

# Cálculo Numérico

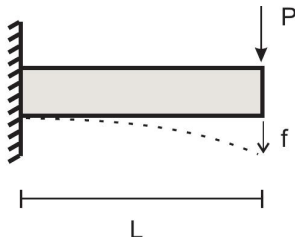
## Métodos Numericos y Errores

- *Cálculo numérico* ( o bien *análisis numérico*) es una rama de las matemáticas aplicadas, que intenta obtener la *solución numérica* de *problemas matemáticos*.
- Estos problemas a veces involucran ecuaciones diferenciales, a veces sobre entidades vectoriales o tensoriales, en fin, con distinto grado de complejidad.
- Las herramientas matemáticas se utilizan para representar o modelar teóricamente problemas de las distintas ingenierías. Son las ecuaciones de problemas físicos (ecuaciones de la *física-matemática*). Por ejemplo:
  - Problemas de movimiento de fluidos
  - Problemas de deformaciones de materiales sólidos.
  - Problemas de propagación del calor.
  - etc.

- Estas soluciones numéricas se obtienen a través de una cantidad de números (no funciones, ...) que representan la función buscada evaluada en puntos determinados.
- Las soluciones numéricas se obtienen mediante *técnicas numéricas* (o *métodos numéricos*) utilizando operaciones sencillas (suma, resta, multiplicación, ...) en lugar de operaciones mas complejas (diferenciación o integración).
- En algunos problemas la solución numérica puede coincidir con la solución analítica, pero en otros tipos de problemas no, y existe un *error* numérico.

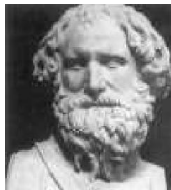
# ¿ Por qué cálculo numérico?

- Vamos a suponer un problema ingenieril hipotético, de tipo estructural. Bien podría haber sido un problema hidráulico, o termomecánico, o algún otro. A los efectos de esta introducción es lo mismo.
- Supóngase una tarea demandada a un ingeniero: predecir cuánto se deforma una viga



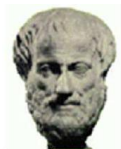
# El cálculo en ingeniería

- La evaluación de magnitudes que cuantifiquen el estado mecánico de estructuras, piezas industriales, recursos naturales, tejidos orgánicos, etc. puede efectuarse por algunas de las siguientes maneras:
  - Experimental
  - Analítica (Teórica)
  - Numérica
- En ese orden ha sido posible -históricamente- contar con esas herramientas.
- Hagamos un breve repaso a esa historia.



Arquimedes (287-212 a.c)

- Hubo grandes figuras de la ciencia, como el Gran Ingeniero Arquimedes de Siracusa (287-212 a.c) a quien debemos: el principio hidrostática, desarrollos de máquinas simples (palanca, tornillo), el cálculo del área de la parábola, una aproximación de  $\pi$ , entre otros importantes aportes.



Aristóteles (384, 322 a.c.)

- El conocimiento era empírico. Basado en la observación y estaba sistematizado en la *filosofía*.
- Los postulados de Aristóteles mantuvieron vigencia durante casi 2000 años.
- El andamiaje teórico se arma mediante la *lógica*.
- Es útil mencionar que las herramientas matemáticas se circunscribían a la *geometría*.
- No había herramientas para resolver nuestro problema.



Galileo (1564-1642)

- Galileo introdujo el método experimental y con ello dió paso al método científico
- Le debemos muchísimo. Además de sus aportes en cinemática, astronomía, . . . , conocidos hoy por todos, Galileo creó la *Resistencia de los Materiales*, que puede dar respuesta a nuestro problema.
- Es importante, para contextualizarlo, tener en cuenta las limitadas posibilidades experimentales y de cálculo que tenía en esa época.
- El método experimental → permite resolver nuestro problema





Sir Isaac Newton  
(1642-1727)

- Isaac Newton, matemático, físico y experimentador, fué tal vez el científico más importante e influyente de la historia.
- Simultaneamente con (pero separadamente de) Gottfried Leibnitz (1646-1716) creó el *cálculo infinitesimal*
- Además de importantes aportes en matemática, mecánica, óptica, ...

