POSIBLES EJERCICIOS PARA EL CFI RELACIONADOS CON EL TP8

(Relacionado al Ejercicio 6 del TP8)

a) Considere ahora que $c_R = 0.5x + 0.5$. Calcule la temperatura en el punto medio de la barra con la misma precisión solicitada en el ejercicio original.

Temperatura en el punto medio: 51,8168 ✖ ºC

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo izquierdo de la barra.

Flujo en el extremo izquierdo: -14,5662 ✖

Sugerencia: Estime numéricamente u' en el punto solicitado.

Solución: Temp. Punto medio: 15.7496 ºC

Flujo en el extremo izquierdo: -7.99

Ejercicio 5 (Aula): Considere el proceso de difusión en una barra de material homogéneo de longitud $L = 3$ y conductividad térmica $K_0 = 1$. Suponga que la temperatura en el extremo izquierdo es igual a 21 y que el extremo derecho se encuentra aislado. Se sabe que sobre la barra actúa una fuente $f(x) = 20\ \sin(5(x-1))$.

(a) Determine, con dos dígitos decimales exactos, la temperatura en el extremo derecho de la barra. Explique cómo lo hizo.

(b) Estime en qué punto de la barra la temperatura es máxima, y qué valor de temperatura alcanza en dicho punto.

(Relacionado al Ejercicio 5 del TP8)

a) Considere ahora que el sistema posee un coeficiente de reacción $c_R = 2$. Calcule la temperatura en el extremo derecho, con la misma precisión solicitada en el ejercicio original.

Temperatura en el extremo derecho: 20,54 ✖

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo izquierdo de la barra.

Flujo en el extremo izquierdo: -0,50 ✖

Sugerencia: Estime numéricamente u' en el punto solicitado.

Solución: Temp. Extremo derecho: 2.376

Flujo en el extremo izquierdo: 27.488

(Relacionado al Ejercicio 5 del TP8)

a) Considere ahora que en el extremo derecho rige la ley de enfriamiento de Newton con constante de transferencia de calor $H = 5$ y la temperatura externa es $u_E = 10$. Calcule la temperatura en el extremo derecho, con la misma precisión solicitada en el ejercicio original.

Temperatura en el extremo derecho: ✖

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo derecho de la barra.

Flujo en el extremo derecho: ✖

Solución: Temp. Extremo derecho: 11.241

Flujo en el extremo izquierdo: 6.208[x,u]=dif_fin_rob(f,[0 largo],21,[1 0 0],L);

```
for i=1:100
  L = L*2;
  [x,u1] = dif_fin_rob(f,[0 largo],21,[1 0 0],L);
    if ( abs(u1(end) - u(end) ) < 1e-2)
      u=u1;
      break
    endif
  u=u1;
endfor
```

Una barra de aluminio homogénea de 2 cm de largo y $A = 0.01\,\mathrm{cm}^2$ de sección transversal se somete a un estudio de difusión-reacción de calor. Se conocen las propiedades de dicho material: calor específico $c = 0.217\,\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\,°\mathrm{C})$, densidad $\rho = 2.7\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ y conductividad térmica $K_0 = 0.57\,\mathrm{cal}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}\cdot°\mathrm{C})$. El extremo izquierdo de la barra se somete a una temperatura fija de 6°C y en el extremo derecho rige la ley de enfriamiento de Newton donde $H = 15\ \mathrm{cal}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}^2\cdot°\mathrm{C})$ es el coeficiente transferencia de calor y $u_E = 4$ °C es la temperatura exterior. En la barra actúa una fuente de calor $f = 2x(2-x)$, medida en $\mathrm{cal}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}^3)$, y un proceso reactivo cuyo coeficiente en cada punto de la barra se expresa como $c_R(x) = 0.1x^3 + 2.5$, con unidades $\mathrm{cal}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}^3\cdot°\mathrm{C})$.

Lea detenidamente el enunciado del siguiente link

Ver Enunciado

a) Calcule la temperatura en el extremo derecho con 4 cifras decimales exactas.

Temperatura en el extremo derecho: 3,7146 ✔

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo derecho de la barra.

Flujo en el extremo derecho: -4,280839656898965 ✔

c) La energía térmica total de la barra se puede calcular como $E = A\int_0^L c\rho u(x)dx$. Estime dicha energía.

$E =$ 0,02949610140295054 ✔ cal

Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC),

$$u''(x) = 5x - u, \qquad a \leq x \leq b$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

Se discretiza el intervalo $[a, b]$ en $N + 2$ puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$ y se considera una aproximación centrada de 3 puntos para $u''(x)$.

Considerando el enunciado del siguiente link

Enunciado del ejercicio

Plantee el *método de diferencias finitas* para el PVC y justifique cómo se resolvería numéricamente el problema, presentando las ecuaciones generales e indicando claramente en qué instancia de la resolución intervienen las condiciones de contorno.

