\hat{x}^T\|_2 = \|\hat{x}\hat{\lambda} - A\hat{x}\|_2$.

第二题

2. 设 $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. $[x, y]\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [\cos\theta x + y\sin\theta, -\sin\theta x + \cos\theta y]$

有 $(\cos\theta x + \sin\theta y)^T(-\sin\theta x + \cos\theta y) = -\cos\theta\sin\theta x^Tx + \cos^2\theta x^Ty - \sin^2\theta y^Tx + \cos\theta\sin\theta y^Ty = 0$.

两边同除 $\cos^2\theta$ ($\cos^2\theta \neq 0$), $\cos^2\theta = 0$ 时 x, y 已然正交.

$-\tan^2\theta\langle x, y\rangle + (-\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)\tan\theta + \langle y, x\rangle = 0$.

$\langle x, y\rangle \neq 0$. 否则 x, y 已然正交.

$\tan^2\theta - \frac{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2}{\langle x, y\rangle}\tan\theta - 1 = 0$

$\tan\theta_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$

$\tan\theta_2 = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$

$a = \frac{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2}{\langle x, y\rangle}$.

θ_1 与 θ_2 可以决定 $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$.

第三题

3. (1) 假设 $\lambda I-D$ 是奇异阵

对于特征对 (λ,u) 有 $(\lambda I-D-\rho zz^T)u=0$, $(\lambda I-D)u=\rho zz^Tu=(\rho z^Tu)z$.

先证明(3) $z^Tu\neq 0$. 假设 $z^Tu=0$. 有 $Du=\lambda u$

由于 D 有 n 个各不相同的特征值. 故必有 $\lambda=\lambda_i$, $u=\alpha e_i$. $\alpha\neq 0$.

则 $z^Tu=\alpha z^Te_i=0$, $z^Te_i=0$. 则 $z_i=0$ 与 z 元素全不为零矛盾、

故(3) $z^Tu\neq 0$ 成立

进而在假设 $\det(\lambda I-D)=0$ 下, $(\lambda I-D)u=(\rho z^Tu)z$, $\rho z^Tu\neq 0$.

$\lambda I-D$ 为对角阵. 则 $(\lambda I-D)u$ 某一元素为零. 与 z 元素全不为零矛盾.

故(1) $\lambda I-D$ 可逆成立、

(2) 考虑 $\det\begin{bmatrix}\lambda I-D & z\\ z^T & 1/\rho\end{bmatrix}$ 由于 $\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{cases}|A||D-CA^{-1}B| & . A\text{可逆}\\ |D||A-BD^{-1}C| & . D\text{可逆、}\end{cases}$

有 $|\lambda I-D|\left(1/\rho-z^T(\lambda I-D)^{-1}z\right)=1/\rho\,|\lambda I-D-z\rho z^T|=0$. $\rho\neq 0$. $|\lambda I-D|\neq 0$.

