Cálculo Numérico 2023
Trabajo Práctico 7

Algoritmos para problemas de valores iniciales

Ejercicio 1 (Aula): Clasifique los siguientes esquemas en métodos de un paso, multipasos, explícitos e implícitos, e indique el orden de cada uno.

(a) Euler hacia adelante:
$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

(b) Euler hacia atrás:
$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$$

(c) Trapezoidal o Crank-Nicholson:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

(d) Euler modificado (Runge-Kutta de 2do Orden):
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

(e) Heun (Runge-Kutta de 3er Orden):
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f_n + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf_n)]$$

(f) Runge-Kutta de 4to Orden:
$$\begin{aligned}
y_0 &= \alpha \\
k_1 &= h \cdot f(t_i, y_i) \\
k_2 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}$$

Ejercicio 2 (Aula): Considere el siguiente PVI:
$$\begin{cases} y' = -y + \operatorname{sen} t + \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Se desea conocer el valor de la variable de estado y a tiempo $t = 2$.

(a) Complete la siguiente tabla con la aproximación de $y(2)$ obtenida utilizando los métodos de Euler, RK2 y RK4 con los pasos indicados:

h	L	Euler	RK2	RK4
1/10				
1/20				
1/40				
1/80				
1/160				
1/320				

(b) Determine la cantidad de pasos L y el número de evaluaciones de f que fueron necesarios, en cada método, para obtener $y(2)$ con:

(i) Tres decimales correctos. **(ii)** Seis decimales correctos.

Ejercicio 3 (Aula): Se desea resolver un PVI de la forma

$$y' = \texttt{f}(t, y) \quad \texttt{a} \leq t \leq \texttt{b} \quad y(\texttt{a}) = \texttt{y0}$$

mediante el método de Crank-Nicholson con iteraciones de Newton para avanzar la solución.

(a) Explicite y justifique en un pseudo-código las ecuaciones que se resuelven en cada paso del procedimiento.

(b) Implemente en Octave la función `function [t,y] = CN_Newton(f,dfdy,a,b,y0,N)` que resuelve este problema, donde `dfdy` es la derivada parcial de la función `f` respecto de y, y `N` es el número de pasos. Dicha función devuelve el vector de los pasos de tiempo `t` y la solución aproximada en el vector `y`.

(c) Repita el ejercicio para el método de Euler hacia atrás.

Ejercicio 4 (Aula): Analice el comportamiento del error para los métodos de Euler hacia adelante, Euler hacia atrás y Crank-Nicholson cuando se resuelve el siguiente PVI

$$y' = te^{3t} - 2y \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 0$$

cuya solución exacta es $y(t) = te^{3t}/5 - e^{3t}/25 + e^{-2t}/25$. Considere los siguientes pasos $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Determine si el orden empírico para cada uno de los métodos se corresponde con el teórico.

Ejercicio 5: Utilice los esquemas de Runge-Kutta de cuarto orden y el siguiente esquema preditor-corrector de Adams de cuarto orden para resolver el PVI del ejercicio 4. Compare los resultados obtenidos.

(a) Adams-Bashford de 4to orden (predictor)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

(b) Adams-Moulton de 4to orden (corrector)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Conceptos de consistencia, orden, estabilidad y convergencia: sea un método multipaso escrito en su forma general (donde el número de pasos del método es $p + 1$)

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

para el PVI $y' = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$, y su error local de truncamiento

$$T_n(y) = y(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{p} a_j y(t_{n-j}) - h \sum_{j=-1}^{p} b_j y'(t_{n-j})$$

podemos analizar:

- *Consistencia:* una condición necesaria y suficiente para que el método multipaso dado sea *consistente* es que se cumpla

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 \quad \text{y} \quad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

- *Orden:* para que el método multipaso sea $O(h^m)$ es necesario y suficiente que además de las ecuaciones anteriores se verifique

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^k a_j + k \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{k-1} b_j = 1 \quad \text{para } k = 2, 3, \cdots, m$$

- *Condición de la Raíz:* consiste en analizar las raíces del polinomio característico

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j}$$

  Si sus raíces (no necesariamente distintas) cumplen $|r_i| \leq 1$ para cada $i = 1, 2, \cdots, m$ y *si todas las raíces con valor absoluto igual a 1 son simples*, se dice que el método cumple la condición de la raíz.

- *Estabilidad:* los métodos se clasifican de la siguiente manera según su *estabilidad*:

  (a) *Fuertemente Estables*: son aquellos que cumplen la condición de la raíz y tienen a $r = 1$ como *la única* raíz de la ecuación característica cuya magnitud es igual a uno.

