tarea 15 geometria

Hector Javier Salazar Alvarez

November 2024

EJERCICIO 6.1

En el ejemplo anterior, encontramos la función inversa de μ, es decir, la expresión paramétrica de la proyección desde p en R^2 a R^1; llamémosla ν. Dada la función:

$$\mu(s) = \frac{-2}{3s-1}$$

Queremos encontrar la función inversa $\nu(t)$ tal que:

$$\nu(\mu(s)) = s \quad \text{y} \quad \mu(\nu(t)) = t.$$

Resolvemos la ecuación:

$$t = \frac{-2}{3s-1}$$

Despejando s en términos de t, multiplicamos ambos lados por $(3s-1)$:

$$t(3s-1) = -2.$$

Distribuimos t en el lado izquierdo:

$$3ts - t = -2.$$

Aislamos el término $3ts$:

$$3ts = t - 2.$$

Finalmente, despejamos s:

$$s = \frac{t-2}{3t}.$$

Por lo tanto, la función inversa es:

$$\nu(t) = \frac{t-2}{3t}.$$

Verificamos que ν es la inversa de μ:
Verificamos que $\nu(\mu(s)) = s$:

$$\nu(\mu(s)) = \nu\left(\frac{-2}{3s-1}\right) = \frac{\left(\frac{-2}{3s-1}\right) - 2}{3\left(\frac{-2}{3s-1}\right)} = s.$$

Verificamos que $\mu(\nu(t)) = t$:

$$\mu(\nu(t)) = \mu\left(\frac{t-2}{3t}\right) = \frac{-2}{3\left(\frac{t-2}{3t}\right) - 1} = t.$$

Por lo tanto, $\nu(t)$ es efectivamente la inversa de $\mu(s)$.

EJERCICIO 6.7

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas parametrizadas y p un punto fuera de ellas. Demuestra que la transformación de Möbius que relaciona sus parámetros es afín si y sólo si las líneas son paralelas.

ida: Si las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, la transformación es afín

1. Supongamos que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Esto significa que sus vectores directores son proporcionales.
2. Sea $\ell_1(s) = \vec{a} + s\vec{u}$ y $\ell_2(t) = \vec{b} + t\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector director común.
3. La proyección desde el punto p a una recta ℓ_1 sobre ℓ_2 puede ser descrita por una relación afín entre los parámetros s y t.
4. Debido a que $\vec{u}$ es común para ambas rectas, la transformación entre s y t es simplemente una escala y una traslación:

$$t = \alpha s + \beta$$

5. Esto implica que la transformación de Möbius que relaciona los parámetros es una transformación afín.

vuelta : Si la transformación es afín, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas

1. Supongamos que la transformación de Möbius entre los parámetros s y t es afín:

$$t = \alpha s + \beta$$

2. Esto implica que la relación entre $\ell_1(s)$ y $\ell_2(t)$ es de la forma:

$$\ell_2(t) = \ell_2(\alpha s + \beta)$$

3. Si $t = \alpha s + \beta$, entonces las rectas ℓ_1 y ℓ_2 deben tener vectores directores proporcionales, lo que significa que son paralelas.
4. Por lo tanto, si la transformación es afín, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.

Ejercicio 6.9

Teorema de 3 en 3

Para tres puntos $A = [x_1 : y_1]$, $B = [x_2 : y_2]$, $C = [x_3 : y_3]$ en P^1, y tres puntos $A' = [x'_1 : y'_1]$, $B' = [x'_2 : y'_2]$, $C' = [x'_3 : y'_3]$ en P^1, existe una única transformación proyectiva μ tal que:

$$\mu(A) = A' \mu(B) = B' \mu(C) = C'$$

Demostración

1. **Representación de los puntos en coordenadas homogéneas:**

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

   y

$$A' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

2. **Matriz de transformación proyectiva:** Buscamos una matriz $M \in GL(2, R)$ tal que:

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

3. **Formación del sistema de ecuaciones:** La matriz M tiene la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Entonces, necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 & | & x'_1 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 & | & y'_1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 & | & x'_2 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 & | & y'_2 \\ x_3 & y_3 & 0 & 0 & | & x'_3 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 & | & y'_3 \end{pmatrix}$$

   Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos los valores de a, b, c, d que determinan la matriz M.

