Solución de Ecuaciones No Lineales de una variable

1 Método de la Bisección
2 Iteración de Punto Fijo
3 Método de Newton-Raphson
4 Método de la Secante
5 Metodo de la Regula Falsi
6 Estrategias

Introduccion

Ejemplos de ecuaciones no lineales

a) Crecimiento de poblaciones

- Designaremos con $N(t)$ número de individuos de una poblacion (sean animales, plantas, bacterias, hombres, etc.). Ese número $N(t)$ es función del tiempo t. La cantidad de individuos que nacen por unidad de tiempo (en un año, en una hora, etc.) es proporcional a N:
$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t)$$
donde λ se conoce como tasa de natalidad.
- Si se tiene en cuenta, además el aporte por migraciones μ, por unid. de tiempo, la ecuación queda:
$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) + \mu \qquad (1)$$
que es la ecuación que gobierna el crecimiento poblacional.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

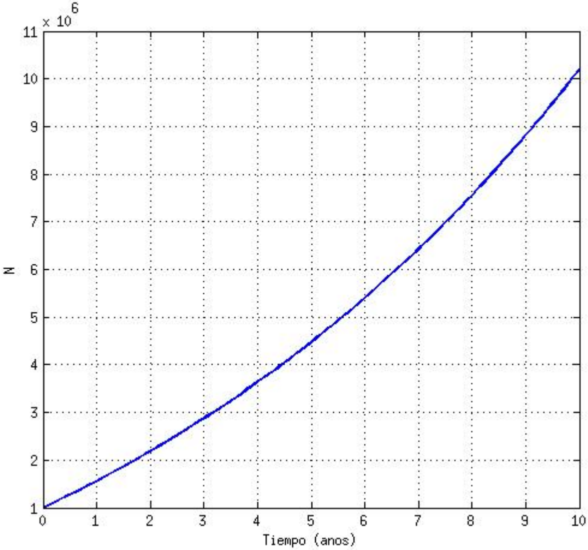
- La solución exacta de esa ecuación diferencial es:

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

  donde N_0 es la población inicial (en $t = 0$)

- La curva de crecimiento de población para una tasa de crecimiento $\lambda = 0.1$, con una población inicial de un millón y un aporte migratorio de 435000 individuos por año se muestra en la figura siguiente.

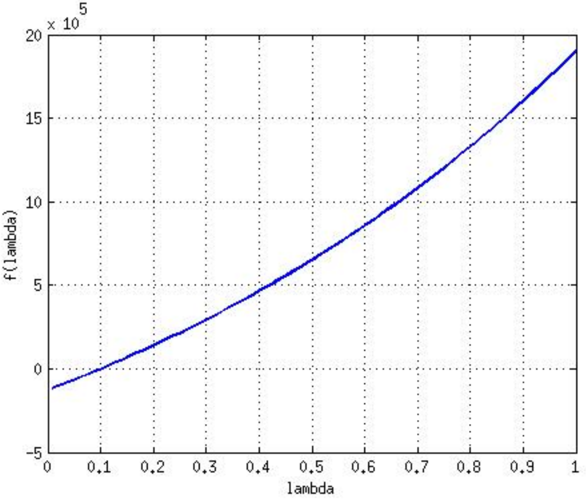
Ejemplos de ecuaciones no lineales



Ejemplos de ecuaciones no lineales

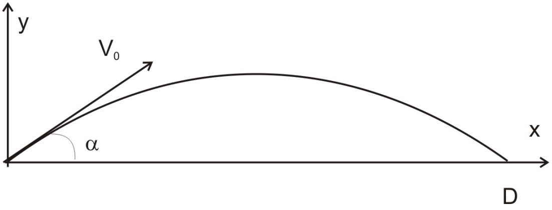
- Si no se conoce la solucion exacta, puede hallarse una *solución numérica*, a partir de la ecuación diferencial (1) y una condición inicial N_0, resoviendo un *Problema de Valor Inicial* (Tema 7 de la materia).
- Plantearemos aquí otro problema: Conocida la cantidad de individuos N_0 y $N(t_1)$, en tiempos t_0 y t_1, y la tasa de migraciones μ, se desea conocer la tasa de natalidad λ.
  Para ello de la ec. de arriba,
  $$N(t_1) = N_0\, e^{\lambda t_1} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$
  hay calcular el λ que produce la igualdad. El resto de las variables son conocidas.
- Esto equivale a resolver la ecuación no lineal
  $$f(\lambda) = 0$$
  con
  $$f(\lambda) = N(t_1) - N_0\, e^{\lambda t_1} - \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$

Función $f(\lambda)$ en función de λ



Ejemplos de ecuaciones no lineales

b) Tiro oblicuo



- Se desea conocer el ángulo α para que un disparo que sale con velocidad V_0 alcance un objetivo a una distancia D.
- Las ecuaciones:

	s/x	s/y
aceler.	$a_x = 0$	$a_y = -g$
veloc.	$v_x = V_0\ cos\alpha$	$v_y = -g\ t + V_0\ sin\alpha$
despl.	$d_x = V_0\ cos\alpha\ t$	$d_y = h = V_0\ sin\alpha\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$

