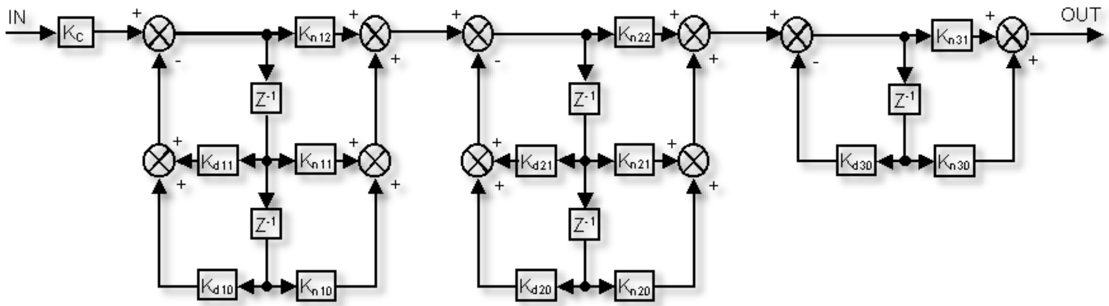
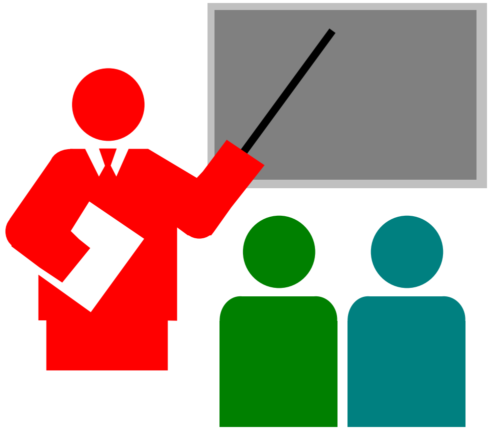
Transformada Z



Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s-z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.

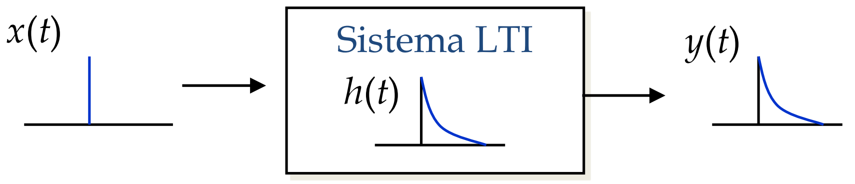


Objetivos

- Utilizar la transformada Z como herramienta para obtener la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto.
- Obtener la respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo discreto.
- Analizar las limitaciones de las transformaciones conformes utilizadas.

Papel de la TZ

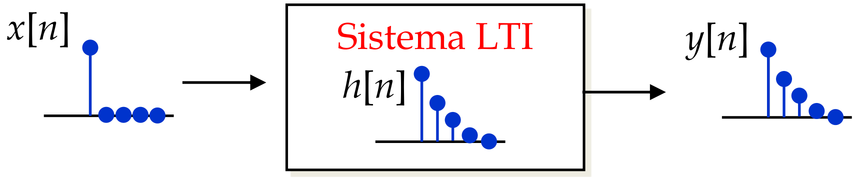
- La Transformada Z juega un papel muy importante en la representación y el análisis de sistemas de tiempo discreto y coeficientes constantes (LTI).



Tiempo continuo

Ecuaciones diferenciales

$$dy^p(t)/dt = f\,(dy^{p-1}(t)/dt, \ldots, y(t),\, dx^q(t)/dt,\, \ldots\, ,\, x(t))$$



Tiempo discreto

Ecuaciones en diferencias o de recurrencia

$$y[n] = f\,'(y[n\text{-}p],\, \ldots,\, y[n\text{-}1],\, x[n\text{-}q],\, \ldots\, ,\, x[n])$$

Ecuaciones
diferenciales

Ecuaciones diferenciales

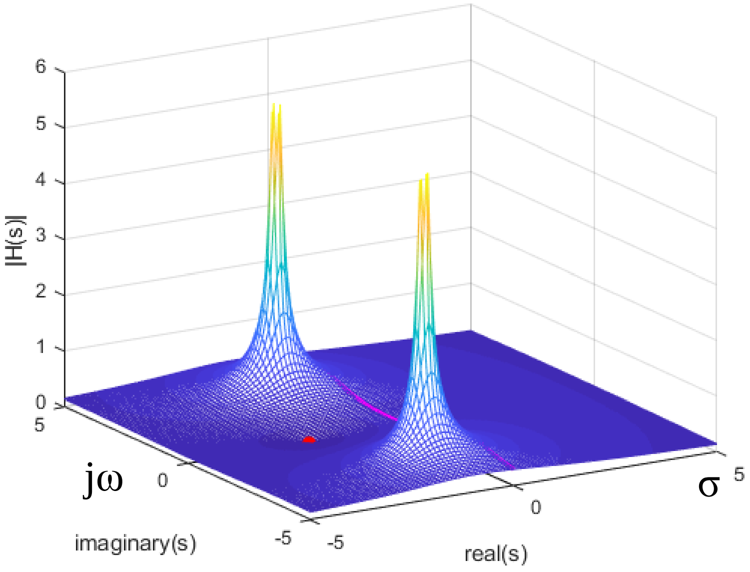
Transformada de Laplace

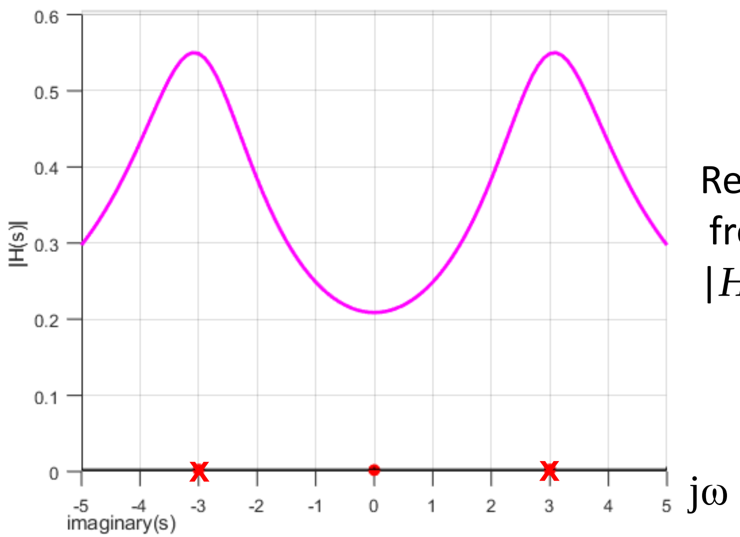
Razón de polinomios en *s*

Repaso TL

Transformada de Laplace $\mathcal{L}(s)$
(con $s = \sigma + j\omega$)

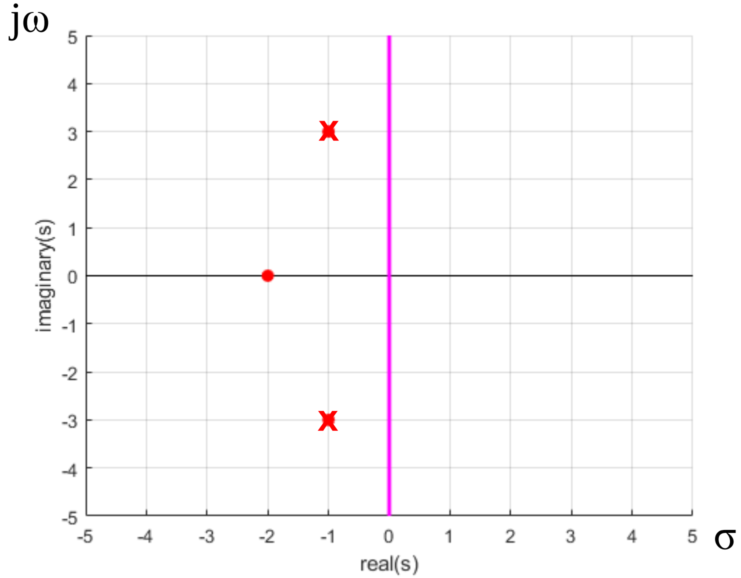
Función de transferencia $|H(s)|$.





