homework 20241008

## 第一题

1. 充要条件为 $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$.

充分性：已知 $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$，构造 $H = I - 2ww^*$，$w = \frac{y-x}{\|y-x\|_2}$.

于是 $Hx = x - 2\cdot\frac{y-x}{\|y-x\|_2}\cdot\frac{\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle}{\|y-x\|_2}$

其中 $\|y-x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}[Re(x_i)-Re(y_i)]^2+[Im(x_i)-Im(y_i)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}[Re^2(x_i)+Im^2(x_i)] + \sum_{i=1}^{n}[Re^2(y_i)+Im^2(y_i)] - 2\sum_{i=1}^{n}[Re(x_i)\cdot Re(y_i)+Im(x_i)\cdot Im(y_i)].$$

$= \|x\|_2^2+\|y\|_2^2-2\langle x,y\rangle = 2\|x\|_2^2-2\langle x,y\rangle$，因为 $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$

则 $Hx = x - 2\cdot\frac{(y-x)\cdot(\langle x,y\rangle - \|x\|_2^2)}{2(\|x\|_2^2-\langle x,y\rangle)} = y$ 得证.

必要性：已知有 $Hx = y$. $H = I-2ww^*$. $w = \frac{y-x}{\|y-x\|_2}$.

$\langle x,y\rangle = \langle x,(x-2ww^*x)\rangle = \langle x,x\rangle - 2w^*x\langle x,w\rangle$

$= \langle x,x\rangle - 2|\langle x,w\rangle|^2 \in \mathbb{R}$.

故 $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$，即 $x^*y\in\mathbb{R}$.

**第二题**

2. 设需在Householder变换实现消元的复向量 $x\in\mathbb{C}^k$

首先使 $x$ 的第一个分量为实数

若其第一个分量 $x_1=e^{i\theta}|x_1|$，则取 $\phi=e^{-i\theta}$

$x'=\phi x=[|x_1|,\phi x_2,\cdots,\phi x_k]^T$，如此 $\langle x',\|x'\|_2e_1\rangle\in\mathbb{R}$

构造 $w=\dfrac{x'-\|x'\|_2e_1}{\|x'-\|x'\|_2e_1\|_2}=\begin{bmatrix}|x_1|-(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2)^{1/2}\\ x_2'\\ \vdots\\ x_k'\end{bmatrix}/\|x'-\|x'\|_2e_1\|_2$.

当 $|x_i|$, $i=2,\cdots,k$ 足够小时，$|x_1|\approx(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2)^{1/2}$，可能出现相消.

考虑取 $e_1'=(-1)e_1=\begin{bmatrix}-1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$，$w'=\dfrac{x'-\|x'\|_2e_1'}{\|x'-\|x'\|e_1'\|_2}=\dfrac{x'+\|x'\|_2e_1}{\|x'+\|x_1\|_2e_1\|_2}$