Ejemplos de ecuaciones no lineales

- El tiempo de impacto se obtiene de la ecuación para el desplazamiento vertical, cuando $h = 0$:

$$t_1 = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g}$$

- La distancia horizontal recorrida en t_1:

$$d = \frac{2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha}{g}$$

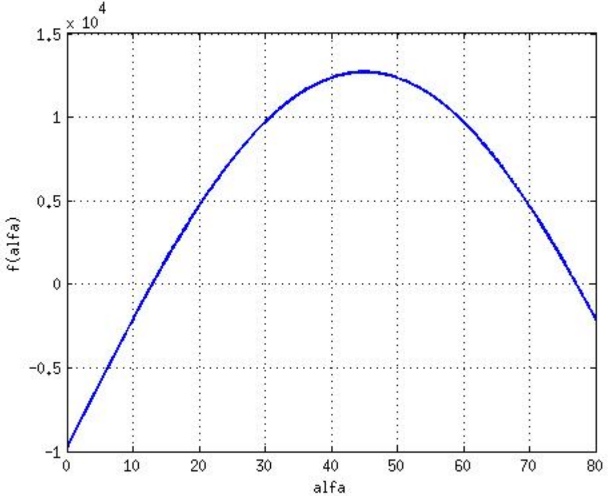
e igualando a la distancia objetivo D se obtiene la ecuación:

$$f(\alpha) = 2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha - D\ g = 0$$

de la cual queremos calcular α.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

La función $f(\alpha)$ en función de α, para una velocidad inicial $V_0 = 150m/s$ y una distancia del objetivo $D = 1000m$ esta graficada a continuación.



Ecuaciones no lineales

- Los ejemplos presentados son algunos de los innumerables problemas que se nos plantean donde queremos despejar, de una ecuación, una variable que no podemos escribir en forma explícita.
- Estos problemas pueden ser planteados como:

  > Encontrar x
  > tal que $f(x) = 0$

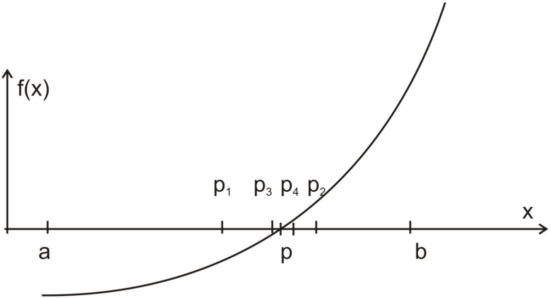
  El valor de x que satisface esa ecuación se llama *raiz* de la ecuación, o también *cero* de la función f.
- Hay muchos métodos numéricos para hallar raices de ecuaciones. Veremos aquí:
  - Método de la bisección
  - Iteración de punto fijo
  - Método de Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método Regula Falsi

Método de la Bisección

Método de la Bisección

ó Método de la Búsqueda Binaria

- Sea $f(x)$ <u>contínua</u> en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces, por el teorema del valor medio, existe $a < p < b$ tal que $f(p) = 0$.



- El Método de la Bisección procede buscando una raiz propuesta en la mitad del intervalo (a,b). Y repitiendo iterativamente este procedimiento.

Método de la Bisección

Dados: $f(x)$, a, b, Tol_1, (Tol_2), $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \ \leftarrow \ a + \frac{(b-a)}{2}$
    4) si $f(p) < Tol_1$, o bien $\frac{b-a}{2} < Tol_2 \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) si $f(a)f(p) > 0$ $a \leftarrow p$
        sino $b \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No se halló la raiz en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- El primer criterio considera el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones. Y el segundo su valor relatvo. En este último caso la tolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables. En cualquiera de estos casos puede ser que la diferencia sea pequeña pero aún se esté lejos de la solución.
- El tercer criterio examina el error en $f(p)$. También, dependiendo de la función, puede ser que este error sea pequeño pero aún no se haya llegado a la solución buscada. (Por ejemplo si la derivada de f en cercanías de p es muy pequeña).

Convergencia

- <u>Teorema</u>:
  Sea $f \in C[a,b]$ y sea $f(a)f(b) < 0$. El algoritmo de Bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a p tal que
  $$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$
  para $n \geq 1$.

  <u>Demostración</u>:
  Para $n \geq 1$,
  $$b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^{n-1}}$$
  La raiz exacta $p \in (a_n, b_n)$.
  Y $p_n = (a_n + b_n)/2$
  Luego
  $$|p_n - p| \leq \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Convergencia

- De alli se ve que posee convergencia lineal:

$$|p_{n+1} - p| \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}|p_n - p|$$

- Si se desea p con una tolerancia ϵ, se precisan:

$$n = \log_2 \frac{|b-a|}{\epsilon}$$

- El Método de la Bisección es lento: tiene convergencia *lineal*.
- Pero *siempre* converge. Es robusto. Por eso se usa muchas veces para poner en marcha otros métodos.
- (*Observación*: en este capitulo se designara a las iteraciones con un subíndice a fin de simplificar la notación)

