

# Solución numérica de problemas de valor inicial

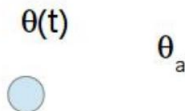
## En ecuaciones diferenciales ordinarias

- 1 Problemas de valor inicial
- 2 Existencia y unicidad de la solución
- 3 Métodos de un paso
- 4 Métodos de Runge-Kutta
- 5 Métodos Multipaso
- 6 Estabilidad y convergencia
- 7 Sistemas de EDO

## Problemas de valor inicial

# Ejemplo

- Considérese el siguiente problema. Un cuerpo se encuentra a una temperatura  $\theta$  y está rodeado de un medio ambiente con una temperatura  $\theta_a$  (supóngase menor que la del cuerpo). El calor pasará del cuerpo al medio y aquel se enfriará, por cuanto su temperatura será función del tiempo ( $\theta(t)$ ).



# Ejemplo

- La velocidad con que se pierde la temperatura es proporcional a la diferencia entre  $\theta(t)$  y  $\theta_a$ :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_a) \quad (1)$$

Esta es la *Ley de Enfriamiento de Newton*, que gobierna este problema, y  $k > 0$  de modo que si la temperatura del cuerpo es mayor que la del medio,  $\frac{d\theta(t)}{dt} < 0$ .

- Si se desea conocer la temperatura en un instante  $t$  hay que integrar la ecuación (1). La integración introduce una constante (desconocida). La solución de la ec. (1) no es única: existen  $\infty$  soluciones que difieren en una constante.

- Para que la solución sea única hay que proporcionar una condición (ecuación). Esta puede ser una *condición inicial*:  $\theta(0) = \bar{\theta}_0$  (temperatura inicial conocida).
- El problema queda:

$$\begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_a) & \text{ecuacion de campo} \\ \theta(0) = \bar{\theta}_0 & \text{condicion inicial} \end{cases} \quad (2)$$

- El problema (2) se llama *problema de valor inicial* y tiene solución única.
- La cantidad de condiciones iniciales tiene que ser igual al orden de derivación en la ecuación.

- La solución analítica de (2) es:

$$\theta(t) = \theta_a + (\bar{\theta}_0 - \theta_a) e^{-k t}$$

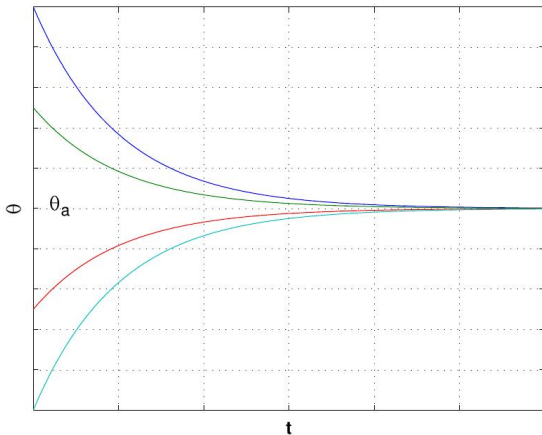


Figura 1. Solución  $\theta(t)$  para distintos casos en que  $\bar{\theta}_0 > \theta_a$  y  $\bar{\theta}_0 < \theta_a$

# Problemas de Valor Inicial (PVI)

- Un PVI se tiene a partir de una ecuación diferencial. En los primeros que veremos, serán PVI **de primer orden**:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

válida en el intervalo  $a < x < b$

- Esa ecuación tiene  $\infty$  soluciones  $y(x)$ . Para precisar una es necesario dar una condición:

$$y(a) = \bar{y}_0$$

que se denomina *condición inicial*.

- El problema de valor inicial (PVI) se escribe:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (3)$$



- Es decir, el problema es:  
*hallar la función  $y(x)$  que satisface la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  en el intervalo  $(a, b)$  y que además satisface la condición inicial  $y(a) = \bar{y}_0$ .*
- La función  $f(x, y)$  representa, como lo indica la ecuación, la derivada de  $y$ . Y esta derivada, en el caso más general depende de  $x$  y de  $y$ .
- En el ejemplo de enfriamiento  $y' (\theta')$  es independiente de  $x (t)$ , es función lineal de  $y$ . En la figura 1, a lo largo de una línea horizontal, la pendiente de las curvas es constante. A lo largo de una línea vertical, crece linealmente con  $y$ .

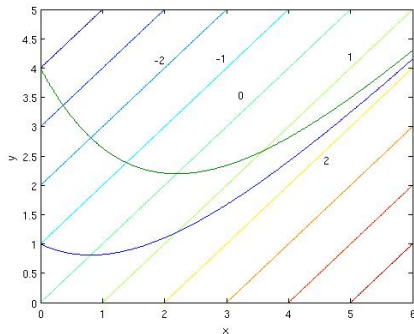
# Ejemplo

- Para la ecuación:

$$y' = x - y$$

se ha graficado dos soluciones.

- Las líneas son curvas de nivel para  $f(x, y)$  y corresponden a puntos de  $y' = cte$ . La línea desde el origen a  $45^\circ$  es la de  $y' = 0$ . Hacia la derecha hay líneas con  $y' > 0$  y hacia la izquierda con  $y' < 0$



- Un PVI para ecuaciones de distintos órdenes de derivación puede escribirse:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \bar{y}_0 \\ y'(a) = \bar{y}'_0 \\ y''(a) = \bar{y}''_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) = \bar{y}_0^{n-1} \end{cases}$$

- Si se puede integrar analíticamente la ecuación diferencial, las constantes de integración se calculan a partir de las condiciones iniciales.
- Si no es posible integrarla analíticamente, hay que recurrir a métodos numéricos.