Respuesta en frecuencia $|H(s = j\omega)|$.

Análisis de estabilidad.



Ecuaciones
diferenciales

Transformada de Laplace

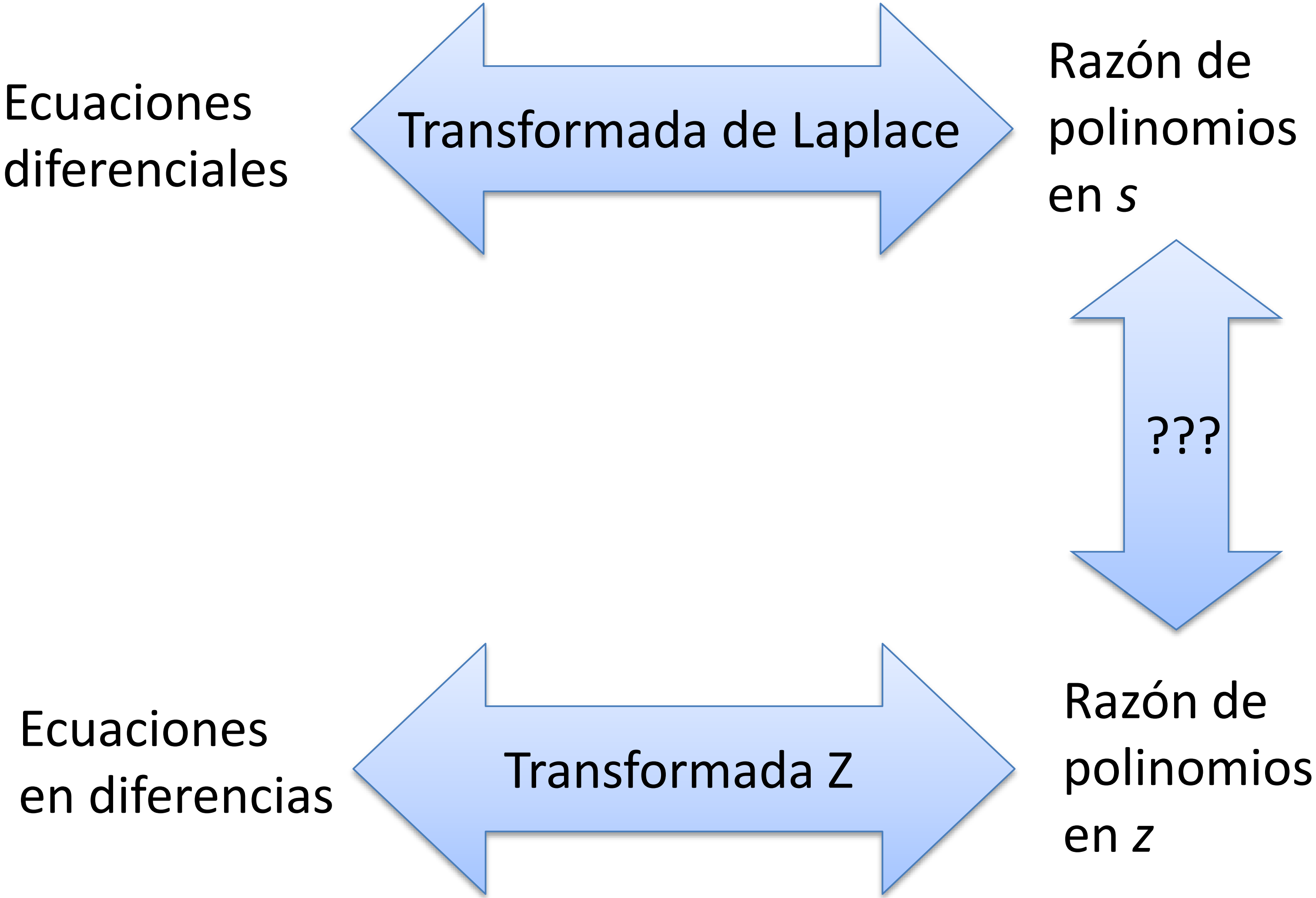
Razón de
polinomios
en *s*

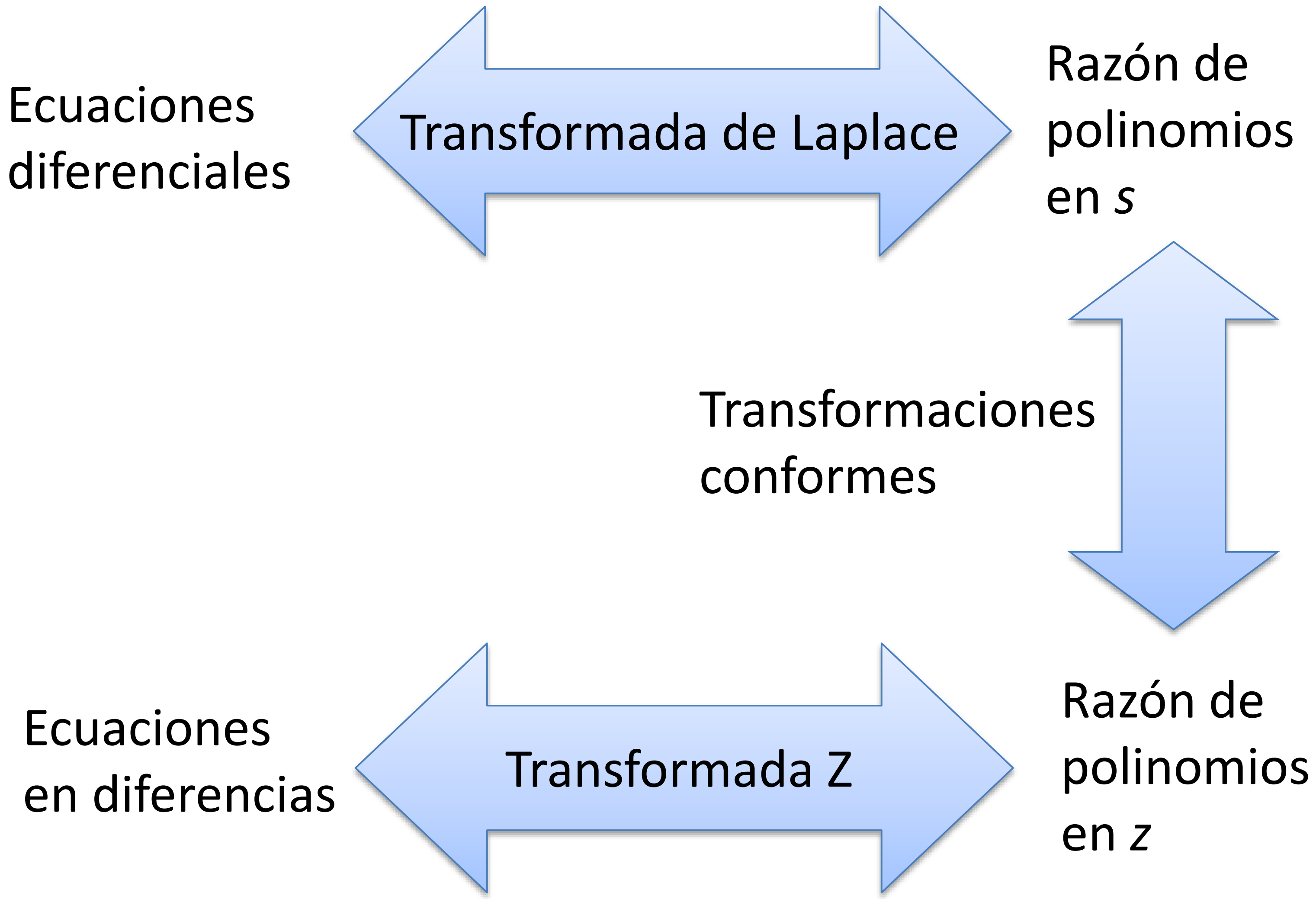
Ecuaciones
en diferencias

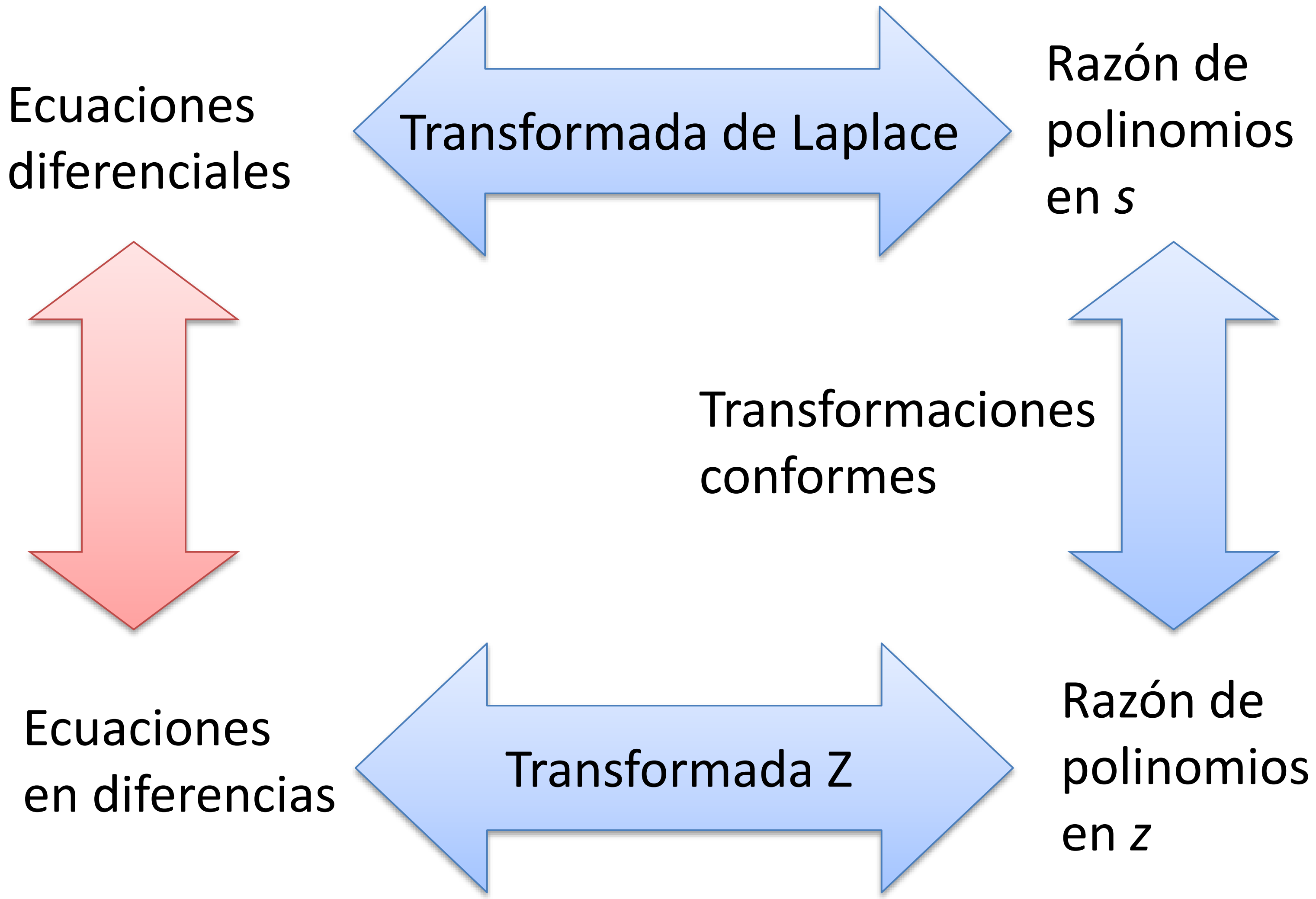
$y[n] = f\,'(y[n-p], \ldots, y[n-1], x[n-q], \ldots, x[n])$

Ecuaciones diferenciales ⟷ Transformada de Laplace ⟷ Razón de polinomios en *s*

Ecuaciones en diferencias ⟷ Transformada Z ⟷ Razón de polinomios en *z*


Ecuaciones diferenciales
Transformada de Laplace
Razón de polinomios en *s*
???
Ecuaciones en diferencias
Transformada Z
Razón de polinomios en *z*


Ecuaciones diferenciales
Transformada de Laplace
Razón de polinomios en *s*
Transformaciones conformes
Ecuaciones en diferencias
Transformada Z
Razón de polinomios en *z*


Ecuaciones diferenciales
Transformada de Laplace
Razón de polinomios en *s*
Transformaciones conformes
Ecuaciones en diferencias
Transformada Z
Razón de polinomios en *z*

La transformada Z
nos permite

- Trabajar las ecuaciones en diferencias como ecuaciones algebraicas.
- Representar las funciones de transferencia de sistemas discretos como diagramas de polos y ceros en el plano z.
- Transformar secuencias, representen o no respuestas impulsivas de sistemas (señales).

Notas históricas

- **1744:** la idea básica de la TZ ya era conocida por Laplace.
- **1947:** es re-introducida por W. Hurewicz para resolver ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (sistemas de control con datos muestreados para radar).
- **1952:** Ragazzini y Zadeh, de la Universidad de Columbia, la bautizan con su denominación
 actual.

Desde el punto de vista matemático también puede verse como una serie de Laurent.