4. **Verificación de unicidad:** La transformación μ es única porque el sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única siempre que los puntos A, B, C sean distintos y no colineales, lo cual garantiza que la matriz de coeficientes es invertible.

Ejercicio 6.10

Para cada una de las siguientes matrices, describe qué tipo de transformación de Möbius determina:

1. $\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   - **Tipo de transformación:** Inversión
   - **Descripción:** Para entender qué tipo de transformación determina esta matriz, recordemos que la forma general de una transformación de Möbius es:
   $$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$
   En este caso, la matriz $\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ implica que los coeficientes son $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, y $d = 0$. Por lo tanto, la transformación correspondiente es:
   $$\mu(x) = \frac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x + 0} = \frac{1}{x}.$$
   Esta es una **inversión**, porque intercambia el numerador y el denominador de la fracción, lo cual es típico de una transformación que invierte los puntos respecto a la unidad. Esta transformación tiene dos puntos fijos en $x = 1$ y $x = -1$, y preserva la orientación.

2. $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   - **Tipo de transformación:** Rotación seguida de una inversión
   - **Descripción:** Para esta matriz, también aplicamos la fórmula general de la transformación de Möbius:
   $$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$
   Con los coeficientes $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, y $d = 1$, la transformación resultante es:
   $$\mu(x) = \frac{1 \cdot x + 1}{-1 \cdot x + 1} = \frac{x + 1}{-x + 1}.$$
   Esta transformación tiene un comportamiento más complejo. Primero, se puede interpretar como una rotación alrededor de un punto, y luego, la inversión ocurre debido al cambio en el signo en el denominador. Los puntos fijos de esta transformación son $x = 1$ y $x = -1$, y esta transformación también preserva la orientación de los puntos.

3. $\mu = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Tipo de transformación:** Expansión
- **Descripción:** En este caso, la matriz tiene los coeficientes $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, y $d = 0$. Usando la fórmula de la transformación de Möbius, obtenemos:

  $$\mu(x) = \frac{2 \cdot x - 1}{1 \cdot x + 0} = \frac{2x - 1}{x}.$$

  Esta transformación es un ejemplo de **expansión**, porque el factor 2 en el numerador indica que la transformación aumenta la "escala" de los puntos en la recta proyectiva. Además, debido a la forma de la matriz, esta transformación tiene puntos fijos en $x = 1$ y $x = -1$, pero no preserva la orientación. Esto es típico de las transformaciones que producen expansión y rotación simultáneamente.

Ejercicio 6.22

Generaliza nuestra definición de P^1 y de P^2 para definir P^3 y P^n.

Definición de P^3

El espacio proyectivo tridimensional P^3 se define de manera similar a P^2, pero en R^4:

1. **Coordenadas Homogéneas:** Dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (es decir, al menos una de las coordenadas x_i es distinta de cero), definimos su clase de equivalencia como:

   $$[\mathbf{x}] = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \{t(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid t \in R, t \neq 0\}.$$

   Es decir, $[\mathbf{x}]$ representa la recta a través del origen en la dirección de $\mathbf{x}$, sin incluir el origen.

2. **Espacio Proyectivo:** El espacio proyectivo tridimensional P^3 se define como el conjunto de todas estas clases de equivalencia:

   $$P^3 = \left\{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in R^4, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\right\}.$$

   Los elementos de P^3 se denominan puntos proyectivos, y la notación $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ corresponde a un punto en P^3 dado por coordenadas homogéneas.