Iteración de Punto Fijo

Punto Fijo

- Se ha definido *cero* de $f(x)$ al valor de x tal que

$$f(x) = 0$$

- En forma similar se define *punto fijo* de $g(x)$ al x tal que

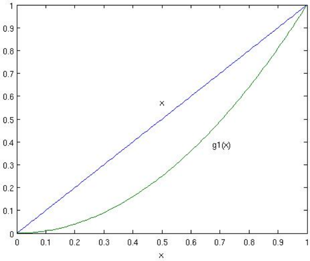
$$g(x) = x$$

- Un problema de hallar un cero de $f(x)$ se puede transformar en uno de hallar el punto fijo de $g(x)$. Por ejemplo: a partir de la ecuación $f(x) = 0$ se puede escribir $g(x) = x$ definiendo $g(x) = x + f(x)$. Así el valor de x que verifica la primera ecuación, también verifica la segunda: el cero de $f(x)$ es el punto fijo de $g(x)$.

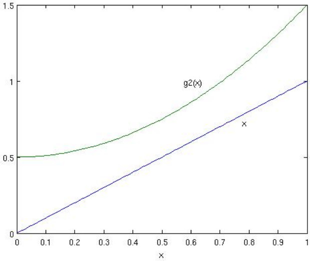
Punto Fijo

Ejemplos:

- La función $g_1(x) = x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ tiene dos puntos fijos: $X = 0$ y $x = 1$
- La misma función en el intervalo $[2, 3]$ no tiene puntos fijos.
- La función $g_2(x) = \frac{1}{2} + x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ no tiene puntos fijos. No los tiene en todo el eje real.
- La función identidad $g(x) = x$ en $[0, 1]$ tiene ∞ puntos fijos.

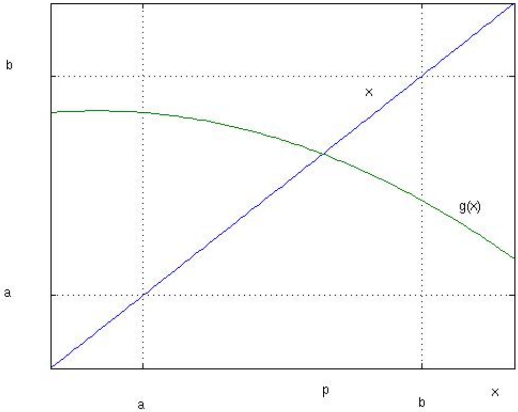


,



Punto Fijo

<u>Teorema 1:</u> Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g *tiene* un punto fijo en $[a,b]$.
Si además, $g'(x)$ existe en (a,b) y $|g'(x)| \leq k < 1\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g tiene un punto fijo *único* (p) en $[a,b]$.

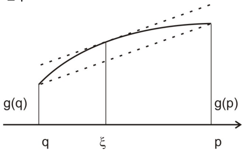


<u>Demostración</u>:
Primera parte:

- *Si* $g(a) = a$ *o* $g(b) = b$*, entonces* $\exists p$
- *Si no; debe ser* $g(a) > a$ *y* $g(b) < b$*,*
- *Sea* $h(x) = g(x) - x$*.*
- $h(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y* $h(a) = g(a) - a > 0$ *,* $h(b) = g(b) - b < 0$*.*
- *Por teorema del valor medio,* $\exists p \mid h(p) = 0$ *y por tanto* $g(p) = p$*.*
  O sea: existe un Punto Fijo en $[a, b]$

Segunda parte:

- *Supóngase que* $|g'(a)| \leq k < 1$ *y que* p *y* q *sean Puntos Fijos de* g. *(*$p \neq q$*)*
- *Por Teorema del Valor Medio,* $\exists\ \xi$ *entre* q *y* p *tal que* $|g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\ |p - q|$



- *Por ser* p *y* q *puntos fijos, y por ser* $|g'(\xi)| < 1$*:*

$$|p - q| < |p - q|$$

- *A esta contradicción se ha llegado al suponer que* $p \neq q$*. Luego el punto fijo es* único.

Iteración funcional

- Para encontrar el punto fijo de una función se usa una *técnica iterativa de punto fijo* o *iteración funcional*.
- Se propone un valor de partida p_0.
- Se construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula:

$$p_n = g(p_{n-1})$$

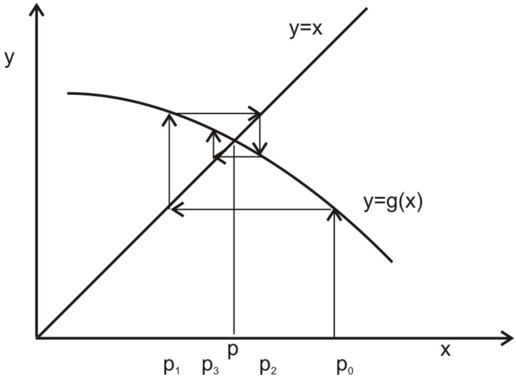
  para $n = 1, 2, \ldots$
- Si $\{p_n\} \to p$ y g es continua, entonces:

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}) = g(p)$$

  Es decir que p es el punto fijo de g.