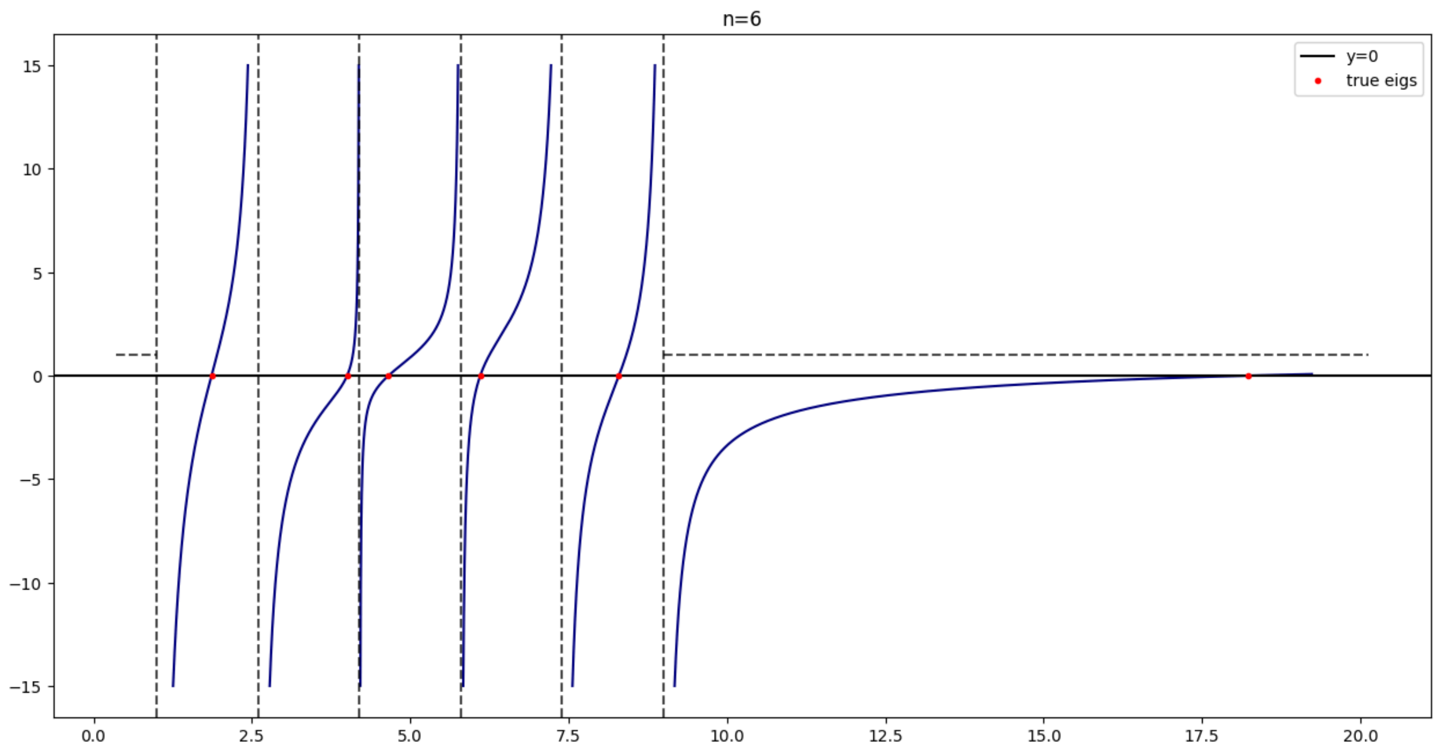
故 $1-\rho z^T(\lambda I-D)^{-1}z=0$,

$$
\begin{aligned}
(D+\rho zz^T)(\lambda I-D)^{-1}z &= D(\lambda I-D)^{-1}z+\rho zz^T(\lambda I-D)^{-1}z=\left(D(\lambda I-D)^{-1}+I\right)z\\
&= \left(D+(\lambda I-D)\right)(\lambda I-D)^{-1}z\\
&= \lambda\left[(\lambda I-D)^{-1}z\right]
\end{aligned}
$$

说明 $(\lambda I-D)^{-1}z$ 是 $D+\rho zz^T$ 的特征值.

