Repaso de Álgebra

Aclaración: Este apunte se comparte en calidad de borrador, todavía puede estar incomplto o contener algunos errroes.

1. Puntos vs Vectores

Si bien en muchos contextos se suelen usar los términos "punto" y "vector" como intercambiables, en computación gráfica será muy importante diferenciarlos, y diferenciar qué operaciones son posibles o tienen sentido sobre cada uno.

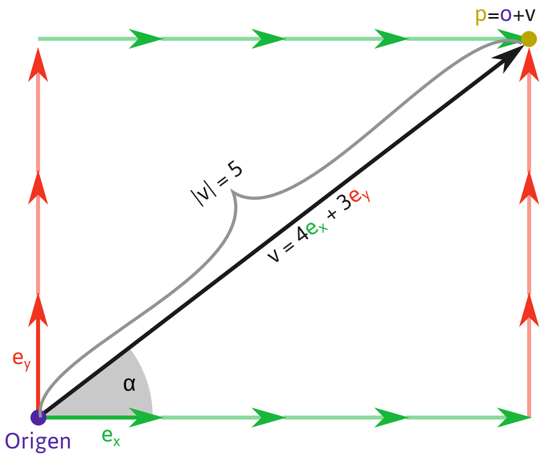
Un **punto** define una *posición* en el *espacio*. Un **vector** define una *distancia* en una determinada *dirección*. Por ejemplo, la ubicación de la FICH es un punto en el mapa, la ubicación de la Estación Belgrano es otro punto, y hay un vector que nos puede "llevar" desde el primero hacia el segundo. El vector es (aproximadamente[1]) *"1.5km para el este"* (distancia=1.5k, dirección=este).

Si al *punto* de la FICH le sumamos ese *vector*, obtenemos el punto de la estación (punto + vector = otro punto). Si al punto de la estación le restamos el punto de la FICH nos da ese vector (un punto - otro punto = un vector). Sin embargo, es importante notar que el vector no "está" en ningún lado. Puedo decir que si al punto de la estación le sumo el mismo vector, caigo en el Rectorado de la UNL, o que si al rectorado le sumo ese vector caigo en el estadio de Unión. Aunque para cada suma lo "piense" ubicado en cierto punto diferente, en realidad es siempre el mismo vector.

Siguiendo este razonamiento, tiene sentido multiplicar vectores por escalares. Si al punto de la UNL le sumo 3 veces ese vector, llego al punto de la cancha de Unión (vector por escalar = otro vector). O que si al punto de la estación le sumo -1 vez ese vector (lo cual genera el vector opuesto) obtengo nuevamente el punto de FICH. Pero usualmente no tiene sentido multiplicar puntos por escalares. ¿Qué podría significar *"4 veces la posición de la cancha de unión"*? ¿O *"la mitad de la posición de la estación Belgrano"*? Sin embargo, sí podemos pensar en que rectorado está en *"el punto medio entre la cancha de Unión y la estación Belgrano"*, lo cual sería más o menos como sumar la mitad de la estación más la mitad de la cancha; o *"a un tercio del camino desde Unión hasta la FICH"*. Estos casos tienen algo de particular, los escalares suman 1. Estamos obteniendo las coordenadas de punto como combinaciones lineales de las de otros dos, donde los coeficientes de las combinaciones siempre suman 1. A esta especie de promedio ponderado le llamaremos más adelante combinación *afín*, y lo estudiaremos más en detalle,

[1] Si toman una imagen satelital verán que la dirección no es exactamente al este (sino que tiene alguna componente hacia el norte), y que las distancias no son exactamente 1.5km. Aquí se "redondearon" las distancias y direcciones (imaginen que tomé el "Santa Fe" de algún universo paralelo) para hacer más simple la redacción y el ejemplo.

junto con formalizaciones más ”serias” de los diferentes elementos y sus espacios. Por el momento alcanza con comprender la distinción entre punto y vector, y saber que solo tiene sentido multiplicar puntos en el contexto de un promedio ponderado.



Al momento de representar un vector en un programa, usualmente utilizamos sus ”componentes”. Por ej, un vector en 2D puede representarse por 2 componentes, una para x y otra para y. Es como decir que ese vector se obtiene como combinación lineal de los versores de la base, y las ”componentes” son los coeficientes de esa combinación. Otra forma de representarlo, sería mediante un ángulo y un módulo, pero en general no la usaremos (ya que la primera es más adecuada para las operaciones que necesitaremos, y más fácil de generalizar a 3 o 4 dimensiones).

Para representar un punto se utilizan sus ”coordenadas”. Es como decir que se llega a ese punto partiendo del origen y sumándole una combinación lineal de los versores de la base. Las coordenadas del punto son los coeficientes de esa combinación. Se podría representar el punto en otros sistemas (con otra base de vectores no unitarios y/o no perpendiculares, o en otro sistema como el de las coordenadas esféricas, o cilíndricas, etc); dejaremos los detalles de esos otros sistemas para cuando se presenten más adelante.