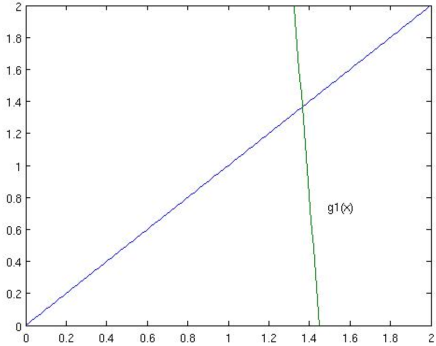
Dados: $g(x)$, p_0, Tol, $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \ \leftarrow \ g(p_0)$
    4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Interpretación gráfica de la Iteración Funcional



Ejemplo

- Sea obtener la raiz de
$$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 10$$
Esta función tiene una sola raiz en $[1,2]$: $p = 1.365230013$
- Hay muchas maneras de obtener la función $g(x)$ para un problema de punto fijo $g(x) = x$:
  1) De la ecuacion original: $f(x) = 0$
  $$x - f(x) = x$$
  con $g_1(x) = x - x^3 - 4\,x^2 + 10$

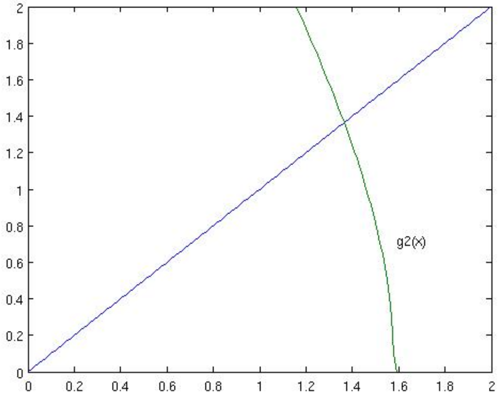


Ejemplo

2) De la ecuacion original: $x^3 = 10 - 4x^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

de donde: $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$

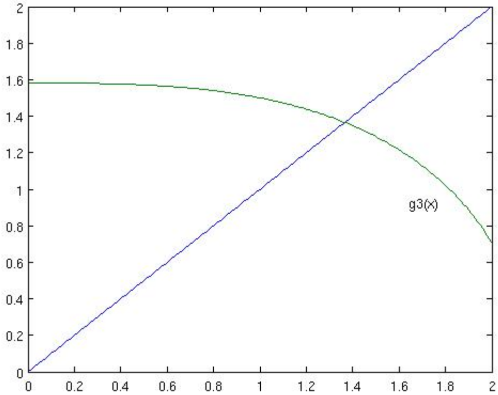


Ejemplo

3) De la ecuacion original: $4x^2 = 10 - x^3$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

de donde: $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

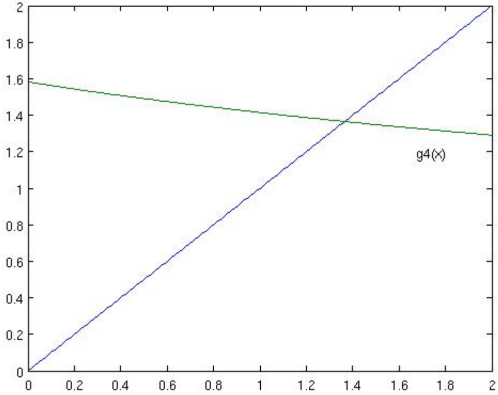


Ejemplo

4) De la ecuacion original: $x^2(x+4) = 10$

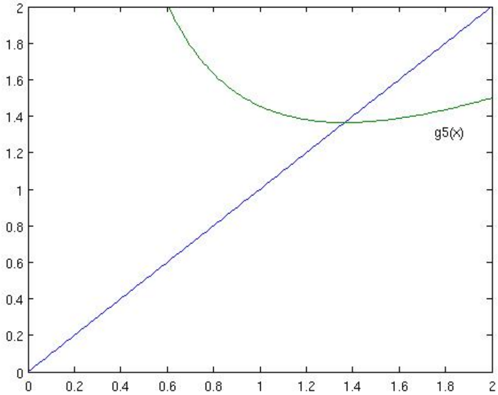
$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

de donde: $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$



Ejemplo

5) Dividiendo la ecuacion original por $3x^2 + 8x$ y operando:
$g_5(x) = x - \frac{x^3+4\,x^2-10}{3x^2+8x}$



Ejemplo

Resolviendo el problema por Iteración Funcional, partiendo del valor inicial $p_0 = 1.5$, y obteniendo los resultados con 9 dígitos despues de la coma, se llegó a:

- Con $g1(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g2(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g3(x)$ se requirieron 30 iteraciones.
- Con $g4(x)$ se requirieron 15 iteraciones.
- Con $g5(x)$ se requirieron 4 iteraciones.
- Con el método de la Bisección se requirieron 27 iteraciones.

Punto Fijo

Teorema 2:
Sea $g \in C[a,b]$ y que $g(x) \in [a,b] \ \forall \ x \in [a,b]$. Además supóngase que $\exists \ g'(x)$ en (a,b) con

$$|g'(x)| \leq k < 1 \ \forall \ x \in [a,b] \qquad (*)$$

.
Si p_0 es cualquier número en $[a,b]$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad n \geq 1 \qquad (**)$$

converge al único Punto Fijo en $[a,b]$.

