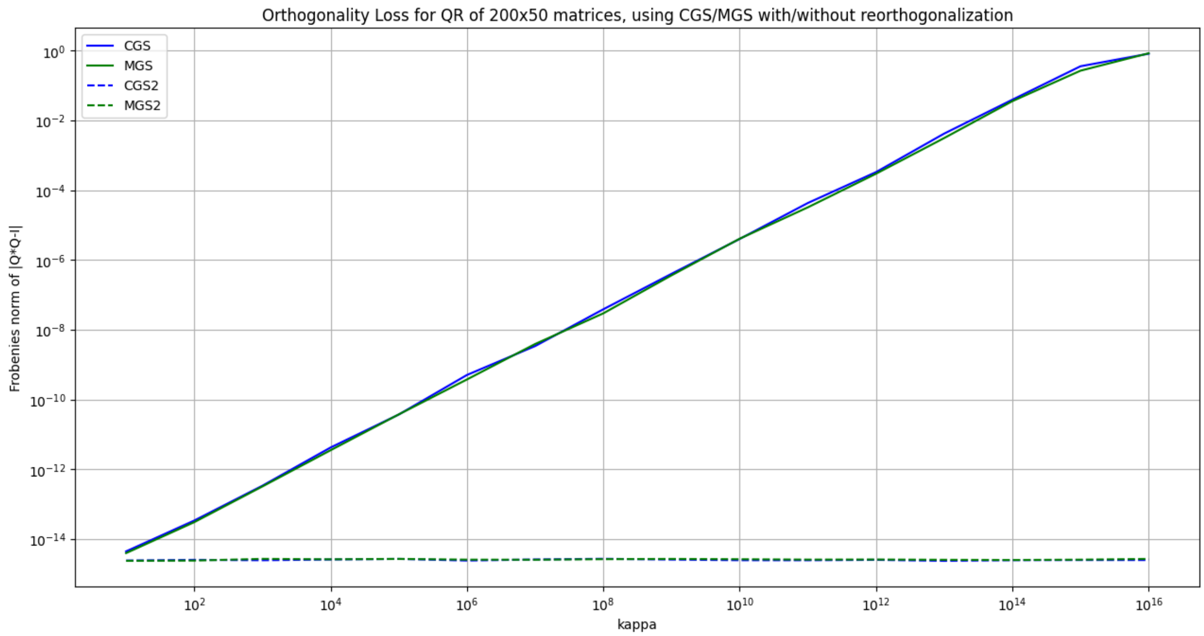
homework 20241015

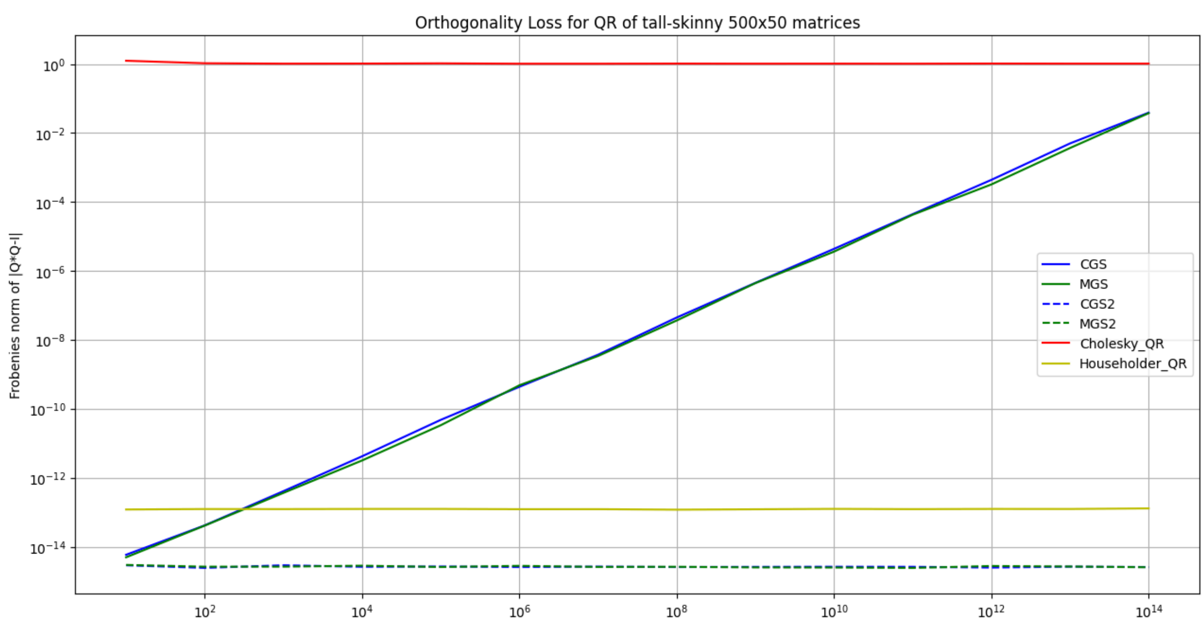
第一题

CGS_MGS_for_QR.py



第二题

QR_fac_time_testing.py



the residual norm for QR of tall-skinny 500x50 matrices
the residual norm of |QR-A|
kappa
10^{-14}
10^{-15}
10^{2}
10^{4}
10^{6}
10^{8}
10^{10}
10^{12}
10^{14}
CGS
MGS
CGS2
MGS2
Cholesky_QR
Householder_QR

第三题

3. $(AA^+)^2 = A(A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$

$(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$

$(I_n - A^+A)^2 = I_n - 2A^+A + A^+AA^+A = I_n - A^+A$.

$(I_n - A^+A)^* = I_n - (A^+A)^*$. $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = A^+A$

说明: $Range(A^+A) = Range(A)$.

① 由 $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$, 说明 $rank(AA^+) \leq rank(A)$.

② 由广义逆定义可得: $AA^+A = A$. 若设 $A = [q_1 \cdots q_n]$.

则 $AA^+[q_1 \cdots q_n] = [q_1 \cdots q_n]$. $q_i = AA^+q_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$

也说明 $rank(AA^+) = rank(A)$.

故 $rank(AA^+) = rank(A)$. 又由 $AA^+q_i = q_i$, 有 $Range(A^+A) = Range(A)$.

