EJEMPLOS PARCIAL 2

PREGUNTA 1:

Considerando el enunciado del siguiente link

Enunciado del ejercicio

Plantee el *método de diferencias finitas* para el PVC dado y justifique cómo se resolvería numéricamente el problema, presentando las ecuaciones según los datos fijos del problema planteado e indicando claramente en qué instancia de la resolución intervienen las condiciones de contorno. **Sólo debe aparecer como variable las incógnitas del problema**, y todos los datos deben estar correctamente representados.

(Se sugiere adjuntar un archivo legible con sus datos personales con el desarrollo del ejercicio).

Enunciado del ejercicio:

Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC),

$$\begin{cases}
-u_{xx} = 20e^{-10(x-0.7)^2}, & 0 \le x \le 1, \\
u(0) = 5, \\
u(1) = 6.
\end{cases}$$

Se discretiza el intervalo [0,1] en 41 puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{40} = 1$ y se considera una aproximación centrada de 3 puntos para u''(x).

PREGUNTA 2: (Viene del Pregunta 1)

Dado el enunciado del siguiente link

Enunciado del Ejercicio

Calcule u(0.5), mediante el método de diferencias finitas para la discretización dada, en la pregunta 1. Dado el siguiente problema de valores de contorno (PVC),

$$\begin{cases}
-u_{xx} = 20e^{-10(x-0.7)^2}, & 0 \le x \le 1, \\
u(0) = 5, \\
u(1) = 6.
\end{cases}$$

Se discretiza el intervalo [0,1] en 41 puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{40} = 1$ y se considera una aproximación centrada de 3 puntos para u''(x).

RESPUESTA: 6.9801 (corresponde a u(0.5))

PREGUNTA 3:

Enunciado del Ejercicio

Considere un proyectil de masa m moviéndose en el plano vertical, cuya posición está dado por $\vec{r} = (x_1, x_2)$. La fuerza total F que actúa sobre el proyectil está dada por

$$\vec{F} = m\vec{q} - c\vec{v}$$
.

donde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ es el vector velocidad y $\vec{g} = (0, -g)$, siendo $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ la constante de aceleración de la gravedad y c el coeficiente de amortiguamiento del medio.

Utilice la segunda ley de Newton para plantear un PVI que permita encontrar la posición del proyectil \vec{r} a los t segundos. Resuelva el sistema considerando $m=10\,\mathrm{Kg},\,c=0.2\,\mathrm{Kg/s}$ y suponiendo que el proyectil se lanza desde una altura de 30 metros con una velocidad inicial horizontal de $40\,\mathrm{m/s}$.

Considere el siguiente enunciado

Enunciado del Ejercicio

(a) Determine a qué distancia el proyectil toca el piso y cuánto tiempo demora en hacerlo. Dar los resultados con 3 cifras significativas.

Distancia: Respuesta 97.3

tiempo: Respuesta 2.49

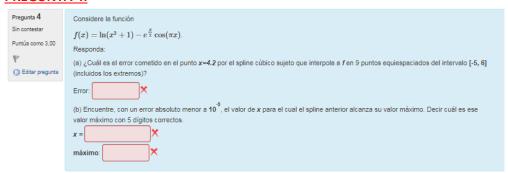
(b) Recuerde que la longitud de la trayectoria de la partícula durante los T primeros segundos está dada por $\int_0^T \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} \ dt.$

Calcule la distancia recorrida por el proyectil durante los primeros dos segundos. Dar el resultado con 5 dígitos exactos.

longitud:

Longitud: 81.519 (Solución punto b))

PREGUNTA 4:



Error: 13.385 x = 4.088961382 máximo: 9.8085

PREGUNTA 5:

Considerando el enunciado del siguiente link

Enunciado del ejercicio

Plantee el *método de diferencias finitas* para el problema presentado y justifique cómo se resolvería numéricamente. Presente las ecuaciones generales e indique claramente en qué instancia de la resolución intervienen las condiciones de contorno.

