Interpolación y aproximación de funciones

Interpolación

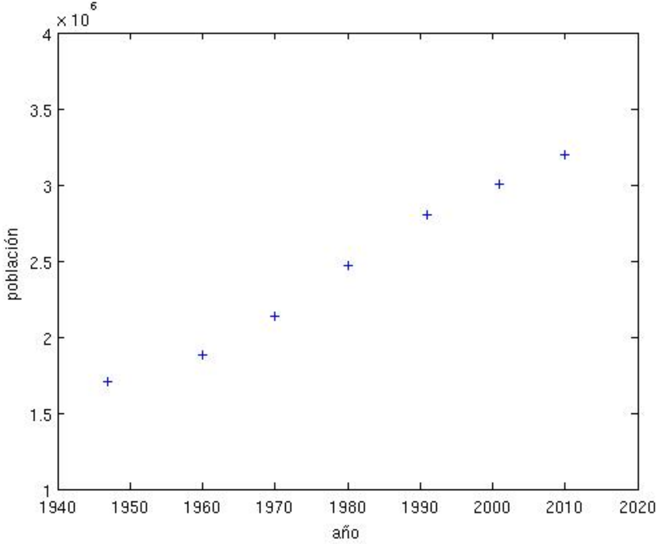
Ejemplo

- Cada diez años, aproximadamente, se realiza un censo poblacional. Se dispone de los siguientes datos para el Departamento La Capital, y para toda la provincia.

Año	Dto. La Capital	Provincia Santa Fe
1947	206212	1702975
1960	264334	1884918
1970	312427	2135583
1980	381449	2465546
1991	441982	2798422
2001	489505	3000701
2010	521759	3200736

- Se desea conocer cuál puede haber sido la población en 1985, por ejemplo. Para esto se debe *interpolar* entre los datos disponibles. O bien cuál sería la población en 2014, para lo cual se debe *extrapolar*.
- En este capítulo se estudiarán métodos para realizar estas interpolaciones.

Población de la Provincia de Santa Fe



Interpolación

- Frecuentemente se conoce una serie de datos para los cuales se desea tener una función que los represente

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\dots$	$\dots$
x_n	y_n

- Una forma de hacerlo es construir un polinomio que los aproxime:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

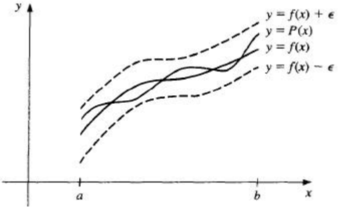
$a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$

Teorema de aproximación de Weierstrass

- Sea $f(x)$ definida y continua en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$ en $[a, b]$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a, b]$$

- Esto significa que siempre podemos encontrar un polinomio tal que su error al representar una función, sea tan pequeño como se desee.



Construcción de polinomios interpoladores

- Hay un teorema, sobre el que volveremos enseguida, que dice que dados x_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ un conjunto de $n + 1$ números reales distintos, y $n + 1$ números asociados a los anteriores y_k $(k = 0, 1, \ldots n)$,*existe* un *único* polinomio de grado $\leq n$ tal que

$$P_n(x_k) \; = \; y_k \qquad k = 0, 1, \ldots n$$

- Ese teorema asegura existencia y unicidad de un polinomio que pase por $n + 1$ puntos.
- El polinomio puede escribirse de distintas formas. Si se escribe en la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

se ve que hay $n + 1$ coeficientes incógnitas: $a_i \quad i = 0, \ldots n$

- Si se evalúa el polinomio en los $n+1$ puntos puede escribirse

$$P_n(x_k) \;=\; y_k \quad \text{para } k = 0, \ldots n$$

que es un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas de donde pueden calcularse los a_i.
- Esta forma de construir $P_n(x)$ no es práctica, ya que involucra resolver un sistema de $n+1$ ecuaciones con una matriz llena. (Aunque, si los $n+1$ puntos son distintos, el sistema tiene solución)
- Este procedimiento, se inscribe dentro de otro más amplio denominado de *Coeficientes indeterminados*, en los que el polinomio se escribe:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \; \phi_k(x)$$

donde $\phi_k(x)$ son polinomios de grado $\leq n$ y los c_k se obtiene del sistema de ecuaciones que resulta de hacer $P_n(x_k) \;=\; y_k$ para todo k.