(Se sugiere adjuntar un archivo legible con sus datos personales con el desarrollo del ejercicio).

En el archivo adjunto está el desarrollo del problema.

Una barra de aluminio homogénea de 2 cm de largo y $A = 0.01\,\text{cm}^2$ de sección transversal se somete a un estudio de difusión-reacción de calor. Se conocen las propiedades de dicho material: calor específico $c = 0.217\,\text{cal}/(\text{g}\,°\text{C})$, densidad $\rho = 2.7\,\text{g}/\text{cm}^3$ y conductividad térmica $K_0 = 0.57\,\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}\cdot°\text{C})$. El extremo izquierdo de la barra se somete a una temperatura fija de 6°C y en el extremo derecho rige la ley de enfriamiento de Newton donde $H = 15\ \text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^2\cdot°\text{C})$ es el coeficiente transferencia de calor y $u_E = 4$ °C es la temperatura exterior. En la barra actúa una fuente de calor $f = 2x(2-x)$, medida en $\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^3)$, y un proceso reactivo cuyo coeficiente en cada punto de la barra se expresa como $c_R(x) = 0.1x^3 + 2.5$, con unidades $\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^3\cdot°\text{C})$.

Lea detenidamente el enunciado del siguiente link

Ver Enunciado

a) Calcule la temperatura en el extremo derecho con 4 cifras decimales exactas.

Temperatura en el extremo derecho:

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo derecho de la barra.

Flujo en el extremo derecho:

c) La energía térmica total de la barra se puede calcular como $E = A \int_0^L c\rho u(x) dx$. Estime dicha energía.

$E =$ cal

$U'' = 5x - U$ Maldonado Nahuel

$U(a) = \alpha \qquad U(b) = \beta$ 41188818

En cada punto del intervalo se va a cumplir la ED. Entonces,

$$U''(x_i) = 5x_i - U(x_i)$$

Para aproximar $U''(x)$ voy a utilizar una fórmula en diferencias, en este caso una fórmula de 3 puntos.

- Llamaré U_i a mi aproximación de $U(x_i)$

$$U''(x_i) \approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$$ siendo h la distancia entre nodos

De esta forma, puedo relacionar cada nodo en términos de sus adyacentes

$$U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1} = h^2(5x_i - U_i) \qquad \text{multiplicando por } h^2$$

$$U_{i-1} + U_i(-2+h^2) + U_{i+1} = h^2 5x_i \qquad \text{redistribuyendo}$$

Puedo plantear esta ecuación para cada uno de los N nodos internos y con estas ecuaciones voy a formar un sistema de ecuaciones lineales.

En la primer y última ecuación van a intervenir las condiciones de contorno, ya que son adyacentes al primer y último nodo interno. Entonces, los puedo pasar al vector de términos independientes. En conclusión, el sistema queda como $Au = F$ donde

$$\begin{bmatrix} -2+h^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2+h^2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2+h^2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & -2+h^2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2+h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \cdots \\ \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 5x_i - \alpha \\ h^2 5x_i \\ \cdots \\ h^2 5x_i \\ h^2 5x_i - \beta \end{bmatrix}$$

NOTA

Comentario:
Un minimo detalle. En el vector de terminos independientes pusiste todos xi sin colocar el i correspondiente a cada ecuacion.

Escribir comentario o corregir la calificación

Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC),

$$u''(x) = 5x - u, \qquad a \leq x \leq b$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

Se discretiza el intervalo $[a, b]$ en $N+2$ puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$ y se considera una aproximación centrada de 3 puntos para $u''(x)$.

Considerando el enunciado del siguiente link

Enunciado del ejercicio

Plantee el *método de diferencias finitas* para el PVC y justifique cómo se resolvería numéricamente el problema, presentando las ecuaciones generales e indicando claramente en qué instancia de la resolución intervienen las condiciones de contorno.

(Se sugiere adjuntar un archivo legible con sus datos personales con el desarrollo del ejercicio).

Es un ejercicio de valor de contorno, lo resuelvo con el metodo de diferencias finitas lineal.
El ejercicio es u''(x) = 5x - u con a <= x <= b y que u(a) = alfa y u(b) = beta; es lineal.

Se resuelve con la ecuacion -(1+h/2*p(xi))*wi-1 + (2+h^2*q(xi))*wi - (1-h/2*p(xi))*wi+1 = -h^2*r(xi) donde los wi son las soluciones aproximadas de u(xi) y los xi los valores de x, para i = 1 ,1 ,2 ... n, y los p(xi), q(xi) y r(xi) son los terminos que acompañan a los wi.

Para i = 1 w0 es equivalente a alfa, por lo que se pasa a lado derecho de la ecuacion; lo mismo pasa cuando i = n, donde wn+1 es beta, asi que tambien se lo pasa a lado derecho de la ecuacion.