## Existencia y unicidad de la solución

# Existencia y unicidad de la solución

- Antes de emprender la solución (analítica o numérica) del PVI hay que ver si el problema *tiene* solución.
- Más precisamente hay que responder a las siguientes preguntas:
  - El PVI ¿tiene solución?
  - Si la tiene, ¿es única?
  - Esa solución, ¿es sensible a pequeñas variaciones en los datos?
- Se introducen ahora algunas definiciones y se verán algunos teoremas que permiten responder a esas preguntas.

Definición:

Se dice que una función  $f(x, y)$  satisface la *condición de Lipschitz* para la variable  $y$  en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , si existe una constante  $L > 0$  tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

si los puntos  $(x, y_1)$  y  $(x, y_2)$  están en  $D$ .

La constante  $L$  se llama *constante de Lipschitz*

Definición:

Se dice que conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  es *convexo*, si dados dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2) \in D$ , el punto  $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$  también  $\in D$ , donde  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

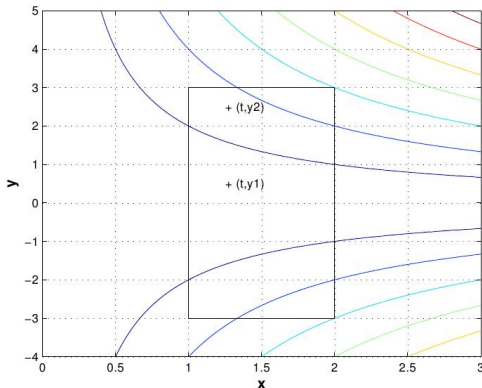
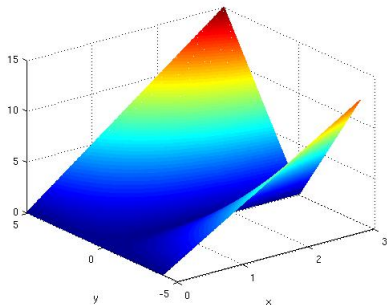
Un rectángulo es convexo. Generalmente trabajaremos en conjuntos  $x_1 \leq x \leq x_2, -\infty < y < \infty$  que también lo son.

Ejemplo:

Sea  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, -3 < y < 3\}$  y sea  $f(x, y) = x|y|$ , entonces para cada  $(x, y_1)$  y  $(x, y_2)$  están en  $D$ :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| = |x| \, ||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

Luego  $f$  verifica una C.L. para  $y$  en  $D$ , y la cte de Lipschitz es 2.



Teorema 1:

Sea  $f(x, y)$  definida en  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L$$

para todo  $(x, y) \in D$ , entonces  $f$  satisface una condición de Lipschitz para la variable  $y$  con una constante de Lipschitz  $L$ .

Las condiciones de este teorema son *suficientes* para que se satisfaga una condición de Lipschitz, pero no *necesarias*.



Teorema 2:

Sea

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty\}$$

y sea  $f(x, y)$  *continua* en  $D$ .

Si  $f$  satisface una condición de Lipschitz en  $D$  para la variable  $y$ , entonces el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

*tiene una solución única*  $y(x)$  para  $a \leq x \leq b$ .

Definición:

Se dice que el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

es un *problema bien planteado* si:

- ① *Existe* una solución *única*  $y(x)$  para ese problema.
- ② Existen ctes  $\epsilon > 0$  y  $k > 0$  tales que *existe* una solución *única*  $z(x)$  al problema:

$$\begin{cases} z' = f(x, z) + \delta(x) & a \leq x \leq b \\ z(a) = \bar{y}_0 + \epsilon_0 \end{cases}$$

donde  $|z(x) - y(x)| < k\epsilon \quad \forall a \leq x \leq b$ ,  
siempre que  $|\epsilon_0| < \epsilon$  y  $\delta(x) < \epsilon$ .

Teorema 3:

Sea

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty\}$$

el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

está bien planteado si  $f$  es continua y satisface una condición de Lipschitz para la variable  $y$  en el conjunto  $D$ .

**Ejemplo:**

Sea  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$  y sea el PVI:

$$\begin{cases} y' = 1 + x - y & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (a)$$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ ,  $|\frac{\partial f}{\partial y}| = 1$ ,  $\therefore$  por el Teorema 1 satisface una C.L para  $y$  en  $D$  con cte  $L = 1$ .
- Como  $f$  es continua, por Teorema 2 el PVI tiene solución única, y por Teorema 3 está bien planteado.
- El problema perturbado:

$$\begin{cases} z' = 1 + x - y + \delta & 0 \leq x \leq 1 \\ z(a) = 1 + \epsilon_0 \end{cases} \quad (b)$$

con  $\delta$  y  $\epsilon$  ctes.

La solución de (a) es:  $y(x) = e^{-x} + x$

La solución de (b) es:  $z(x) = (1 + \epsilon_0 - \delta)e^{-x} + x + \delta$

Si  $|\delta| < \epsilon$  y  $|\epsilon_0| < \epsilon$ , entonces:

$$|y(x) - z(x)| = |(\delta - \epsilon_0)e^{-x} - \delta| = |\delta(e^{-x} - 1) - \epsilon_0 e^{-x}| \leq |\delta| |1 - e^{-x}| + |\epsilon_0| \leq 2\epsilon$$

Se verifica el Teorema 3.

## Métodos de un paso

# Métodos de un paso

- Sea el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

- Se obtendrán aproximaciones a  $y$  en determinados puntos o nodos en el intervalo  $[a, b]$ . Esos *puntos de red* o *nodos* están igualmente espaciados. Dividiendo  $(a, b)$  en  $n$  subintervalos, el tamaño del paso es  $h = \frac{b-a}{n}$  y la abcisa del nodo  $i$  es  $x_i = x_0 + i h$ .
- Se ha de designar  $y_i$  a la solución numérica (o aproximación) en el punto  $x_i$  en tanto que  $y(x_i)$  es el valor exacto de la función.

