Cálculo Numérico 2022
Trabajo Práctico 3

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1: *i)*- Calcule los autovalores y el radio espectral de la matriz A, *ii)*- defina matriz convergente e indique si lo es la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Algunas técnicas iterativas involucran un proceso que convierte el sistema $Ax = b$ en uno equivalente de la forma $x = Tx + c$ para alguna matriz T y vector c. La iteración general resulta entonces de la forma

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k \geq 0$$

partiendo de un vector $x^{(0)}$ conocido.

Ejercicio 2:

(a) Enuncie y demuestre la relación que existe entre el radio espectral de la matriz de iteración T y la convergencia de los métodos iterativos (Teorema 7.19 Burden).

(b) Escriba las iteraciones de Jacobi y Gauss Seidel bajo la forma de la ecuación $x = Tx + c$.

Ejercicio 3 (Aula): Implemente las siguientes funciones en Octave:

(a) `function [x,it,r_h] = jacobi(A,b,x0,maxit,tol)` que devuelva la solución `x` del sistema $Ax = b$ mediante el método iterativo de Jacobi, la cantidad de iteraciones `it` necesarias para resolverlo y un vector `r_h` que guarda el residuo $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty / \| x^{(k)} \|_\infty$ en cada iteración k. Los argumentos de entrada son la matriz de coeficientes del sistema lineal `A`, el vector de términos independientes `b`, una aproximación inicial `x0`, un número máximo de iteraciones `maxit` y una toleracia `tol` en el residuo para la convergencia.

(b) `function [x,it,r_h] = gaussseidel(A,b,x0,maxit,tol)` para resolver el sistema lineal mediante el método iterativo de Gauss Seidel, con los mismos argumentos de entrada y de salida que en la función `jacobi`.

(c) Realice analíticamente el conteo de operaciones para el método de Gauss Seidel.

(d) Justifique si el método de Gauss-Seidel convergerá para la matriz del ejercicio 1.

Ejercicio 4 (Aula):

(a) Implemente una función en Octave `function[x,it,r_h]=sor(A,b,x0,maxit,tol,w)` que resuelva el sistema lineal $Ax = b$ mediante el método iterativo de SOR. Los argumentos de entrada y de salida son los mismos que para las funciones anteriores, agregando ahora el parámetro de relajación `w`.

(b) ¿Podría indicar si el método de SOR va a converger para el siguiente sistema lineal? ¿Qué valores debería adoptar el parámetro de relajación? Si concluye que SOR converge, aplíquelo y estime numéricamente el valor óptimo del parámetro ω. Luego resuélvalo con el método de

Gauss Seidel, compare con los resultados de SOR y saque conclusiones. ¿Cuál es la relación entre los dos métodos?

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11, \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

Ejercicio 5: Enuncie y demuestre la relación que existe entre el residuo, el error relativo y el número de condición de la matriz de coeficientes del sistema lineal (Teorema 7.27 Burden).

Ejercicio 6 (Aula):

(a) Muestre que si la matriz cuadrada A de orden n es simétrica y definida positiva, entonces el gradiente de la función cuadrática $q(x) = (1/2)x^T Ax - x^T b$ evaluado en x está dado por $\nabla q = Ax - b$. Recuerde que el gradiente de una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son $\partial g/\partial x_i$, para $i = 1, \cdots, n$.

(b) Muestre que el valor mínimo de $q(x)$ está dado por $q_{min} = -(1/2)b^T A^{-1} b$.

(c) El algortimo del método de gradientes conjugados sin precondicionar se puede resumir de la siguiente manera: dada una aproximación inicial $x^{(0)}$ al sistema lineal $Ax = b$, el nro. máximo de iteraciones *maxit* y la tolerancia *tol* para la convergencia en el residuo de la aproximación,

1. Calcular $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$
2. Considerar que la primera dirección de búsqueda coincide con la del método del descenso más rápido, es decir $v^{(1)} = r^{(0)}$.
3. Realizar lazo $a - b - c - d$ sobre las iteraciones k hasta que se alcance *maxit* ó hasta que el error relativo sea menor que *tol*,

   a) Calcular la *longitud* del paso $\tilde{t}^{(k)}$ que voy a dar en la dirección $v^{(k)}$ para minimizar $q(x)$ a partir de un $x^{(k)}$ dado,

   $$\tilde{t}^{(k)} = \frac{{r^{(k-1)}}^T r^{(k-1)}}{{v^{(k)}}^T A v^{(k)}}$$

   b) Actualizar la aproximación $x^{(k)}$

   $$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tilde{t}^{(k)} v^{(k)}$$

   c) Actualizar el residuo $r^{(k)}$

   $$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}^{(k)} A v^{(k)}$$

   d) Calcular la próxima dirección de búsqueda,

   $$s^{(k)} = \frac{{r^{(k)}}^T r^{(k)}}{{r^{(k-1)}}^T r^{(k-1)}}$$

   $$v^{(k+1)} = r^{(k)} + s^{(k)} v^{(k)}$$

Siguiendo el procedimiento anterior, implemente en Octave la función
`function [x,it,r_h] = cg(A,b,x0,maxit,tol)` que implementa el método de gradientes conjugados sin precondicionar.

