tarea 14 geometria

Hector Javier Salazar Alvarez

November 2024

Ejercicio 5.1

Encuentra descripciones baricéntricas y paramétricas para los siguientes planos:
RECORDAR:

$$\Pi = \{\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$
$$\Pi = \{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

- $\Pi_2 : x + 4y - 2z = 4$
  - Tomemos $y = 0$ y $z = 0$:
    $$x + 4(0) - 2(0) = 4 \implies x = 4$$
    Así, obtenemos el primer punto para la descripcion parametrica: $P_1 = (4, 0, 0)$.
  - Tomemos $x = 0$ y $z = 0$:
    $$0 + 4y - 2(0) = 4 \implies 4y = 4 \implies y = 1$$
    Así, el segundo punto es $P_2 = (0, 1, 0)$.
  - Tomemos $x = 0$ y $y = 0$:
    $$0 + 4(0) - 2z = 4 \implies -2z = 4 \implies z = -2$$
    Así, el tercer punto es $P_3 = (0, 0, -2)$.

  Ahora que tenemos tres puntos no colineales, $P_1 = (4, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, -2)$,
  Sustituyendo los valores de los puntos con la forma baricentrica tenemos:

  $$\Pi_2 = \{\alpha(4, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, -2) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

  Lo que se expande como:

  $$\Pi_2 = \{(4\alpha, \beta, -2\gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

  Ahora obtengamos la parametricas con los puntos ya obtenidos al evaluar en 0 las coordenadas $P_1 = (4, 0, 0)$ como punto base. Encontramos dos vectores direccionales que están sobre el plano.

- $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0)$
- $\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0,0,-2) - (4,0,0) = (-4,0,-2)$

Sustituyendo los valores en su forma parametrica:

$$\Pi_2 = \{(4,0,0) + s(-4,1,0) + t(-4,0,-2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Lo que se expande como:

$$\Pi_2 = \{(4-4s-4t, s, -2t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Así que la descripción paramétrica del plano es:

$$(x,y,z) = (4-4s-4t, s, -2t) \quad \text{con} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

- $\Pi_3 : -x + y - 2z = 2$
  - Tomemos $y = 0$ y $z = 0$:

    $$-x + 0 - 2(0) = 2 \implies x = -2$$

    Así, obtenemos el primer punto para la descripcion parametrica: $P_1 = (-2,0,0)$.
  - Tomemos $x = 0$ y $z = 0$:

    $$-0 + y - 2(0) = 2 \implies y = 2$$

    Así, el segundo punto es $P_2 = (0,2,0)$.
  - Tomemos $x = 0$ y $y = 0$:

    $$-0 + 0 - 2z = 2 \implies -2z = 2 \implies z = -1$$

    Así, el tercer punto es $P_3 = (0,0,-1)$.

Ahora que tenemos tres puntos no colineales, $P_1 = (-2,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$ y $P_3 = (0,0,-1)$, Sustituyendo los valores de los puntos con la forma baricentrica tenemos:

$$\Pi_3 = \{\alpha(-2,0,0) + \beta(0,2,0) + \gamma(0,0,-1) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

Lo que se expande como:

$$\Pi_3 = \{(-2\alpha, 2\beta, -\gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

Ahora obtengamos la parametricas con los puntos ya obtenidos al evaluar en 0 las coordenadas $P_1 = (-2,0,0)$ como punto base. Encontramos dos vectores direccionales que están sobre el plano.

- $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0,2,0) - (-2,0,0) = (2,2,0)$

- $\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0,0,-1) - (-2,0,0) = (2,0,-1)$

Sustituyendo los valores en su forma parametrica:

$$\Pi_3 = \{(-2,0,0) + s(2,2,0) + t(2,0,-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Lo que se expande como:

$$\Pi_3 = \{(-2+2s+2t, 2s+2t, -t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

Así que la descripción paramétrica del plano es:

$$(x,y,z) = (-2+2s+2t, 2s+2t, -t) \quad \text{con} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.3

Encuentra una ecuación normal para los siguientes planos:

- $\Pi_1 = \{(2+t-s, 1-2t+s, 3t-s-3) \mid t,s \in \mathbb{R}\}$
  De aquí obtenemos el punto base $\mathbf{p} = (2,1,-3)$ y los vectores direccionales:

  $$\mathbf{u} = (1,-2,3), \quad \mathbf{v} = (-1,1,-1)$$

  Calculando el producto cruz tenemos:

  $$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix}$$

  Sustituyendo los valores de $\mathbf{u} = (1,-2,3)$ y $\mathbf{v} = (-1,1,-1)$, tenemos:

  $$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} (-2)(-1) - (1)(3) \\ (3)(-1) - (-1)(1) \\ (1)(1) - (-1)(-2) \end{pmatrix}$$

  $$(-2)(-1) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$
  $$(3)(-1) - (-1)(1) = -3 + 1 = -2$$
  $$(1)(1) - (-1)(-2) = 1 - 2 = -1$$