# Métodos de un paso

- Los metodos de un paso permiten evaluar la solución numérica  $y_{i+1}$ , en la abcisa  $x_{i+1}$ , con formulas del tipo:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi$$

donde  $\Phi$  es una aproximacion a  $\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$  que, en general puede ser función de  $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$  y  $h$ .

- Si  $\Phi(x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, h)$  el método se dice *implícito*.
- Si  $\Phi$  no depende de  $y_{i+1}$  el método se dice *explícito*.

- El método de un paso más sencillo es el Método de Euler.
- A partir de  $x_i$  aplicando Series de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i) y'(x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 y''(\xi_i)$$

siendo  $x_i < \xi_i < x_{i+1}$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i)$$



- Despreciando el término en  $h^2$ :

$$y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h y'(x_i)$$

- Como  $y$  satisface la ec. diferencial,  $y' = f(x, y)$ .

$$y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h f(x_i, y(x_i))$$

- Esto da lugar al Método de Euler para integrar EDO. Llamando  $y_i$  a la solución numérica obtenida para aproximar a  $y(x_i)$ , el algoritmo del método de Euler:

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = y(a) = \bar{y}_0 \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \end{array} \right. \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

# Algoritmo del Método de Euler

Para aproximar

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

con  $n + 1$  puntos en  $[a, b]$ .

Entrada:  $f, a, b, n, \bar{y}_0$

Salida:  $x_i, y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

①  $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a$$

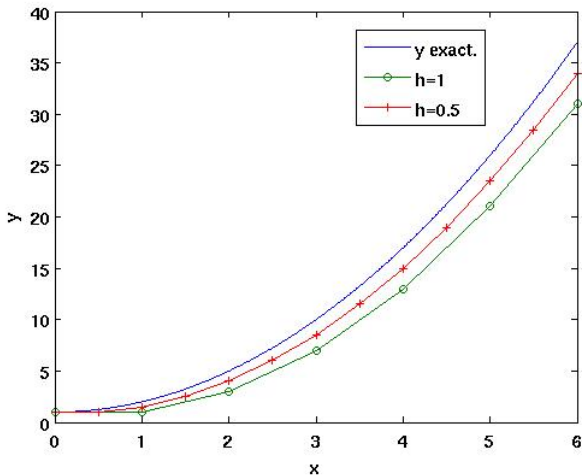
$$y_0 = \bar{y}_0$$

② Para  $i = 1, 2, \dots, n$  hacer

$$\begin{cases} y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ x_i = x_0 + i h \end{cases}$$

③ Salida:  $(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

- En la figura se muestra la solución de  $y' = 2x$  en el intervalo  $(0, 6)$ , con  $\bar{y}_0 = 1$ . La solución numérica se va alejando de la solución exacta. Se muestran allí resultados con  $h = 1$  y con  $h = 0.5$ .



# Métodos de Taylor

- Si la función  $f(x, y)$  es derivable varias veces, se puede escribir la serie de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i)$$

para  $x_i < \xi < x_{i+1}$

- De la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = f'(x, y)$$

$$y''' = f''(x, y)$$

etc.

- Despreciando el término en  $h^{n+1}$ :

$$y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y(x_i)) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y(x_i))$$

- El método de Taylor de orden  $n$  utiliza la expresión anterior para integrar la ecuación diferencial, partiendo de la condición  $y(0) = \bar{y}_0$ .
- *Ventajas:*  
Se puede reducir el error de truncamiento con tal de tomar suficientes derivadas.
- *Desventajas:*  
Hay que derivar la función  $f(x, y)$ , varias veces.
- El Método de Euler es un Método de Taylor de orden 1.
- Los Métodos de Taylor de mayor orden en general no se usan pues requieren obtener las derivadas de orden superior y evaluarlas en cada punto de integración.

# Errores en los métodos para PVI

- Los errores que aparecen al integrar PVI se pueden clasificar en
  - 1) errores de truncamiento local (ETL):  
Aparecen en cada paso al truncar la serie de Taylor.
  - 2) errores de redondeo local (ERL):  
Debido a la aritmética finita
  - 3) errores de truncamiento global (ETG):  
Acumulación de ETL.
  - 4) errores de redondeo global (ERG):  
Acumulación de ERL.  
Aumenta al achicarse  $h$ .
  - 5) error total:  
Suma de ETG y ERG.

# Errores en los métodos para PVI

- El error de truncamiento local es el que se da en cada paso de integración.

$$\tau_i h = (y(x_{i+1}) - y(x_i)) - h \Phi(x_i, y(x_i), h)$$

Si el método es de orden  $n$  el ETL es orden  $h^{n+1}$  Este error disminuye al disminuir  $h$ .

(A veces se define como error de truncamiento local a  $\tau_i$ , esto es al error al aproximar la secante por la derivada.)

# Errores en los métodos para PVI

- El error de truncamiento global proviene de la acumulación de errores de truncamiento local. Puede escribirse:

$$e_i = y_i - y(x_i)$$

Es de orden  $O(h^n)$ . ( $n$  veces  $O(h^{n+1}) = \frac{b-a}{h}$  veces  $O(h^{n+1})$ ).