(Se sugiere adjuntar un archivo legible con sus datos personales con el desarrollo del ejercicio).

Considere el siguiente problema de difusión-reacción térmica en una barra:

$$\begin{cases}
-u'' + 5u = 100x(1 - x), & 0 \le x \le 1, \\
u(0) = 0, \\
u(1) = 0.
\end{cases}$$

donde u(x) representa la distribución de temperaturas a lo largo de la barra (se considera una barra unidimencional, homogénea de sección transversal uniforme).

Se discretiza el intervalo [0,1] en 41 puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{40} = 1$ y se considera una aproximación centrada de 3 puntos para u''(x).

Calcule la temperatura en el punto medio de la barra mediante el método de diferencias finitas para la discretización dada.

Respuesta: 1.7262

PREGUNTA 6:

Teniendo en cuenta el enunciado del siguiente link

Enunciado del Ejercicio

(a) Utilice la segunda ley de Newton para plantear un PVI que permita encontrar la posición x a los t segundos. Resuelva el sistema a los 10 segundos, considerando m = 20kg, k = 20N/m, c = 10N.s/m, y sin fuerza externa, partiendo del reposo a 1 metro hacia la derecha de la posición de equilibrio. Dar el resultado con 5 cifras decimales exactas.

(b) Determine la máxima velocidad alcanzada por el sistema y en qué tiempo ocurre.

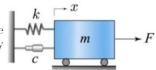
(c) V = -0,71

(d) (Dar el resultado con dos dígitos decimales significativos, puede hacerlo a partir de un gráfico adecuado).

Considere un objeto de masa m moviéndose en un plano horizontal, sujeto a un resorte amurado a una pared y sometido a una fuerza externa F y a un sistema de amortiguamiento. La fuerza total f_T que actúa sobre el objeto está dada por

$$f_T = -cv - kx + F,$$

donde x representa el desplazamiento del objeto desde la posición de equilibrio en metros, v su velocidad, k la constante elástica del resorte y c el coeficiente de amortiguamiento.



PREGUNTA 7:

Considere el enunciado del siguiente link $\frac{\text{Enunciado del Ejercicio}}{\text{(a) }_{\mathcal{L}}\text{Cuál es el valor de }y\text{ que le corresponde a }x=1.9\text{ según el modelo determinado? (Escriba el resultado con 5 dígitos decimales correctos).}$ $y=\underbrace{0,19236}$ (b) Determinar el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje f (Escriba el resultado con 5 dígitos decimales correctos).

AYUDA: El área de la superficie de revolución que se obtiene al girar el gráfico de f0 alrededor del eje f1, para f2 alrededor del eje f3. Area = f3,01986

Considere el ajuste en el sentido de cuadrados mínimos de la forma $f(x)=ae^{bx}$ para los datos de la siguiente tabla:

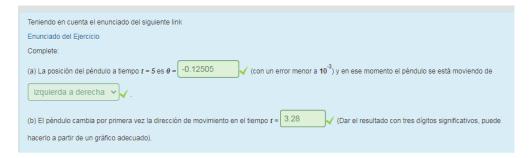
	1	0.0000000000000000000000000000000000000	277.079	1202023		95777757	10000000	1,322,332,3
y	0.678	0.512	0.387	0.293	0.221	0.167	0.126	0.096

PREGUNTA 8: (relacionado al ejercicio 10 del TP06)

(Relacionado al ejercicio 10 de TP6) Considere f(x) = 1 + x + cos(x) en el intervalo [0,4], determine el área de superficie de revolución a través de la cuadratura de Gauss con n=3 puntos de integración y utilizando 10 subintervalos. Determine cuántas cifras exactas tiene el resultado obtenido.



PREGUNTA 9:



Considere un péndulo simple sujeto a un brazo rígido de longitud L. La ecuación que modela su movimiento está dada en términos del ángulo $\theta(t)$, medido en radianes desde la posición vertical de equilibrio. Suponga que hay un fluido ubicado a una distancia h de la base del péndulo, que provee un amortiguamiento de magnitud 0.8 cuando el péndulo entra en contacto con él.

