Cálculo Numérico 2023
Trabajo Práctico 8

Algoritmos para problemas de valores de contorno lineales

Método del disparo lineal:
La siguiente es una función de Octave que aproxima la solución de un problema de valores de contorno del siguiente tipo mediante el método del disparo lineal con Runge-Kutta de orden 4 para avanzar en la solución:

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \qquad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

```
function [x,y]=disparo_lineal(f,inter,yc,L)
%function [x,y]=disparo_lineal(f,[a b],[alpha,beta],L)
%Metodo del disparo lineal que resuelve
%el problema de valores de contorno lineal con
%usando Runge-Kutta
%condiciones Dirichlet
% y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) para x en [a,b]
% y(a)=alpha , y(b)=beta
%f: funcion columnas con las funciones p,q,r
%L: cantidad de subintervalos

p=@(x) f(x)(:,1);
q=@(x) f(x)(:,2);
r=@(x) f(x)(:,3);

%costruye sistema
F=@(x,y) [y(3);
          y(4);
          p(x)*y(3)+q(x)*y(1)+r(x);
          p(x)*y(4)+q(x)*y(2)+r(x)];

%define condiciones iniciales del sistema
y0=[yc(1);yc(1);0;1];

[x,yd]=rk4(F, inter, y0, L);

lambda=(yc(2)-yd(end,2))/(yd(end,1)-yd(end,2));
y=lambda*yd(:,1)+(1-lambda)*yd(:,2);
```

Ejercicio 1: Dado el problema en su forma general como se presenta en el ejercicio anterior, comente acerca de las condiciones que tienen que satisfacer las funciones p, q y r para que tenga solución única.

Ejercicio 2 (Aula): Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln(x))}{x^2}, \qquad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

cuya solución exacta está dada por

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{10}\cos(\ln(x))$$

donde

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln(2)) - 4\cos(\ln(2))]$$

y

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2$$

aplique el algoritmo del disparo lineal con $h = 0.1$ y $h = 0.01$ para hallar la solución aproximada del mismo. Calcule el error cometido y el órden empírico del método. Saque conclusiones.

Método de diferencias finitas lineal:

La siguiente es una función de Octave que aproxima la solución de un problema de valores de contorno del siguiente tipo (con condiciones de contorno Dirichlet) mediante el método de diferencias finitas lineal 1-D:

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \qquad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

```
function [x,y]=dif_fin_dir(f,inter,yc,L)
%function [x,y]=disparo_lineal(f,[a b],[alpha,beta],L)
%Metodo de diferencias finitas que resuelve
%el problema de valores de contorno lineal
%condiciones Dirichlet
% y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) para x en [a,b]
% y(a)=alpha , y(b)=beta
%f: funcion columnas con las funciones p,q,r
%L: cantidad de subintervalos

p=@(x) f(x)(:,1);
q=@(x) f(x)(:,2);
r=@(x) f(x)(:,3);

#division del intervalo
x=linspace(inter(1),inter(2),L+1)';
h=(inter(2)-inter(1))/L;

#construccion de la matriz
col=[-1-h/2*p(x(3:end)) 2+h^2*q(x(2:end-1)) -1+h/2*p(x(1:end-2))];
A = spdiags(col, [-1 0 1], L-1, L-1);

#construccion del vector de terminos idependientes
b = -h^2*r(x(2:end-1));
b(1)+=(1+h/2*p(x(2)))*yc(1);
b(end)+=(1-h/2*p(x(end-1)))*yc(2);

#resolucion del sistema
ys=A\b;

#solucion con las condiciones de contorno
y=[yc(1);ys;yc(2)];
```

Ejercicio 3 (Aula): Resuelva el problema de valores de contorno que se presenta en el ejercicio 2, con los mismos tamaños para h, pero aplicando el método de diferencias finitas lineal 1-D. Compare el resultado con aquél obtenido por el método del disparo lineal y saque conclusiones.

Otras condiciones de contorno: La siguiente es una función de Octave que aproxima la solución de un problema de valores de contorno del siguiente tipo (con condiciones de contorno Dirichlet en el extremo izquierdo y Robin en el extremo derecho del dominio) mediante el método de diferencias finitas lineal 1-D:

