

Trabajo Práctico 1

”Metodos de resolución de un SEAL”

Gareis Nahuel Julián

Abstract—En el siguiente trabajo práctico se realizaron múltiples pruebas de algoritmos para la resolución de un S.E.A.L. (Sistema de ecuaciones algebraicas lineales). Se usaron implementaciones en Octave de los algoritmos de Jacobi, Gauss, Gauss-Seidel y S.O.R. (Sobre-relajación sucesiva en inglés).

El objetivo es resaltar las diferencias y complejidades que conlleva cada uno de los métodos para resolver un mismo S.E.A.L. Además se pondrá a prueba la inteligencia artificial de OpenAI (ChatGPT-3) para corroborar la fiabilidad de sus respuestas en cuanto a esta tarea en cuestión.

Index Terms—gauss-seidel, gauss, jacobi, seal.

I. INTRODUCCIÓN

EN el mundo moderno se toma por hecho que las computadoras son máquinas con una gran exactitud y optimización a la hora de resolver problemas matemáticos. Son indispensables para dicha tarea y los resultados que computan se toman como absolutos sin lugar a dudas. Sin embargo, nada de esto sería posible de realizar si no fuera por las grandes contribuciones de los métodos numéricos a la computación.

Las máquinas se ven limitadas por el espacio de las arquitecturas que la forman. Nuestro sistema numérico permite figuras como números periódicos o límites ”infinitos” cuya naturaleza no es expresable en un sistema de memoria finita como son las computadoras cuyos números pueden contener una cantidad de decimales específico..

De aquí surge la necesidad de la creación de algoritmos especiales que nos permitan minimizar el error al máximo introduciendo estrategias como el pivoteo y el vector de índices cuando se resuelve un S.E.A.L.

Otra problemática común de las computadoras es el tiempo que lleva resolver una cantidad definida de operaciones. Es importante minimizar lo máximo posible la carga matemática para resolver problemas para obtener resultados más rápidos. En un S.E.A.L. la cantidad de operaciones por renglón puede crecer exponencialmente a mayor tamaño de la matriz

Por ello la creación de distintos algoritmos para optimizar la resolución de estos sistemas algebraicos. En este trabajo se usaran los métodos de Gauss tradicional, Gauss-Seidel, Jacobi y Sobre relajación sucesiva.

II. MARCO PROBLEMÁTICO Y TEORÍA

La matriz a trabajar es un sistema dado por la siguiente naturaleza

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = \frac{1}{N^2}, & i = 2, 3, \dots, N-1 \\ x_N = 0 \end{cases}$$

Fig. 1. En este caso la consigna pide $N = 100$

Si simplificamos el sistema a un $N = 10$, la matriz resultante sería así

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 2. Sistema con $N = 10$

Un dato importante a saber es si la matriz es simétrica definida positiva, ya que para el método de SOR se sabe que una buena cota del valor óptimo de ω para el método de sobre relajación sucesiva se puede calcular como:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_i)]^2}} \quad (1)$$

Por ende para poder aplicar (Eq. 1) usaremos Octave para determinar si es simétrica y si sus eigen valores son positivos. Además se chequeará si es que los métodos iterativos nombrados pueden haciendo uso del cálculo del radio espectral.

Por último se pondrá a prueba la veracidad de las respuestas de ChatGPT en estos tópicos

III. RESULTADOS

Antes de aplicar los métodos iterativos, es buena idea calcular el radio espectral que cada método tendrá para poder establecer si converge y hacer un estimativo de las iteraciones necesarias. A través de Octave, los resultados de los radios espectrales para nuestra matriz son:

Como se puede apreciar, acorde a los radios espectrales, el método SOR es el que converge más rápido, sin embargo

Método	Radio Espectral
Jacobi	0.9995
Gauss-Seidel	0.9990
SOR	0.9385

TABLE I

RADIOS ESPECTRALES DE LOS DISTINTOS MÉTODOS PARA LA MATRIZ DE ESTUDIO

todos a la larga van a converger ya que todos los radios son menores que 1.

Luego de computados los valores tenemos como resultado la siguiente tabla:

Método	Iteraciones	Tiempo (s)
Jacobi	13499	23.2280
Gauss-Seidel	6751	12.3499
SOR	173	0.3814

TABLE II

DESEMPEÑO DE LOS ALGORITMOS

Podemos, entonces, graficar la convergencia de los métodos a través de los residuos de los métodos de la siguiente manera:

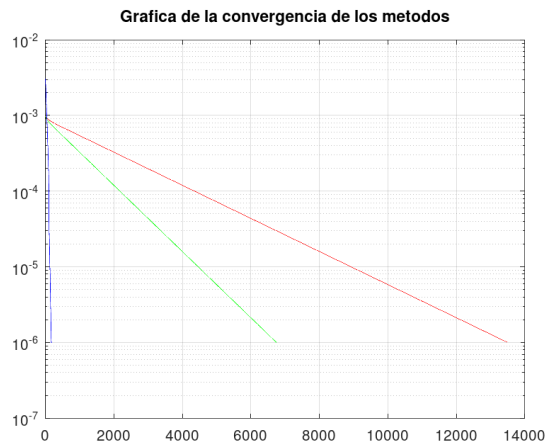


Fig. 3. Rojo: Jacobi — Verde: Gauss Seidel — Azul : SOR

En la siguiente imagen se graficarán los resultados obtenidos por los distintos métodos con la precisión dada por el ejercicio ($10e^{-6}$)

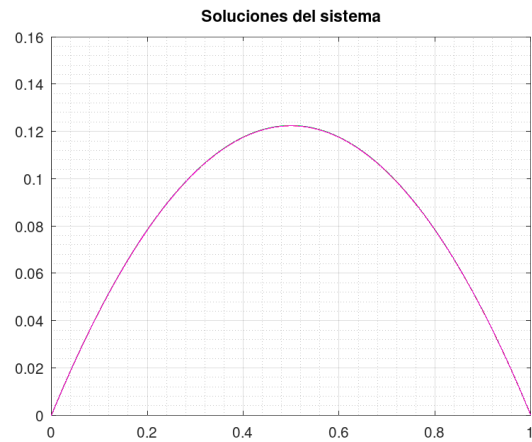


Fig. 4. Todos los metodos convergen en la misma curva

Como se puede ver en (Fig. 5) todos forman la misma curva de solución, lo que es esperable ya que en lo único que difieren los métodos es en la velocidad de obtener este resultado.

Para la sección de chatGPT, al introducir la pregunta, este respondió la siguiente matriz

Necesito un ejemplo de un sistema de 5 ecuaciones lineales para el cual el método de Jacobi converja y el método de Gauss Seidel no lo haga

Si, es posible encontrar un sistema de 5 ecuaciones lineales para el cual el método de Jacobi converja y el método de Gauss-Seidel no lo haga.

Aquí hay un ejemplo de tal sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\ x_2 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Fig. 5. matriz propuesta por ChatGPT

Un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver por el método de Jacobi si cumple con la siguiente condición:

La matriz de coeficientes A debe ser diagonalmente dominante o estrictamente diagonalmente dominante. Una matriz A se considera diagonalmente dominante si para cada fila i, el valor absoluto del elemento diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos en la fila por lo tanto, el sistema propuesto no converge ni siquiera para Jacobi El código utilizado está adjunto con el trabajo práctico.