El movimiento de este péndulo está modelado por la siguiente ecuación:

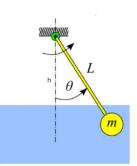
$$\theta'' + f(\theta) \theta' + \operatorname{sen}(\theta) = 0, \qquad t \ge 0,$$

donde el amortiguamiento está dado por

$$f(\theta) = \begin{cases} 0.8, & \text{si } |\theta| < \theta_0, \\ 0, & \text{si } |\theta| \ge \theta_0, \end{cases}$$

donde θ_0 es el ángulo a partir del cual el péndulo toca el fluido, y que satisface $L\cos\theta_0 = h$

satisface $L\cos\theta_0=h$. Considere que $L=1,\ h=\frac{3}{4}$ y que se se suelta el péndulo desde el reposo, en la posición horizontal $\theta(0)=\pi/2$.



PREGUNTA 10:

PREGUNTA 11:

(Relacionado al ejercicio 9 del TP7) Seleccione los puntos de inflexión de la solución y(t) que están en el intervalo [0, 5]. (Los valores se consideran con 3 decimales correctos)							
Seleccione una o más de una:							
a. 3.141							
☑ b. 4.712 ✓							
☑ c. 1.570 ✓							
□ d. 6.283							
e. 0.785							
f. 0							

Ejercicio 9 (Aula): Considere siguiente PVI de orden 3

$$\begin{cases} y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = -4 \operatorname{sen} t - 2 \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

- (a) Reescriba el problema como un sistema de EDO de primer orden, con sus respectivos valores iniciales.
- (b) Grafique la solución y obtenga el valor de la variable de estado y en $t=2.5,\,{\rm con}$ 6 dígitos exactos.
- (c) Indique cuántas veces se anula la función $y^{\prime}(t)$ en el intervalo [0,15].

PREGUNTA 12:

Código multipaso:

```
Seleccione una o más de una:
 a. En línea 20 debería ser:
    g = w0 - w(i) - h/24*(9*fip1 + 19*fi - 5*fim1 + fim2);
   dg = 1 - h+5/12+dfip1;
 c. En línea 6 debería ser:
    p = 2;
 d. En línea 21 debería ser:
    dfip1 = df(t(i+1),w(i));
 e. En línea 19 debería ser:
 f. El código no tiene errores
  g. En línea 21 debería ser:
    dfip1 = df(t(i+1),wθ);
 h. En línea 17 debería ser:
    fim1 = f(t(i-1), w(i-1));
   i. En línea 6 debería ser:
 j. En línea 6 debería ser:
    p = 4;
 k. En línea 19 debería ser:
    fip1 = f(t(i+1),w(i));
  I. En línea 22 debería ser:
    dg = 1 - h/12*(5*dfip1 + 8*dfi - dfim1);
 m. En línea 20 debería ser:
    g = w0 - w(i) - h/12*(5*fip1 + 8*fi - fim1);
 n. En línea 20 debería ser:
    g = w0 + w(i) + h/12*(- 5*fip1 - 8*fi + fim1);
    o. En línea 22 debería ser:
    dg = 1 - h^{+9}/24^{+}dfip1;
```

```
Respuesta parcialmente correcta.

Ha seleccionado correctamente 3.

Las respuestas correctas son: En línea 6 debería ser:

p = 2;

En línea 17 debería ser:

fim1 = f(t(i-1),w(i-1));

En línea 19 debería ser:

fip1 = f(t(i+1),w0);

En línea 20 debería ser:

g = w0 - w(i) - h/12*(5*fip1 + 8*fi - fim1);

En línea 21 debería ser:

dfip1 = df(t(i+1),w0);

En línea 22 debería ser:

dfip1 = df(t(i+1),w0);

En línea 22 debería ser:

dg = 1 - h*5/12*dfip1;
```

Solución correcta

PREGUNTA 13:

(Relacionado al ejercicio 10 de TP8) Considere $f(x)=2+\cos(x)-\sin(3x)$ en el intervalo [0,3], determine el área de superficie de revolución a través de la cuadratura de Gauss con n=3 puntos de integración y utilizando 30 subintervalos. Determine cuántas cifras exactas tiene el resultado obtenido. Superficie: 100

Ejercicio 10 (Aula): El área de la superficie de revolución que se obtiene al girar el gráfico de y = f(x) alrededor del eje x, para $a \le x \le b$ es:

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

Aproxime el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar el gráfico de

$$f(x) = 20x - \frac{x^3}{5}, \quad x \in [0, 2],$$

alrededor del eje x, utilizando cuadratura de Gauss para n=3 (puntos de integración) y comparar el resultado con la regla de Simpson para un sólo intervalo. Luego, resuelva la integral utilizando las reglas de trapecio y Simpson compuestas para L=5. Compare los resultados con la aproximación que se obtiene al usar la función $\mathtt{quad}()$ de Octave y realice los comentarios pertinentes acerca de la precisión de cada uno de los métodos utilizados.

Los siguientes códigos de Octave resuelven la cuadratura compuesta usando n puntos de Gauss para cada subintervalo.

```
function Q=cuad_gauss_c(f,a,b,L,n)
[xg,w]=gauss_xw(n);
x=linspace(a,b,L+1);
h=(b-a)/L;
Q=0;
for i=1:L
t=h/2*(xg+1)+x(i);
Q+=h/2*(w'*f(t));
endfor
```

PREGUNTA 14:

(Relacionado al Ejercicio 8 del TP5) Determine las componentes (Vx,Vy) de la velocidad del brazo mecánico en el instante de tiempo t=5.5 s.

Vx: 4,8750

✓

Vy: 1,8750

Ejercicio 8 (Aula): Se quiere determinar la trayectoria plana seguida por un brazo robot industrial (idealizado por un punto material) durante un ciclo de trabajo. El brazo robot debe satisfacer las siguientes restricciones: se debe encontrar en reposo en el punto (0,0) en el instante inicial. Luego de 1s se debe encontrar en el punto (2,4), 1s después debe alcanzar el punto (6,6) y detenerse allí (primera etapa). En una segunda etapa retoma inmediatamente su movimiento y alcanza, luego de otro segundo más el punto (3,2) para finalmente retornar al origen luego de otro segundo más, donde quedará detenido para repetir el ciclo de trabajo.

Encuentre el trazador cúbico sujeto correspondiente utilizando el código desarrollado en el ejercicio 7 y luego realice las siguientes gráficas: (a) x vs. t (etapas 1 y 2 en la misma gráfica), (b) y vs. t (idem anterior), y finalmente (c) en el plano xy la trayectoria completa encontrada.

polyfit: Dado un conjunto de datos (x_i, y_i) , la función p=polyfit (x,y,n) de Octave devuelve un vector p cuyas componentes son los coeficientes del polinomio de grado n que ajusta a los datos en el sentido de cuadrados mínimos.

PREGUNTA 15:

Se quiere aproximar la función: $f(x)=\frac{1}{4x}$ en el intervalo [1,3] utilizando una interpolación polinómica con tres(3) puntos equidistantes en dicho intervalo. Determine cuál de las cuatro soluciones dadas para el Error Máximo Teórico (sale de la fórmula de error del polinomio de Lagrange) es la correcta, cuando lo medimos en el punto 1.7.				
De igual forma marcar la solución correcta del Error Real cometido.				
ERROR MÁXIMO TEÓRICO: 0.0683 ✓ ✓				
ERROR REAL: 0.0069 ✓ ✓				

PREGUNTA 16:

(Relacionado al Ejercicio 10 del TP7) Si el brazo del péndulo mide 2 metros, indique la posición a los 10 segundos, si inicialmente parte de la posición de equilibrio con velocidad 1. (Exprese su resultado en radianes con 4 dígitos decimales correctos).