- Para el método de Euler, hay un teorema que asegura que el error de truncamiento global esta acotado por

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(x_i-a)} - 1]$$

para cualquier  $i$ , donde  $L$  es la constante de Lipschitz ( $f$  verifica la condicion de Lipschitz) y  $M$  acota la derivada segunda

$$|y''(x)| \leq M \quad \forall x \in (a, b)$$



# Errores en los métodos para PVI

- Para el Método de Euler, el menor error total (ETG+ERG) se da para un paso:

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$$

donde  $\delta$  es la cota del error de redondeo ( $|\delta_i| < \delta$ ), y  $M$  es la cota de la derivada  $y''(\xi_i)$  ( $|y''(\xi_i)| < M$ ).

# Métodos explícitos y métodos implícitos

- La fórmula del método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

permite calcular la solución en  $x_{i+1}$  usando valores disponibles evaluados en  $x_i$ .

Este método se denomina también Método de Euler *progresivo* o *hacia adelante* (*forward Euler*). Y es un ejemplo de método *explícito*.

- También podría plantearse una fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

en este caso la solución en  $x_{i+1}$  depende de  $y_{i+1}$  por lo que no puede calcularse explícitamente.

Este método es *implícito* y, en rigor, es una ecuación no lineal por lo que su resolución es más cara.

Este método se denomina también Método de Euler *regresivo* o *hacia atrás* (*backward Euler*)

# Métodos explícitos y métodos implícitos

- Un método más preciso que el de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

- Este método se denomina Método de Crank-Nicholson, ó también Método del Trapecio.
- Usa una pendiente promedio entre la pendiente de los puntos inicial y final del paso.
- Es un método implícito.

# Métodos de Runge-Kutta

# Métodos de Runge-Kutta

- El desarrollo en serie de Taylor, a partir del punto  $x_i$ :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots$$

- De la ecuación diferencial (usando la notación:  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ , etc.):

$$y' = f$$

$$y'' = \frac{d}{dx}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx}y'' = f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx}f + f_y f_x) + (f_{yy}f + f_y f_y)y' \\ &= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_y f_x + f_{yy}f^2 + f_y^2 f \end{aligned}$$

etc.

- Reteniendo hasta el término en  $h^2$  en la serie de Taylor: :

$$y(x+h) = y + hf + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y) + O(h^3) \quad (1)$$

donde se ha usado la notación:

$$y = y(x)$$

$$f = f(x, y(x))$$

etc.

## Polinomios de Taylor en 2 variables

$$f(x, y)$$

$$f(x + a, y + b) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x, y) + E_n(x, y)$$

donde

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(x, y) = f(x, y)$$

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(x, y) = a \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + 2 a b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

y el error de truncamiento:

$$E_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x + \theta a, y + \theta b)$$

con  $0 < \theta < 1$

- La fórmula (1):

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} h f + \frac{1}{2} h [f + h f_x + h f f_y] + O(h^3) \quad (2)$$

- De la fórmula de Taylor para 2 variables, con  $n = 1$ :

$$f(x+h, y+hf) = f + h f_x + h f f_y + O(h^2) \quad (3)$$

- La fórmula (2) puede escribirse:

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} h f + \frac{1}{2} h f(x+h, y+hf) + O(h^3) \quad (4)$$



- De la última fórmula puede escribirse:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (F_1 + F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_{i+1}, y_i + F_1)$$

- Esta fórmula se conoce como *Fórmula de Runge-Kutta de 2º orden*.

- Las Fórmulas de Runge-Kutta de 2<sup>o</sup> orden se pueden escribir:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + w_1 h f + w_2 h f(x + \alpha h, y + \beta h f) + O(h^3)$$

Los parámetros  $w_1, w_2, \alpha$  y  $\beta$  dan lugar a diferentes fórmulas.

- Teniendo en cuenta (3) se puede escribir:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + w_1 h f + w_2 h [f + \alpha h f_x + \beta h f f_y] + O(h^3)$$

- Comparando con (1) se ve que deben ser:

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$w_2 \beta = \frac{1}{2}$$

# Métodos de Runge-Kutta de 2<sup>o</sup> orden

## Método de Heun

Se da con:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (F_1 + F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + h, y_i + F_1)$$

## Método de Euler modificado

Se da con:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + F_2$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

Se conoce también como Método del Punto Medio

## Otro método de segundo orden

Se da con:

$$w_1 = \frac{1}{4}$$

$$w_2 = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \beta = \frac{2}{3}$$

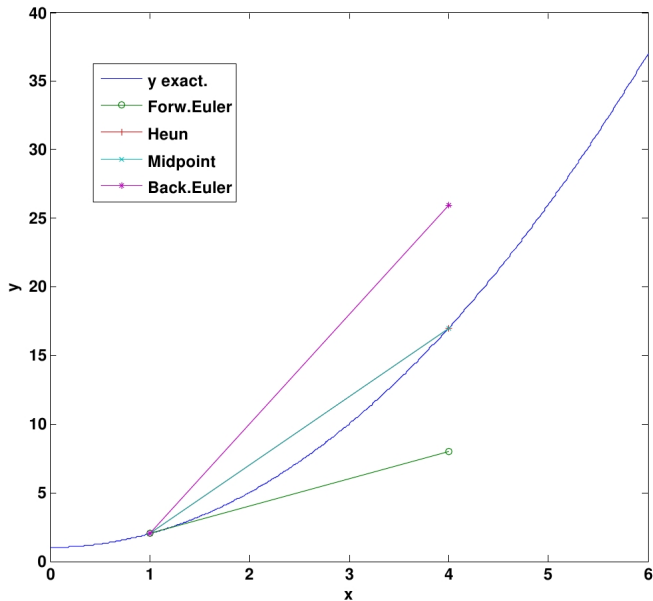
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4} (F_1 + 3 F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}F_1)$$

## Métodos de Runge-Kutta de 2<sup>o</sup> orden



- El Método de Heun se puede escribir en dos pasos:

①  $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

②  $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$

- El primer paso puede verse como una *predicción* del valor de  $y$  en  $x_{i+1}$ . Una predicción *explícita* ya que se calcula a partir del conocimiento de los valores en  $x_i$ .
- El segundo paso puede verse como una *corrección* del valor anterior, con una fórmula *implícita*.
- Esto da lugar a los métodos llamados *predictor-corrector* que se analizarán más adelante.