  Entonces, el vector normal $\mathbf{n}$ es:

  $$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la ecuación normal de un plano es de la forma:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Donde $\mathbf{n} = (-1, -2, -1)$ es el vector normal, y $\mathbf{p} = (2, 1, -3)$ es el punto base en el plano. Calculamos el producto punto $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = (-1)(2) + (-2)(1) + (-1)(-3) = -2 - 2 + 3 = -1$$

Así que la constante $d = -1$. Por lo tanto, la ecuación normal del plano es:

$$-1(x) - 2(y) - 1(z) = -1$$

Lo que simplificamos a:

$$\boxed{x + 2y + z = 1}$$

Ejercicio 5.5

Encuentra un criterio general para saber si cuatro puntos $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ son coplanares o no, y demuéstralo.

Solución

Criterio General

Cuatro puntos a, b, c, d en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ son coplanares si y solo si el volumen del tetraedro formado por estos puntos es igual a cero. Este volumen puede calcularse utilizando el determinante de una matriz construida con los vectores que conectan estos puntos.

Definición de los Puntos

Sean $a = (x_a, y_a, z_a)$, $b = (x_b, y_b, z_b)$, $c = (x_c, y_c, z_c)$ y $d = (x_d, y_d, z_d)$ los cuatro puntos en $\mathbb{R}^3$.

Vectores de Posición

Consideremos los vectores $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ y $\mathbf{AD}$ formados a partir de estos puntos:

$$\mathbf{AB} = b - a = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a),$$

$$\mathbf{AC} = c - a = (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a),$$

$$\mathbf{AD} = d - a = (x_d - x_a, y_d - y_a, z_d - z_a).$$

Matriz para el Volumen del Tetraedro

Los puntos son coplanares si el volumen del tetraedro formado por ellos es cero. Este volumen se calcula usando el determinante de la matriz formada por los vectores **AB**, **AC** y **AD**:

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{pmatrix}\right|.$$

Condición de Coplanaridad

Los puntos a, b, c, d son coplanares si y solo si el determinante de la matriz es igual a cero:

$$\det\begin{pmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{pmatrix} = 0.$$

Demostración

1. Consideremos los puntos $a = (x_a, y_a, z_a)$, $b = (x_b, y_b, z_b)$, $c = (x_c, y_c, z_c)$ y $d = (x_d, y_d, z_d)$.
2. Construimos los vectores **AB**, **AC**, y **AD** como se definieron arriba.
3. Formamos la matriz con estos vectores:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{pmatrix}.$$

4. Calculamos el determinante de la matriz:

$$\det(\mathbf{M}) = \begin{vmatrix} x_b - x_a & x_c - x_a & x_d - x_a \\ y_b - y_a & y_c - y_a & y_d - y_a \\ z_b - z_a & z_c - z_a & z_d - z_a \end{vmatrix}.$$

5. Si el determinante es cero, los vectores son linealmente dependientes, lo que implica que los puntos son coplanares.

Ejercicio 5.6

Encuentra una descripción paramétrica para la recta de intersección de las siguientes parejas de planos:

- $\Pi_1 : x - y - z = 0; \quad \Pi_2 : x + y - z = 1$

  Verificación de que los vectores normales de los dos planos no son paralelos, Los vectores normales de los planos Π_1 y Π_2 son:

$$\mathbf{n_1} = (1, -1, -1) \quad \text{para} \quad \Pi_1,$$

$$\mathbf{n_2} = (1, 1, -1) \quad \text{para} \quad \Pi_2.$$

Para comprobar que no son paralelos, calculamos el producto cruz de los vectores normales $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$:

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) - (1)(-1) \\ (-1)(1) - (-1)(1) \\ (1)(1) - (1)(-1) \end{pmatrix}$$

$$(-1)(-1) - (1)(-1) = 1 + 1 = 2$$
$$(-1)(1) - (-1)(1) = -1 + 1 = 0$$
$$(1)(1) - (1)(-1) = 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto, el producto cruzado es:

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como el producto cruzado no es el vector cero, asi que no son paralelos.
Para ver la interseccion debemos resolver el sistema de ecuaciones que conforman ambos:

$$x - y - z = 0 \quad (\text{ec. } 1)$$
$$x + y - z = 1 \quad (\text{ec. } 2)$$

Sumamos las ecuaciones 1 y 2 para eliminar y y z:

$$(x - y - z) + (x + y - z) = 0 + 1$$

$$2x - 2z = 1$$

$$x - z = \frac{1}{2}$$

De aquí, podemos despejar x:

$$x = z + \frac{1}{2}$$

Ahora sustituimos $x = z + \frac{1}{2}$ en la ecuación 1 para obtener y:

$$(z + \frac{1}{2}) - y - z = 0$$

$$\frac{1}{2} - y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $z = t$ en las expresiones para x y y, obtenemos:

$$x = t + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = t$$

Así, el punto p en la intersección es:

$$p = \left(t + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right)$$

La dirección de la recta es el vector $\mathbf{d}$, que es el mismo que el vector resultante del producto cruzado $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$, ya que es perpendicular a los dos vectores normales.

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, la descripción paramétrica de la recta de intersección es:

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t(2, 0, 2) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Es decir, para cualquier valor de $t \in \mathbb{R}$, las coordenadas de un punto en la recta son:

$$x = \frac{1}{2} + 2t, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 2t$$

Ejercicio 5.8

Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p} + t\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra (sustituyendo la expresión de los puntos de ℓ en la ecuación de Π) que Π y ℓ se intersectan en un único punto si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$.

Para encontrar la intersección de la recta ℓ con el plano Π, sustituimos la expresión paramétrica de los puntos de ℓ en la ecuación del plano. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$, un punto cualquiera de ℓ, y sustituimos en la ecuación del plano:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} + t\mathbf{d}) = c.$$

Distribuyendo el producto punto:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} + t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) = c.$$

Reorganizando:

$$t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) = c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}.$$

Para que la recta ℓ intersecte al plano Π, debe existir un valor $t \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación anterior se cumpla. Esto implica que la expresión

$$t = \frac{c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}}$$

debe tener una solución real, lo cual ocurre si y solo si el denominador $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$.

- Si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$, entonces t es un número real y, por lo tanto, existe un único valor de t, lo que significa que la recta y el plano se intersectan en un único punto.

- Si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$, entonces no hay solución para t (a menos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = c$, en cuyo caso la recta está completamente contenida en el plano, pero esto no es una intersección en un único punto). Es decir, si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$, la recta y el plano no se intersectan o son coincidentes, pero no en un único punto.

Ejercicio 5.10

Demuestra que el determinante cumple las siguientes propiedades:

i) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$

ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

iii) $\det(t\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

iv) $\det(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

Demostración:

i) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$

1. $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$:

Sabemos que:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

Intercambiamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$$

Usamos la propiedad del producto cruz $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$:

$$\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Por lo tanto:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$$

2. $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$:
Intercambiamos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en el determinante. Primero, calculemos:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$$

Usamos la propiedad del producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times \mathbf{u})$:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

Por la propiedad del producto punto:

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

Por lo tanto:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$$

3. $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$:
De forma similar, intercambiamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$. Usamos la propiedad del producto cruz para obtener:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Por lo tanto:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$
Cuando dos vectores son iguales, su producto cruz es el vector cero:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$$

iii) $\det(t\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
Si multiplicamos $\mathbf{u}$ por un escalar t, el producto cruz se escala por t:

$$t\mathbf{u} \times \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Por lo tanto:

$$\det(t\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (t\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = t\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$$

iv) $\det(\mathbf{u}+\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + \det(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w})$

Usamos la propiedad distributiva del producto cruz:

$$\det(\mathbf{u}+\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((\mathbf{u}+\mathbf{x})\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

Distribuimos el producto cruz:

$$= (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} + (\mathbf{x}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

Lo que es igual a:

$$= \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + \det(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w})$$

Ejercicio 5.12

Sea $A = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ una matriz de 3×3 con $\det(A) \neq 0$. Queremos demostrar que A tiene una matriz inversa A^{-1} dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^\top\\(\mathbf{w}\times\mathbf{u})^\top\\(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^\top\end{pmatrix},$$

donde $x^\top$ denota el vector renglón transpuesto del vector columna $\mathbf{x}$.

El determinante de la matriz A se puede expresar como el producto mixto de los vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, es decir:

$$\det(A) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}),$$

donde $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ son los vectores columna de A, y $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es el producto cruz de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, que da un vector perpendicular a ambos.

