homework 20241103

陈皓阳 $23307130004@m.fudan.edu.cn$

第一题

1. $X^{-1}AX = H$. 考虑 $AX = XH$, 即 $[Ax, A^2x, \cdots, A^n x] = [x, Ax, \cdots, A^{n-1}x]H$

希望 H 是 upper Hessenberg 阵, 记 $H = [H_1, H_2 \cdots H_n]$

$$\left\{\begin{array}{l} Ax = [x, Ax, \cdots, A^{n-1}x]H_1 \\ A^2x = [x, Ax, \cdots, A^{n-1}x]H_2 \\ \vdots \\ A^{n-1}x = [x, Ax, \cdots, A^{n-1}x]H_{n-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H_1 = e_2 \\ H_2 = e_3 \\ \vdots \\ H_{n-1} = e_n \end{array}\right. \text{故 } H = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & H_n \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & \end{array}\right] \text{得证.}$$

第二题

2. 考虑用 Householder 变换依次对 $r_1, r_2; r_2, r_3 \cdots$ 进行消元, 以五阶为例

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{bmatrix}$$

(1) (2) (3)

由于 H 是奇异的, 消元至某步时必有 $r_i^{(i)}$ 与 $r_{i+1}^{(i)}$ 线性相关.

为了保证 QR 分解中 R 是上三角阵, 需左乘置换阵 $P = [e_1, e_2, e_3, \cdots, e_i, e_n, e_{i+1}, \cdots, e_{n-1}]$

使得后续的行向上"移动"一格, 最终 R 最后一行为零.

于是 $PQ_{i+1} \cdots Q_{12}H = R$, $H = (Q_{12} \cdots Q_{i\,i+1}P)R$, $\tilde{H} = R(Q_{12} \cdots Q_{i\,i+1}P)$.

由于 R 最后一行全为零, $\tilde{H}$ 最后一行也全为零, 又 $\tilde{H}$ 是上 Hessenberg 阵

故一个"0"特征值在右下角显示.

第三题

(1) naive QR 算法

该算法对于这个特定的矩阵不收敛，这是因为

矩阵 A 自身是单位正交矩阵，其 QR 分解为 $A = AI$

一次迭代后 $\hat{A} = IA = A$，说明 QR 算法对该特定矩阵没有起到任何作用

(2) Francis 双位移 QR 算法

代码文件 **fransic.py**

结果显示，迭代一次后，副对角线的 1 变为 -1，其余元素不变；再迭代一次后，副对角线的 -1 变为 1，其余元素不变

说明 Francis 双位移 QR 算法对该特定矩阵没有起到任何作用

这可能是因为该特定矩阵的特征值都在单位圆上，其模长相等，不存在模最大特征值，因此 QR 迭代并无动力进行

第四题

代码文件 **hessenberg_reduction.py**

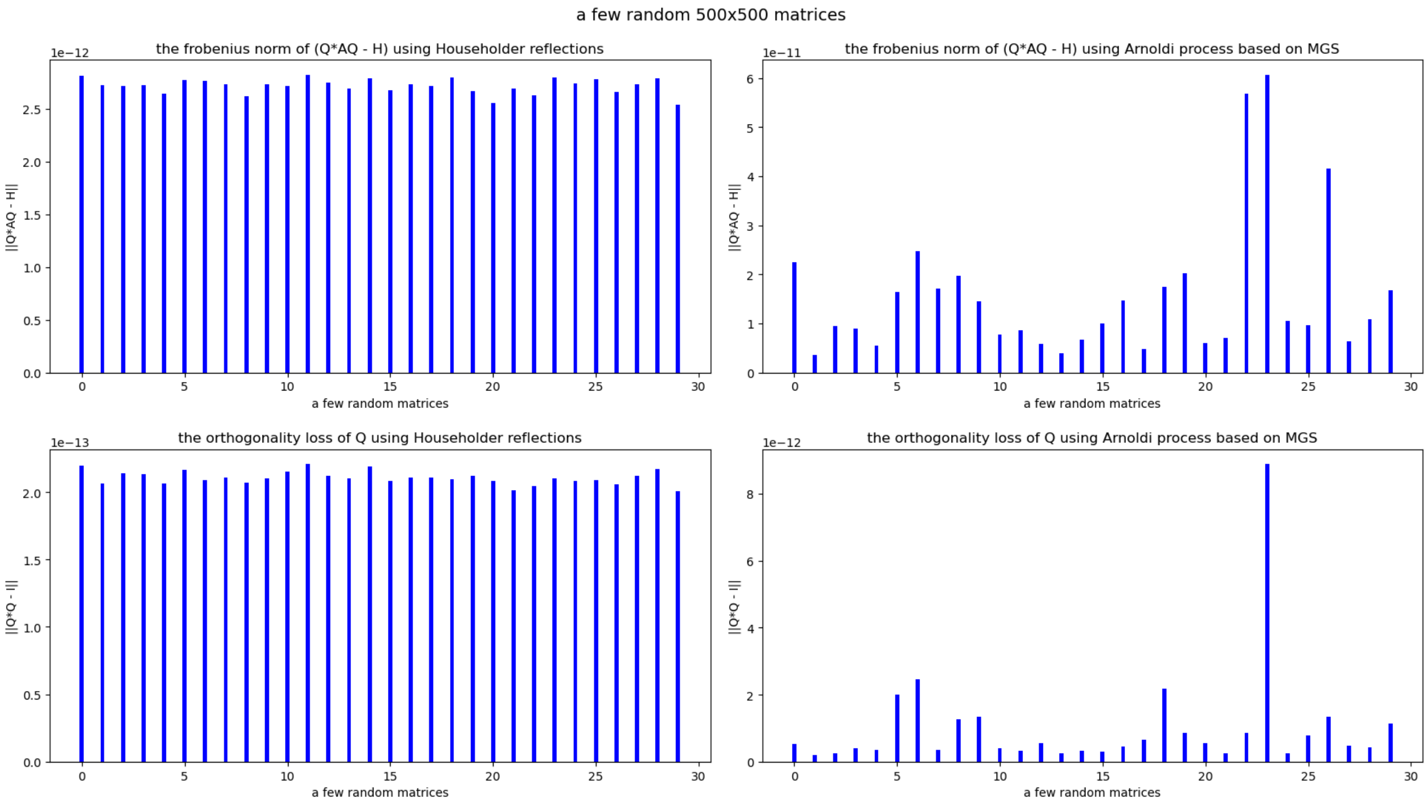
今设 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ & a \end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix} a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + c\sin\theta\cos\theta & -a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ -a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta - c\sin^2\theta & a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - c\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ & a \end{bmatrix}$

有 $(b-a)\cos\theta = c\sin\theta$. $\tan\theta = \frac{b-a}{c}$. 不妨取 $\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{(b-a)^2+c^2}}$. $\sin\theta = \frac{b-a}{\sqrt{(b-a)^2+c^2}}$

取 $Q = \begin{bmatrix} c & a-b \\ b-a & c \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(b-a)^2+c^2}}$ 使得 $Q^T \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} b & c \\ & a \end{bmatrix}$.

第五题



选取了 30 个利用 $np.random.rand()$ 随机生成的 500 维方阵测试两种算法，如图所示，利用 $Householder$ 变换的精确度和正交性损失好于基于 MGS 的 $Arnoldi$ 过程；同时，前者误差的方差小于后者