HurewicZ

Definición

- La TZ de una secuencia $x[n]$ se define como:

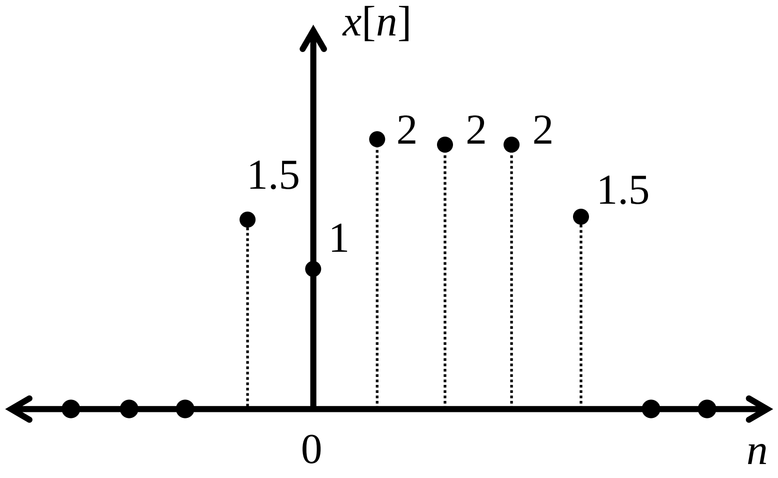
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

donde $z \in \mathbb{C}$

Notación

$$X(z) = Z\left\{x[n]\right\}$$

Ejemplo 1: Secuencia general



$$x[n] = [\cdots \quad 0 \quad 1.5 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1.5 \quad 0 \quad \cdots]$$

$$X(z) = 1.5z^{1} + 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 1.5z^{-4}$$

Ejemplo 2: secuencia causal

- Dado:

$$x[n] = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad -1]$$

- Su transformada Z será:

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-4} - 1z^{-5}$$

Transformada Z unilateral

Para secuencias causales…

TZ unilateral...

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

- Cuando la suma converge, define una función de z.
- A la función $X(z)$ así formada se la denomina Transformada Z unilateral de $x[n]$.

TZ unilateral...

Sea por ejemplo, la secuencia:

$$x[n] = \delta[n\text{-}2],$$

entonces $x[2] = \delta[0] = 1$, y $x[n] = 0$ para $n \neq 2$;
luego:

$$X(z) = z^{-2}$$

y, en general:

$$\delta[n - k] \leftrightarrow z^{-k}$$

Propiedades de la TZ

- **Unicidad:**
  - Para cada secuencia $x[n]$ corresponde una única transformada $X(z)$.

Propiedades de la TZ

- **Linealidad:**
  - Para una secuencias $x[n]$ y $y[n]$ con transformadas $X(z)$ y $Y(z)$, entonces a $a\ x[n] + b\ y[n]$ le corresponde una transformada $a\ X(\mathrm{z}) + b\ Y(\mathrm{z})$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la TZ

- **Convolución:**
  - Si $X(z)$, $Y(z)$ y $H(z)$ son las TZ de $x[n]$, $y[n]$ y $h[n]$ entonces la TZ de:

$y[n] = x[n]*h[n]$, es $Y(z) = X(z)H(z)$

Teorema del Desplazamiento

Teorema del desplazamiento

- Dada $x[n]$, se forma la secuencia $x_1[n] = x[n - 1]$, obtenida desplazando $x[n]$ en una unidad de tiempo.
- Expresando la TZ de $x_1[n]$ en función de la TZ de $x[n]$:

$$
\begin{aligned}
X_1(z) &= x_1[0] + x_1[1]z^{-1} + \ldots + x_1[n]z^{-n} + \ldots \\
&= x[-1] + x[0]z^{-1} + x[1]z^{-2} + \ldots \\
&= x[-1] + z^{-1}\{x[0] + x[1]z^{-1} + \ldots\}
\end{aligned}
$$

Teorema del desplazamiento

Es decir que:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}\ \{x[0] + x[1]\, z^{-1} + \ldots\}$$

Teorema del desplazamiento

- Es decir que:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}\,\{x[0] + x[1]\,z^{-1} + \ldots\}$$

$$X(z)$$

- Entonces:

$$X_1(z) = x[-1] + z^{-1}X(z)$$

Resumiendo

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n\text{-}1] \leftrightarrow z^{-1}\, X(z) + x[-1]$$

Generalizando

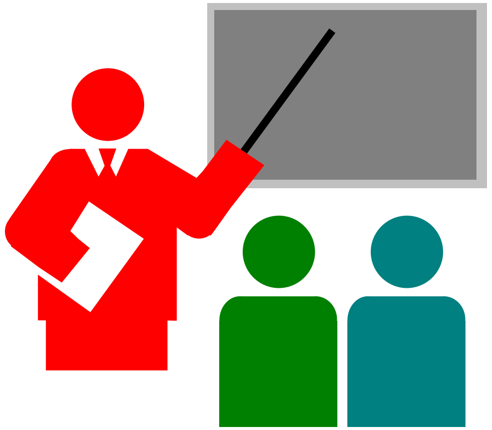
$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n\text{-}m] \leftrightarrow z^{-m}\, X(z)$$

Siempre que $x[n]$ sea causal

Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s*-*z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.

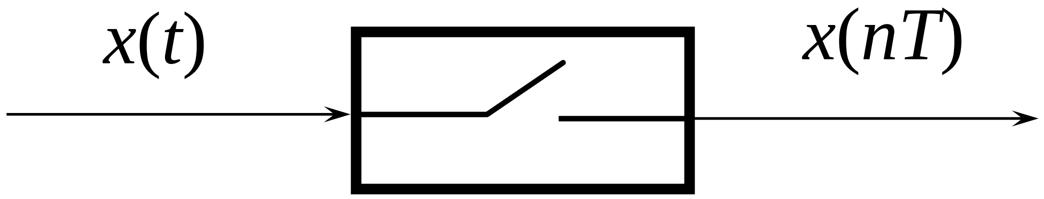


¿Y si no partimos de la definición?
Otro Enfoque

(más intuitivo)

Otro enfoque...

- Un muestreador es un dispositivo esencial en sistemas discretos. Consta de un interruptor que se cierra a intervalos generalmente regulares "leyendo“ la entrada en determinados instantes $t = nT$



Muestreador

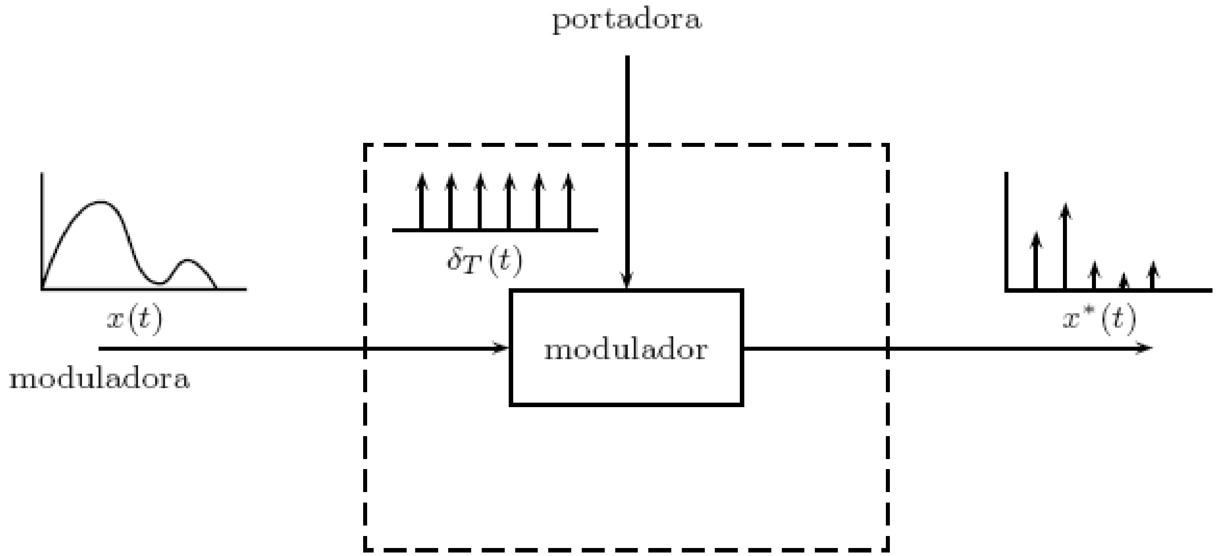
Otro enfoque...