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \qquad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad A\, y'(b) + B\, y(b) = C$$

```
function [x,y]=dif_fin_rob(f,inter,ycd,rob,L)
%function [x,y]=dif_fin_rob(f,[a b],alpha,[A B C],L)
%Metodo de diferencias finitas que resuelve
%el problema de valores de contorno lineal con
%condicion mixta
% y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) para x en [a,b]
% y(a)=alpha , Ay'(b) + By(b) = C
%f: funcion columnas con las funciones p,q,r
%L: cantidad de subintervalos

p=@(x) f(x)(:,1);
q=@(x) f(x)(:,2);
r=@(x) f(x)(:,3);

#division del intervalo
x=linspace(inter(1),inter(2),L+1)';
h=(inter(2)-inter(1))/L;

#construccion de la matriz
col=[-1-h/2*p(x(3:end)) 2+h^2*q(x(2:end-1)) -1+h/2*p(x(1:end-2))];
col=[col;0 2+h^2*q(x(end)) -1+h/2*p(x(end-1))];
A = spdiags(col, [-1 0 1], L+1, L+1);
A(end-1,end)=-1+h/2*p(x(end));
A(end,end-2:end)=[-rob(1) 2*h*rob(2) rob(1)];
#construccion del vector de terminos idependientes
b = -h^2*r(x(2:end));
b(1)+=(1+h/2*p(x(2)))*ycd;
b(end+1)=2*h*rob(3);

#resolucion del sistema
ys=A\b;

#solucion con las condiciones de contorno
y=[ycd;ys(1:end-1)];
```

Ejercicio 4 (Aula): Ponga a prueba el algoritmo anterior para resolver el Ejercicio 3, eligiendo adecuadamente las constantes A, B y C de la condición de contorno en $x = b$.

Ejercicios de aplicación

Problema de difusión del calor en una barra: Consideremos una barra de longitud L y sección transversal constante, orientada en la dirección del eje x (desde $x = 0$ hasta $x = L$). Supongamos que todas las cantidades térmicas del material son constantes en cada sección transversal (superficie lateral aislada, salvo, quizás, en los extremos). Si la barra es uniforme, tenemos la siguiente ecuación diferencial, que se conoce como *Ecuación del Calor*:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + Q(x,t)$$

donde c es el calor específico, ρ la densidad de masa del material, K_0 la conductividad térmica. Q representa una fuente de energía térmica que actúa sobre la barra, y la incógnita $u(x,t)$ es la temperatura en el punto x de la barra a tiempo t. Si consideramos el *estado estacionario* del problema, la ecuación en derivadas parciales anterior se reduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$-K_0 u''(x) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le L$$

donde $f(x)$ es la fuente que actúa sobre la barra, una vez alcanzado el estado estacionario ($t \to \infty$). Con las condiciones de contorno adecuadas, podemos construir lo que se denomina *problemas de difusión.*

Difusión-reacción: Un problema de *difusión-reacción* se obtiene al introducir en la ecuación del calor un término *reactivo* con coeficiente de reacción $c_R(x)$ (eventualmente puede depender de la posición en la barra). La ecuación que describe este fenómeno queda expresada como:

$$-K_0 u''(x) + c_R(x)u(x) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le L$$

Condiciones de contorno: Podemos mencionar tres clases diferentes de condiciones de contorno. Por ejemplo, en $x = L$ las escribimos así:

$u(L) = \beta$	temperatura prescripta (tipo Dirichlet)
$-K_0 u'(L) = \phi$	flujo de calor prescripto (tipo Neumann)
$-K_0 u'(L) = H[u(L) - u_E]$	ley enfriamiento de Newton (tipo Robin)

donde hemos llamado u_E la temperatura externa en las cercanías del borde $x = L$, H es una constante de proporcionalidad. Si $\phi = 0$ decimos que el extremo se encuentra aislado.

Ejercicio 5 (Aula): Considere el proceso de difusión en una barra de material homogéneo de longitud $L = 3$ y conductividad térmica $K_0 = 1$. Suponga que la temperatura en el extremo izquierdo es igual a 21 y que el extremo derecho se encuentra aislado. Se sabe que sobre la barra actúa una fuente $f(x) = 20\ \sin(5(x-1))$.

(a) Determine, con dos dígitos decimales exactos, la temperatura en el extremo derecho de la barra. Explique cómo lo hizo.

(b) Estime en qué punto de la barra la temperatura es máxima, y qué valor de temperatura alcanza en dicho punto.

Ejercicio 6 (Aula): Una barra de cobre homogénea de 5cm de largo se somete a un estudio de difusión-reacción de calor. Se conoce la conductividad térmica del material $K_0 = 0.9$cal/ (s $\cdot$ cm $\cdot$ °C). El extremo izquierdo de la barra se somete a una temperatura fija de 6°C y en el extremo derecho rige la ley de enfriamiento de Newton donde $H = 15$ cal/(s $\cdot$ cm^2 $\cdot$ °C) es el coeficiente transferencia de calor y $u_E = 4$ °C es la temperatura exterior. En la barra actúa una fuente de calor $f = 5x(5-x)$, medida en cal/(s $\cdot$ cm^3), y un proceso reactivo cuyo coeficiente en cada punto de la barra se expresa como $c_R(x) = 1.05x + 2$, con unidades cal/(s $\cdot$ cm^3 $\cdot$°C).