  (b) *Débilmente Estables*: aquellos que cumplen la condición de la raíz pero tienen más de una raíz cuyo valor absoluto o módulo es igual a uno.

  (c) *Inestables*: aquellos que no cumplen la condición de la raíz.

Relaciones entre las definiciones: un método multipaso de la forma

$$y_0 = \alpha, \quad , y_1 = \alpha_1, \cdots, y_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

donde

$$y_{i+1} = a_{m-1} y_i + a_{m-2} y_{i-1} + \cdots + a_{m-1} y_i + hF(t_i, h, y_{i+1}, y_i, \cdots, y_{i+1-m})$$

es estable si y sólo si cumple la condición de la raíz. Además, si el método es consistente, entonces será estable si y sólo si es convergente.

Ejercicio 6: Analice consistencia, estabilidad, orden y convergencia de los métodos Euler hacia atrás, Crank-Nicholson, Adams-Bashford y Adams-Moulton.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio 7 (Aula): La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por la curva $(x_1(t), x_2(t))$, donde las funciones x_1 y x_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -tx_2(t) \\ x_2'(t) = tx_1(t) - tx_2(t) \end{cases}$$

Resuelva este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y grafique la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$.

Ejercicio 8 (Aula): (Modelo predador-presa de Lotka-Volterra) Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(3 - 0.002x_2) \\ x_2'(t) &= -x_2(0.5 - 0.0006x_1) \end{aligned}$$

(a) ¿Cuál variable representa al predador y cuál a la presa? Para determinar esto, tenga en cuenta las siguientes preguntas:

¿Cuál de las dos especies puede sobrevivir sin la existencia de la otra?

¿Qué especie se extingue si la otra no existe?

(b) Calcule numéricamente una solución donde la población inicial de la presa es 1600 y la de predadores es 800 , considerando el tiempo t en meses. Dibujar la solución, graficando ambas poblaciones con el tiempo, y describir el fenómeno representado (utilice un método que usted considere apropiado, y un intervalo de tiempo que sea representativo de lo que sucede).

Ejercicio 9 (Aula): Considere siguiente PVI de orden 3:

$$\begin{cases} y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = -4\operatorname{sen} t - 2\cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

(a) Reescriba el problema como un sistema de EDO de primer orden, con sus respectivos valores iniciales.

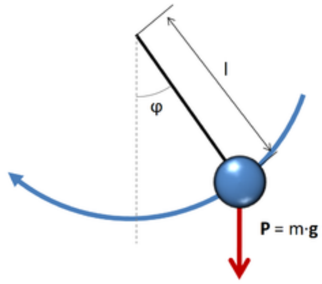
(b) Grafique la solución y obtenga el valor de la variable de estado y en $t = 2.5$, con 6 dígitos exactos.

(c) Indique cuántas veces se anula la función $y'(t)$ en el intervalo $[0, 15]$.

Ejercicio 10 (Aula): (Péndulo simple) Si consideramos un péndulo de brazo rígido de longitud ℓ, donde no hay fricción ni resistencia del aire, el ángulo $\varphi(t)$ que forma el péndulo con la vertical satisface la siguiente ecuación diferencial de orden dos:

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\varphi(t) = 0,$$

donde $g = 9.81g/m^2$ es la constante de aceleración gravitacional.



Supongamos (por simplicidad) que la longitud del brazo es igual a $9.81m$, con lo que obtenemos la ecuación

$$\varphi''(t) + \operatorname{sen}\varphi(t) = 0.$$

Resolver esta ecuación numéricamente en el intervalo $[0, 20]$ y explicar, en cada uno de los siguientes casos, la situación física descripta (condiciones iniciales y evolución):

(a) $\varphi(0) = 0.1$, $\varphi'(0) = 0$

(b) $\varphi(0) = 0.7$, $\varphi'(0) = 0$

(c) $\varphi(0) = 3.0$, $\varphi'(0) = 0$

(d) $\varphi(0) = 3.5$, $\varphi'(0) = 0$

(e) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$

(f) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1.99$

(g) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 2$

(h) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 2.01$

Ejercicio 11 (Aula): Utilice el método predictor-corrector de Adams del ejercicio 5 para resolver el siguiente PVI,

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln(t) \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

cuya solución exacta es: $y(t) = (7/4)t + (1/2)t^3 \ln(t) - (3/4)t^3$. Considere el método de Runge-Kutta de cuarto orden para calcular la solución en los pasos 1, 2 y 3 (el 0 es la condición inicial) requeridos por el predictor. Resuelva el problema para los pasos $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Presente una tabla con los errores máximos obtenidos para cada ecuación y saque conclusiones.