Punto Fijo

<u>Demostración</u>:

- Por Terorema 1, existe un P.F. $p \in [a,b]$.
- Como $g(x) \in [a,b]$ entonces $p_n \in [a,b] \;\; \forall n$.

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi)||p_{n-1} - p| \leq k\, |p_{n-1} - p|$$

- la primera igualdad es por ser P.F y por (**); la segunda por el T. del Valor Medio (con $\xi \in [a,b]$); y la desigualdad es por (*).

$$|p_n - p| \leq k\, |p_{n-1} - p| \leq k^2\, |p_{n-2} - p| \ldots \leq k^n\, |p_0 - p|$$

- Como $k < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

Es decir $\{p_n\}$ converge a p.

Punto Fijo

Corolario 1:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad \forall n \geq 1$$

Corolario 2:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_0 - p_1| \quad \forall n \geq 1$$

- La velocidad de convergencia depende de $\frac{k^n}{1-k}$
- Cuanto menor sea k, más rápido converge.
- Si $k \sim 1$ la convergencia es lenta.
- Si $|g'(p)| \neq 0$ la convergencia es lineal.
- Si $|g'(p)| = 0$ puede tener convergencia cuadrática.

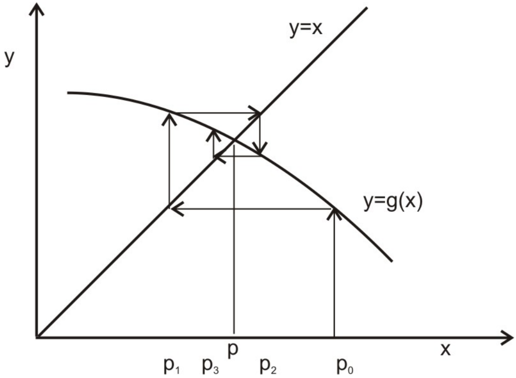
Ejemplo

Del ejemplo anterior se ve que:

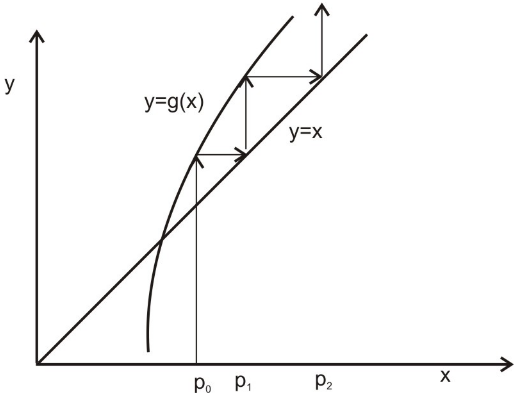
- No hay ningún intervalo conteniendo a $p = 1.365230013$ tal que $|g_1'(x)| \ < 1$. Por eso diverge.
- La función $g_2(x)$ no manda $[1,2]$ a $[1,2]$. Y no hay ningún intervalo conteniendo a p tal que $|g_1'(x)| \ < 1$. Por eso diverge.
- La derivada $g_3'(2) \simeq 2.12$. No satisface que sea menor que 1. Pero en el intervalo $[1, 1.5]$ $g_3'(x) \leq g_3'(1.5) \simeq 0.66$. Por eso ha convergido.
- La derivada $g_4'(x) \leq 0.15 \quad \forall x \in [1,2]$. Converge más rápido que g_3
- Cosa similar sucede con g_5 para la cual k es menor aún.

Iteración Funcional

Caso en que $|g'(x)| < 1$

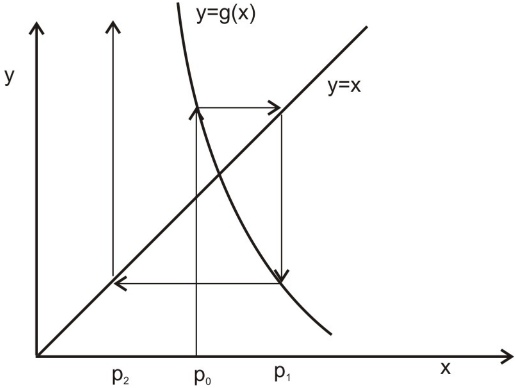


Caso en que $|g'(x)| > 1$



Iteración Funcional

Caso en que $g'(x) < -1$



Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Sea $f(x) \in C^2[a, b]$ (continuamente diferenciable 2 veces), y se desea hallar p tal que $f(p) = 0$.
- Sea $\bar{x}$ una aproximación a p ($|\bar{x} - p|$ pequeño), y $f'(\bar{x}) \neq 0$
- El desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\bar{x}) + \dots$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(x))$$

  donde $\xi(x)$ está entre x y $\bar{x}$.
- Particularizando en $x = p$:

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(p))$$

Método de Newton-Raphson

- Al ser $(p - \bar{x})$ pequeño podemos despreciar el término cuadrático frente al lineal:

$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x})$$

- De alli:

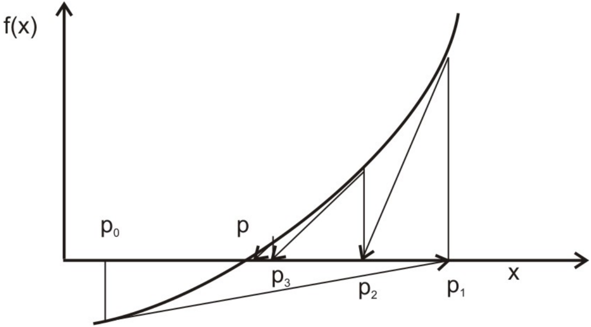
$$p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

- El Método de Newton-Raphson construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula de recurrencia:

$$p_n \simeq p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \qquad n \geq 1$$

- <u>Observación:</u> El Método de Newton-Raphson puede ser mirado como un caso de iteración funcional, con $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Interpretación gráfica Método de Newton-Raphson



Algoritmo del Método de Newton-Raphson

Dados: $f(x)$, $f'(x)$, p_0, Tol, K_{max}
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \ \leftarrow \ p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$
    4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- La tolerancia Tol_1 es en valor absoluto, mientras que latolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables.
- Según la función puede ser que algún criterio sea mejor que los otros.

Convergencia

- El error en la iteración n:

$$e_n = p_n - p$$

- En p, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$
- Se puede escribir:

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - p = e_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = \frac{e_n f'(p_n) - f(p_n)}{f'(p_n)}$$

- Por el Teorema de taylor:

$$f(p) = 0 = f(p_n - e_n) = f(p_n) - e_n f'(p_n) + \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

con ξ_n entre p_n y p. De alli:

$$e_n f'(p_n) - f(p_n) = \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

Convergencia

- Sustituyendo en la expresión de e_{n+1}:

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(p_n)}$$

- Si p_n es cercano a p se puede escribir:

$$e_{n+1} \simeq e_n^2 \, \frac{f''(p)}{2f'(p)} = C \, e_n^2$$

- El Método NR posee convergencia *cuadrática*.
- Al obtener la fórmula del error, hemos supuesto que $f'(p) \neq 0$, y buscamos que $f(p) = 0$. Pero puede haber problemas si simultánemente con $f(p)$ también $f'(p)$ tiende a cero.

Convergencia

- Definición: Una solución p de $f(x) =$ es un *cero de multiplicidad m* de la funcion f si para $x \neq p$ se puede escribir $f(x) = (x-p)^m \, q(x)$ siendo $q(p) \neq 0$.
- Las raices de ecuaciones pueden ser *simples* o *múltiples*. Las raices simples son las que tienen multiplicidad $m = 1$.
- Teorema: $f \in C^1[a,b]$ tiene un cero simple p en (a,b) si y solo si $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$.
- Teorema: Si el método de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$ que converge a un cero p de $f(x)$, entonces:
  - Si p es raíz simple, la convergencia es **cuadratica**:

$$e_{n+1} \simeq \frac{f''(p)}{2f'(p)} \, e_n^2$$

  - Si p es raíz múltiple, la convergencia es **lineal**

$$e_{n+1} \simeq \frac{m-1}{m} \, e_n$$

Convergencia

- Teorema: Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $p \in [a,b]$ es un cero de f y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ el metodo de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$que converge a p.
- Este teorema, asegura que el M. N-R converge para cualquier p_0 dentro de ese intervalo $[p-\delta, p+\delta]$.
- La convergencia se dice que es *local*, pues precisa que el punto inicial este suficientmente cerca del cero buscado.
- El método de la biseccion, en contraposición con éste, tiene convergencia *global* ya que para cualquier $p_0 \in [a,b]$ converge.

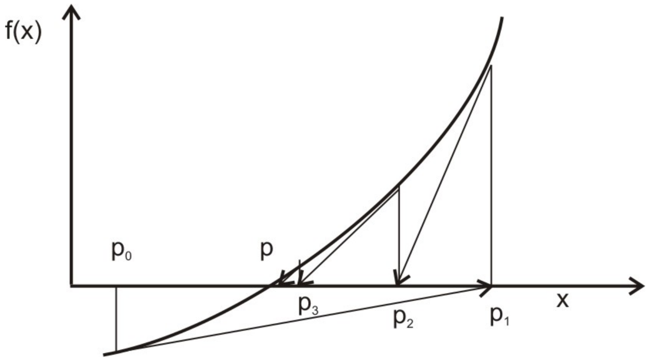
Convergencia

Resumiendo:

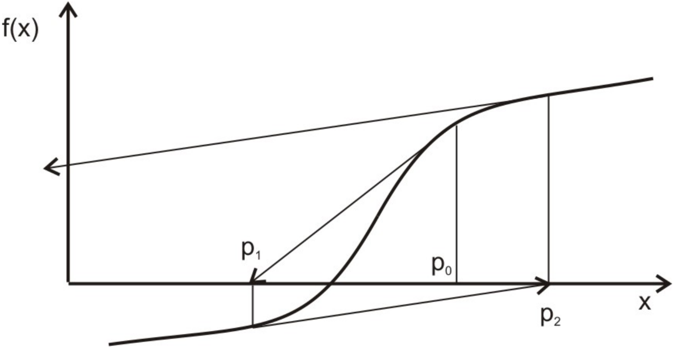
- El método de Newton-Raphson, para raices simples, tiene convergencia cuadrática. Esto es bueno.
- Para raices múltiples, la convergencia es lineal.
- Su convergencia es local. Hay casos en que este método no converge.
- Se precisa cierta regularidad en la derivada de la función, y comenzar con una estimación inicial cercana a p
- Otro inconveniente es que se precisa evaluar la derivada de la función.