El producto cruzado de dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, denotado por $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, es un vector perpendicular tanto a $\mathbf{x}$ como a $\mathbf{y}$. Este producto tiene la propiedad de ser antisimétrico, es decir, $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = -(\mathbf{y}\times\mathbf{x})$, y se puede calcular como

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix},$$

donde $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$ son los vectores unitarios en la dirección de los ejes x,y,z, respectivamente.

La transposición del producto cruzado se utiliza para construir la matriz inversa. Como los productos cruzados $\mathbf{v}\times\mathbf{w},\mathbf{w}\times\mathbf{u},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ son vectores, tomamos su transpuesta para obtener vectores fila en lugar de vectores columna. Así, la matriz A^{-1} se puede escribir como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}.$$

Ahora verificamos que $A \cdot A^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad. Sea

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que calcular el producto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}.$$

El resultado de este producto es una matriz 3×3, cuyos elementos se obtienen calculando los productos internos de las columnas de A con las filas de B. Evaluamos cada uno de los productos internos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \det(A), \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= 0 \quad \text{(porque } \mathbf{w} \times \mathbf{u} \text{ es perpendicular a } \mathbf{u}\text{)}, \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0 \quad \text{(porque } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ es perpendicular a } \mathbf{u}\text{)}. \end{aligned}$$

De manera similar, se calculan los productos internos correspondientes a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \det(A), \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \det(A), \\ \mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto $A \cdot B$ es

$$A \cdot B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Conclusión: Como $A \cdot B = I$, hemos demostrado que A^{-1} es la matriz inversa de A, y está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.13

Demuestra que tres planos en $\mathbb{R}^3$ se intersectan en un único punto si y sólo si sus tres vectores normales son linealmente independientes. Sean los tres planos Π_1, Π_2, Π_3 en $\mathbb{R}^3$ dados por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = c_1, \quad \Pi_2 : \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = c_2, \quad \Pi_3 : \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{x} = c_3,$$

donde $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ son los vectores normales a los planos Π_1, Π_2, Π_3, respectivamente, y c_1, c_2, c_3 son constantes. Queremos demostrar que los tres planos se intersectan en un único punto si y solo si los vectores normales $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ son linealmente independientes.

Para que los tres planos se intersecten en un único punto, debe existir una única solución para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^\top \\ \mathbf{n}_2^\top \\ \mathbf{n}_3^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Este sistema puede escribirse como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^\top \\ \mathbf{n}_2^\top \\ \mathbf{n}_3^\top \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es el vector incógnita, y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ es el vector de constantes.

Para que este sistema tenga una única solución, la matriz $\mathbf{A}$ debe ser invertible. Esto ocurre si y solo si los vectores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ son linealmente independientes, ya que en ese caso el determinante de $\mathbf{A}$ es distinto de cero, es decir,

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^\top \\ \mathbf{n}_2^\top \\ \mathbf{n}_3^\top \end{pmatrix} \neq 0.$$

Los vectores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ son linealmente independientes si y solo si el determinante de la matriz formada por ellos como filas es distinto de cero. Es decir, si y solo si:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^\top \\ \mathbf{n}_2^\top \\ \mathbf{n}_3^\top \end{pmatrix} \neq 0.$$

Esta condición garantiza que los tres vectores normales no son combinaciones lineales entre sí, lo cual implica que los tres planos no son paralelos entre sí y se intersectan en un único punto.

Ejercicio 5.15

¿Cómo son los círculos en la esfera? Es decir, ¿cómo son los conjuntos

$$C = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 \mid d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = r \right\},$$

con $\mathbf{u} \in S^2$ fijo (el centro del círculo) y $r > 0$ constante (el radio)?

Demostración

Consideremos la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, que está dada por

$$S^2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}.$$

Además, sea $\mathbf{u} \in S^2$ un punto fijo que tomaremos como el centro del círculo. Queremos analizar el conjunto C dado por

$$C = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 \mid d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = r \right\},$$

donde $d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ es la distancia geodésica entre los puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ sobre la esfera, y r es el radio constante del círculo.

La distancia geodésica $d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ entre dos puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ en la esfera es igual al ángulo central θ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$, medido en radianes. Es decir,

$$d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ es el producto punto de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$. Esto se debe a que la distancia geodésica en una esfera se relaciona con el ángulo central entre los puntos de la esfera.

El conjunto C es el conjunto de puntos en la esfera S^2 cuya distancia geodésica a $\mathbf{u}$ es constante e igual a r. Es decir, estamos buscando los puntos $\mathbf{x} \in S^2$ que satisfacen

$$d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = r.$$

Esto implica que

$$\cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) = r,$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \cos(r).$$

La ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \cos(r)$ describe un conjunto de puntos en la esfera que forman un círculo. Este círculo está contenido en un plano que es ortogonal al vector $\mathbf{u}$ y pasa por el punto $\mathbf{u}$. Es decir, el círculo es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en la esfera que están a un ángulo r de $\mathbf{u}$, y su plano tangente es perpendicular a $\mathbf{u}$.