# Métodos de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden

- Un método muy usado es el Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden:

## Método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

donde

$$F_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$F_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_2)$$

$$F_4 = hf(x_i + h, y_i + F_3)$$

- Es de 4<sup>o</sup> orden pues contempla los términos hasta  $h^4$ . El error es de orden  $h^5$ .
- Hay muchas fórmulas de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden.



# Métodos de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden

## Algoritmo del Método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden

Entrada:  $a, b, n, \bar{y}_0$

Salida:  $y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

1)  $h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, y_0 = \bar{y}_0$

2) Para  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ :

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_2)$$

$$F_4 = h f(x_i + h, y_i + F_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

3) Salida

# Métodos de Runge-Kutta

## Método de Runge-Kutta de 3<sup>o</sup> orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + 4 F_2 + F_3)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(x_i + h, y_i + 2 F_2 - F_1)$$

# Errores en los Métodos de Runge-Kutta

- Un método RK de orden  $m$  es equivalente a tomar polinomios de Taylor hasta términos de orden  $m$ , y el error de truncamiento es  $O(h^{m+1})$ .
- La solución exacta  $y(x_{i+1})$  sería:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} + C h^{m+1}$$

donde  $y_{i+1}$  es la aproximación y el último término el error de truncamiento.

- Si se calcula  $y_{i+1}^{(1)}$  con un paso  $h$ ; y  $y_{i+1}^{(2)}$  con 2 pasos  $h/2$ ,:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(1)} + C h^{m+1}$$

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(2)} + 2 C \left(\frac{h}{2}\right)^{m+1}$$

restando:

$$y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} = C \left( h^{m+1} - \frac{h^{m+1}}{2^m} \right) = C h^{m+1} \left( 1 - \frac{1}{2^m} \right)$$

# Errores en los Métodos de Runge-Kutta

- De la última expresión:

$$C h^{m+1} \simeq \frac{y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)}}{(1 - 2^{-m})} \simeq y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)}$$

- Para los métodos de RK:

RK de orden	Error de truncamiento local	Evaluaciones de función
2	$O(h^3)$	2
3	$O(h^4)$	3
4	$O(h^5)$	4
5	$O(h^6)$	6
6	$O(h^7)$	7

- Se prefieren los métodos de RK de orden  $\leq 4$

## Ejemplo

Sea el problema:

$$y' = y - x^2 + 1 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

resuelto por el Método de Euler con  $h = 0.025$ ; Heun con  $h = 0.05$ ; y RK 4º orden con  $h = 0.1$ . En todos los casos se realizaron 20 evaluaciones de funciones.

$t_i$	Exact	Euler $h = 0.025$	Modified Euler $h = 0.05$	Runge-Kutta Order Four $h = 0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

# Métodos Multipaso

- Hasta ahora hemos visto métodos de integración donde para calcular  $y_{i+1}$  se usan los valores calculados en  $x_i$ . No los anteriores.

Por ejemplo la fórmula de Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

- Como el error se va acumulando, los últimos tienen errores mayores.
- Se pueden usar los puntos anterioremente calculado  $\rightarrow$  *fórmulas multipaso*:

$$y_{i+1} = \phi(y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots)$$

- El problema

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

Si integramos  $y'$ :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y_{i+1} - y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

- Podemos usar fórmulas de interpolación para aproximar  $f(x, y)$  e integrar numéricamente.
- Si usamos polinomios, obtenemos fórmulas de paso múltiple.



- La forma general de un método multipaso de  $m$  pasos es:

$$y_{i+1} = a_{m-1} y_i + a_{m-2} y_{i-1} + a_{m-3} y_{i-2} + \dots + a_0 y_{i+1-m} + h [b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, y_i) + b_{m-2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

para  $i = m - 1, m, \dots, n - 1$

- Los  $a_0, \dots, a_{m-1}$  y  $b_0, \dots, b_m$  son constantes.
- Los  $y_i$ , (para  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ ) son conocidos. *Valores iniciales*
- Si  $b_m = 0 \rightarrow$  método *explícito* o *abierto*
- Si  $b_m \neq 0 \rightarrow$  método *implícito* o *cerrado*
- Se precisan  $m$  condiciones iniciales. Se usa un método de un paso (Runge-Kutta, Euler, etc.) para obtener los primeros  $m$  valores de  $y_i$ . Luego se arranca con el método multipaso.

# Ejemplo

- Ejemplo de construcción de una fórmula multipaso mediante el método de los *Coeficientes Indeterminados*.
- Sea la fórmula de 5 pasos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \simeq h [A f_i + B f_{i-1} + C f_{i-2} + D f_{i-3} + E f_{i-4}] \quad (1)$$

- El procedimiento es el siguiente: por 5 puntos puede hacerse pasar un polinomio de 4<sup>o</sup> grado. Se representará  $f(x, y)$  como combinación de polinomios de 4<sup>o</sup> grado y se integrará entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  para obtener el término de la izquierda.
- Por comodidad se tomará  $t_i = 0$ , con lo que  $t_{i+1} = 1$ ,  $t_{i-1} = -1$ ,  $t_{i-2} = -2$ ,  $t_{i-3} = -3$ , y  $t_{i-4} = -4$ .

