Solución numérica de problemas de valores de contorno

En ecuaciones diferenciales ordinarias

Problema de Valor de Contorno

- En la sección anterior hemos visto PVI del tipo

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y,y') \quad ,\text{para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \bar{y}_a \\ y'(a) &= \bar{y}'_a \end{cases}$$

- Hay veces en que el problema está planteado:

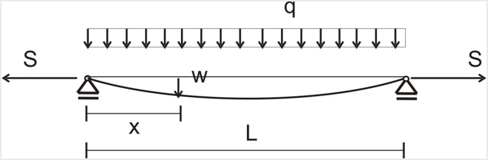
$$\begin{cases} y'' &= f(x,y,y') \quad ,\text{para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \bar{y}_a \\ y(b) &= \bar{y}_b \end{cases}$$

Se denomina *Problema de Valor de Borde* ó *Problema de Valor de Frontera* ó *Problema de Valor de Contorno* (en inglés *Boundary Value Problem*)

Problema de Valor de Contorno

Ejemplo

- Considérese una viga de material elastico lineal, simplemente apoyada, de longitud L sometida a una carga transversal q y a fuerzas de tracción S en los extremos.



- La ecuación de equilibrio de un segmento diferencial, válida en toda la longitud de la viga, se puede escribir:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}\,w + \frac{q}{2EI}\,x(x-L) = f(x,w)$$

donde $w(x)$: desplazamiento transversal; EI: rigidez seccional.

Problema de Valor de Contorno

- El problema es encontrar la función $w(x)$ que cumpla con esa ecuación de equilibrio en toda la longitud de la viga, y que satisfaga las condiciones de contorno. El problema se escribe:

$$\begin{cases} w'' = f(x, w) \qquad \text{para } 0 \leq x \leq L \\ w(0) \;=\; 0 \\ w(L) \;=\; 0 \end{cases}$$

- Las condiciones de contorno expresan, en este caso, que el desplazamiento transversal sea nulo sobre los apoyos.

Existencia y unicidad de la solución

- No siempre un PVC tiene solución única.
- Hay un teorema que nos garantiza que la tenga.

  Teorema:

  Sea

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

donde f es *continua* en el conjunto
$D = \{(x,y,y') \mid x \in [a,b], y \in [-\infty,\infty], y' \in [-\infty,\infty],\}$
y además $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ son *continuas* en D.

Si

1. $\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \forall (x,y,y') \in D$
2. $\exists$ constante M tal que $|\frac{\partial f}{\partial y'}| \le M \quad \forall (x,y,y') \in D$

entonces el PVC *tiene* una solución *única*.

Existencia y unicidad de la solución

Ejemplo:

Sea

$$\begin{cases} y'' &= -e^{-xy} - \sin y' \quad , \text{para } 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) &= 0 \\ y(2) &= 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; x\, e^{-xy} \; > 0 \qquad \forall x \in [1,2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \;=\; -\cos y'$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| \;\leq\; 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

Verifica las condiciones del teorema anterior, entonces este PVC tiene *una solución* única.

PVC lineales

- Si la funcion $f(x, y, y')$ puede espresarse:

$$f(x, y, y') \;=\; p(x)\; y' \;+\; q(x)\; y \;+\; r(x)$$

la ecuación diferencial $y'' = f$ se dice *lineal*.

- Corolario:
Si el PVC

$$\begin{cases} y'' \;=\; p(x)\; y' + q(x)\; y + r(x), & \text{para} \;\; a \leq x \leq b \\ y(a) \;=\; \alpha \\ y(b) \;=\; \beta \end{cases}$$

satisface:

1. p, q, r son continuas en $[a, b]$
2. $q > 0$ en $[a, b]$

entonces tiene solución única.

Métodos numéricos para resolver PVC

- Hay diferentes técnicas numéricas que permite obtener soluciones aproximadas a un PVC.
- A continuacíon describiremos dos de ellas:
  - El método del disparo
  - El método de las diferencias finitas
- Hay otros métodos que pueden enmarcarse en lo que se mencionará como *Métodos de Residuos Ponderados* (por ejemplo el *Método de los Elementos Finitos*) que no se estudiaran en detalle, en este curso.

Método del disparo

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

- Se puede resolver el PVI, construido a partir de aquel:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = z \end{cases}$$

  donde se ha colocado una condición inicial $y'(a) = z$, en lugar de la segunda condición de contorno.

- A la solución de este PVI la designamos $y_z(x)$. Para que ésta sea solución del PVC debería verificar que $y_z(b) = \beta$.