# Solución analítica de problemas físico-mecánicos

- Las magnitudes (propiedades, estado) pueden ser medidas y representadas como *variables* dependientes de otras variables (*funciones*)

*Lord Kelvin (1824-1907): cuando se puede medir aquello de que se habla, y expresarlo en números, se sabe algo de ello; pero nuestro saber es deficiente e insatisfactorio mientras no podamos expresarlo en números*

- Las leyes o condiciones a cumplir son las *ecuaciones* que vinculan esas variables.
- El problema matemático que describe el comportamiento de un sistema físico:
  - ecuaciones (diferenciales)
  - condiciones de contorno

# Solución analítica de problemas físico-mecánicos

- Hubo un importante desarrollo durante los siglos XVIII y XIX  
Euler (1707-1783); Lagrange (1736-1813);  
Navier (1785-1836); Gauss (1777-1855);  
Stokes (1819-1903); Laplace (1749-1827);  
Fourier (1758-1830); ...
- La solución analítica es una solución elegante.
- Pero puede obtenerse para algunos casos (sencillos)

# Problemas con solución analítica

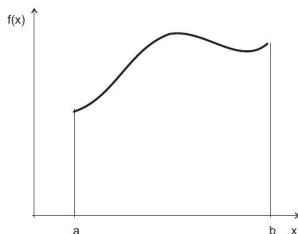
- Muchos problemas pueden resolverse analíticamente
- Pero ellos se limitan a geometrías sencillas, con condiciones de contorno sencillas, etc.
- En nuestro caso hay una solución analítica la problema de la viga  
→ permite resolver nuestro problema
- ...
- *En la mayoría de los casos prácticos no tenemos solución analítica ... !*

La solución analítica será objeto de la materia *Mecánica del Continuo*

# Métodos numéricos

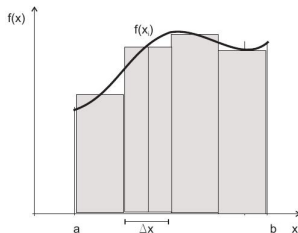
- El concepto de los métodos numéricos se introducirá con un ejemplo muy sencillo.
- Por ejemplo: hallar una integral definida
- El área bajo la curva puedo obtenerla por integración.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



# Métodos numéricos

- Si no puedo integrar esa función, puedo aproximar el área computando las áreas de estos rectángulos:



$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

- No obtengo así la solución exacta  $A$  sino una solución numérica (aproximada)  $\hat{A}$ .

- Grecia (antes de la era cristiana)  
Reemplazo de una curva por una poligonal. Cálculo de  $\pi$  (Arquímedes).
- Newton y Cotes: integración numérica.
- Euler: solución de problemas de valor inicial.
- ...
- Lord Rayleigh (1870)  
Técnicas variacionales para problemas de vibración. Reemplaza la función incógnita por una serie de funciones conocidas y coeficientes incógnitas.
- Ritz (1909)  
Extendió la idea de Rayleigh a otros tipos de problemas (electrodinámica). *Método de Rayleigh-Ritz*. Precisa un funcional.

# Método de Rayleigh-Ritz



Lord Rayleigh (John W. Strutt)  
(1842-1919), Nobel 1904



Walter Ritz  
(1878-1909)

- Se propone una aproximación  $\hat{u}(x)$  al valor exacto  $u(x)$

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) a_i$$

mediante funciones conocidas  $\phi_i(x)$  y coeficientes incógnitas  $a_i$

- Calcula  $a_i$  por minimización del funcional que gobierna el problema.



- Galerkin (1915)  
Minimización del error: residuos ponderados.



Boris Grigorievich Galerkin  
(1871-1945 )

- ... y muchos otros ...
- *En nuestro caso el Método Numérico*  
→ *permite resolver nuestro problema*