Ejercicio 7 (Aula): Resuelva los siguientes sistemas lineales con el método de Gauss-Seidel y analice lo que sucede en cada caso. Luego intente resolverlos mediante el método directo de eliminación de Gauss. Es necesario aplicar alguna estrategia de pivoteo? Si lo fuera, justifique por qué.

$$\begin{cases} 3x + y + z & = 5 \\ x + 3y - z & = 3 \\ 3x + y - 5z & = -1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 3x + y + z & = 5 \\ 3x + y - 5z & = -1 \\ x + 3y - z & = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Ejercicio 8 (Aula): Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales con todos los métodos presentados en esta guía. Utilice una tolerancia en el residuo de 10^{-5} para la convergencia. En cada caso, estime el costo del método en función del tiempo reloj de ejecución (comandos `tic` y `toc` de Octave), el número de iteraciones y tasa de convergencia (realizar gráficas semilogarítmicas *norma del residuo vs. número de iteraciones* con la función `semilogy()` de Octave). Analizar los resultados obtenidos e indicar cuál método piensa ud. que es el más conveniente. ¿Cómo justifica que los métodos iterativos logren o no convergencia? ¿Qué expectativa puede tener sobre la precisión de los resultados obtenidos? Las entradas de la matriz de coeficientes del sistema lineal son,

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i & si \quad j = i \\ 0.5i & si \quad j = i + 2 \; ó \; j = i - 2 \\ 0.25i & si \quad j = i + 4 \; ó \; j = i - 4 \\ 0 & en\, otra\, posición \end{cases}$$

con $i = 1, \ldots, 1000$. Las entradas del vector de términos independientes son $b_i = \pi$. Utilice la norma infinito. Para crear la matriz utilice la función `diag()` de Octave convenientemente.

Ejercicio 9 (Aula): Considere la viga de acero empotrada en sus dos extremos de la figura (1). La misma tiene longitud $L = 5[m]$ y está sujeta a una carga distribuida por unidad de longitud $P(x) = cte = 1.0326e + 4[N/m]$. Asuma que la viga tiene una sección rectangular uniforme, de ancho $w = 7[cm]$ y altura $s = 14[cm]$, por lo que el momento de inercia de su sección es constante $J = ws^3/12[m^4]$. Sea $E = 210e+3[MPa]$ el módulo de Young del acero, entonces, bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, la deformación de la viga está gobernada por la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden

$$EJ\frac{d^4u(x)}{dx^4} = P(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{3}$$

donde $u(x)$ es el desplazamiento vertical de la viga. Las condiciones de borde para el caso biempotrado son $u(0) = u(L) = 0$ y $u'(0) = u'(L) = 0$, es decir, desplazamientos y rotaciones nulas en los extremos. Si se aplica el método de diferencias finitas para resolver este problema de valores de contorno, entonces se discretiza la viga en N_h subintervalos equiespaciados de longitud $h = L/N_h$. Esto genera los nodos de coordenadas x_j con $j = 0, \ldots, N_h$, en donde la derivada cuarta de la ecuación diferencial es reemplazada por una aproximación en diferencias, en este caso de cuarto orden y centrada en el nodo-j de referencia. Definiendo como $f(x) = P(x)/(EJ)$, $f_j = f(x_j)$ y denotando con η_j al desplazamiento nodal aproximado en el nodo-j, la ecuación en diferencias finitas se puede escribir como,

$$\eta_{j-2} - 4\eta_{j-1} + 6\eta_j - 4\eta_{j+1} + \eta_{j+2} = h^4 f_j, \quad \forall j = 2, \ldots, N_h - 2 \tag{4}$$

con $\eta_0 = \eta_1 = \eta_{N_h - 1} = \eta_{N_h} = 0$. Las $N_h - 3$ ecuaciones discretas conducen a un sistema lineal de la forma $A\eta = b$ donde las incógnitas $\eta \in \mathcal{R}^{N_h - 3}$, al igual que el vector de términos independientes b, mientras que $A \in \mathcal{R}^{N_h - 3 \times N_h - 3}$ es una matriz simétrica, pentadiagonal y definida positiva. Las entradas de la matriz A se obtiene de la Ec. (4), y el vector b se define como $b_i = h^4 f_i = h^4 P/(EJ)$.

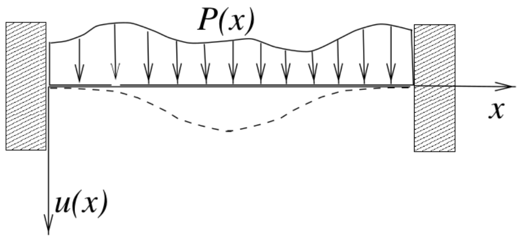

Figura 1: Esquema viga biempotrada bajo carga distribuida.

Se pide hallar los desplazamientos verticales de la viga, empleando todos los métodos presentados en esta guía para resolver el sistema lineal, considerando que $tol = 1e-8$. Compare los resultados con el método directo de Gauss, justificando si es necesario o no utilizar alguna estrategia de pivoteo.

Ejercicios propuestos: S.7.1: 1, 2, 3, 5, 7, 9a, 9b, 13. **S.7.2:** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9a, 9b, 9c. **S.7.3:** 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 18. **S.7.4:** 1, 2, 3. **S.7.5:** 1a, 1b, 1c, 5.