Método del disparo

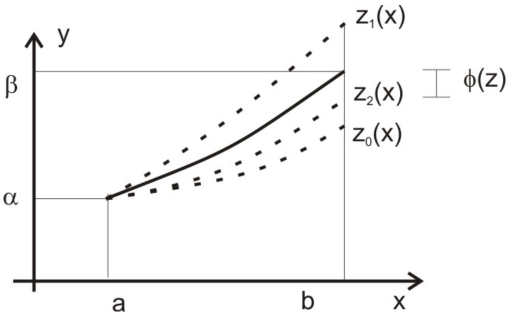
- Se evalúa la diferencia entre $y_z(b)$ y β,

$$\phi(z) = y_z(b) - \beta$$

- Se busca el valor de z tal que $\phi(z) = 0$. La solución $y_z(x)$ será la solución del PVC buscada.
- La ecuación $\phi(z) = 0$ es no lineal. Se puede resolver por alguno de los métodos estudiados (bisección, secante, etc.)
- Si se usa (por ej.) el método de la secante, suponiendo calculado $\phi(z_1)$ y $\phi(z_2)$ para dos puntos z_1 y z_2
  Se busca z_3 que haga $\phi = 0$:

$$z_3 \;=\; z_2 \;-\; \frac{\phi(z_2)}{\phi(z_1) - \phi(z_2)}(z_1 - z_2)$$

Método del disparo



Algoritmo del Método del disparo (+ M. Secante)

Para resolver:

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y,y') \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases}$$

<u>Entrada:</u> $a, b, \alpha, \beta, N, Tol, Kmax$
<u>Salida:</u> y_i, $(i = 0, 1, 2 \ldots)$

1. $h \leftarrow (b-a)/N$; $\quad k \leftarrow 2$; $\quad z \leftarrow (\beta - \alpha)/(b-a)$; $\quad y_0 \leftarrow \alpha$; $\quad y'_0 \leftarrow z$
2. Para $i = 1, 2, \ldots N$ resolver el PVI (con M. Euler, M. R-Kutta, etc.) con $y'_0 = 0 \quad \Rightarrow y_N$
3. $\phi \leftarrow (y_N - \beta)$; $\quad z_a \leftarrow z$; $\quad z \leftarrow (y_N - \alpha)/(b-a)$; $\quad \Delta z \leftarrow z - z_a$
4. Mientras $k < Kmax$ hacer:
   - 4.1 Para $i = 1, 2, \ldots N$ resolver el PVI (Euler,R-Kutta, etc.) con $y'_0 = z \quad \Rightarrow y_N$
   - 4.2 Si $|y_N - \beta| < Tol \quad \rightarrow$ SALIR
   - 4.3 $z \leftarrow z_a - \frac{(y_N - \beta)\Delta z}{(\phi - (y_N - \beta))}$; $\quad \phi \leftarrow y_N - \beta$; $\quad \Delta z \leftarrow z - z_a$; $\quad z_a \leftarrow z$
   - 4.4 $k \leftarrow k + 1$, va a (4).
5. Mensaje de error.

Método del disparo para PVC Lineales

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' = py' + qy + r & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

- Supóngase los 2 PVI:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' = py' + qy + r & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = z_1 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'' = py' + qy + r & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = z_2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son, respectivamente, $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

- Si escribimos una combinación lineal de ambas:

$$y(x) = \lambda\ y_1(x) + (1-\lambda)\ y_2(x) \tag{2}$$

  se puede verificar que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial y la primera condición de contorno del PVC (1).

- Para hacer cumplir la segunda condición hacemos:

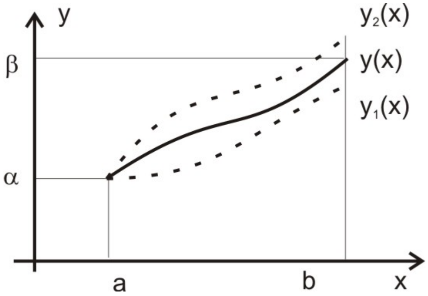
$$y(b) = \beta$$

$$\lambda\ y_1(b) + (1-\lambda)\ y_2(b) = \beta$$

  de alli:

$$\lambda\ = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$$

- Con ese lambda, la función $y(x)$, ec. (2) es la solución de (1).