Notar que ”coordenadas” no es lo mismo que ”componentes”. Para el punto es importante el origen, para el vector no. Sin embargo, si trabajamos por ejemplo en 3D, un vector tiene 3 componentes reales, y un punto 3 coordenadas reales, que en ambos casos que corresponden a x, y, z, y muchas operaciones entre ellos funcionan de forma similar. Por esto, en muchos programas un solo tipo de dato se utiliza indistintamente para representar cualquiera de los dos (un `struct punto` con 3 `doubles` puede servir para guardar las 3 coordenadas de un vector); pero es importante que al utilizarlo el programador sí distinga ambos casos y comprenda qué representa cada instancia para saber qué ”debe” hacer y qué no con ella (más allá de lo que le ”permita” hacer el sistema de tipos).

Por último, también es útil resaltar que si bien se puede pasar de la notación por componentes de un vector, a la de ángulo y módulo utilizando relaciones trigonométricas básicas para obtener el ángulo, hay que considerar que las funciones trigonométricas no son biyectivas. Esto es, que por ejemplo 0 es el coseno de $\frac{1}{2}\pi$ y también el de $\frac{3}{2}\pi$. En programación, la mayoría de las bibliotecas de funciones matemáticas ofrecen una versión de arcotangente que recibe la razón entre los catetos, y entonces retornará arbitrariamente una de las 2 soluciones; y otra versión que recibe los catetos por separado, y entonces, analizando sus signos, puede retornar la solución correcta sin ambigüedades. En C++ la segunda es `std::atan2`, y es la que se recomienda cuando se busca el ángulo considerando los $360°$.

2. Módulo y Normalización

En muchas situaciones será útil conocer el módulo de un vector (por ej, el módulo del vector diferencia entre dos puntos es la distancia entre esos puntos). En 2D, en un sistema cartesiano, el teorema de Pitágoras nos da una forma fácil y rápida de obtener ese módulo/distancia, ya que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde las medidas de los catetos son las componentes del vector: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Esta fórmula se puede generalizar a más dimensiones: $|\mathbf{v}| = \sum v_i^2$.

En ocasiones nos interesará que el vector sea unitario (módulo 1), ya sea porque eso simplifica algunos cálculos, o porque para la aplicación en particular solo nos interesa la dirección y el sentido. Para lograrlo, basta con dividirlo por su módulo ($\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$). Nos solemos referir a este procedimiento como *normalización* del vector.

3. Producto Escalar

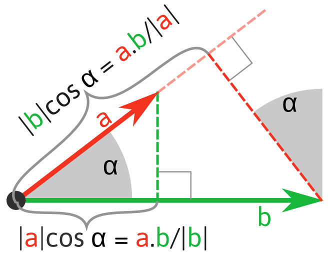
Como su nombre lo indica, el *producto escalar* (o *producto punto*) entre dos vectores da por resultado un escalar. Se puede definir mediante sus componentes: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i$. Notar que el módulo de un vector es la raíz cuadrada de el producto escalar consigo mismo: $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

El producto escalar también puede obtenerse como el producto entre los módulos de los vectores y el coseno del ángulo entre ellos: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$. La relación entre ambas definiciones se puede deducir o demostrar a partir de aplicar algunas reglas y equivalencias trigonométricas.

De la segunda forma de calcularlo se desprenden propiedades interesantes.

- Supongamos que ambos vectores son unitarios, entonces el producto escalar da el coseno del ángulo entre ellos. En particular, si tienen la misma dirección y sentido (ángulo $0°$) dará $+1$, si el sentido es opuesto (ángulo $180°$) dará -1 , y si son perpendiculares (ángulo $\pm 90°$) dará 0. En caso de no ser unitarios, diríamos positivo y negativo en lugar de $+1$ y -1.
- Por otro lado, sirve para obtener el ángulo interno entre ellos: $\alpha = \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Más aún, en muchos casos para comparar dos ángulos basta con comparar sus cosenos. Por ejemplo, si queremos saber si tres puntos (a, b, c) están "más o menos" alineados, podemos armar dos vectores ($b - a$ y $c - b$) y ver si el ángulo entre ellos es "más o menos" 0; pero eso es equivalente a decir que el coseno del ángulo es "más o menos" 1, por lo que podemos usar directamente el producto escalar y compararlo contra el coseno del ángulo máximo permitido (si "más o menos" significa $\pm 5°$, entonces comparamos contra cos $5°$, que es una constante).