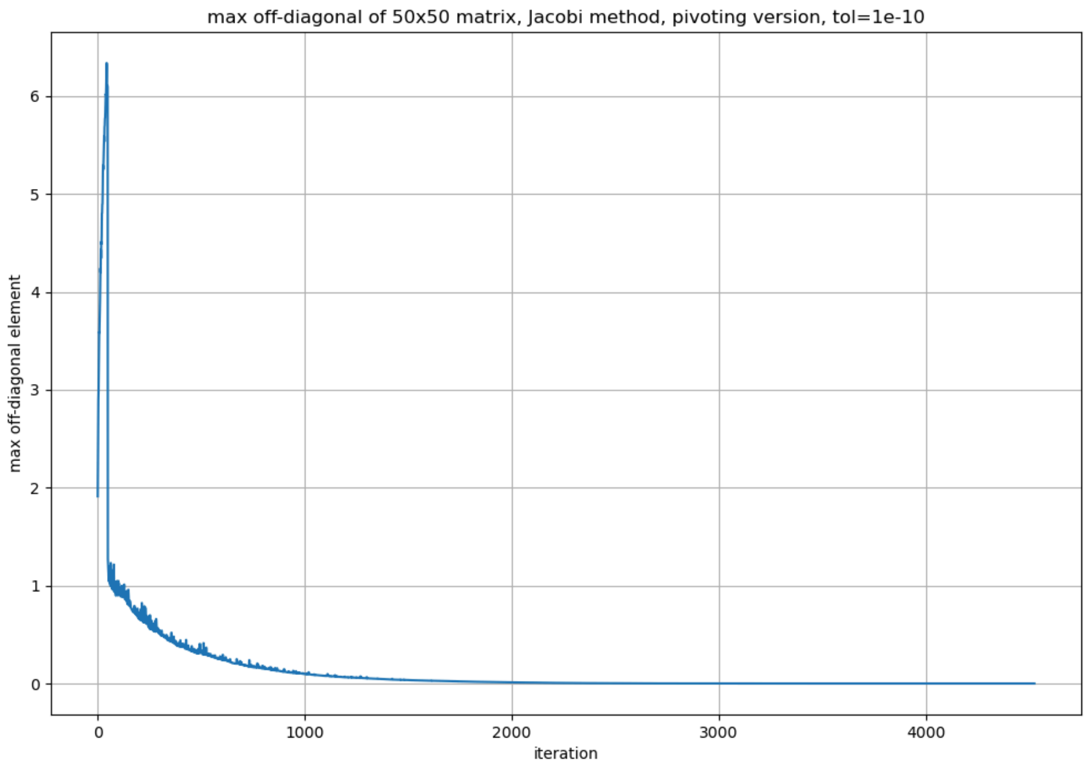
第四题

代码文件 **T4.py**

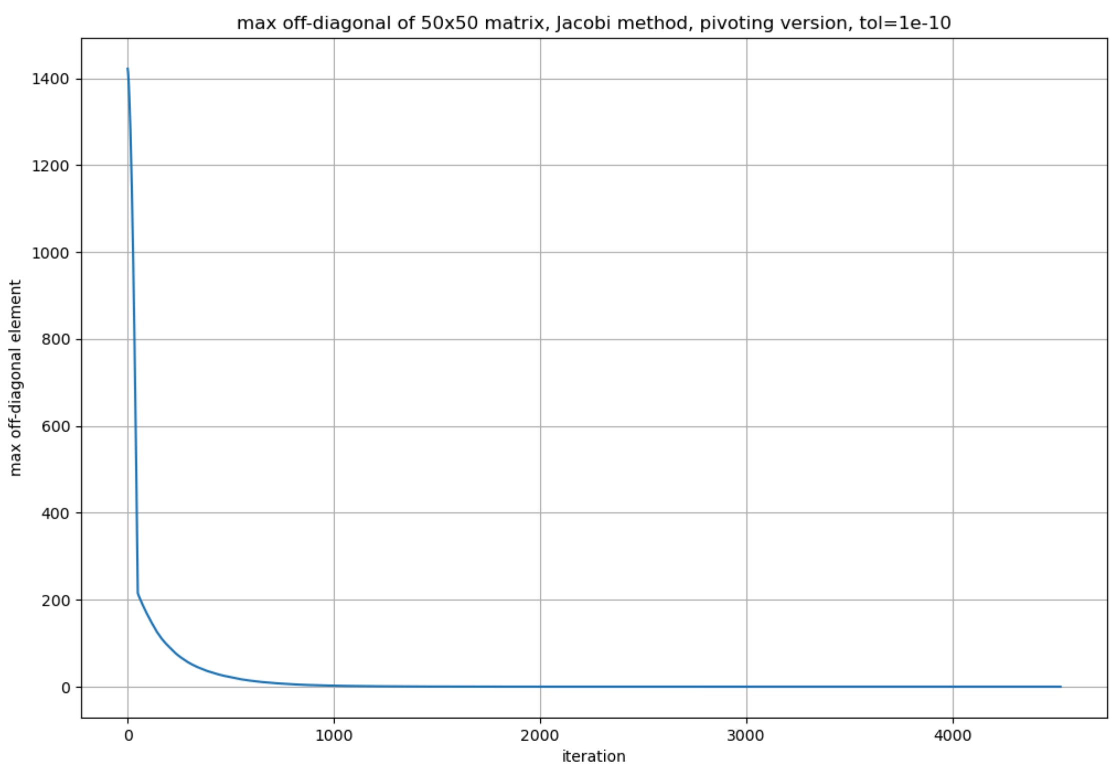


第五题

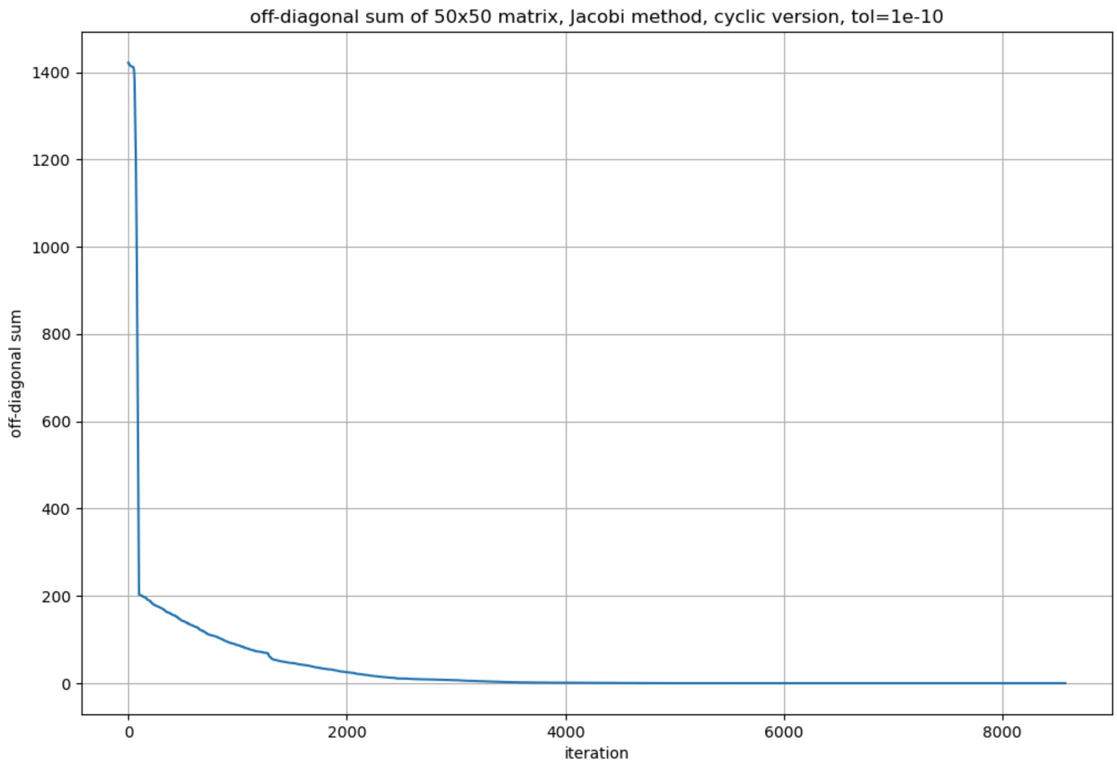
代码文件 **Jacobi.py**



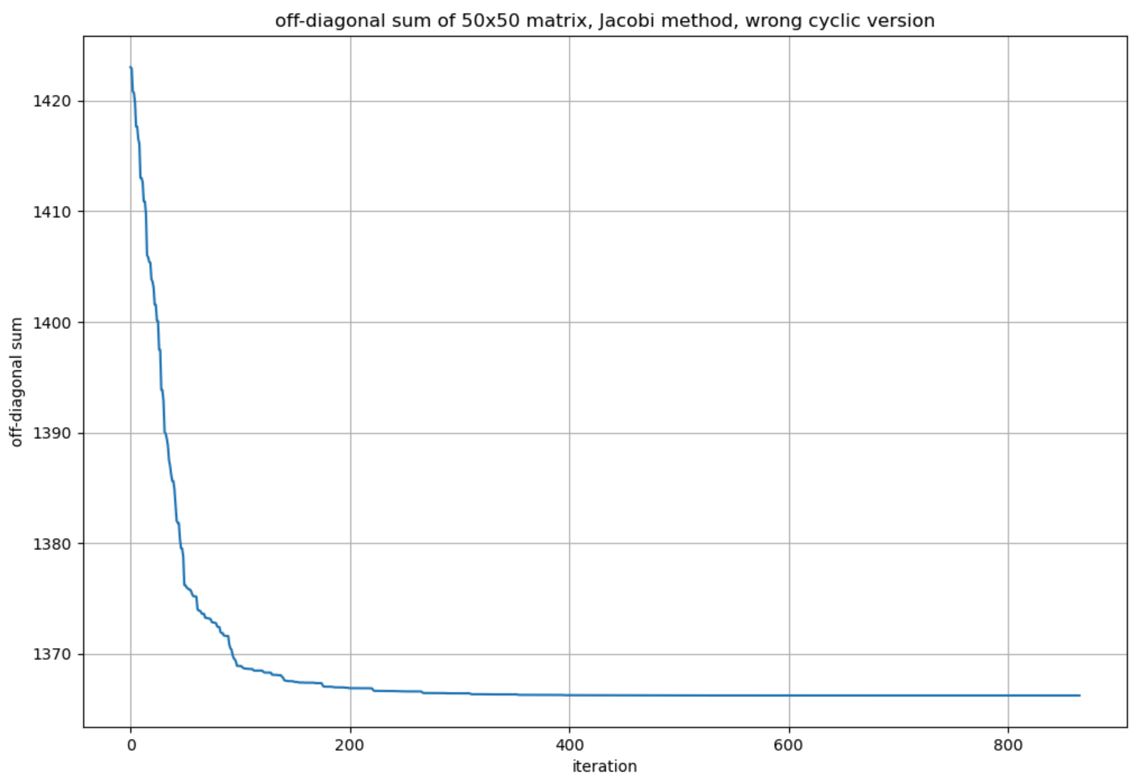
50 x 50 全选主元 $Jacobi$ 迭代 - 非对角线最大元素



50 x 50 全选主元 $Jacobi$ 迭代 - 非对角线元素平方和



50 x 50 循环 $Jacobi$ 迭代 - 非对角线元素平方和



50 x 50 错误选旋转角 $Jacobi$ 迭代 - 非对角线元素平方和

可以看到，如果每次选择旋转角都大于 $\pi/4$,则非对角线元素平方和不会收敛到零