y
β
α
$y_2(x)$
$y(x)$
$y_1(x)$
a
b
x

- Para programarlo:

$$
(a) \quad \begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha & \\ y'(a) = 0 & \end{cases} \Rightarrow y_1
$$

$$
(b) \quad \begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha & \\ y'(a) = 1 & \end{cases} \Rightarrow y_2
$$

- Si llamamos: $y_3 = y_1'; \quad y_4 = y_2'$
  nos queda un PVI con un sistema de EDO:

$$
\begin{cases} y_1' = y_3 & y_1(a) = \alpha \\ y_2' = y_4 & y_2(a) = \alpha \\ y_3' = f(x, y_1, y_3) & y_3(a) = 0 \\ y_4' = f(x, y_2, y_4) & y_4(a) = 1 \end{cases}
$$

- Luego se calcula λ y se usa la ec. (2)

Método de diferencias finitas para PVC Lineales

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases}$$

- Este problema puede resolverse por el *Método de las Diferencias Finitas*. Este método sirve también para problemas no lineales, pero se presentará aquí para un problema lineal por sencillez.
- Se divide el intervalo $[a, b]$ en $N+1$ subintervalos igualmente espaciados, con un paso: $h = \frac{b-a}{N+1}$.
Se define $x_0 = a$; $x_{n+1} = b$, y N *puntos* o *nodos* interiores $x_i = x_0 + i\ h$.
- De la ecuación diferencial, en cada uno de los nodos

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{1}$$

- El Método de las Diferencias Finitas se basa en sustituir las derivadas por fórmulas en diferencias.
- Fórmula en diferencias finitas centradas para la derivada primera:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Fórmula en diferencias finitas centradas para la derivada segunda:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Así se eliminan las derivadas y el problema se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (un sistema de N ecuaciones con N incógnitas).

Obtención de fórmulas en diferencias

- Expandiendo en serie de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$$

- Sumando:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$$

- De alli la fórmula en diferencias finitas para derivada segunda:

$$y''(x_i) \ = \ \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Análogamente, restando las dos expansiones arriba, se obtiene la fórmula en diferencias finitas para la derivada primera:

$$y'(x_i) \ = \ \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Sustituyendo las fórmulas en diferencias en (1) (y llamando $y_i = y(x_i)$, etc.):

  $$\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \frac{p_i}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q_i y_i + r_i \qquad (i = 1, 2, \dots N)$$

  que puede escribirse:

  $$(-1 - \frac{h}{2}p_i)\, y_{i-1} + (2 + h^2 q_i)\, y_i + (-1 + \frac{h}{2}p_i)\, y_{i+1} = -h^2\, r_i \quad (i = 1, \dots N)$$

  Esto es un sistema de ecuaciones algebraicas:

  $$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}$$

- Siendo la matriz tridiagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+h^2\ q_1 & -1+\frac{h}{2}p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p_2 & 2+h^2\ q_2 & -1+\frac{h}{2}p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1-\frac{h}{2}p_3 & 2+h^2\ q_3 & -1+\frac{h}{2}p_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1-\frac{h}{2}p_{N-1} & 2+h^2\ q_{N-1} & -1+\frac{h}{2}p_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1-\frac{h}{2}p_N & 2+h^2\ q_N \end{bmatrix}$$

y el vector de incógnitas y términos independientes:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -h^2\ r_1 + (1+\frac{h}{2}p_1)\ \alpha \\ -h^2\ r_2 \\ -h^2\ r_3 \\ \dots \\ -h^2\ r_N + (1-\frac{h}{2}p_N)\ \beta \end{bmatrix}$$

- Las condiciones de contorno, que aparecen en la primera y última ecuación han sido pasadas al miembro izquierdo.

Teorema:

Sean p, q *y* r *continuas en* $[a, b]$*. Si* $q \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ *entonces el sistema* $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f}$ *indicado arriba tiene solución única, siempre que:*

$$h < \frac{2}{L}$$

donde

$$L = \max_{x \in [a,b]} |p(x)|$$

- El Método de Diferencias Finitas suele ser preferido frente al Método del Disparo, pues es más estable.
- Requiere resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.
- La matriz es fácil de construir y es tridiagonal.