Convergencia del M. Newton-Raphson

Caso en que el M. Newton-Raphson converge



Caso en que el M. Newton-Raphson no converge



Método de la Secante

Método de la Secante

- Un problema del M. Newton-Raphson es que se debe calcular la derivada de la función, y a veces no se dispone de ella.
- Esto se puede remediar recordando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Se puede aproximar a la derivada, en la iteración n,:

$$f'(p_n) \simeq \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

- Y la fórmula de recurrencia del M. Newton-Raphson, con este cambio:

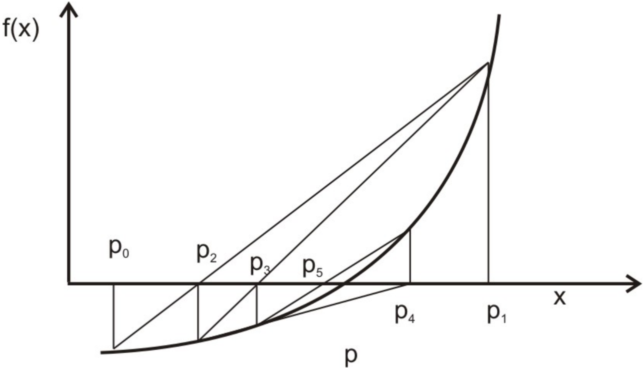
$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - p_{n-1})\, f(p_n)}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

- Esta es la fórmula del *Método de la Secante*

Algoritmo del Método de la Secante

Dados: $f(x)$, p_0, p_1, Tol, K_{max}
Salida: p
1) $i \leftarrow 2$; $q_0 \leftarrow f(p_0)$; $q_1 \leftarrow f(p_1)$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \leftarrow p_1 - \frac{q_1(p_1 - p_0)}{(q_1 - q_0)}$
    4) si $|p - p_1| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p_1$; $q_0 \leftarrow q_1$; $p_1 \leftarrow p$; $q_1 \leftarrow f(p)$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Método de la Secante



Método de la Secante

- El método de la secante evita tener que evaluar derivadas.
- La convergencia es más lenta que la del M.Newton-Raphson, pero más rápida que el M. Bisección.
- Posee una convergencia *superlineal*, para el caso de raices simples:

$$e_{n+1} \simeq \left[\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right]^{1-\phi} e_n^{\phi} = C\, e_n^{\phi}$$

  donde $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.618\ldots$.
- Precisa 2 estimaciones iniciales: p_0 y p_1.

Metodo de la Regula Falsi

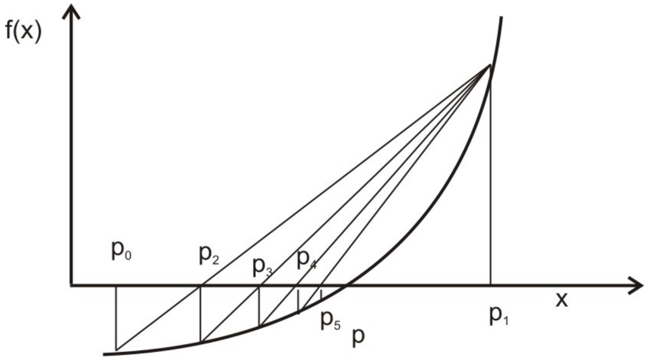
Método Regula Falsi

- El Método llamado *Regula Falsi* o de la Falsa Posición, es similar al Metodo de la Secante, pero en cada iteración toma -para trazar la secante- los dos últimos puntos que acotan la raiz buscada. Como lo hacía el metodo de la Bisección.
- La fórmula de recurrencia es similar a la del M. Secante

$$p_n = b_n - \frac{(b_n - a_n)\, f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

  pero los puntos a_n y b_n se eligen de modo de encerrar la raiz.
- Para la iteración siguiente p_n reemplaza, ya sea a a_n o a b_n, según quienes encierran la raíz buscada, tal como se hace en el método de la Bisección.
- Este método tiene convergencia lineal. Pero, siempre converge (convergencia global), cosa que no siempre ocurre con el método de la secante.

Método Regula Falsi



Estrategias

Estrategias de análisis

- Lo primero a realizar es una gráfica de la función a la cual se quiere hallar el cero. Nada reemplaza la inspeccion visual que permite observar:
  - Si la funcion tiene ceros en el intervalo deseado.
  - Si hay un cero o más de uno.
  - Si cada cero es simple o tiene multiplicidad mayor a uno.
  - Cuál es el intervalo en que debe buscarse el cero.
  - Cuál puede ser un buen valor inicial.
  - Cómo es la curva en proximidades del cero (esto tiene influencia en la forma de determinar el error para detener las iteraciones).