Interpolación por polinomios de Lagrange

- Una forma muy usada de construir polinomios interpolantes es utilizando los *polinomios de Lagrange*
- En este caso el polinomio se escribe:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ \phi_k(x)$$

  donde los $\phi_k(x)$ son polinomios de grado n.
- Los coeficientes en este caso son los $y_k = f(x_k)$, datos del problema, y la construcción de los polinomios $\phi_k(x)$ es muy sencilla.
- Se introducirá con un ejemplo.

- Ejemplo:
  Sea hallar un polinomio que pase por dos puntos: (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
  Puede escribirse:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

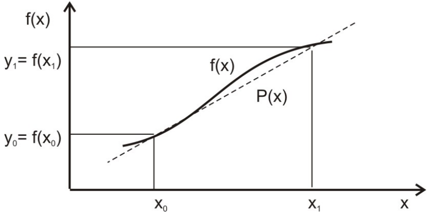
$$P(x) = L_0(x)\; y_0 + L_1(x)\; y_1$$

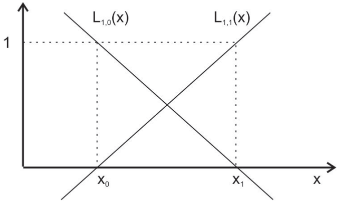
donde se ha definido

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Se puede observar que $L_0(x_0) = 1$ y $L_0(x_1) = 0$ y que $L_1(x_0) = 0$ y $L_1(x_1) = 1$

- Ejemplo:





- Esto puede generalizarse, y para un polinomio que pase por $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots x_n$

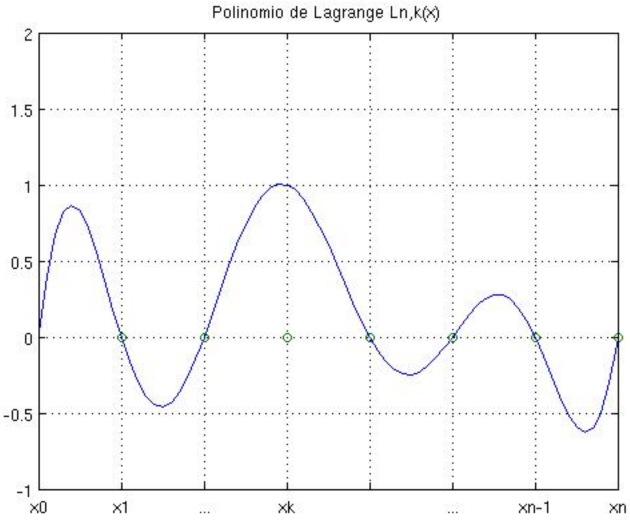
$$P_n(x) = L_{n,0}(x)\; y_0 + L_{n,1}(x)\; y_1 + \ldots + L_{n,n}(x)\; y_n$$

  donde se construirán los $L_{n,k}(x)$ de modo que $L_{n,k}(x_k) = 1$ y $L_{n,k}(x_j) = 0$ para $k \neq j$
- Puede observarse que esto se verifica si:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

- Es un polinomio de grado n. Se denomina *polinomio de Lagrange*
- Puede escribirse:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0;\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$


Polinomio de Lagrange Ln,k(x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
x0
x1
...
xk
...
xn-1
xn

- Teorema:
  Si $x_0, x_1, \dots x_n$ son números distintos, y si $f(x)$ está dada por sus valores $f(x_0), f(x_1), \dots f(x_n)$, entonces existe un único polinomio de grado n, tal que

  $$f(x_k) = P(x_k) \qquad \text{para } k = 0, 1, \dots n$$

  Ese polinomio está dado por

  $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_{n,k}(x)$$

  donde

  $$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0;\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

- Ejemplo:
  Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Supóngase que se conoce la función en 3 puntos

x	y
$x_0 = 2$	$y_0 = 0.5$
$x_1 = 2.5$	$y_1 = 0.4$
$x_2 = 4$	$y_2 = 0.25$

Se construye un polinomio de grado 2 (que pasa por tres puntos)

$$P_2(x) = L_{2,0}(x)\ y_0 + L_{2,1}(x)\ y_1 + L_{2,2}(x)\ y_2$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

- Ejemplo (continuación):
  Análogamente

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{1}{3}(-4x^2+24x-32)$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}(x^2-4.5x+5)$$