- En vez de tomar polinimios cualesquiera, a los efectos de facilitar las operaciones se tomarán:

$$\begin{aligned}p_0(x) &= 1 \\p_1(x) &= t \\p_2(x) &= t(t+1) \\p_3(x) &= t(t+1)(t+2) \\p_4(x) &= t(t+1)(t+2)(t+3)\end{aligned}$$

y con ello

$$f(x, y) = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4 \quad (2)$$

- Realizando la integral, tenemos el lado izquierdo de (1):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = c_0 1 + c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{5}{6} + c_3 \frac{9}{4} + c_4 \frac{251}{30}$$

- Para evaluar el lado derecho de (1) usamos la función (2) para obtener  $f_i, f_{i-1}$ , etc.

$$f_i = f(0) = c_0$$

$$f_{i-1} = f(-1) = c_0 - c_1$$

$$f_{i-2} = f(-2) = c_0 - 2c_1 + 2c_2$$

$$f_{i-3} = f(-3) = c_0 - 3c_1 + 6c_2 - 6c_3$$

$$f_{i-4} = f(-4) = c_0 - 4c_1 + 12c_2 - 24c_3 + 24c_4$$

multiplicando la primera expresión por  $A$ , la segunda por  $B$ , etc. (y siendo  $h = 1$ ) se puede evaluar el lado derecho de (1).

- Igualando los factores de los coeficientes  $c_0, c_1$ , etc. de ambos miembros de (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A + B + C + D + E &= 1 \\
 -B - 2C - 3D - 4E &= 1/2 \\
 2C + 6D + 12E &= 5/6 \\
 -6D - 24E &= 9/4 \\
 24E &= 251/30
 \end{aligned} \tag{3}$$

- La resolución del sistema (3) proporciona los coeficientes:

$$A = \frac{1901}{720}; B = -\frac{2774}{720}; C = \frac{2616}{720}; D = -\frac{1274}{720}; E = \frac{251}{720}$$

y la fórmula multipaso es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}[1901 f_i - 2774 f_{i-1} + 2616 f_{i-2} - 1274 f_{i-3} + 251 f_{i-4}]$$

esta fórmula es conocida como Fórmula de Adams-Bashfort de 5 pasos.

# Fórmulas de Adams-Bashfort

- Las fórmulas de Adams-Bashfort son explícitas ( $b_m = 0$ ) y tienen  $a_{m-1} = 1$  y el resto de los  $a_j = 0$ :

$$y_{i+1} = y_i + h [b_{m-1} f(x_i, y_i) + b_{m-2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

- A-B de 2 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}]$$

- A-B de 3 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$$

- A-B de 4 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- A-B de 5 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}]$$

# Fórmulas de Adams-Moulton

- Las fórmulas de Adams-Moulton son implícitas ( $b_m \neq 0$ ) y tienen  $a_{m-1} = 1$  y el resto de los  $a_j = 0$ :

$$y_{i+1} = y_i + h [b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, y_i) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

- A-M de 2 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - 1f_{i-1}]$$

- A-M de 3 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

- A-M de 4 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}]$$

- Orden de un método multipaso:  
Es la cantidad de términos de la serie de Taylor que contiene la aproximación.
- El error de un método de orden  $m$  es  $O(h^{m+1})$ .
- Los métodos de Adams-Bashfort de  $m$  pasos, requieren  $m$  evaluaciones de funciones, y su error  $O(h^{m+1})$ . Luego son de orden  $m$
- Los métodos de Adams-Moulton de  $m$  pasos, requieren  $m + 1$  evaluaciones de funciones, y su error  $O(h^{m+2})$ . Luego son de orden  $m + 1$
- Un método Adams-Bashfort de  $m$  pasos es comparable a un Adams-Moulton de  $(m - 1)$  pasos.
- Es preferible un método de Adams-Moulton, ya que es más estable.



# Métodos Predictor-Corrector

- Los métodos implícitos no siempre se pueden resolver fácilmente. La variable incógnita no está explicitada. Habría que resolverlo iterativamente (es una ecuación No Lineal).
- Un método práctico para utilizar las fórmulas implícitas es el denominado *Predictor-Corrector*.
- El mismo opera en dos pasos:
  - 1) Una *Predicción* del valor  $\tilde{y}_{i+1}$  mediante fórmulas explícitas;
  - 2) Una *Corrección* del valor  $y_{i+1}$  mediante una fórmula implícita, donde se usa el valor predicho  $\tilde{y}_{i+1}$ , del lado derecho del signo  $=$ .
- Una forma de Métodos Predictor-Corrector sería usar una fórmula de Adams-Bashfort (explícita) para predecir  $\tilde{y}_{i+1}$ ; y luego una fórmula de Adams-Moulton (implícita) para corrección.
- En general se usan fórmulas A-B y A-M del mismo orden.
- Además para calcular las condiciones iniciales necesarias (los  $m$  primeros valores de  $y_i$ ), se usa un método de un paso (por ejemplo Runge-Kutta), del mismo orden que las fórmulas multipaso.

## Estabilidad y convergencia

# Convergencia

- Nos interesa analizar si los métodos utilizados son *convergentes*.
- Se dice que un método numérico que proporciona la solución  $y_i$  es *convergente*, si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_i = y(x_i)$$

donde  $h$  es el tamaño del paso; e  $y(x_i)$  es la solución exacta. Y esto se da para todos los nodos  $x_i$  de la red usada.

- ¿Cómo puede verse si un método es convergente? (ya que la solución exacta no es conocida)

# Consistencia

- Se dice que un método numérico es *consistente*, si la ecuación discretizada (o numerica), cuando  $h \rightarrow 0$  coincide con la ecuación diferencial.
- Esto es equivalente a decir que el error de truncamiento local  $\tau_i$  tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$ .