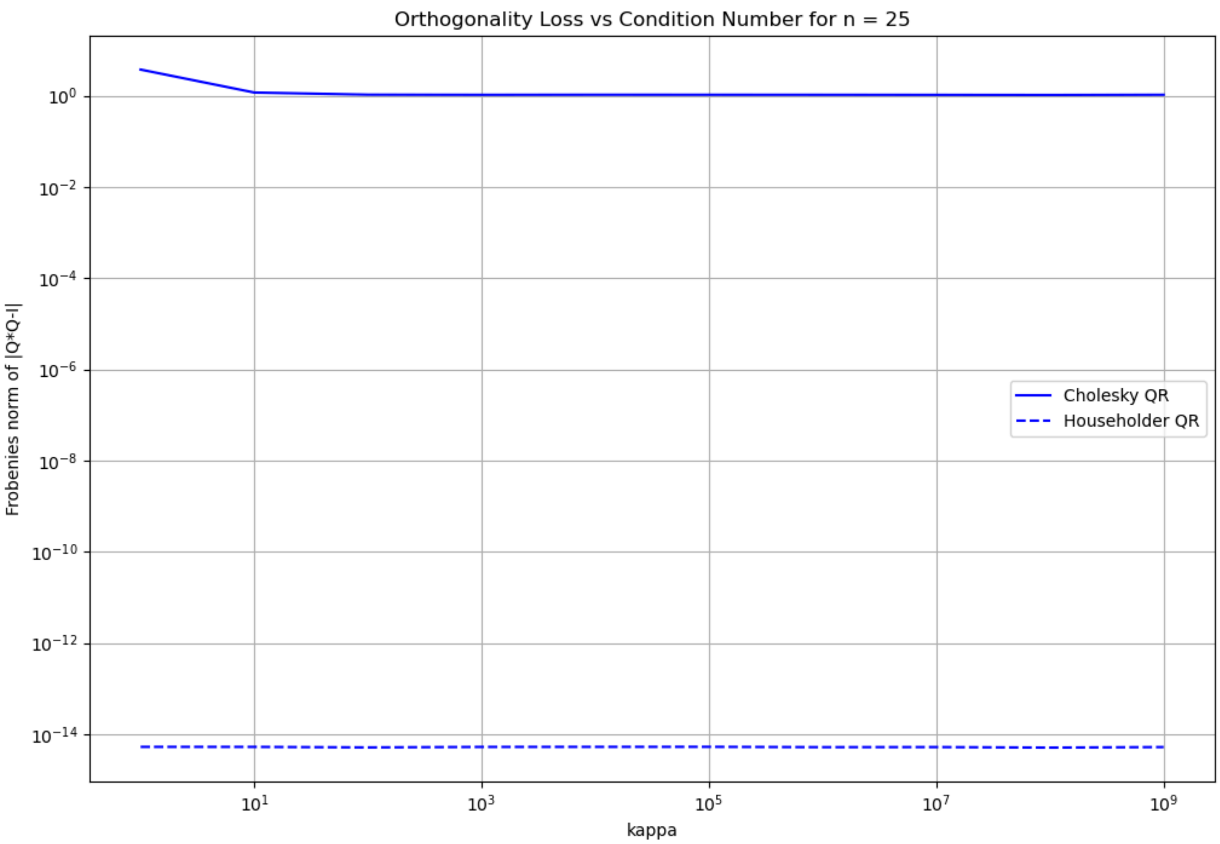
通过将 $x'$ 镜像至 $\begin{bmatrix}-1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 而非 $\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 来避免 $|x_1|$ 过大产生的

$|x_1|-(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2)^{1/2}$ 以及 $\|x'-\|x'\|_2e_1\|_2$ 的相消.

最终可取 $Q=(I-2ww^*)e^{-i\theta}$，其中 $e^{i\theta}=\dfrac{x_1}{|x_1|}$，$\phi=e^{-i\theta}$，$w=\dfrac{\phi x+\|\phi x\|_2e_1}{\|\phi x+\|\phi x\|_2e_1\|_2}$

使得 $Qx=\begin{bmatrix}-1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$.

# 第三题



Orthogonality Loss vs Condition Number for n = 25
Frobenies norm of |Q*Q-I|
kappa
Cholesky QR
Householder QR
$10^{0}$
$10^{-2}$
$10^{-4}$
$10^{-6}$
$10^{-8}$
$10^{-10}$
$10^{-12}$
$10^{-14}$
$10^{1}$
$10^{3}$
$10^{5}$
$10^{7}$
$10^{9}$

## 第四题

4、考虑逐步应用Givens变换，对于局部 $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ 旋转后保持 $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$：

$$
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & & & \\ x & & x & & \\ x & & & x & \\ x & & & & x \end{bmatrix}
\xrightarrow{G_1}
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & & & \\ x & & x & & \\ x & & & x & x \\ 0 & & & x & x \end{bmatrix}
\xrightarrow{G_2}
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & & & \\ x & & x & x & x \\ 0 & & x & x & x \\ 0 & & & x & x \end{bmatrix}
\xrightarrow{G_3} \cdots
$$

$$
\xrightarrow{G_{n-2}}
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & & x & x & x \\ 0 & & & x & x \end{bmatrix}
$$

亦即 $G_{n-2}G_{n-1}\cdots G_1A = \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \\ x & x & & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$

得到一个上三角阵拼接下副对角线阵，再做Givens变换：

$$
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}
\xrightarrow{G_1'}
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}
\xRightarrow{G_2'} \cdots \xRightarrow{G_{n-1}'}
\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & & & x & x \\ & & & & x \end{bmatrix}
$$ 是上三角阵。