说明: $Range(I_n - A^+A) = Ker(A)$

① $\forall x \in Ker(A)$. $Ax = 0$. $(I_n - A^+A)x = x$. 说明 $x \in Range(I_n - A^+A)$.

② $\forall x \in Range(I_n - A^+A)$, 则 $\exists y \in \mathbb{C}^n$, $x = (I_n - A^+A)y$.

$Ax = A(I_n - A^+A)y = Ay - AA^+Ay = 0$. 故 $x \in Ker(A)$.

故 $Range(I_n - A^+A) = Ker(A)$.

第四题

4\. 希望 $\|Ax-b\|$ 最小，则希望 $Ax-b \perp Range(A)$

有 $A^*(Ax-b)=0$，即 $A^*Ax=A^*b$. $A^*AXb=A^*b$

对于 $\forall b\in C^m$ 都有上式成立，故 $A^*AX=A^*$ ①

$(A^*AX)^* = (A^*)^* = X^*A^*A = A$ ②，也有 $X^*A^*AX = X^*A^*$，即 $(AX)^*AX=(AX)^*$

于是 $AX \overset{②}{=} (AX)^*AX = X^*A^*AX \overset{①}{=} X^*A^* = (AX)^*$ ③

$AXA \overset{③}{=} (AX)^*A = X^*A^*A \overset{②}{=} A$.

第五题

LS_for_n_ln(n).py

5\. $\hat{y}_i = a_1 x_i + a_2$ 是所需拟合的直线.

希望 $\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 最小

转化为最小二乘问题：$\min\|Ax-b\|_2$

其中 $A=\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_6 & 1 \end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \end{bmatrix}$ 且 $y_i=\ln(x_i)$ $(i=1,\cdots,6)$