- Por ejemplo, al resolver la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

con el metodo de Euler, la ecuación discreta queda

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

y vemos que cuando  $h \rightarrow 0$  la estimación numérica en diferencias coincide con la derivada.

- Lo mismo se podría observar a partir de la serie de Taylor, donde el error al aproximar la derivada es:

$$\tau_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) = \frac{1}{2}hy''(\xi)$$

que tiende a cero cuando lo hace el tamaño de paso  $h$ .

- Para analizar la consistencia de los métodos multipaso se escribirá su fórmula general:

$$a_m y_i + a_{m-1} y_{i-1} + \dots + a_0 y_{i-m} = h [b_m f_i + b_{m-1} f_{i-1} + \dots + b_0 f_{i-m}]$$

- En las fórmulas que vimos,  $a_m = 1$ ,  $a_{m-1} = -1$ , y los  $a_j$  restantes nulos.
- Además, si  $b_m = 0 \rightarrow$  explícito; si  $b_m = 1 \rightarrow$  implícito.
- Hay dos polinomios asociados a los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$ :

$$\begin{cases} p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 \\ q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 \end{cases}$$

- Se puede demostrar que un método multipaso es *consistente*, si:

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(1) = q(1) \end{cases}$$

- La consistencia es posible de verificar en un método numérico. Sin embargo la consistencia no siempre implica que el método sea convergente. Es preciso analizar la *estabilidad* del método.

Considérese, por ejemplo, el método multipaso

$$y_{i+1} = 2y_{i-1} - y_i + h\left(\frac{5}{2}f_{i-1} + \frac{1}{2}f_{i-2}\right)$$

que, puede verificarse, es consistente.

Si se resuelve con esa fórmula el problema  $y' = 0$  con la condición inicial  $y(0) = 0$ , al ser  $f = 0$  la fórmula queda

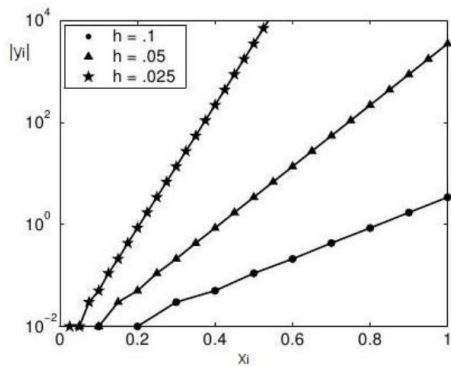
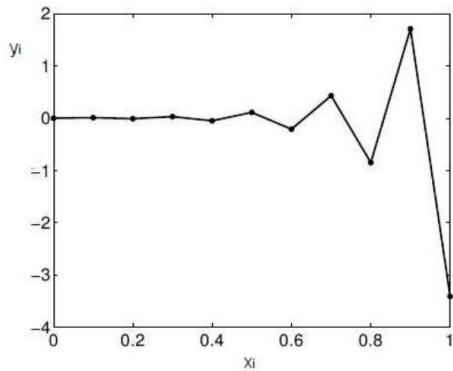
$$y_{i+1} = 2y_{i-1} - y_i$$

y para las condiciones  $y_0 = 0$  y  $y_1 = 0$  produce la solución exacta.

Sin embargo si las condiciones son  $y_0 = 0$  y  $y_1 = \epsilon$  la solución numérica “explota” luego de algunos pasos como se ve en la figura de la izquierda, donde se grafica  $y$  en función de  $x$  para  $h = 0,1$  y  $\epsilon = 0.01$ . Esto no se resuelve achicando el tamaño del paso. por el contrario, en la figura de la derecha se grafica  $|y_i|$  en función de  $x_i$  para diferentes tamaños de paso  $h$ .



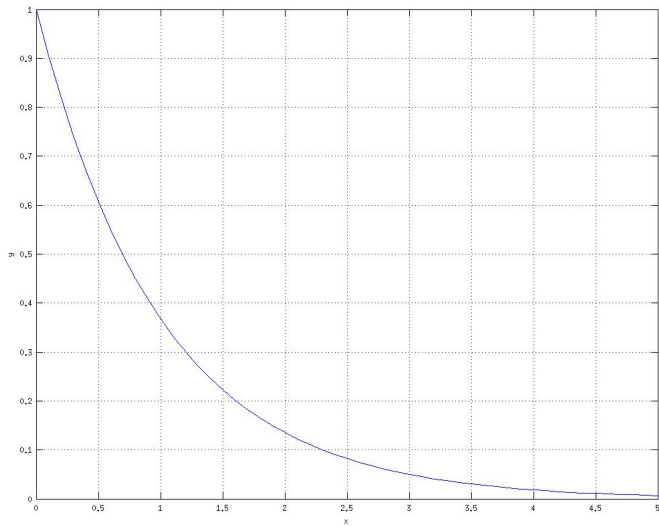
## Consistencia



- La *estabilidad* hace referencia a que los errores a cada paso no se acumulen de manera que la solución crezca indefinidamente.
- Considérese el siguiente problema.
- Por ejemplo, el PVI

$$\begin{cases} y' = \lambda y & 0 \leq x \leq \infty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

donde  $\lambda < 0$ , tiene solución exacta:  $y = e^{\lambda x}$  (graficada en la figura siguiente).



- Aplicando el método de Euler Progresivo:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i = y_i + \lambda h y_i = y_i(1 + \lambda h)$$

y dado que  $y_0 = 1$

$$y_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1}$$

- La solución exacta tiende a cero para  $i \rightarrow \infty$ , para que la solución numérica también lo haga es preciso que

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \text{o bien} \quad h < \frac{2}{|\lambda|}$$

- Para pasos  $h > \frac{2}{|\lambda|}$ , en este caso, el método de Euler Progresivo es inestable.