Como la ecuacion se constituye a partir de las soluciones aproximadas del paso anterior e siguiente, lo puedo plantear como un sistema de ecuacion lineal resolviendo una matriz tridiagonal, de esta forma encuentro la solucion aproximadas. (Es conveniente usando el metodo Crout).

Planteo la ecuación $u''(x) = 5x - u$ con $a \leq x \leq b$.
como la ecuación: y $u(a) = \alpha$ $u(b) = \beta$

$$-\left(1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i-1} + \left(2 + h^2 \cdot q(x_i)\right) w_i - \left(1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i+1} = -h^2 r(x_i).$$

En este caso $p(x) = 0$, $q(x) = -1$ y $r(x) = +5x$. y los w_i $\forall i = 1, 2 \ldots n$ es la aproximación de la solución en los x_i. Así que puedo plantear un sistema de ecuación con una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & & -1 + \frac{h}{2} p(x_{n-1}) \\ 0 & 0 & & & & -1 - \frac{h}{2} p(x_n) & 2 + h^2 q(x_n) \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) \alpha \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{n-1}) \\ -h^2 r(x_n) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_n)\right) \beta \end{bmatrix}$$

Solución aproximado

Agustin Chen
陳[illegible]
DNI: 40512887

EJERCICIO PENDULO

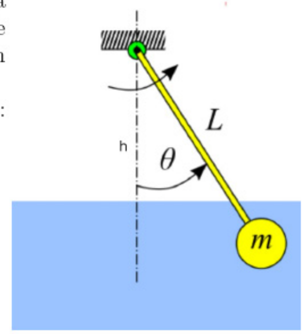
Considere un péndulo simple sujeto a un brazo rígido de longitud L. La ecuación que modela su movimiento está dada en términos del ángulo $\theta(t)$, medido en radianes desde la posición vertical de equilibrio. Suponga que hay un fluido ubicado a una distancia h de la base del péndulo, que provee un amortiguamiento de magnitud 0.8 cuando el péndulo entra en contacto con él.

El movimiento de este péndulo está modelado por la siguiente ecuación:

$$\theta'' + f(\theta)\,\theta' + \operatorname{sen}(\theta) = 0, \qquad t \geq 0,$$

donde el amortiguamiento está dado por

$$f(\theta) = \begin{cases} 0.8, & \text{si } |\theta| < \theta_0, \\ 0, & \text{si } |\theta| \geq \theta_0, \end{cases}$$



donde θ_0 es el ángulo a partir del cual el péndulo toca el fluido, y que satisface $L\cos\theta_0 = h$.

Considere que $L = 1$, $h = \frac{3}{4}$ y que se se suelta el péndulo desde el reposo, en la posición horizontal $\theta(0) = \pi/2$.

Teniendo en cuenta el enunciado del siguiente link

Enunciado del Ejercicio

Complete:

(a) La posición del péndulo a tiempo $t = 5$ es $\theta =$ -0.12505 ✔ (con un error menor a 10^{-3}) y en ese momento el péndulo se está moviendo de izquierda a derecha ✔ .

(b) El péndulo cambia por primera vez la dirección de movimiento en el tiempo $t =$ 3.28 ✔ (Dar el resultado con tres dígitos significativos, puede hacerlo a partir de un gráfico adecuado).

Una barra de aluminio homogénea de 2 cm de largo y $A = 0.01\,\text{cm}^2$ de sección transversal se somete a un estudio de difusión-reacción de calor. Se conocen las propiedades de dicho material: calor específico $c = 0.217\,\text{cal}/(\text{g}\,°\text{C})$, densidad $\rho = 2.7\,\text{g}/\text{cm}^3$ y conductividad térmica $K_0 = 0.57\,\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}\cdot°\text{C})$. El extremo izquierdo de la barra se somete a una temperatura fija de 6°C y en el extremo derecho rige la ley de enfriamiento de Newton donde $H = 15\ \text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^2\cdot°\text{C})$ es el coeficiente transferencia de calor y $u_E = 4$ °C es la temperatura exterior. En la barra actúa una fuente de calor $f = 2x(2-x)$, medida en $\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^3)$, y un proceso reactivo cuyo coeficiente en cada punto de la barra se expresa como $c_R(x) = 0.1x^3 + 2.5$, con unidades $\text{cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}^3\cdot°\text{C})$.

Lea detenidamente el enunciado del siguiente link

Ver Enunciado

a) Calcule la temperatura en el extremo derecho con 4 cifras decimales exactas.

Temperatura en el extremo derecho: 3,7146 ✔

b) El flujo de calor ϕ en un punto de la barra se determina como: $\phi(x) = -K_0 u'(x)$.

Considerando la discretización obtenida en el inciso anterior, realice una estimación del flujo en el extremo derecho de la barra.

Flujo en el extremo derecho: -4,2808 ✔

c) La energía térmica total de la barra se puede calcular como $E = A \int_0^L c\rho u(x) dx$. Estime dicha energía.

$E =$ 0,0295 ✔ cal