Definición de P^n

La generalización a dimensiones superiores sigue el mismo principio:

1. **Coordenadas Homogéneas:** Dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, definimos su clase de equivalencia como:

$$[\mathbf{x}] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}] = \{t(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid t \in R, t \neq 0\}.$$

   Es decir, $[\mathbf{x}]$ representa la recta a través del origen en la dirección de $\mathbf{x}$, sin incluir el origen.

2. **Espacio Proyectivo:** El espacio proyectivo n-dimensional P^n se define como el conjunto de todas estas clases de equivalencia:

$$P^n = \left\{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in R^{n+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\right\}.$$

   Los elementos de P^n se denominan puntos proyectivos, y la notación $[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$ corresponde a un punto en P^n dado por coordenadas homogéneas.

EJERCICIO 6.26

Sean $[a] = [1 : 0 : -1]$, $[b] = [2 : 1 : -1]$, $[c] = [0 : 1 : -1]$ y $[d] = [1 : -1 : 3]$. Encuentra el punto de intersección de las rectas que pasan por $[a]$ y $[b]$ y por $[c]$ y $[d]$; es decir, $\langle [a], [b] \rangle \cap \langle [c], [d] \rangle$.

Solución

Para encontrar el punto de intersección, utilizamos el producto cruzado entre los vectores correspondientes.

1. **Determinar las rectas que pasan por $[a]$ y $[b]$, y por $[c]$ y $[d]$:**

   - Para la recta que pasa por $[a]$ y $[b]$:

$$\mathbf{n_1} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0 - (-1)) - \mathbf{j}\,(1 - (-2)) + \mathbf{k}\,(1 - 0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n_1} = (1, -3, 1)$$

   - Para la recta que pasa por $[c]$ y $[d]$:

$$\mathbf{n_2} = \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(1 - (-1)) - \mathbf{j}\,(0 - 1) + \mathbf{k}\,(0 - 1) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n_2} = (2, 1, -1)$$

2. **Encontrar el punto de intersección de estas dos rectas:**

- El punto de intersección se puede encontrar calculando el producto cruzado de $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left((-3) - 1\right) - \mathbf{j}\left(1 - 2\right) + \mathbf{k}\left(1 - (-6)\right) = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = (-4, 1, 7)$$

3. **Resultado:**

- Finalmente, la intersección de las rectas $\langle [a], [b] \rangle \cap \langle [c], [d] \rangle$ es:

$$[-4 : 1 : 7]$$

EJERCICIO 6.37

Demuestra que la proyección estereográfica $f : S^2 - \{-e_3\} \to R^2$ tiene la fórmula analítica

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z+1}(x, y).$$

Demostración

La proyección estereográfica mapea puntos desde la esfera unitaria S^2 al plano R^2 usando el polo sur $-e_3$ como punto de proyección. Consideremos la esfera unitaria S^2 como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in R^3$ tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- La proyección estereográfica es una función $f : S^2 - \{-e_3\} \to R^2$.
- S^2 es la esfera unitaria, y estamos excluyendo el polo sur $-e_3$.

- Consideremos un punto $P = (x, y, z)$ en S^2, con $z \neq -1$.
- La línea que pasa por $-e_3$ y P se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(t) = (0, 0, -1) + t(x, y, z + 1).$$

- Queremos encontrar el punto de intersección de esta línea con el plano $z = 0$.
- Para que esto ocurra, el tercer componente de $\mathbf{r}(t)$ debe ser 0:

$$-1 + t(z + 1) = 0 \implies t = \frac{1}{z+1}.$$

- Sustituyendo t en las primeras dos componentes de $\mathbf{r}(t)$:

$$x' = tx = \frac{x}{z+1}, \quad y' = ty = \frac{y}{z+1}.$$

- Así, el punto de intersección (proyección estereográfica) en el plano R^2 es $\left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}\right)$.

- Por lo tanto, la proyección estereográfica se puede expresar como:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z+1}(x, y).$$