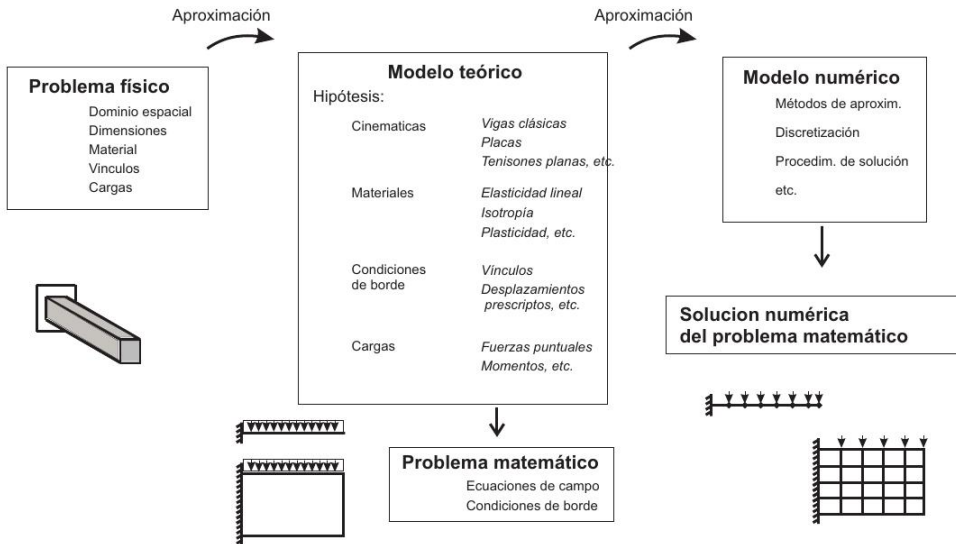
Los Mét. Numéricos serán objeto de la materia *Mec. Computacional*

# El cálculo numérico

La metodología para realizar una simulación numérica implica:

- Desarrollo de un *modelo matemático*  $\rightarrow$  *problema matemático*
- *Solución numérica* del *problema matemático*
- Desarrollo de software para la *solución numérica*
- Verificación de los *métodos numéricos* con casos simples
- Validación del *modelo matemático* con resultados experimentales
- Utilización práctica para predecir comportamiento.

# Aproximaciones



# Errores numéricos

# Errores numéricos

- Antes de continuar se pide que escriba un programita muy sencillo:
  - 1) guardar en una variable 1 dividido por 3
  - 2) restar de 1 esa variable, y repetir otras dos veces
  - 3) si el resultado es cero imprimir “verdadero”, y sino “falso”
- Sorprendentemente el programa produce un resultado erróneo. Esto nos pone frente a los *errores numéricos*. Esto puede acarrear resultados catastróficos (al final de la clase se muestran algunos casos)
- En cálculos numéricos debemos estar preparados para manejar estos errores numéricos.

# Errores numéricos

- Los errores numéricos provienen de la diferencia entre los valores calculados y los valores reales
- La palabra *error* no significa aquí *equivocación*
- En todos los cálculos con computadoras y en todos los métodos numéricos es necesario manejar el tema de *errores*

# Fuentes de errores

En aproximaciones en ingeniería se introducen errores (entendidos aquí como diferencia entre el valor calculado y el valor real) de diferentes fuentes:

- Errores en la formulación del problema matemático
- Errores en la aproximación de la geometría
- Errores en los datos físicos
- Errores del método numérico de aproximación
- Errores en la resolución del sistema de ecuaciones
- Errores de redondeo

- En los métodos numéricos manejaremos dos clases de errores:
  - Errores de truncamiento  
También llamados *errores algorítmicos*.  
Son los provenientes del método numérico de aproximación. Por ejemplo: el área calculada con los rectángulos, en el ejemplo dado, no es igual al área encerrada por la curva en la integración definida. Se los suele llamar *errores de truncamiento*, ya que en muchos casos provienen de truncar una serie infinita.
  - Errores de redondeo  
Son los introducidos por la computadora digital que tiene un espacio finito para almacenar sus variables.  
En este caso entran tanto los denominados errores por truncamiento (hacia abajo) como por redondeo (hacia arriba). En ambos casos se engloban en el término *errores de redondeo*
- A continuación veremos errores de redondeo.
- Los errores de truncamiento serán tratados en los capítulos siguientes.



# Aritmética de las computadoras

- Normalmente usamos una base **decimal** para escribir los números.

Ej:

$$1563 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

- Un número *natural* se puede representar:

$$N = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

con  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  y se escribe:

$$N = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{(10)}$$

- Un número *real* se puede representar:

$$X = s a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 . b_1 b_2 \dots (10)$$

$$X = s \left( \sum_{i=0}^k a_i 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 10^{-i} \right)_{(10)}$$

donde  $s = \begin{cases} + \\ - \end{cases}$

- Def:

Dígitos significativos: cantidad de dígitos  $a_i$  y  $b_i$ .  
(Empezando por el primero no nulo)

- Def:  
**Representación normalizada:**

$$X = s (0.a_1a_2 \dots)_{(10)} \times 10^m$$

donde

$$X = \underbrace{s}_{\text{signo}} \underbrace{(0.a_1a_2 \dots)_{(10)}}_{\text{mantisa}} \times \underbrace{10}_{\text{base}} \underbrace{m}_{\text{exp}}$$