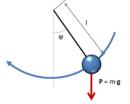
Respuesta: 0,05963

Enunciado Pregunta 16

Ejercicio 10 (Aula): (Péndulo simple) Si consideramos un péndulo de brazo rígido de longitud ℓ , donde no hay fricción ni resistencia del aire, el ángulo $\varphi(t)$ que forma el péndulo con la vertical satisface la siguiente ecuación diferencial de orden dos:

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \varphi(t) = 0,$$

donde $g = 9.81g/m^2$ es la constante de aceleración gravitacional.



Supongamos (por simplicidad) que la longitud del brazo es igual a 9.81m, con lo que obtenemos la ecuación

$$\varphi''(t) + \operatorname{sen} \varphi(t) = 0.$$

Resolver esta ecuación numéricamente en el intervalo [0,20] y explicar, en cada uno de los siguientes casos, la situación física descripta (condiciones iniciales y evolución):

(a)
$$\varphi(0) = 0.1, \, \varphi'(0) = 0$$

(e)
$$\varphi(0) = 0, \ \varphi'(0) = 1$$

(b)
$$\varphi(0) = 0.7, \, \varphi'(0) = 0$$

(f)
$$\varphi(0) = 0$$
, $\varphi'(0) = 1.99$

(c)
$$\varphi(0) = 3.0, \varphi'(0) = 0$$

(g)
$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2$$

(d)
$$\varphi(0) = 3.5, \, \varphi'(0) = 0$$

(h)
$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2.01$$

PREGUNTA 17:

El siguiente código resuelve un PVI de primer orden por medio del método de Crank-Nicholson usando el método de Newton-Raphson para avanzar en la solución. Indique las opciones que corrigen el código.

```
function[x,w] = CN_NR(f,df,x0,xn,y0,N,maxit,tol)
h = (xn-x0)/N;
x = [x0:htxn];
w = zeros(1,N+1);
w(1) = y0;
for i=1:N
w0 = w(1);
fn = f(x(i),w(i));
fn = f(x(i),w(i));
fn = f(x(i),w(i));
g = w0 - w(i) - h*fn;
dfnpl = df(x(i+1),w(i+1));
g = w0 - w(i) - b*fn;
dfnpl = df(x(i+1),w(i+1));
dg = 1 - h*dfnpl;
w(i+1) = w0 - g/dg;
if (abs(w(i+1)-w0) < tol && abs(g) < tol)
break;
endif
w0 = w(i+1);
endfor
endfor
endfor
endfor
endfor
endfor</pre>
```

```
Seleccione una o más de una:
a. En línea 11 debería ser:
   g = w0 - w(i) - h/2*(fn - fnp1);

    b. En línea 11 debería ser:

  g = w0 + w(i) + h/2*(fn + fnp1);
c. En línea 10 debería ser:
   fnp1 = f(x(i+1),w(i));
d. En línea 13 debería ser:
  dg = 1 + h/2*dfnp1;
e. En línea 12 deberías ser:
  dfnp1 = df(x(i+1),w0);
f. En línea 13 debería ser:
  dg = 1 - h/2*dfnp1;
g. En línea 11 debería ser:
  g = w0 - h*(fn + fnp1);

    h. El código no tiene errores

 i. En línea 11 debería ser:

   g = w0 - w(i) - h*0.5*(fn + fnp1);
j. En línea 10 debería ser:
   fnp1 = f(x(i+1),w0);
k. En línea 13 debería ser:
   dg = 1 - h*(dfn + dfnp1);

    I. En línea 12 deberías ser:

  dfnp1 = df(x(i+1),w(i));
```

```
Respuesta correcta

Las respuestas correctas son: En línea 11 debería ser:

g = w0 - w(i) - h*0.5*(fn + fnp1);
, En línea 10 debería ser:
fnp1 = f(x(i+1), w0);
, En línea 12 deberías ser:
dfnp1 = df(x(i+1), w0);
, En línea 13 debería ser:
dg = 1 - h/2*dfnp1;
```