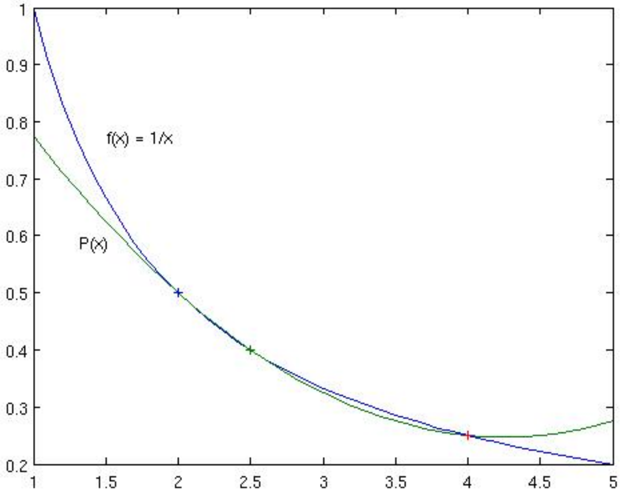
  Y el polinomio:

$$P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

  Por ejemplo, para $x = 3$:

$$f(3) = \frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

$$P_2(3) = 0.325$$


f(x) = 1/x
P(x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

- Teorema:
  Si $x_0, x_1, \ldots x_n$ son números distintos en $[a, b]$, y si $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x) \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  donde $P(x)$ es el polinomio interpolante definido por el teorema anterior.
- Así, el error en la aproximación es

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  (Como referencia; el polinomio de Taylor tiene un error dado por $\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$)

Interpolación por diferencias divididas

- Un polinomio

$$P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0$$

  se puede representar también como:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Puede verse que esta es la forma *anidada* de escribir el polinomio:

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)\left[a_1 + (x - x_1)\left[a_2 + a_3(x - x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots + a_n(x - x_{n-1})\right]\ldots\right]$$

- Los coeficientes a_i se pueden obtener a partir de los valores de la función conocidos en los $n+1$ puntos: $f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots n$
- Puede verse que evaluando el polinomio en x_0, todos los términos se anulan excepto el primero. Al evaluarlo en x_1 se anulan todos excepto los dos primeros, y así el sistema de ecuaciones tiene una matriz triangular.
- Particularizando para $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0$$

- Particularizando para $x = x_1$:

$$P_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

de donde

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Notación:

- *Diferencia dividida cero* de una función con respecto a x_i:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- *Primera diferencia dividida* de una función con respecto a x_i y x_{i+1}:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

- *Segundas diferencias divididas* de una función con respecto a x_i, x_{i+1} y x_{i+2}:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

- $\ldots$
- *k-esima diferencias divididas* de una función con respecto a $x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k}$:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2} \ldots x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- Con esta notación, los coeficientes a_i del polinomio:

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

- Puede verse que, análogamente:

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

- Y el coeficiente k:

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_k]$$

- El polinomio se escribe:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$\ldots + f[x_0, x_1 \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Esta es la *fórmula en diferencias divididas de Newton*

Ejemplo: Escribir un polinomio que represente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en los puntos: $(2, 2.5, 4)$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2	0.5		
		-0.2	
2.5	0.4		0.05
		-0.1	
4	0.25		

$$P(x) = 0.5 - 0.2(x-2) + 0.05(x-2)(x-2.5) = 1.15 - 0.425x + 0.05x^2$$

Algoritmo para interpolación por diferencias divididas

Para obtener la fórmula en diferencias divididas interpolantes de New-

Entrada: $x_0, x_1 \ldots x_n$ *y los valores* $f(x_0), f(x_1) \ldots f(x_n)$*, estos últimos en al primer columna de la matriz* $\mathbf{Q}$. *Salida: Las diferencias divididas f[. . .] , en la diagonal de* $\mathbf{Q}$

Paso 1) Para $i = 1, 2, \ldots n$ *hacer {*

Para $j = 2, \ldots i$ *hacer{*

$$Q_{i,j} \leftarrow \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

}

}

Paso 2) Salida: ($Q_{0,0}, Q_{1,1}, Q_{2,2}, \ldots Q_{n,n}$*)*

de modo que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} Q_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

ton:

Polinomios osculantes

Dada una función $f(x)$ conocida en $n+1$ puntos $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y dados $n+1$ enteros $(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ un polinomios osculante $P(x)$ es aquel que, para $i = 0, 1, \ldots n$:

$$P(x_i) = f(x_i)$$

$$P'(x_i) = f'(x_i)$$

$$P''(x_i) = f''(x_i)$$

$$\ldots$$

$$P^{(m_i)}(x_i) = f^{(m_i)}(x_i)$$

- Es decir, un polinomio osculante coincide con la función en los $n+1$ puntos, y sus derivadas (hasta un orden $\leq m_i$) coinciden con las derivadas respectivas de la función.
- El grado del polinomio $P(x)$ es

$$\sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

- Dicho de otra forma, un polinomio osculante $P(x)$ que aproxima a $f(x)$ es el polinimio de menor grado, tal que

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots n$ y $k = 0, 1, 2, \ldots m_i$

- Como casos particulares:
    - Si $n = 0$
      Polinomio de Taylor
      Coincide en un solo punto, y alli coinciden todas las derivadas hasta un orden dado m_0
    - Si $m_i = 0 \ \forall i$
      Polinomios interpolantes (por ej. en base a polinomios de Lagrange, o diferencias divididas de Newton)
      En $n + 1$ puntos coinciden solo las derivadas de orden cero (i.e. la función)

Polinomios de Hermite

- Son polinomios osculantes con $m_i = 1, \forall i$
- Coinciden el polinomio y la función en sus valores y en sus primeras derivadas, en todos los puntos x_i $(i = 0, 1, \ldots n)$
- Ejemplo:
  - Sea una función dada en 2 puntos: x_0 y x_1 . El polinomio de Hermite debe ser tal que:

$$P(x_0) = f(x_0)$$
$$P(x_1) = f(x_1)$$
$$P'(x_0) = f'(x_0)$$
$$P'(x_1) = f'(x_1)$$

- (Cont. ejemplo)
  - Hay 4 ecuaciones de las cuales se pueden despejar 4 coeficientes que son los necesarios para un polinomio de grado 3.
  - Se puede dar la forma al polinomio:

$$P(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^2(x - x_1)$$

  - Y su derivada:

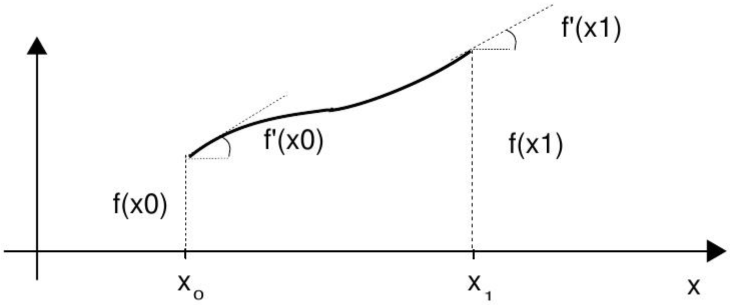
$$P'(x) = b + 2c(x - x_0) + 2d(x - x_0)(x - x_1) + d(x - x_0)^2$$

- (Cont. ejemplo)
  - Reemplazando en las cuatro ecuaciones anteriores, se obtiene:.

$$
\begin{aligned}
a &= f(x_0) \\
b &= f'(x_0) \\
a + b(x_1 - x_0) + c(x_1 - x_0)^2 &= f(x_1) \\
b + 2c(x_1 - x_0) + d(x_1 - x_0)^2 &= f'(x_1)
\end{aligned}
$$

  de donde se despejan las cuatro constantes a, b, c y d

- (Cont. ejemplo)



Forma de Lagrange para Polinomios de Hermite

<u>Teorema</u>:
Si $f \in C^1[a,b]$ y $x_0.x_1,\ldots x_n \in [a,b]$ son distintos, el único polinomio de menor grado, que coincide con $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ en $x_0, x_1.\ldots.x_n$ es un polinomio de grado $\leq 2n+1$ dado por:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

donde

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L^2_{n,j}(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x)$$

siendo $L_{n,j}$ el polinomio de Lagrange

$$L_{n,j}(x) = \prod_{\substack{i=0; \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

- Se puede verificar que para $i = 0, 1, 2 \ldots n$

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$$

$$H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$$

- Esto es pues los polinomios $H_{n,j}$ y $\hat{H}_{n,j}$ cumplen:

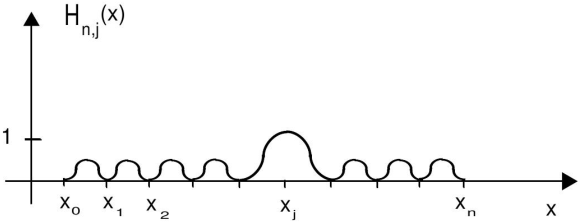
$$H_{n,j}(x_i) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq i \\ 1 & si\ j = i \end{cases}$$

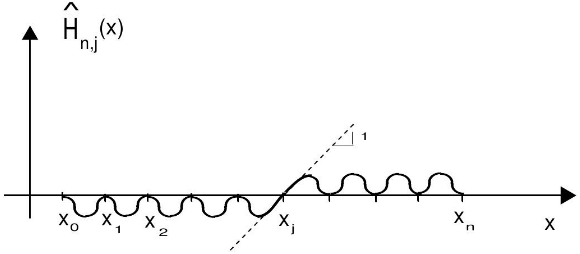
$$\hat{H}_{n,j}(x_i) = 0$$

- Y las derivadas de los polinomios $H_{n,j}$ y $\hat{H}_{n,j}$ cumplen:

$$H'_{n,j}(x_i) = 0$$

$$\hat{H}'_{n,j}(x_i) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq i \\ 1 & si\ j = i \end{cases}$$


H n,j (x)
1
x 0
x 1
x 2
x j
x n
x


Ĥ n,j (x)
1
x 0
x 1
x 2
x j
x n
x

- Se puede verificar que el error está dado por:

$$f(x) - H_{2n+1}(x) \;=\; \frac{(x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2}{(2n+2)!}\; f^{(2n+2)}(\xi)$$

si

$$f(x) \in C^{2n+2}[a,b]$$

y siendo $\xi \in [a,b]$

Forma en dif. divididas de Newton para Pol. de Hermite

- Se puede proceder como se ha visto para el caso de polinomios interpoladores en diferencias divididas de Newton.
- Pero en este caso, en lugar de calcular las primeras diferencias, se toman los datos dados para las derivadas de $f(x)$
- Se introducirá a través de un ejemplo

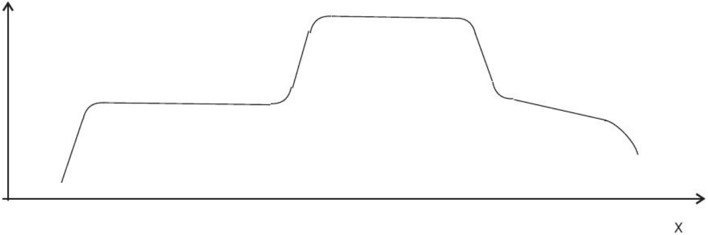
- Sea hallar un polinomio que pase por tres puntos (x_0, x_1, x_2), y cuya derivada coincida con la de la función en esos puntos. .
- Se define una nueva sucesión: $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{2n+1}$ tal que

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i \qquad \text{para } i = 0, 1, 2 \ldots n$$

z	$f(x)$	Prim.Dif.Divididas	Seg. Dif. Div.
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \frac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \frac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \frac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \frac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \frac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \frac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

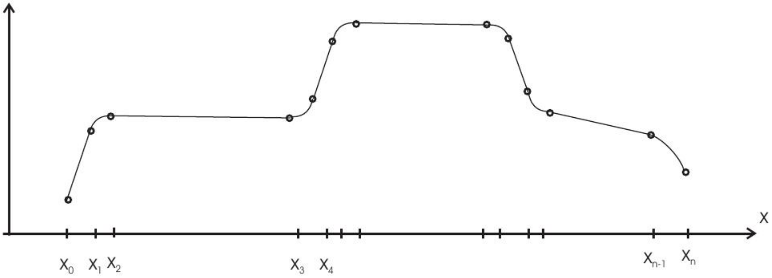
Funciones *splines* (o trazadores)

- Ya se ha visto cómo construir polinomios que aproximen una función en un intervalo $[x_0, x_n]$
- Si hay grandes cambios de curvatura en partes de la función puede ser que los polinomios globales se desvíen mucho de la curva a representar.