Ej:

$$1563 = 0.1563 \times 10^4$$

$$2100000 = 0.21 \times 10^7$$

$$0.00017 = 0.17 \times 10^{-3}$$

La mantisa es  $\geq 0.1$  y  $< 1$

- Base binaria

$$1563 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 \\ + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Los  $a_i$  son ahora 0 o 1. La base es 2.

$$1563 = 1024 + 512 + 16 + 8 + 2 + 1$$

Como se hizo en base decimal, en base binaria se puede representar:

$$1563_{(10)} = 11000011011_{(2)}$$

- Representación binaria normalizada  
Ventajas:
  - un número  $\rightarrow$  string de bits (no preciso el punto)
  - el dígito  $a_1$  no preciso guardarlo (es siempre 1)
- Se denomina *floating point*
- Se destina una cantidad de bits para la mantisa (que determina la precisión); y otra cantidad para el exponente (que determina el rango que puede representar)

## Representación estándar IEEE

- Precisión simple (32 bits)

- 1 bit para el signo; 8 bits p/exponente; y 23 p/ mantisa
- El rango que puede representar va de  $2^{-126}$  a  $2^{127}$  o sea  $1.17 \times 10^{-38}$  a  $1.7 \times 10^{38}$ . Por debajo o encima da *underflow* o *overflow*.
- El error es  $2^{-24} \simeq 6 \times 10^{-8}$

- Precisión doble (64 bits)

- 1 bit para el signo; 11 bits p/exponente; y 52 p/ mantisa
- El rango que puede representar va de  $2^{-1022}$  a  $2^{1023}$  o sea  $10^{-308}$  a  $10^{308}$  aprox.
- El error es  $2^{-53} \simeq 10^{-16}$

- Representación binaria normalizada

$$x = s (0.a_1a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots)_{(2)} \times 2^m = \pm q \times 2^m$$

donde la mantisa  $q$  está entre  $\frac{1}{2} \leq q < 1$

- El *número de máquina* más cercano, por defecto:

$$x' = s (0.a_1a_2 \dots a_k)_{(2)} \times 2^m$$

se retienen  $k - 1$  bits ( $a_1 = 1$ ) y descarta el resto

Se obtiene un número por defecto.  $\rightarrow$  *truncamiento* o *poda* o *cancelación*

- El número por exceso:

$$x'' = s \left( (0.a_1a_2 \dots a_k)_{(2)} + 2^{-k} \right) \times 2^m$$

# Errores de redondeo

- El número de máquina más próximo a  $x$  lo llamamos  $fl(x)$
- En el *redondeo*
  - si el bit  $a_{k+1} = 0 \rightarrow fl(x) = x'$
  - si el bit  $a_{k+1} = 1 \rightarrow fl(x) = x''$
- El error al usar  $fl(x)$  en vez de  $x$  se llama *error de redondeo* (ya sea que esté podado o redondeado).
- Error absoluto

$$|x - fl(x)|$$

- Error relativo

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|}$$

siempre que  $|x| \neq 0$



# Errores de redondeo

## Epsilon de máquina $\epsilon$

- La diferencia entre las representaciones por exceso y por defecto:

$$x'' - x' = 2^{m-k}$$

- La representación en punto flotante es de ellas la más cercana a  $x$ , de donde, el error absoluto:

$$|x - fl(x)| \leq \frac{1}{2}(x'' - x') = \frac{1}{2}2^{m-k} = 2^{m-k-1}$$

- Error relativo

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{2^{m-k-1}}{q 2^m} = \frac{2^{-k-1}}{q} \leq \frac{2^{-k-1}}{\frac{1}{2}} = 2^{-k}$$

donde  $q$  es la mantisa cuyo valor esta entre  $\frac{1}{2}$  y 1.  
(recordar que  $(0.1)_2 = (0.5)_{10}$ )