- Si se toma la salida del muestreador como un tren de impulsos ponderados entonces podemos escribir:

$$x^{*}(t) = \delta_T(t)x(t) \quad \text{con} \quad \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Otro enfoque...

- Se puede considerar al muestreador como un modulador del tren de impulsos unitarios mediante la entrada $x(t)$:



$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

Otro enfoque...

- Tomando la transformada de Laplace de la ecuación del muestreador:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

(con $s = \sigma + j\omega$)

Otro enfoque...

- Tomando la transformada de Laplace de la ecuación del muestreador:

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

- Y definiendo $e^{-sT} = z^{-1}$ (Retardo en el dominio temporal)

$$X(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)z^{-n}$$

Otro enfoque...

$$X(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

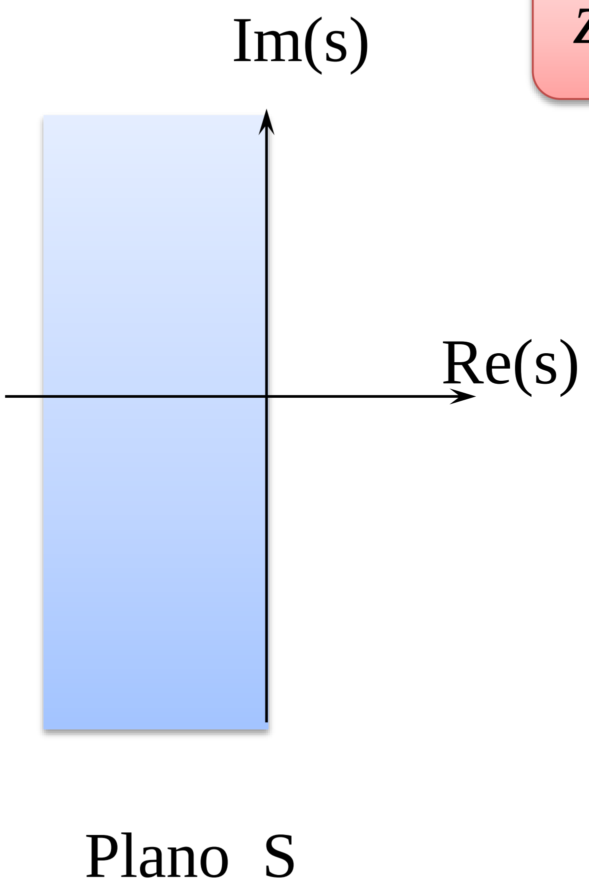
Relación entre TZ y TL...

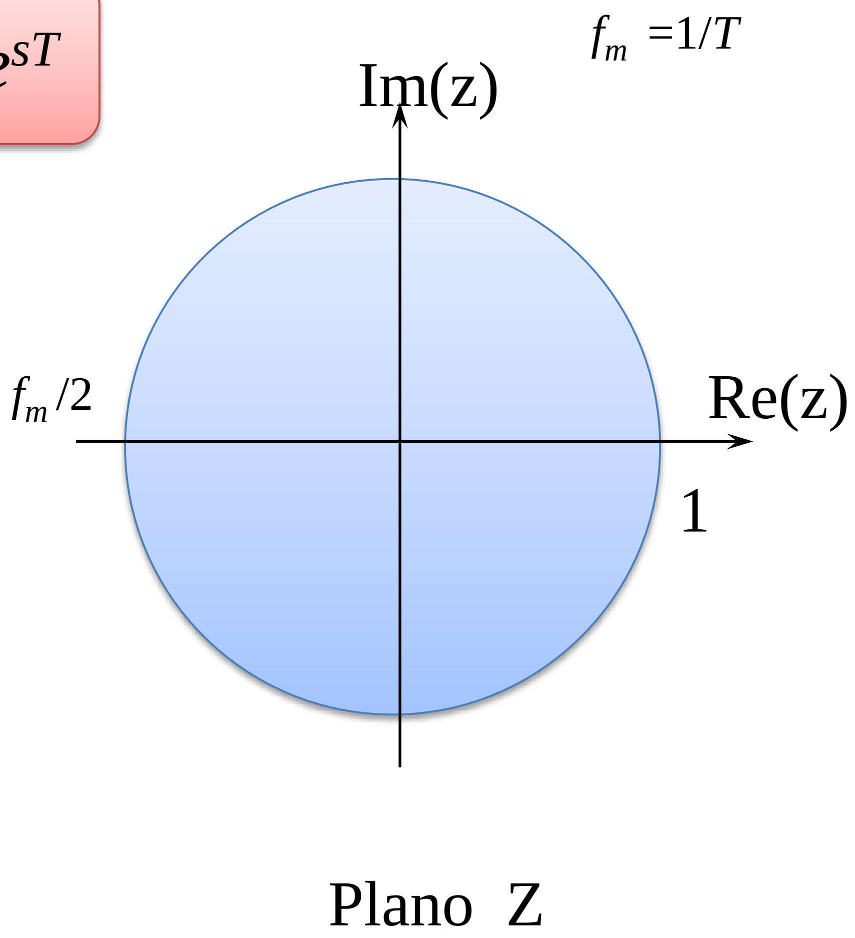
- La TZ, $X(z)$, de una secuencia $x(nT)$ no es otra cosa que la TL de la señal muestreada $x^*(t)$ con e^{sT} sustituida por la variable z.
- Esto define un mapeo entre el plano S y el plano Z denominado mapeo ideal:

$$s = \ln(z/T)$$

Relación entre TZ y TL...

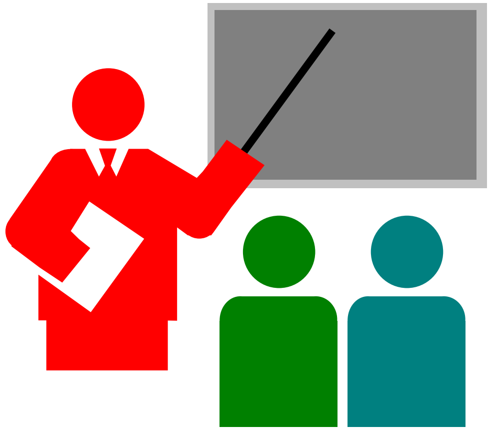
$$z = e^{sT}$$





Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s*-*z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.



Relación con otras transformadas...

TF

TL

Relación con otras transformadas...