- Si se usa el método de Euler Regresivo:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_{i+1} = y_i + \lambda h y_{i+1}$$

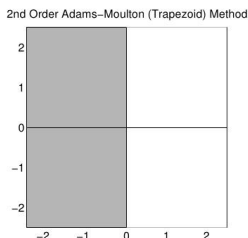
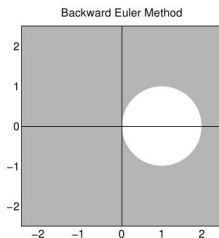
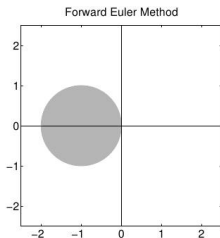
de donde

$$y_{i+1} = \left( \frac{1}{1 - \lambda h} \right)^{i+1}$$

que tiende a cero para  $i \rightarrow \infty$  independientemente del valor de  $h$ .

- En forma similar puede mostrarse que también el método de Crank-Nicholson es estable independientemente del valor de  $h$ .
- El método de Euler Progresivo se dice *condicionalmente estable*, pues su estabilidad depende del tamaño del paso  $h$ .
- Los Métodos de Euler Regresivo y de Crank-Nicholson son *incondicionalmente estables*.

- Si  $\lambda$  puede ser complejo y se denomina  $z = \lambda h$ , las regiones de estabilidad para los métodos: de Euler progresivo, de Euler regresivo, y Crank-Nicholson se muestran en estas figuras en zonas grisadas



- Hay varias definiciones de estabilidad:
  - Un método se dice **absolutamente estable** cuando genera una solución del problema  $y' = \lambda y$  con  $y(0) = 1$  , que tiende a cero cuando  $x \rightarrow 0$
  - Un método se dice **A-estable** cuando es absolutamente estable para cualquier tamaño de paso (o sea que es incondicionalmente estable). Esto requiere que la región de estabilidad sea todo el semiplano complejo de  $z$  con parte real negativa.
  - Un método se dice **cero-estable** cuando la solución se mantiene acotada para pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales

- Para un *método multipaso* es sencillo analizar la condición de cero-estabilidad.
- Si todas las raíces del polinomio característico  $p(z)$  se encuentran en la región  $|z| \leq 1$ , y si cada raíz con  $|z| = 1$  es simple, se dice que el método multipaso cumple la *condición de raíz*.
- Y todo método que cumple la condición de raíz, es cero-estable.



- Se ha indicado que la consistencia por si sola no garantiza la convergencia de un método multipaso.
- Se debe verificar su estabilidad frente a perturbaciones de los datos iniciales, es decir que sea *cero-estable*.
- Con esto, la convergencia de un método multipaso está garantizada por el siguiente teorema.
- Teorema:  
Para que un método multipaso sea *convergente*, es necesario y suficiente que sea *cero-estable* y *consistente*.

- Ejemplo:

Para el método de Adams-Moulton de 2 pasos:

$$a_2 = 1; \quad a_1 = -1, \quad a_0 = 0; \quad b_2 = \frac{5}{12}; \quad b_1 = \frac{8}{12}, \quad b_0 = -\frac{1}{12}$$

$$p(z) = z^2 - z$$

$$q(z) = \frac{5}{12}z^2 + \frac{8}{12}z - \frac{1}{12}$$

- Las raíces de  $p$ :  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = 0$

luego es cero-estable.

- $p(1) = 0$

$$p'(1) = 1$$

$$q(1) = 1$$

luego es consistente.

- Por ello es convergente

## Resumiendo:

- Un método **de un paso**, si es consistente, es convergente.
- Si el método es **incondicionalmente estable**, el tamaño del paso  $h$  estará determinado por requisitos de precisión. El error de truncamiento global depende de  $h$  y disminuye con él.
- Si el método tiene **estabilidad condicional**, entonces el tamaño del paso  $h$  **debe** estar por debajo del tamaño crítico, para que haya estabilidad. A partir de allí, se puede disminuir por requisitos de precisión.
- Un método **multipaso**, debe ser consistente y cero-estable, para que sea convergente.
- A partir de allí, vale lo indicado para los métodos de un paso si la estabilidad fuese condicional.

# Sistemas de EDO

- La solución de un sistema de EDO:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ \dots \\ y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \end{cases} \implies \mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$$

si se organizan las funciones incógnitas en un vector:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

puede plantearse con las fórmulas vistas.

- Así la solución en el paso  $i + 1$  será:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \phi(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{i-1}, \dots)$$

donde  $\phi$  es la función del método multipaso (o de un paso) utilizado.

# EDO de orden superior

- Por ejemplo, si se tiene una EDO de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = \bar{y}_0 \\ y'(0) = \bar{y}'_0 \end{cases}$$

puede reducirse a un sistema de EDO de primer orden mediante definición de una nueva variable  $z = y'$ :

- Así el problema anterior es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z' = f(x, y, z) \\ y' = z \end{cases}$$

acompañado de las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} z(0) = \bar{y}'_0 \\ y(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

- Así pueden usarse los métodos vistos para ec. de primer orden, en la resolución de ecuaciones de orden superior.

En este capítulo hemos visto:

- Qué son los PVI
- Cómo garantizar que un PVI esté bien planteado.
- Métodos numéricos para resolver PVI
  - Métodos de un paso
    - Método de Euler
    - Metodos de Taylor
    - Metodos de Runge Kuta
  - Métodos multipaso
    - Método de Adams-Bashfort
    - Metodo de Adams-Multon
    - Metodo Predictor-Corrector
- Estabilidad y convergencia
- Sistemas de EDO