# Errores de redondeo

- Puede ponerse:

$$f(x) = x(1 + \delta)$$

con  $|\delta| \leq \epsilon$

- Donde  $\epsilon = 2^{-k}$
- El  $\epsilon$  de máquina varía según la computadora.
- Para computadoras con palabras de 32 bits
  - simple precisión:  $\epsilon \simeq 10^{-7}$
  - doble precisión:  $\epsilon \simeq 10^{-15}$
- Para computadoras con palabras de 64 bits
  - simple precisión:  $\epsilon \simeq 10^{-14}$
  - doble precisión:  $\epsilon \simeq 10^{-28}$
- Luego

$$\frac{|x - f(x)|}{|x|} \leq \epsilon$$

# Errores de redondeo

- Cifras significativas

Se dice que  $x^*$  aproxima a  $x$  con  $t$  cifras (o dígitos) significativas, si  $t$  es el entero, no negativo, más grande para el cual

$$\frac{|x - f(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-t}$$

*Ejemplos:*

- Sea la aproximación para  $\pi = 3.141592$ . El número 3.1416 aproxima al anterior con 5 cifras significativas, ya que

$$\frac{|x - f(x)|}{|x|} \simeq 2.5 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-5}$$

- Una medición con error relativo 1‰ contiene 2 cifras significativas, ya que  $0.001 \leq 0.5 \times 10^{-2}$

# Propagación de errores

- Los errores de redondeo, por la aritmética de la máquina, se pueden propagar con las operaciones, acumulándose.

## En operación suma o resta

- Sea la suma de dos número  $x$  e  $y$ , cuyas representaciones en punto flotante son  $fl(x)$  y  $fl(y)$ , y los errores de redondeo  $\eta_x$  y  $\eta_y$ :

$$x = fl(x) + \eta_x$$

$$y = fl(y) + \eta_y$$

- El error absoluto de la suma:

$$|(x + y) - (fl(x) + fl(y))| = |\eta_x| + |\eta_y|$$

- El error absoluto de la suma (o resta), es la suma de los errores absolutos de cada sumando.

## En operación producto

- Sea el producto de dos número  $x$  e  $y$ , cuyas representaciones en punto flotante son  $fl(x)$  y  $fl(y)$ , y los errores de redondeo  $\eta_x$  y  $\eta_y$ :
- El error absoluto del producto:

$$|(xy) - (fl(x)fl(y))| = |(xy) - (x - \eta_x)(y - \eta_y)| = |x\eta_y + y\eta_x - \eta_x\eta_y|$$

- El error relativo (despreciando el término de orden superior):

$$\frac{|(xy) - (fl(x)fl(y))|}{|xy|} = \frac{\eta_x}{x} + \frac{\eta_y}{y}$$

- El error relativo del producto, es la suma de los errores relativos de cada factor.

# Sustracción de números próximos

- Sean  $x$  e  $y$  números próximos:

$$fl(x) = (0.a_1a_2 \dots a_p a_{p+1} \dots a_k)10^n$$

$$fl(y) = (0.a_1a_2 \dots a_p b_{p+1} \dots b_k)10^n$$

- Restando:

$$fl(x) - fl(y) = (0.00 \dots 0 c_{p+1} \dots c_k)10^n$$

$$fl(x) - fl(y) = (0.c_{p+1} \dots c_k)10^{n-p}$$

donde se designa  $c_{p+1} = a_{p+1} - b_{p+1}$ , etc.

- El resultado tiene a lo sumo  $k - p$  cifras significativas.

# Sustracción de números próximos

Ejemplo:

$$x = 0.3721478693$$

$$y = 0.3720230572$$

$$x - y = 0.0001248121$$

En una computadora de 5 dígitos:

$$fl(x) = 0.37215$$

$$fl(y) = 0.37202$$

$$fl(x - y) = 0.00013$$

El error relativo es grande ( $\simeq 4\%$ )

El resultado se expresa  $0.13000 \times 10^{-3}$ , pero los tres últimos dígitos (ceros) carecen de valor.



# Evaluación de funciones

- Sea evaluar

$$f(x) = x^3 - 6.1 x^2 + 3.2 x + 1.5$$

en  $x = 4.71$  usando aritmética de 3 dígitos

- El valor exacto:

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5 = -14.263899$$

- El valor con tres dígitos (truncado):

$$f(4.71) = 104. - 135. + 15.0 + 1.5 = -13.5$$

- El error relativo:

$$\left| \frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899} \right| \simeq 0.05$$

# Evaluación de funciones

- La misma función puede reescribirse en forma anidada:

$$f(x) = x^3 - 6.1 x^2 + 3.2 x + 1.5 = ((x - 6.1) x + 3.2) x + 1.5$$

- Evaluando esta expresión con tres dígitos (truncado):

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1) 4.71 + 3.2) 4.71 + 1.5 = -14.2$$

- El error relativo:

$$\left| \frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899} \right| \simeq 0.0045$$

diez veces menor que en el caso anterior.