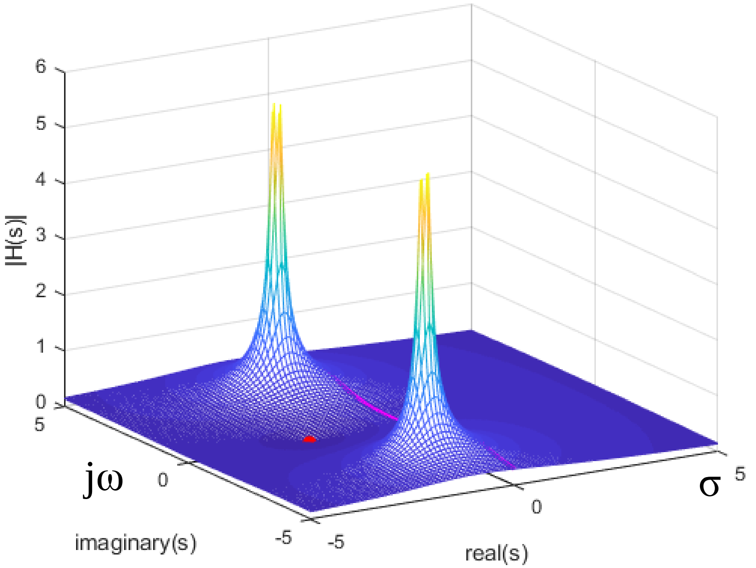
TF

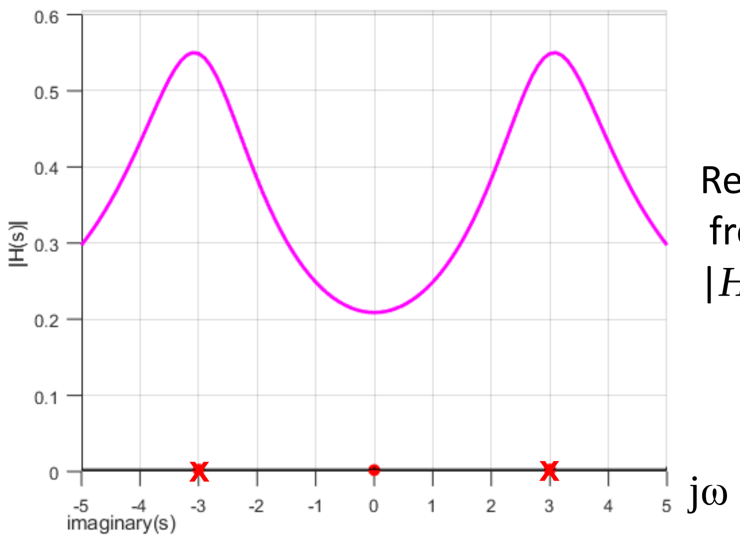
TL

Repaso TL

Transformada de Laplace $\mathcal{L}(s)$
(con $s = \sigma + j\omega$)

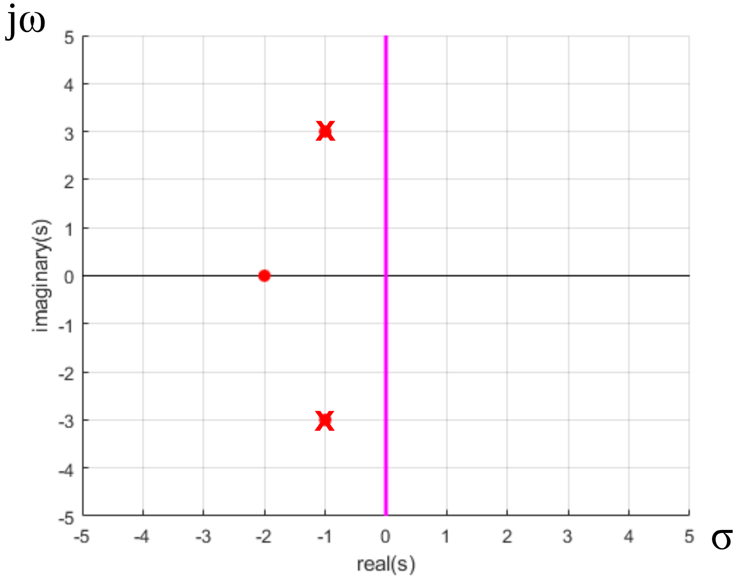
Función de transferencia $|H(s)|$.





Respuesta en frecuencia $|H(s = j\omega)|$.

Análisis de estabilidad.



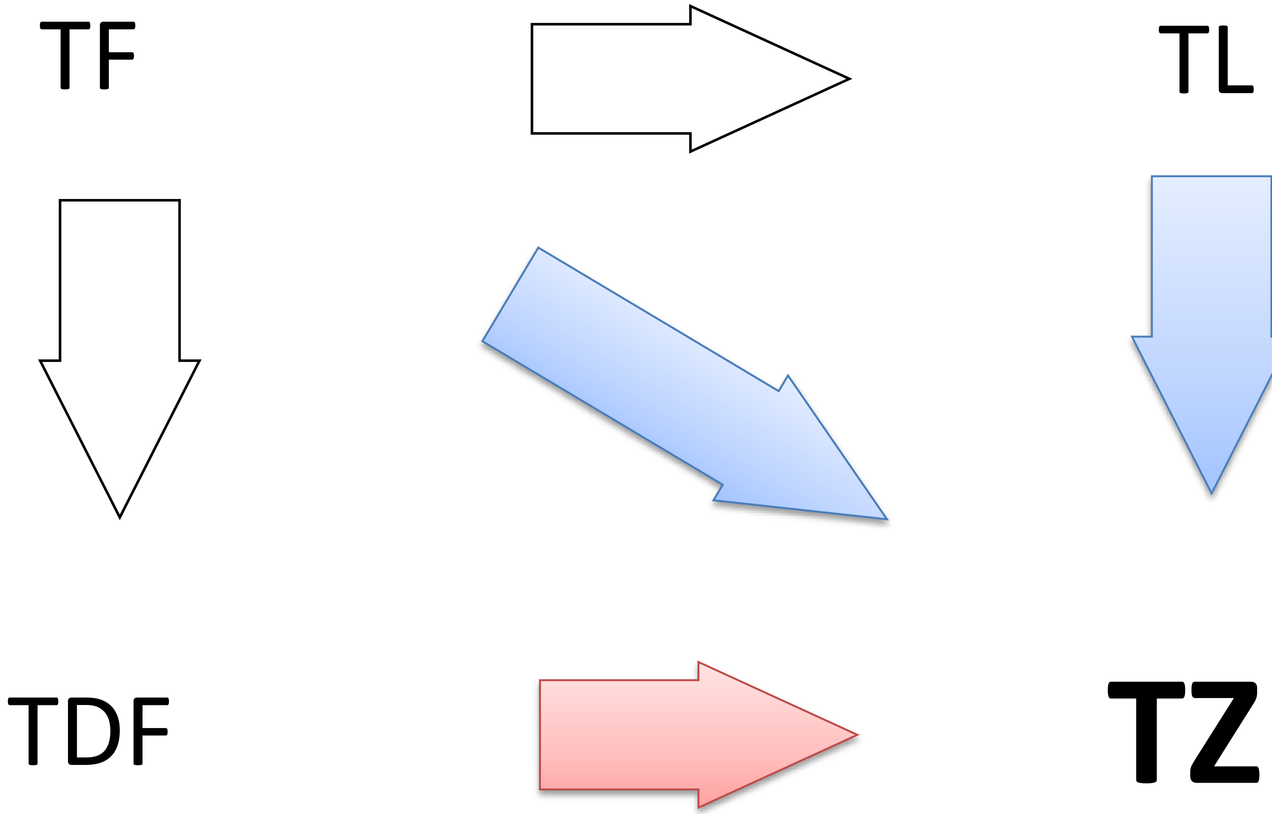
Relación con otras transformadas...

TF

TL

TDF

Relación con otras transformadas...



Relación con la TF...

- La TZ de $x[n]$ es función de z compleja:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$z = \rho e^{j2\pi f}$$

Relación con la TF...

- La TZ de $x[n]$ es función de z compleja:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(\rho e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(\rho e^{j2\pi f}\right)^{-n}$$

Relación con la TF...

- En forma equivalente.

$$X(\rho e^{j2\pi f}) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x[n]\rho^{-n} \right] e^{-j2\pi fn}$$

Relación con la TF...