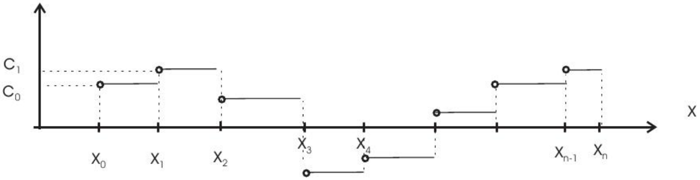


- Una posibilidad es descomponer la curva en subintervalos y usar polinomios diferentes para cada subintervalo $\rightarrow$ *aproximación segmentaria*

- Se define una serie de *segmentos* separados por *nudos*: $x_0, x_1, \ldots x_n$
- Una *función spline de grado* k, $S(x)$, con nudos en $x_0, x_1, \ldots x_n$, es una que satisface:
    - En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i)$, $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$
    - $S(x)$ tiene derivadas de orden $k-1$ continuas en $[x_0, x_n]$.

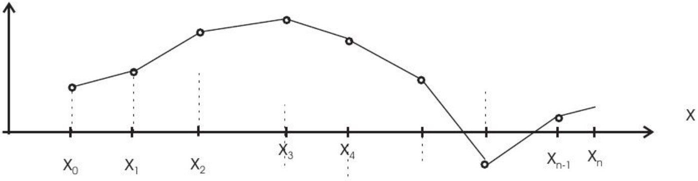


Funciones *splines* de grado 0



$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = C_0 & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) = C_1 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) = C_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Funciones *splines* de grado 1



$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0x + b_0 & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) = a_1x + b_1 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Funciones *splines* cúbicas

- Una función muy usada son las splines cúbicas

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

  donde $S_i(x)$ es polinómio cúbico
- Estas funciones poseen continuidad hasta la derivada segunda

- Condiciones:

$$\begin{array}{rlcr}
\text{i)} & S_i(x_i) = f(x_i) & (i = 0, 1, \ldots n-1) & n \text{ ecuac.} \\
\text{ii)} & S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) & (i = 1, 2, \ldots n-1) & n-1 \text{ ecuac.} \\
\text{iii)} & S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) & (i = 1, 2, \ldots n-1) & n-1 \text{ ecuac.} \\
\text{iv)} & S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) & (i = 1, 2, \ldots n-1) & n-1 \text{ ecuac.} \\
\text{v)} & S_{n-1}(x_n) = f(x_n) & & 1 \text{ ecuac.} \\
 & & & \text{Total: } 4n-2 \text{ ecuac.}
\end{array}$$

- Cada función $S_i(x)$ posee 4 coeficientes.
- Luego hay $4n-2$ ecuaciones con $4n$ incógnitas. Faltan 2 ecuaciones.

Las ecuaciones a agregar pueden ser:

- Condiciones de frontera libre
    - $S''(x_0) = 0$
    - $S''(x_n) = 0$

  Dan lugar a las llamadas *spline cúbica natural*
  Geométricamente: la curvatura es nula en los extremos
- Condiciones de frontera sujeta
    - $S'(x_0) = f'(x_0)$
    - $S'(x_n) = f'(x_n)$

  Dan lugar a las llamadas *spline cúbica sujeta*
  Puede aproximar mejor a la función, pero precisa conocer las derivadas primeras en los extremos.

Construcción de *splines* cúbicas

- Polinomio cúbico:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n - 1$$

- Las condición (i):

$$S_i(x_i) = a_i = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n - 1$$

  De aquí se obtiene los valores de n coeficientes a_i.

- Se define:

$$a_n = f(x_n)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

- Las condición (ii):

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3 = a_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \quad (1)$$

- Se define:

$$b_n = S'(x_n)$$

- La derivada.

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

- Las condición (iii):

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = b_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \tag{2}$$

- Se define:

$$c_n = S''(x_n)/2$$

- La derivada segunda.

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

- Las condición (iv):

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$c_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1} = c_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \tag{3}$$

- Despejando d_{i-1} de las ec. (3):

$$d_{i-1} = (c_i - c_{i-1})/3h_{i-1} \tag{a}$$

y reemplazando en (1) y (2):

$$a_i = a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + (2c_{i-1} + c_i)h_i^2/3 \tag{4}$$

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \tag{5}$$

Despejando b_{i-1} de las ec. (4):

$$b_{i-1} = (a_i - a_{i-1})/h_{i-1} - (2c_{i-1} - ci)h_{i-1}/3 \qquad (b)$$

y reemplazando en (5):

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) \qquad (6)$$

para $i = 1, 2 \ldots n-1$
Que es un sistema de $n-1$ ecuaciones, en c_i.
Agregando las dos ecuaciones adicionales, por ejemplo las condiciones de frontera libre:

$$c_0 = 0$$

$$c_n = 0$$

- El sistema queda

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

La matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene forma tridiagonal.