# Evaluación de funciones

- las funciones deberían escribirse siempre en forma anidada antes de evaluarlas numéricamente
- en este caso hemos visto como se ha disminuido el error de truncamiento
- tambien disminuye la cantidad de operaciones: en el primer caso se precisan 4 multiplicaciones y 3 adiciones; en el segundo 2 multiplicaciones y tres adiciones.

# Problemas matemáticos y solución numérica

# Problema matemático

- Un problema matemático puede escribirse:

hallar $x$ tal que $F(x, d) = 0$
-------------------------------------

(1)

donde

- $F$  : relación funcional entre  $x$  y  $d$ ;
- $x$  : incógnita (escalar, vector, funciones, etc.)
- $d$  : datos (escalar, vector, funciones, etc.)

## Ejemplo:

hallar el vector  $\mathbf{x}$  tal que

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

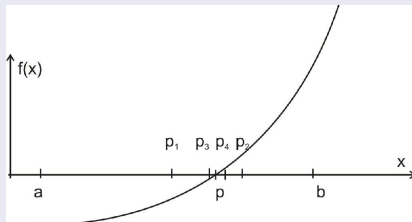
Este es un problema de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Será tratado en otro capítulo.

# Problema matemático

## Ejemplo:

hallar  $x$  tal que  
 $f(x) = 0$



Este es un problema de hallar el cero o raíz de una función.  
Será tratado en otro capítulo.

# Problemas bien planteados

- El problema (1) se dice **bien planteado** si
  - *tiene* una solución
  - la solución es *única*
  - la solución *depende con continuidad de los datos*.
- Si no, el problema se dice que es **mal planteado**



# Problema mal planteado

## Ejemplo:

- El problema de hallar la raíz de

$$p(x) = x^4 - x^2(2a - 1) + a(a - 1)$$

es mal planteado.

- En efecto:
  - Si  $a \geq 1$  tiene 4 raíces reales
  - Si  $a \in [0, 1)$  tiene 2 raíces reales
  - Si  $a < 0$  no tiene raíces reales
- La solución varía en forma discontinua con el dato  $a$ .

# Condicionamiento

- Si con  $\delta d$  se indica una variación en los datos de entrada, y con  $\delta x$  la variación acorde de la solución, se puede definir un *numero de condición*:

$$\kappa = \sup_{\delta d} \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta d\|/\|d\|}$$

donde  $\|\cdot\|$  es una *norma* (medida escalar).

- Si  $\kappa \gg 1$  el problema está *mal condicionado*.
- Si  $\kappa \sim 1$  el problema está *bien condicionado*.
- Ejemplo:

*Para el problema de resolver un sistema de ecuaciones  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  se puede definir un número de condición para la matriz:  $\kappa = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$*

## Ejemplo:

- Se desea hallar un polinomio cúbico

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

que pase por los 4 puntos: (2,8), (3,27), (4,64), (5,125).  
(evidentemente este polinomio es  $y = x^3$ ).

- La técnica para hallarlo se verá más adelante, pero conduce a resolver el SEAL (Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales):

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo: (cont.)

- La solución exacta del sistema de ecuaciones es:  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ .
- Una computadora con 9 cifras da:  
 $[1.000004 \ -0.000038 \ 0.000126 \ -0.000131]$   
que es cercano a la solución.
- Pero si el número  $a_{11}$  de la matriz, en lugar de ser 20514 fuese 20515, la misma computadora da:  
 $[0.642857 \ 3.75000 \ -12.3928 \ 12.7500]$
- El resultado es muy sensible a los datos, y no es confiable. Esto se dio porque el número de condición es muy alto.
- El número de condición de la matriz en este caso es  
 $\kappa = 3.1875e + 07$

- Sea el problema (1) bien planteado

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{hallar } x \text{ tal que} \\ F(x, d) = 0 \end{array}} \quad (1)$$

- Hay métodos numéricos que se basan en construir una secuencia de problemas aproximados:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{hallar } x^{(k)} \text{ tal que} \\ F^{(k)}(x^{(k)}, d^{(k)}) = 0 \quad k \geq 1 \end{array}} \quad (2)$$

con la expectativa que  $x^{(k)} \rightarrow x^*$  para  $k \rightarrow \infty$ , donde  $x^*$  es la solución exacta de (1).