Para ver esto más claramente, pensemos en la esfera S^2 como el conjunto de puntos unitarios en $\mathbb{R}^3$. Los puntos $\mathbf{x} \in S^2$ que satisfacen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \cos(r)$ forman un círculo en la esfera cuya proyección sobre el plano tangente en $\mathbf{u}$ es un círculo con radio $\sin(r)$. Este círculo está contenido en el plano ortogonal a $\mathbf{u}$, y se encuentra a una distancia angular r de $\mathbf{u}$.

Por lo tanto, los conjuntos $C = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 \mid d_{S^2}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = r \right\}$ son círculos en la esfera, los cuales están contenidos en un plano ortogonal al vector normal $\mathbf{u}$, y tienen radio $\sin(r)$, con r siendo el ángulo central correspondiente. Estos círculos son geodésicos sobre la esfera.

Ejercicio 5.17

Sean ξ y ζ dos líneas esféricas. Demuestra que son ortogonales (i.e. que $\mathrm{ang}(\xi, \zeta) = \frac{\pi}{2}$ con cualquier orientación que se les dé a las líneas) si y sólo si $\xi^\perp \subset \zeta$, donde $\xi^\perp$ denota al par antípoda polar a ξ cuando ésta no tiene orientación preferida.

Sean ξ y ζ dos líneas esféricas. Demuestra que son ortogonales (i.e. que $\mathrm{ang}(\xi, \zeta) = \frac{\pi}{2}$ con cualquier orientación que se les dé a las líneas) si y sólo si $\xi^\perp \subset \zeta$, donde $\xi^\perp$ denota al par antípoda polar a ξ cuando ésta no tiene orientación preferida.

Solución:

Primero, recordemos la definición de líneas esféricas y polaridad.

Una línea esférica es la intersección de la esfera S^2 con un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Es decir, dado un plano π que pasa por el origen, la línea esférica ξ es:

$$\xi = \pi \cap S^2.$$

Cada línea esférica es, por lo tanto, un círculo máximo de la esfera, y cualquier par de puntos u, v sobre una línea esférica determina un plano por el origen que contiene a la línea esférica.

Dado un punto $u \in S^2$, su *polar* es la línea esférica $\xi^\perp$ formada por los puntos $v \in S^2$ tales que el plano generado por el origen, u y v es ortogonal al plano generado por u y v. Formalmente, $u^\perp$ es la línea esférica perpendicular a la línea que contiene u.

Para cada línea esférica orientada ξ, su polar $\xi^\perp$ es la línea esférica que pasa por todos los puntos u tales que el plano generado por u y ξ es ortogonal al plano generado por los vectores de ξ. En otras palabras, si u es un punto de ξ, entonces $u^\perp$ es la línea esférica asociada a u.

Ahora, supongamos que las líneas ξ y ζ son ortogonales. Esto significa que el ángulo entre las líneas esféricas ξ y ζ es $\frac{\pi}{2}$. De acuerdo con la definición de ángulo entre dos líneas esféricas orientadas, tenemos:

$$\operatorname{ang}(\xi, \zeta) = d_{S^2}(\xi^\perp, \zeta^\perp).$$

Si las líneas son ortogonales, entonces el ángulo entre sus líneas polares también será $\frac{\pi}{2}$, es decir, $\xi^\perp$ y $\zeta^\perp$ son ortogonales.

Esto implica que $\xi^\perp \subset \zeta$, ya que las líneas polares $\xi^\perp$ y $\zeta^\perp$ están relacionadas de forma que el plano que contiene a $\xi^\perp$ y $\zeta^\perp$ es ortogonal al plano generado por las líneas ξ y ζ.

Por otro lado, supongamos que $\xi^\perp \subset \zeta$. Esto significa que la línea polar $\xi^\perp$ está contenida en la línea esférica ζ. Como $\xi^\perp$ y $\zeta^\perp$ están relacionadas por la polaridad, esto implica que el ángulo entre las líneas esféricas ξ y ζ es $\frac{\pi}{2}$. Es decir, $\operatorname{ang}(\xi, \zeta) = \frac{\pi}{2}$.

Hemos demostrado que las líneas esféricas ξ y ζ son ortogonales si y sólo si $\xi^\perp \subset \zeta$.