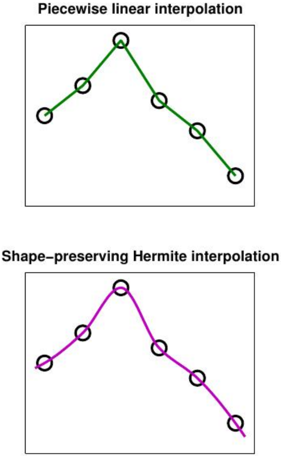
- El vector de términos independientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Se puede demostrar que el sistema de ecuaciones tiene solución y que ésta es única.
- Calculados los c_i, con las ecuaciones (a) y (b) se calculan d_i y b_i.

Ejemplo:

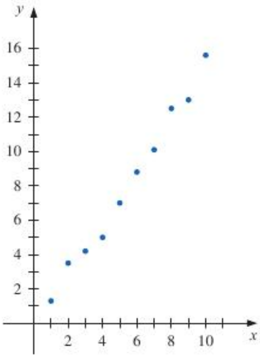
Las figuras muestran distintos interpolantes para 6 puntos:
a) interpolación lineal; b) polinomio interpolador de 5^o grado; c) polinomios de Hermitte, d) splines cúbicas.

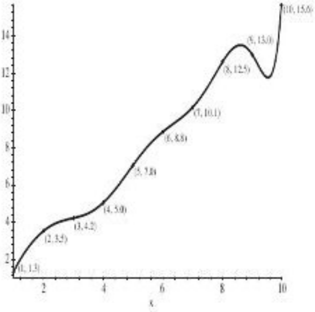


Aproximación y ajuste de curvas

- Hay veces en que se desea encontrar una función que aproxime de mejor manera posible una cantidad de puntos.
- Por ejemplo, si se miden experimentalmente las deformaciones de un resorte para distintas fuerzas aplicadas, se obtienen una cantidad de puntos en un gráfico Fuerza-Desplazamiento.
  La Ley de Hooke dice que esa relación es lineal. Se desea encontra la constante de resorte.
  El problema es como determinar una función lineal que mejor aproxime a los resultados, si estos no se alinean sobre una recta, por errores en la medición.

- Un polinomio interpolador no es una buena solución, como se ve en la figuras
- Por otro lado si se quiere hallar una recta (2 coef. incognitas) que pase por todos esos m puntos se obtiene un sistema de m ecuaciones con 2 incógnitas, que no tiene solución.





- Se analizarán dos tipos de problemas:
  1. Se dispone de m pares de valores (x_i, y_i) que definen una curva. Se desea hallar una función que los aproxime. Por ejemplo, un polinomio $P_n(x)$ de grado n, con $n < m$.
  2. Se desea hallar un polinomio $P_n(x)$ que aproxime a una función conocida $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.
- El error de la aproximación en el primer caso es:

$$e_i = y_i - P(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

- En el segundo:

$$e(x) = f(x) - P_n(x)$$

- Se deben buscar los coeficientes a_k del polinomio de modo de minimizar esos errores.

Ajuste de curvas para puntos discretos

- La minimización del error se puede realizar de distintas maneras.
  1) Minimizar el error máximo:

  $$min(E = \max_{i=1,2,\ldots m} \{|y_i - P(x_i)|\})$$

  2) Minimizar la desviación absoluta:

  $$min(E = \sum_{i=1}^{m} |y_i - P(x_i)|)$$

  3) Minimizar el cuadrado de la desviación absoluta:

  $$min(E = \sum_{i=1}^{m} |y_i - P(x_i)|^2)$$

- El primer caso se conoce como problema *minimax*
  No se puede resolver por métodos elementales. Además dá mucho peso a un único punto alejado del promedio.
- En el segundo caso, para hallar el mínimo se plantea un problema

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad i = 0, 1, \ldots n$$

  pero el valor absoluto no es derivable en 0. No necesariamente se puede obtener la solución.
  Además este método da poco peso a puntos alejados (los promedia).
- El método de mínimos cuadrados da un peso mayora puntos alejados, pero no lo sdeja que dominen completamente la solución. Es el más coinveniente de los tres. Además favorece el estudio de la distribución estadística del error.