(a) Plantee la ecuación diferencial que gobierna la distribución de temperatura en estado estacionario de la barra de cobre, indicando las condiciones de contorno.

(b) Determine, con 4 dígitos decimales exactos, la temperatura en el punto medio de la barra. Explique cómo lo hizo.

Problema de disipador de calor: Un disipador de calor esta adjunto a un componente electrónico con el objeto de disipar el exceso de calor generado por el dispositivo y prevenir un sobrecalentamiento del mismo (Ver Figura 1). Un esquema de una de las aletas disipadoras se muestra en la Figura 2. La geometría de la misma es del tipo trapezoidal, la cual tiene en su base un ancho W_1 y en su parte superior W_2. La altura es L_1 y su profundidad o ancho es D. La distribución de temperatura en la aleta está gobernada por un análisis 1-D de la ecuación del calor en un sólido. El análisis incluye una relación empírica que involucra un coeficiente de calor convectivo H. Esta relación se introduce para separar la conducción dentro del sólido con la transferencia de calor a través del aire que rodea la aleta. Este coeficiente se determina en forma experimental o por métodos numéricos, tales como CFD. En consecuencia, la ecuación que gobierna la distribución de temperaturas $u(x)$ es la siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{du}{dx}(x)\right) = \frac{HP(x)}{k}\,(u(x) - u_E)$$

donde hemos llamado k al *coeficiente de conducción*, $A(x)$ el área de sección transversal, y $P(x)$ el perímetro de la misma, que se determinan, mirando la geometría, como:

$$A(x) = \frac{DW_1}{L}(L-x)\ ,\ P(x) = \frac{2W_1}{L}(L-x) + 2D$$

Finalmente la ecuación de estado queda:

$$\frac{DW_1}{L}(L-x)\ u''(x) - \frac{DW_1}{L}\ u'(x) = \frac{H}{k}\left(\frac{2W_1}{L}(L-x) + 2D\right)(u(x) - u_E)$$

Las condiciones de contorno son, en $x = 0$, la temperatura del dispositivo eléctrico u_w. En $x = L_1$ rige la ley de enfriamiento de Newton.

En resumen, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{DW_1}{L}(L-x)\ u''(x) - \dfrac{DW_1}{L}\ u'(x) = \dfrac{H}{k}\left(\dfrac{2W_1}{L}(L-x) + 2D\right)(u(x) - u_E) \\ u(0) = u_w \\ -ku'(L_1) = H(u(L_1) - u_E) \end{cases}$$

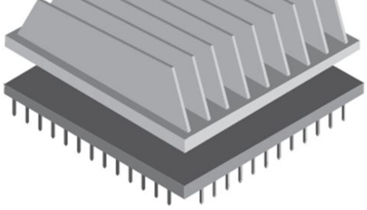

Figura 1: Disipador de calor

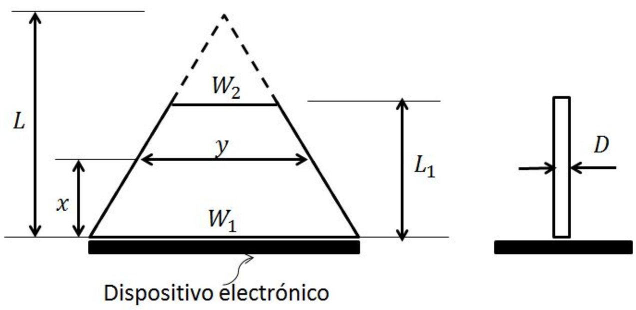

Figura 2: Geometría de la aleta

Ejercicio 7 (Aula): Considere un disipador de calor, cuyas dimensiones, según la geometría de la Figura 2, son: $W_1 = 2$cm, $L = 6$cm, $L_1 = 4$cm y $D = 0.2$cm. Las propiedades térmicas del material son conocidas: $k = 2.04$W/(cm·°C) y $H = 6 \cdot 10^{-3}$W/(cm^2·°C). Sabiendo que la temperatura del dispositivo eléctrico es de 200°C y la temperatura exterior es de 40°C:

(a) Graficar la distribución de la temperatura en función de x.

(b) Toda la transferencia de calor que sale del dispositivo y pasa por la aleta disipadora, luego es disipado al aire que rodea la misma. Este flujo de calor se puede estimar de la siguiente manera:

$$\phi = -\frac{kA_1}{\Delta x}(u(x_1) - u_w)$$

donde A_1 es el área transversal para $x = 0$, Δx es el tamaño de la malla, y x_1 el primer nodo interno. Estime dicho flujo.