而Givens变换的乘积是 $\det = \pm 1$ 的正交阵，故 $A = QR$，$Q = G_{n-1}' \cdots G_1' G_{n-2} \cdots G_1$

共进行了 $(n-1)+(n-2)$ 次Givens变换，$flops \approx O(n^2)$。

## 第五题

5. 首先 Householder 算子是酉矩阵. $Q = I - 2ww^*$. $Q^*Q = I - 4ww^* + 4w(w^*w)w^*$

是Hermite矩阵 $Q^* = I^* - (2ww^*)^* = Q$.

对酉矩阵A，其列向量都是单位向量，故经 Householder 变换得到 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow{\text{左乘 } Q_{n\times n}} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ 0 & a_{22}' & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左乘 } \begin{bmatrix} 1 & \\ & Q_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}'' & \cdots & a_{1n}'' \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & a_{33}'' & \\ 0 & 0 & & a_{nn}'' \end{bmatrix} \rightarrow$$

得到 $\begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & Q_{2\times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-3} & \\ & Q_{3\times 3} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & \\ & Q_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{n\times n} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

同理. 右乘 Householder 算子进行列消元

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{右乘 } \tilde{Q}_{n\times n}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

得到 $\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}_{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & \tilde{Q}_{2\times 2} \end{bmatrix} = I_n$

于是 $\begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & Q_{2\times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-3} & \\ & Q_{3\times 3} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} Q_{n\times n} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{n\times n} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & \tilde{Q}_{2\times 2} \end{bmatrix} = I_n$

对于 $\begin{bmatrix} I_{n-k} & \\ & Q_{k\times k} \end{bmatrix}$. $Q_{k\times k} = I_k - 2ww^*$, $w \in \mathbb{R}^k$

可记 $w' = [\underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-k)个0}, w] \in \mathbb{R}^n$. 使得 $(Q_{k\times k})' = I_n - 2w'w'^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$

故. $Q_{2\times 2}' Q_{3\times 3}' \cdots Q_{n\times n} A \tilde{Q}_{n\times n} \cdots \tilde{Q}_{2\times 2}' = I_n$.

由于 Householder 算子的逆是其自身. 故 $A = Q_{n\times n} \cdots Q_{2\times 2}' \tilde{Q}_{2\times 2}' \cdots \tilde{Q}_{n\times n}$.

当 $\det(A)=1$ 时，记 $a_i$ 是 $A$ 的第 $i$ 个列向量、

Householder 变换有以下两种结果：

$$Q_+ a_i = \|a_i\|_2 e_i \qquad Q_- a_i = -\|a_i\|_2 e_i$$

取决于镜像后的结果是 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ 还是 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix}$.

对于 $\det(Q)$，已知 $Q^2=I$，$\det(Q^2)=(\det Q)^2=1$，$\det Q=\pm 1$。

$A=Q_1\cdots Q_n$，若 $\det(A)=1$，则只有偶数个 $Q_-$ 的作用、

对 $Q_+ a_i=\|a_i\|_2 e_i=e_i$，可以直接通过若干个 Givens 变换代替，

即 $G_{i(n-i)}\cdot G_{i(n-i-1)}\cdots G_{i1}\cdot a_i=e_i$

对 $Q_- a_i=\|a_i\|_2(-e_i)=-e_i$，也可以有 $G_{i(n-i)}\cdots G_{i1}a_i=-e_i$

则 $[G_{(n-1)1}][G_{(n-2)2}G_{(n-2)1}]\cdots[G_{1(n-1)}\cdots G_{11}]A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$ 且只有偶数个 $-1$

对于 $a_{ii}=a_{jj}=-1$，$i\neq j$，选用 $G_{ij}=\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix}$，使得 $G_{ij}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

故 $\prod_{(a_{ii},a_{jj})=(-1,-1)} G_{ij}\,[G_{(n-1)1}]\cdots[G_{1(n-1)}\cdots G_{11}]A=I_n$

而 $G=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & -s & \\ & s & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 的逆阵 $G^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c & s & \\ & -s & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 也是 Givens 变换。

故 $A$ 是若干 Givens 变换的积。