Consideremos ahora una condición mixta, por ejemplo en el extremo derecho:

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \\ Ay'(b) + By(b) &= C \end{cases}$$

- La idea es aplicar una fórmula en diferencias para aproximar $y'(b)$, conservando el orden del error. Usamos una diferencia centrada de tres puntos en $x_{N+1} = b$ en la condición de borde:

$$A\ \frac{y_{N+2} - y_N}{2h} + B\ y_{N+1} = C$$

  reordenando

$$-A\ y_N + 2hB\ y_{N+1} + A\ y_{N+2} = 2hC$$

- Hemos introducido una nueva incógnita y_{N+2}, que corresponde a un *nodo ficticio* x_{N+2} *a la derecha del intervalo* (fuera del dominio).
- No conocemos la solución en $x_{N+1} = b$, por lo cual es una nueva incógnita (total $N + 2$ incógnitas).
- Con las N ecuaciones que teníamos en el caso anterior, mas la ecuación antes desarrollada, todavía nos falta una.
- Se plantea la ecuación de diferencias finitas para la ecuación diferencial del problema, centrada en el extremo derecho $x_{N+1} = b$.

El sistema final queda determinado por:

$$(2 + h^2 q_1)\ y_1 + (-1 + \frac{h}{2} p_1)\ y_2 = -h^2\ r_1 + (1 + \frac{h}{2} p_1)\alpha$$

$$(-1 - \frac{h}{2} p_i)\ y_{i-1} + (2 + h^2 q_i)\ y_i + (-1 + \frac{h}{2} p_i)\ y_{i+1} = -h^2\ r_i \quad (i = 2, \ldots N+1)$$

$$-A\ y_N + 2hB\ y_{N+1} + A\ y_{N+2} = 2hC$$

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

- Son ecuaciones en las que la función depende de varias variables
- Hay ecuaciones de distintos órdenes de derivación y de distintos tipos
- Veremos ecuaciones *Lineales*.
- Una ecuación lineal de segundo orden, donde la función incógnita depende de 2 variables es:

$$a_{11}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2a_{12}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + a_{22}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \ = \ F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)$$

  donde $\phi = \phi(x,y)$, $\phi_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, etc.
- Estas ecuaciones aparecen en numerosos problemas físicos.

- Se suelen clasificar en:
  - Elípticas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
  - Parabólicas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
  - Hiperbólicas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
- Ejemplo de ecuación elíptica: Conducción del Calor (estacionario)

$$\Delta\theta = f$$

donde $\theta = \theta(x, y)$, $\Delta\theta = \nabla^2\theta = \theta_{xx} + \theta_{yy}$

- Ejemplo de ecuación parabólica: Conducción del Calor (transitorio)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \;=\; a^2 \;\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \;+\; f(x,t)$$

donde $\theta = \theta(x, t)$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ siendo k la conductividad térmica del medio, c su calor específico, y ρ su densidad.

- Ejemplo de ecuación hiperbólica: Cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; - \; a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; = \; 0$$

donde $u = u(x,t)$, $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ siendo T la tensión en la cuerda, y ρ la densidad del material.

Condiciones de Contorno

- Necesarias para resolver el problema
- La cantidad debe ser igual al orden de derivación
- Hay de distintos tipos:
  - Sobre las variables primales del problema:

$$\phi|_{\Gamma} = \bar{\phi} \qquad \rightarrow \text{ Condiciones de Dirichlet}$$

  - Sobre las derivadas de las variables primales del problema:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \bar{q} \qquad \rightarrow \text{ Condiciones de Neumann}$$

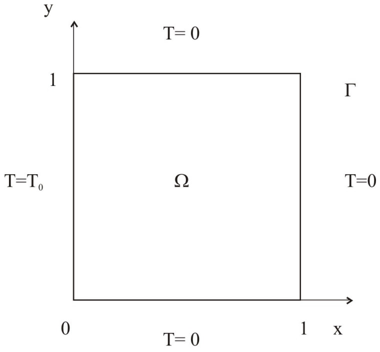
  - Una combinación de las anteriores:

$$\left.\left(a\ \phi + b\ \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma} = \bar{g} \qquad \rightarrow \text{ Condiciones de Robin}$$

- Ejemplo: Conducción del calor estacionaria.

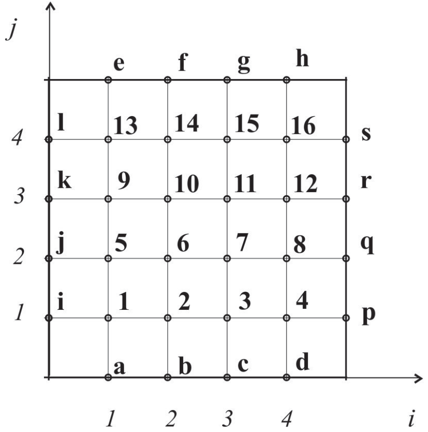
  Se desea encontrar la temperatura $T(x,y)$ en un dominio cuadrado.