- En forma equivalente:

$$X(\rho e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x[n]\rho^{-n} \right] e^{-j2\pi fn}$$

$$= TF\left\{ x[n].\rho^{-n} \right\}$$

Relación con la TF...

- En forma equivalente

$$X(\rho e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x[n]\rho^{-n} \right] e^{-j2\pi fn}$$

$$= TF\left\{ x[n].\underbrace{\rho^{-n}}_{\text{Exponencial real}} \right\}$$

¿Qué ocurre para distintos valores de ρ ?

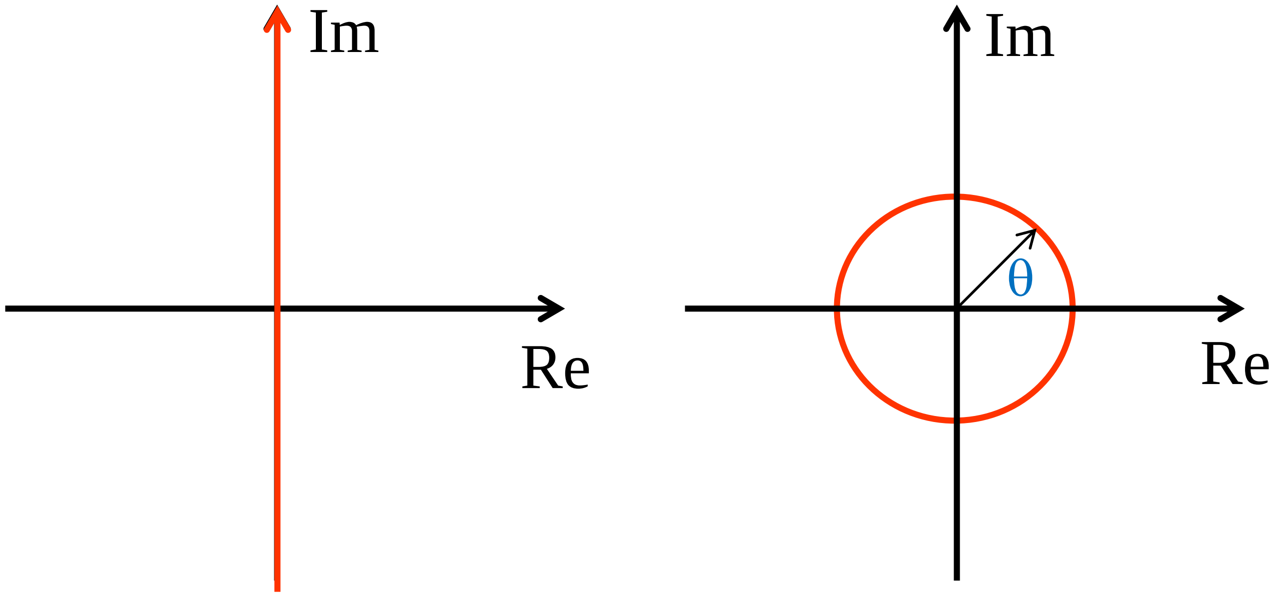
Relación con la TF...

- Como caso particular, cuando ρ =1 o en forma equivalente $|z|=1$:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f}} = TF\left\{x[n]\right\}$$

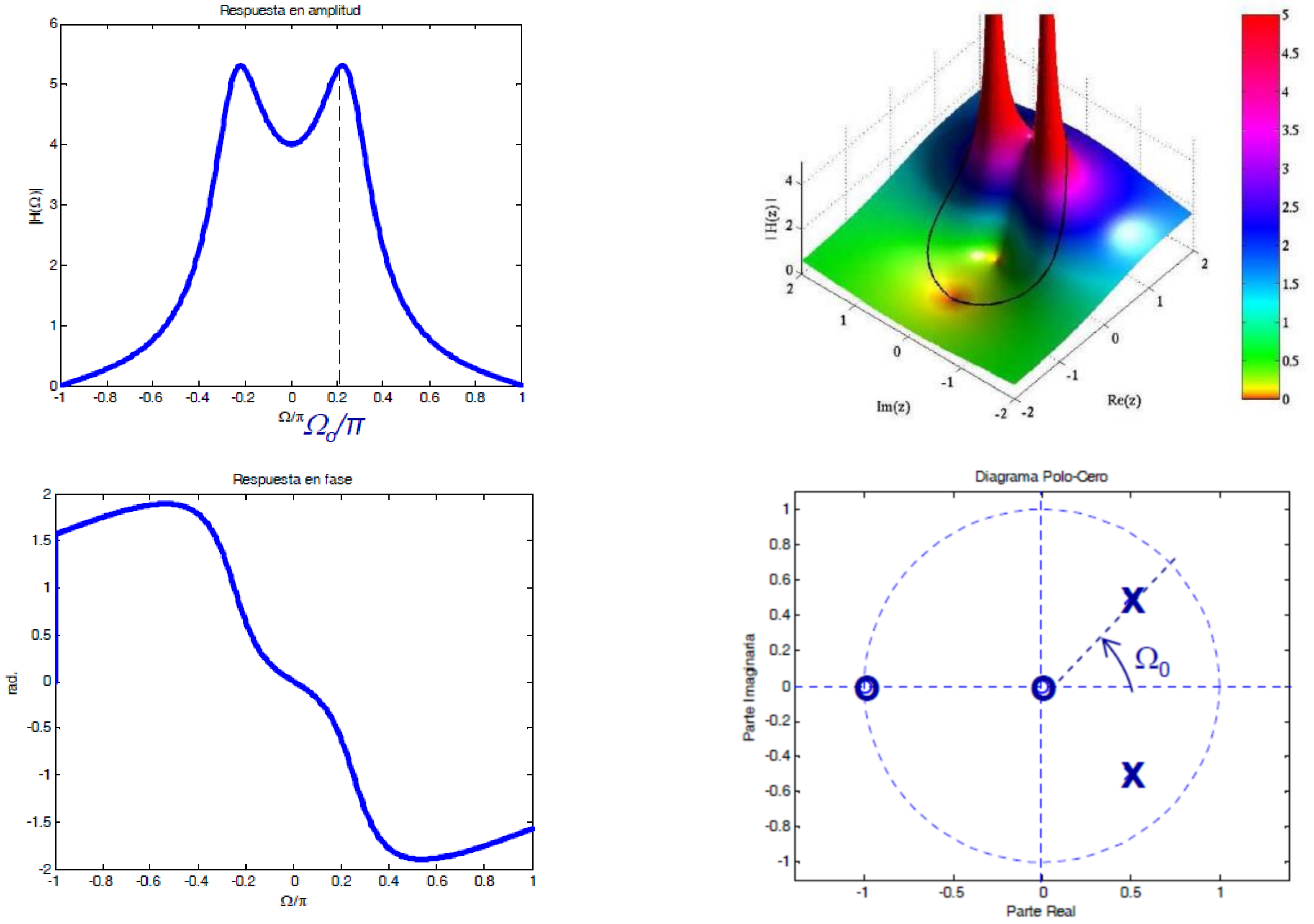
Relación con la TF…

$S = j\omega$ $\qquad$ $z = e^{j\theta}$



Plano S $\qquad$ Plano Z

Relación con la TF...