- Para que se dé esto debe ser  $d^{(k)} \rightarrow d$  y  $F^{(k)} \rightarrow F$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

## Ejemplo:

:

El metodo de Newton-Raphson para hallar cero de una función, resuelve una sucesión de problemas aproximados del tipo:

$$f^{(k)}(x^{(k)}) = x^{(k)} - x^{(k-1)} + \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} = 0$$

## Consistencia

- El problema aproximado (2) se dice **consistente** si

$$F^{(k)}(x^*, d) \rightarrow F(x^*, d)$$

para  $k \rightarrow \infty$

## Estabilidad

- Un método numérico se dice que es **estable**, si para cada iteración  $k$  existe una solución única  $x^{(k)}$  para los datos  $d^{(k)}$ ; y si esa solución depende continuamente de los datos.
- Es decir que para pequeños cambios  $\delta d^{(k)}$  en los datos se producen pequeños cambios en los resultados  $\delta x^{(k)}$
- Este es un concepto análogo al de problema *bien planteado*
- Puede evaluarse un *número de condición* para el método numérico
- Los conceptos de *bien planteado*, *bien condicionado*, y *estable*, se usan como sinónimos.



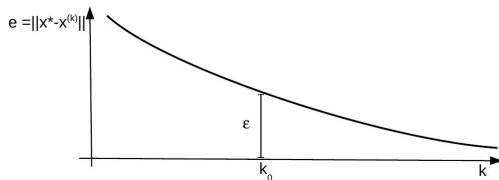
## Convergencia

- El método numérico (2) se dice **convergente** si

$\forall \epsilon > 0 \exists k_0(\epsilon), \exists \delta(k_0, \epsilon)$  tal que

$$\forall k > k_0(\epsilon), \forall \|\delta d^{(k)}\| < \delta(k_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(d) - x^{(k)}(d + \delta d^{(k)})\| \leq \epsilon$$

- Si un método numérico es *consistente y estable*, entonces es *convergente*



# Orden de convergencia

- En procedimientos iterativos se construye una sucesión  $[x^{(k)}]$  que se espera tienda a la solución  $x^*$ .
- Para referirse a la rapidez con que  $[x^{(k)}]$  tiende a  $x^*$ . se habla de *tasa*, o *razón*, o *velocidad* de convergencia.
- Se dice que la convergencia es **lineal** si:

$\exists c < 1$  y  $K \in \mathbb{Z}$  tal que

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq c |x^{(k)} - x^*| \quad \text{para } k \geq K$$

- Se dice que la convergencia es **superlineal** si:

$\exists [\epsilon_k] \rightarrow 0$  y  $K \in \mathbb{Z}$  tal que

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq \epsilon^{(k)} |x^{(k)} - x^*| \quad \text{para } k \geq K$$

# Orden de convergencia

- Se dice que la convergencia es **cuadrática** si:

$\exists C$  (no necesariamente  $< 1$ ) y  $K \in \mathbb{Z}$  tal que

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq C |x^{(k)} - x^*|^2 \quad \text{para } k \geq K$$

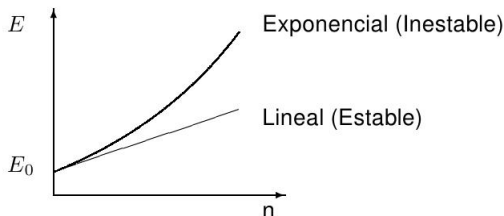
- Se dice que la convergencia es de **orden**  $\alpha$  si:

$\exists C$  y  $\alpha$  constantes y  $K \in \mathbb{Z}$  tal que

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq C |x^{(k)} - x^*|^\alpha \quad \text{para } k \geq K$$

# Estabilidad

- Un método numérico se dice estable si pequeños cambios en los datos de entrada producen pequeños cambios en los resultados.
- En algoritmos donde se evalúa una solución en varios instantes en el tiempo (historia), hay una acumulación de errores de cada paso. Si se introduce un error o perturbación  $E_0$  en alguna etapa del cálculo, y se designa con  $E_n$  el error luego de  $n$  pasos (iteraciones), se dice que:
  - El error crece *linealmente* si  $E_n = n C E_0$
  - El error crece *exponencialmente* si  $E_n = C^n E_0$  ,  $C > 1$



- Los métodos numéricos se describen a través de *algoritmos*
- Un algoritmo es un procedimiento que describe una serie finita de pasos, en un orden determinado, que hay que realizar para resolver un problema dado.
- El algoritmo se puede describir con un pseudocódigo. Este especifica la forma de entrada de datos; de salida de resultados; y los pasos a realizar.