Ajuste de curvas por mínimos cuadrados

- ¿ Cómo hallar los a_k?

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

el error

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i P_n(x_i) + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i (\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j) + \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k x_i^{j+k})$$

- El error

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k (\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k})$$

- Para minimizarlo:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, \ldots n$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k (\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}) = 0 \quad j = 0, 1, \ldots n$$

- Queda un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas (a_k)

- Desarrollando el sistema:

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$\ldots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n$$

- Estas se denominan *Ecuaciones Normales* y se pueden escribir:

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{b}$$

- En las ecuaciones normales:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

  y los elementos de la matriz $\mathbf{K}$ son:

$$k_{j,k} = \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

- Resolviendo el sistema se obtienen los a_k
- Si los x_i son distintos, el sistema de ecuaciones normales tiene solución única.

Ejemplo

Encontrar una recta que ajuste los siguientes puntos:

x	0	1	2	2.5	3
y	2.9	3.7	4.1	4.4	5

- $m = 5$, $n = 1$ y el sistema:

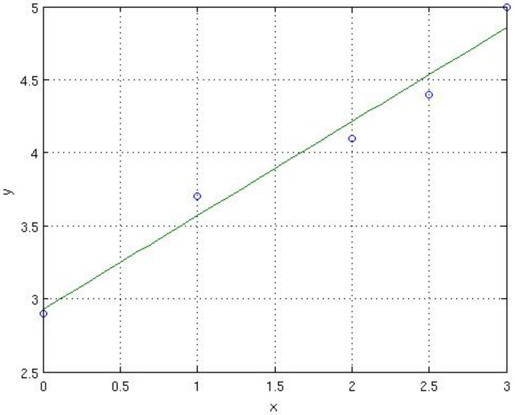
$$a_0\, m + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i$$

- $\sum x_i = 8.5$, $\sum y_i = 20.10$, $\sum x_i^2 = 20.25$, $\sum y_i x_i = 37.9$
- de donde

$$y = a_0 + a_1\, x = 2.9267 + 0.6431\, x$$

Ejemplo



Ajuste por funciones no polinómicas

- Se puede proponer funciones no polinómicas para ajustar los datos. Por ejemplo, una función exponencial, o una potencial:

$$\hat{y}(x) = c\ e^{ax}$$

$$\hat{y}(x) = c\ x^{a}$$

- Procediendo igual que antes se llega ahora a un sistema no lineal.
- Para linealizar el problema se suele trabajar con logaritmos:

$$\ln \hat{y}(x) = \ln c + a\ x$$

$$\ln \hat{y}(x) = \ln c + a\ \ \ln x$$

(Pero en este caso no se ajusta por minimos cuadrados la función sino su logaritmo. Puede ser muy diferente)

Ejemplo

Encontrar una curva $ae^{(bx)}$ que ajuste los siguientes puntos:

x	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
y	7.5	16.1	38.9	67.0	146.6	366.2

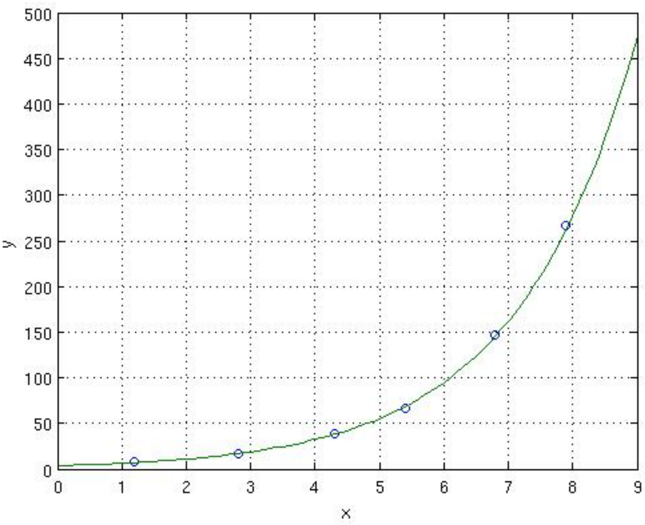
- el problema es : $\log y = \log a + bx = c + bx$

$$c\, m + b \sum x_i = \sum \log y_i$$

$$c \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum \log y_i x_i$$

- de donde

$$y \;=\; a\, e^{bx} \;=\; 3.7889\, e^{0.5366x}$$


500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x