  El problema está gobernado por la ecuación de Laplace:



$$
\begin{cases}
\nabla^2 T = 0 & en\ \Omega \\
 & \\
T(0,y) = T_0 & \\
T(1,y) = 0 & \\
T(x,0) = 0 & en\ \Gamma \\
T(x,1) = 0 &
\end{cases}
$$

- El problema continuo se reemplaza por uno discreto.
- Se traza una grilla que define puntos nodales ($n \times m$ nodos)



- Para aplicar diferencias finitas en un problema en una dimensión, se divide el dominio (un intervalos $[a, b]$) en $N + 1$ subintervalos igualmente espaciados, con un paso: $h = \frac{b-a}{N+1}$.
- Se define $x_0 = a$; $x_{n+1} = b$, y N *puntos* o *nodos* interiores $x_i = x_0 + i\ h$.
- Se utiliza la notación y_i para referirse a la función $y(x)$ evaluada en el punto x_i.

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i) \\ y_{i+1} &= y(x_{i+1}) = y(x_i + h) \end{aligned}$$

etc.

- Las derivadas se reemplazan por fórmulas en diferencias.
- Por ejemplo, usando una fórmula de tres puntos, la derivada segunda puede escribirse:

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

- Pueden usarse fórmulas con más puntos, que aproximan con menor error la derivada segunda.
- La obtención de esta fórmula de 3 puntos se muestra a continuación.

Obtención de fórmulas en diferencias, para derivadas ordinarias.

- Expandiendo en serie de Taylor:
  $y(x_{i+1}) = y(x_i + h) =$
  $y(x_i) + h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$
  $y(x_{i-1}) = y(x_i - h) =$
  $y(x_i) - h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$
- Sumando:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi)$$

- De alli la fórmula en diferencias finitas para derivada segunda:

$$y''(x_i) \ = \ \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Análogamente, restando las dos expansiones arriba, se obtiene la fórmula en diferencias finitas para la derivada primera:

- En el caso de funciones de 2 variables se procede de forma análoga.
- Se designará T_i, j a la temperatura del nodo de la grilla de diferencias finitas, donde i y j son las numeraciones según x e y de los nodos (ver figura anterior). El tamaño de paso h es el mismo para los intervalos horizontales y verticales de la malla.
- Así las derivadas parciales pueden escribirse:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h^2}$$

Solución por el método de diferencias finitas

- La ecuación diferencial

$$\Delta T \;=\; \nabla^2 T \;=\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \;=\; 0$$

- Sustituyendo las derivadas por fórmulas en diferencias queda:

$$4T_{i,j} - T_{i,j-1} - T_{i,j+1} - T_{i-1,j} - T_{i+1,j} = 0 \quad \text{para } (i = 1, n)\ (j = 1, m)$$

- Y las condiciones de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T(0,j) & = & T_0 \\ T(n+1,j) & = & 0 \\ T(i,0) & = & 0 \\ T(i,m+1) & = & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \quad \text{para } (j = 1, m) \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \quad \text{para } (i = 1, n) \end{array}$$

- Queda así un sistema de $n \times m$ ecuaciones

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- El vector de incógnitas tiene $n \times m$ incógnitas. En el caso del ejemplo, corresponde a 16 nodos numerados de 1 a 16.
- Los nodos designados con letras, en el dibujo, son los que tienen impuestas las condiciones de contorno.
- La matriz, en ese ejemplo, tiene 16×16 elementos.

- El vector de incógnitas nodales, en este ejemplo tiene la temperaturas:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ \dots \\ T_{4,4} \end{bmatrix}$$

- Y el de términos independientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -T_{0,1} - T_{1,0} \\ -T_{2,0} \\ -T_{3,0} \\ \dots \\ -T_{4,5} - T_{5,4} \end{bmatrix}$$

- La solución de ese sistema proporciona el vector $\mathbf{T}$ con los valores nodales de la temperatura, que es la solución discreta del problema planteado.
- Esta solución es aproximada, ya que la fórmula para las derivadas utilizada es una aproximación a la derivada real.
- El error de aproximación puede disminuirse achicando el tamaño del paso h, con lo cual crece el tamaño del sistema a resolver.
- Puede demostrarse que el sistema de ecuaciones algebraicas puede resolverse y tiene solución única, siempre que el tamaño de paso h esté por debajo de un valor crítico dictado por condiciones de establilidad.