## Algunos desastres a causa de errores numéricos

o inesperados resultados debido a errores numéricos

- Falla del misil Patriot
- Explosión del Ariane 5
- Hundimiento de la plataforma Sleipner A
- Elecciones parlamentarias alemanas
- Bolsa de valores de Vancouver

# Falla del misil Patriot





# Falla del misil Patriot

- El 25/2/1991, durante la Guerra del Golfo, un misil Patriot no pudo interceptar a un misil Scud iraquí que alcanzó su objetivo produciendo 28 muertes.
- Para seguir su objetivo, el sistema debía determinar el intervalo de tiempo, restando dos valores de tiempo medidos.
- Los tiempos, en  $1/10$  de segundos estaban en registros de enteros
- Para calcular el incremento de tiempo, los valores del registro (entero) eran convertidos a valores de punto flotante multiplicándolos por 0.1

# Falla del misil Patriot

- Pero 0.1 en expansión binaria no es representado exáctamente con un numero finito de dígitos.

$$0.1_{(10)} = 0.0001100110011..._{(2)}$$

Hay un error de redondeo (truncamiento). Los registros tenían 24 bits. El error introducido entre la representación (en 24 bits) y el número 0.1 es  $0.95E-07$

- Después de 100 hs el error acumulado es:

$$0.95E-07 \times 100 \times 3600 \times 10 = 0.34_{seg}$$

- La velocidad del misil Scud es aprox. 1676 m/s. En 0.34 seg. recorre mas de  $\frac{1}{2}$  km. Quedó fuera del alcance del Patriot.

# Explosión del Ariane 5



# Explosión del Ariane 5

- El 4/6/1996 el cohete Ariane 5 , de la Agencia Espacial Europea fue lanzado desde la base de Kourou. Durante 36 segundos voló normalmente. Al segundo 37 salió de su curso y se autodestruyó.

## explosion

- Era el primer viaje del Ariane 5 , luego de una década de desarrollo, a un costo de 7 mil millones de U\$. El cohete y su carga estaban valuados en 500 millones de U\$.
- El problema estuvo en un error de software en el Sistema de Referencia Inercial (SRI)

# Explosión del Ariane 5

- Un número de punto flotante de 64 bits, que relacionaba la velocidad horizontal con respecto a la plataforma, fue tratado de convertir a un entero de 16 bits.
- Este número llegó a ser mayor que 32768: no entraba en 16 bits! El sistema devolvió un mensaje de error, que fue interpretado como un dato....
- La ironía es que el programa que produjo la falla había sido heredado del Ariane 4, y que no se precisaba en el Ariane 5 !

# Hundimiento de la plataforma Sleipner A

- La plataforma marina para extracción de petróleo Sleipner A está apoyada en una base de hormigón consistente en 24 celdas. Cuatro celdas se prolongan hacia arriba y sostienen la plataforma. Funciona en el Mar del Norte.
- La primera plataforma Sleipner A tuvo filtraciones de agua por fisuraciones y se hundió en Noruega el 23/8/1991. La pérdida económica resultante fue del orden de \$700 millones.

# Hundimiento de la plataforma Sleipner A



# Hundimiento de la plataforma Sleipner A

- Las investigaciones posteriores atribuyen el accidente a errores en la aproximación numérica (por el método de elementos finitos), que subestimaron las tensiones tangenciales en un 47 %.
- Eso condujo a que los espesores de las paredes de hormigón fuesen insuficientes. Lo mismo que las armaduras de refuerzo.



En este capítulo hemos visto:

- Una motivación para el uso de métodos numéricos.
- La existencia de errores numéricos.
- Cómo se producen los *errores de redondeo*, al trabajar en máquinas de aritmética finita.  
*En otros capítulos veremos otro tipo de errores: los errores de truncamiento o algorítmicos.*
- Hemos visto cómo estos errores se propagan.
- Finalmente hemos definido problemas *bien y mal planteados* y los métodos numéricos para resolverlos, introduciendo los conceptos de *consistencia, estabilidad y convergencia* y los órdenes de convergencia.
- Hemos terminado mostrando algunos casos en que la no observación de estos errores (que hubiese sido muy sencillo evitar) ha derivado en importantes daños materiales y pérdida de vidas.