3.1. Proyecciones

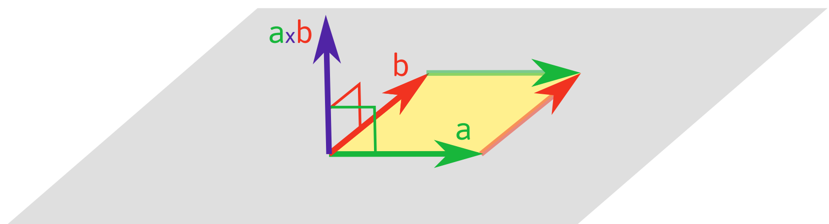


El producto escalar sirve también para obtener la *proyección* de un vector sobre otro. La proyección puede interpretarse como cual es la componente en una cierta dirección (entonces sirve para descomponer un vector en una suma de vectores en direcciones predefinidas, como las de la base); o también para decir cuanto un vector se "parece" a otro (cuanto más grande el producto escalar, más se "parecen"). En CG nos interesará muchas veces la primera idea: si $\mathbf{d}$ es unitario, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}$ nos da un escalar que dice cuanto mide el vector proyectado en la dirección de $\mathbf{d}$. Si quiero el *vector* proyección (digamos $\mathbf{p}$), debo generarlo combinando la dirección de $\mathbf{d}$ y el módulo que da el producto: $\mathbf{p} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}$. Si $\mathbf{d}$ no es unitario, debo normalizarlo: $\mathbf{p} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}\right)\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}}{|\mathbf{d}||\mathbf{d}|} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}}{\mathbf{d}^2}$.

4. Producto Vectorial

El producto *vectorial* (o producto *cruz*) entre dos vectores da un nuevo vector. Se puede calcular como el determinante de una matriz que involucra a las componentes y los versores de la base ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$):

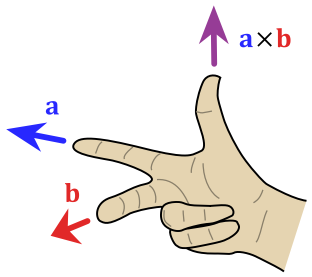
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



Este vector tiene la particularidad de ser perpendicular a los dos originales (o sea, normal al plano que definen), y tener un módulo que equivale al área del paralelogramo que definen. Por ejemplo, si hacemos el producto entre dos vectores que solo tienen componentes no nulas en x e y, obtenemos un vector que solo tiene componente no nula en z (y por esto muchos consideran que el caso 2D da un escalar, porque solo toman la componente z del vector resultante). Sin embargo, definimos la dirección (paralelo al eje z) y el módulo (el área del paralelogramo), pero no el sentido (¿apunta hacia z positivo o negativo?). El sentido se define por convención de acuerdo a la "regla de la mano derecha" [2]. La idea de esta regla es que si

[2] La elección de esta regla es arbitraria, bien se podría decidirse usar la de la mano izquierda y plantear todo consistentemente al

hacemos el producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$, al alinear el dedo índice con el vector **a** y el dedo medio con el vector **b**, el pulgar señala el sentido de **v**. O alternativamente puede pensarse que si los dedos (todos menos el pulgar) señalan el sentido de *giro* (horario o anti-horario) para ir de la dirección de **a** hacia la de **b** (por el camino más corto, o sea por el ángulo interior), entonces el pulgar señala el sentido de **v**.



[3]

Esto nos permite definir un *sentido de giro* o una *orientación* que es útil en muchos casos. Si tengo dos operaciones sobre un plano que a través de este producto terminan en dos vectores, y quiero comparar sus sentidos, puedo usar el producto escalar entre ellos y mirar el signo del resultado (por ejemplo, si quiero saber si dos puntos están del mismo lado respecto a una recta).

Más aún, dado que en computación gráfica es habitual trabajar con triángulos como primitivas, es importante notar que el módulo del producto vectorial nos da el área de un triángulo: si se construyen dos vectores con dos de sus lados, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo. Pero si en lugar de usar solo la magnitud, consideramos el sentido, tenemos un área con "signo" (de alguna forma los sentidos representarán áreas positivas y áreas negativas). Esto nos permite, por ejemplo, distinguir en un triángulo que hay que renderizar, sus dos caras, para determinar si la cámara está viendo su cara delantera o su cara trasera.

5. División entre vectores

Aunque a esta altura debería ser obvio, la experiencia nos dice que vale la pena resaltarlo: **no se puede dividir por un vector**. Muchos alumnos plantean ecuaciones que involucran vectores y en el proceso de *despejar* una incógnita comenten el grosero error de *pasar dividiendo*[4] al otro lado un vector que estaba multiplicando. La división de un vector por otro, o de un escalar por un vector **no** está definida, no es posible. Sí se puede dividir por el módulo de un vector o por un vector al cuadrado, dado que ambas cosas resultan en un escalar; pero nunca por un vector.

revés. Formalmente, cual de estas convenciones se deba usar depende en realidad de cómo se definió el espacio y la base.

[3]Imagen tomada de Wikipedia. Autor original: Acdx, licencia Creative Commans Attributions-Share Alike 3.0.

[4]Aunque no se trate de vectores, tampoco es correcto decir que al despejar se "pasa" dividiendo (o cualquier operación). Si fueran, por ejemplo, escalares, y queremos "pasar" x al otro lado, lo que en realidad se hace es "dividir ambos términos" por x; y en consecuencia de un lado se "cancela" la x, al quedar $\frac{x}{x} = 1$. La distinción es importante porque si x puede ser 0, entonces ese "pasaje" no es correcto (de un lado de la ecuación queda $\frac{x}{x}$, que es indeterminado, mientras que del otro queda $\frac{\text{"algo"}}{x}$, lo cual podría representar ∞).