Estrategias de análisis

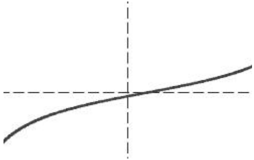
- Si hay varios ceros en el intervalo elegido conviene definir un intervalo que encierre exclusivamente el cero de interés para el problema.
- El método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática, pero precisa una estimación inicial cercana al cero pues no es seguro que converja de otro modo. Posee *convergencia local*.
- El método de la Bisección, por otro lado asegura convergencia pero ésta es lenta. Se dice que tiene *convergencia global*.
- A veces se usa un esquema híbrido: se inicia con algunas iteraciones de Bisección y luego se cambia a Newton-Raphson para acelerar el proceso.

Estrategias de análisis

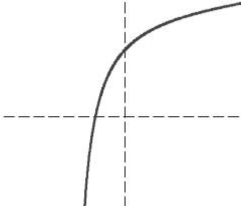
- El examen del grafico puede detectar raices múltiples. Si en el lugar donde $f(x) = 0$ tambien es $f'(x) = 0$, esto indica raices múltiples.
- Con raices de multiplicidad mayor que uno, el metodo de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática.
- Hay métodos de *aceleración* (Aitken, Steffensen, Muller) que no seran discutidos aquí, que permiten acelerar la convergencia de algoritmos de convergencia lineal.

Estrategias de análisis

- Si la función tiene derivadas pequeñas en proximidades del cero, un criterio de parada basado en $|f(p_i)| < Tol$ no es adecuado pues esto puede satisfacerse aún cuando $|p_i - p_{i-1}|$ sea grande. Un criterio basado en $|p_i - p_{i-1}| < Tol$ sería mejor.



- Si la función tiene derivadas grandes en proximidades del cero, un criterio de parada basado en $|p_i - p_{i-1}| < Tol$ no sería adecuado, sino mas bien uno basado en $|f(p_i)| < Tol$.



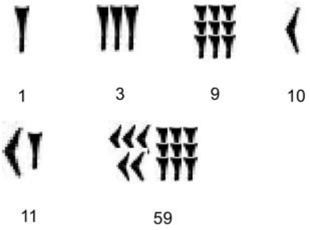
Resumen

En este capítulo hemos visto:

- Problemas de hallar el cero de una función, o bien la raiz de una ecuación.
- Métodos para hallar ceros de funciones:
  - Método de la búsqueda binaria, o de la bisección.
  - Iteración funcional, o iteración de punto fijo
  - Método Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método de la Regula Falsi
- Condiciones de convergencia y algoritmos de cada uno.
- Método de Horner, para evaluar polinomios y sus derivadas en un punto.
- Estategias para analizar el problema y elegir el método a usar.

Calculo de la raiz cuadrada por el método de la bisección

- Este problema era resuelto en Babilonia (~ 1800 años antes de la era cristiana), por el método de la biseccion.
- Su sistema de numeración era en base 60 (sistema sexagesimal) y la escritura del mismo se denomina *cuneiforme*. pues se basaba en cuñas talladas en tablillas de arcilla.



Apendice: Ejemplos

- El procedimiento para hallar la raiz cuadrada de A era el siguiente:
  - Se eligen dos números a_1 y b_1 tal que $a_1^2 < A$ y $b_1^2 > A$
  - Se calcula

    $$c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

    y se calcula su cuadrado.
  - Si $c_1^2 < A$ se reemplaza a_1 por c_1, y si $c_1^2 > A$ se reemplaza b_1 por c_1
  - Se repite el proceso hasta lograr una aproximación satisfactoria.
  - Como se ve el proceso es precisamente una técnica de bisección.

Calculo de la raiz cuadrada por el método de Newton-Raphson

- Se desea calcular la raiz cuadrada de un número real A. Se quiere hallar el número real x tal que $x^2 = A$, o bien

$$x^2 - A = 0$$

- La funcion $f(x) = x^2 - A$ es a la cual queremos hallar un cero.
- El método de Newton-Raphson itera con la fórmula

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}$$

- La derivada

$$f'(x) = 2x$$

Apendice: Ejemplos

- Sustituyendo

$$p_{k+1} = p_k - \frac{(p_k^2 - A)}{2p_k}$$

Que puede escribirse:

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{A}{p_k}\right)$$

- Esta fórmula brinda también una interpretación geométrica. Si A es el área de un cuadrado cuyo lado buscamos, en una iteración cualquiera es el área de un rectángulo de lados p_k y $\frac{A}{p_k}$. Si estos no coinciden se hace un promedio de ambos para la próxima iteración.

Cálculo de la raiz cuadrada de 39 por bisección

it.	a	b	c	c^2
1	4	8	6	36
2	6	8	7	49
3	6	7	6.5	42.25
4	6	6.5	6.25	39.0625
5	6	6.25	6.125	37.515625
6	6.125	6.25	6.1875	38.28515625
7	6.1875	6.25	6.21875	38.67285156
8	6.21875	6.25	6.230938	38.82458836
9	6.230938	6.25	6.240469	38.94345334

Cálculo de la raiz cuadrada de 39 por Newton-Raphson

it.	p_{k-1}	p_k	p_k^2
1	7	6,2857142857	39.510204
2	6,2857142857	6,2451298701	39.001647
3	6,2451298701	6,2449979998	39