Resumen de las relaciones entre transformadas

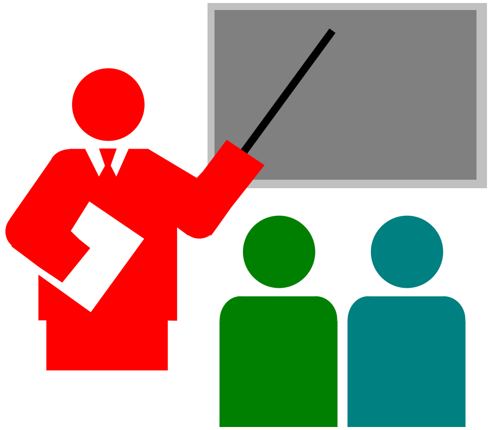
$$
\begin{tikzcd}
\text{Transformada de Laplace de } x(t) \arrow[r, "z = e^{sT}"] \arrow[d, "s = j\omega"] & \text{Transformada Z de } x[n] \arrow[d, "z = e^{j\theta}"'] \\
\text{Transformada de Fourier de } x(t) \arrow[r, "t \approx nT"] & \text{Transformada de Fourier de } x[n] \arrow[d, "\begin{array}{c} -\pi < \theta < \pi \\ \theta = k2\pi / N,\ k = 0..(N-1) \end{array}"', "\theta \approx k2\pi/N"] \\
& \text{TDF de } x[n]
\end{tikzcd}
$$

Convergencia

- La convergencia depende de ρ ya que puede forzar a la secuencia original a convertirse en otra que tenga TF.
- Si para $x[n]$ no existe la TF, puede existir la TF de $\rho^{-n} x[n]$ para determinados valores de ρ y tener TZ.
- Puede decirse también que depende de los valores de z. Esto nos permite hablar de regiones de convergencia.

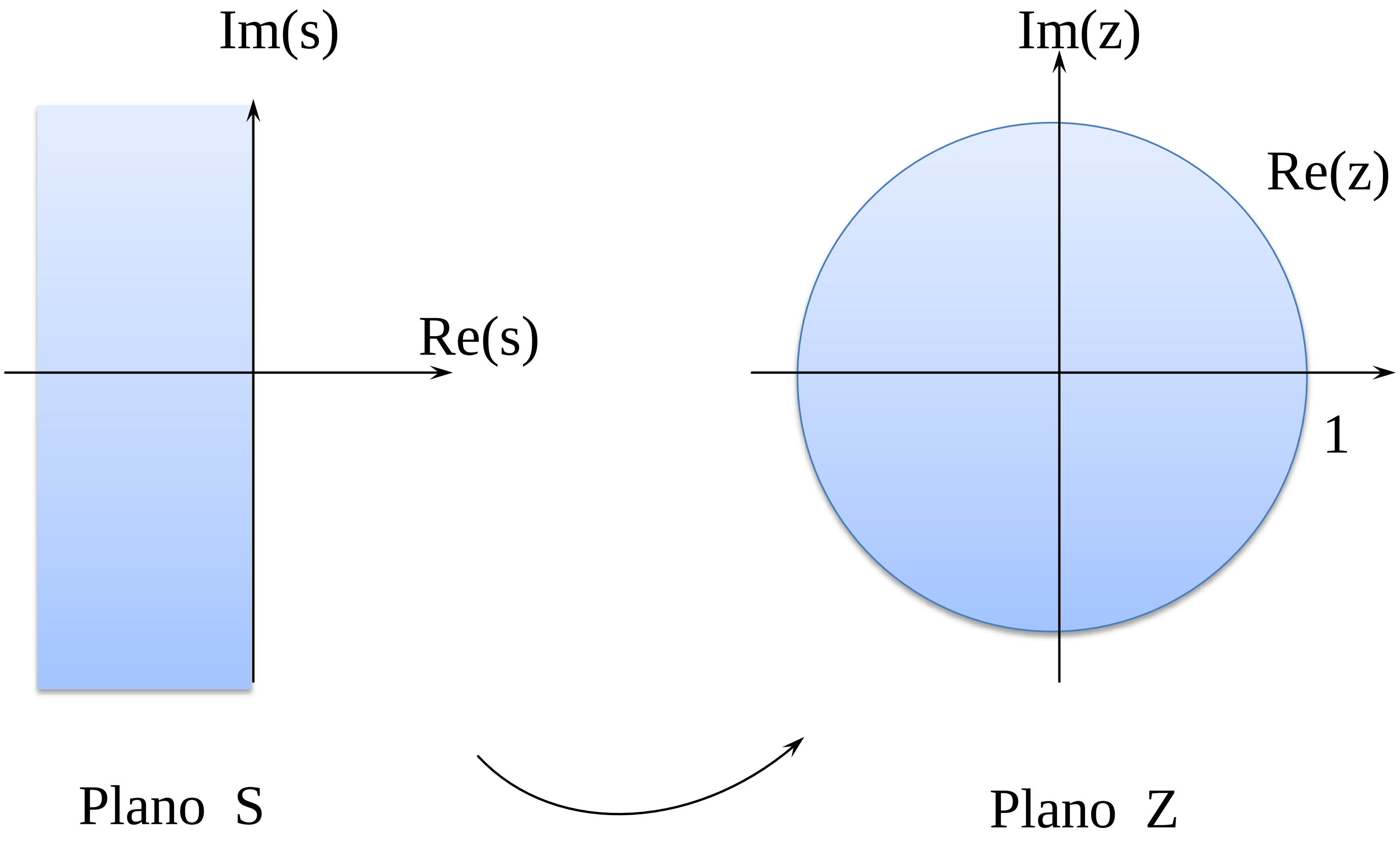
Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s-z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.



Transformaciones Conformes

$S \longrightarrow Z$


Im(s)
Re(s)
Plano S
Im(z)
Re(z)
1
Plano Z

Transformaciones Conformes

- Transformación “ideal”
- Transformación de Euler
- Transformación Bilineal

Transformación de Euler

- La transformación de Euler aproxima la derivada de una función continua *dy/dt* por un cociente incremental:

$$\left[\frac{dy}{dt}\right] = \left[\frac{y[n] - y[n-1]}{T}\right]$$

T: período de muestreo

Transformación de Euler

De modo que:

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s)$$

se transforma en:

$$Z\left[\frac{dy}{dt}\right] \cong Z\left[\frac{y[n]-y[n-1]}{T}\right] = \frac{\left(1-z^{-1}\right)Y[z]}{T}$$

Transformación de Euler

De lo anterior se deduce que el mapeo entre el plano S y el plano Z queda definido por:

$$s = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{T}$$

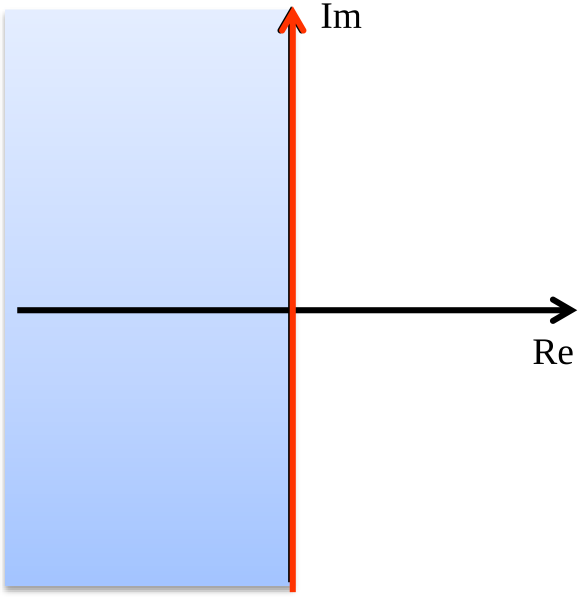
Transformación de Euler

$$s = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{T}$$

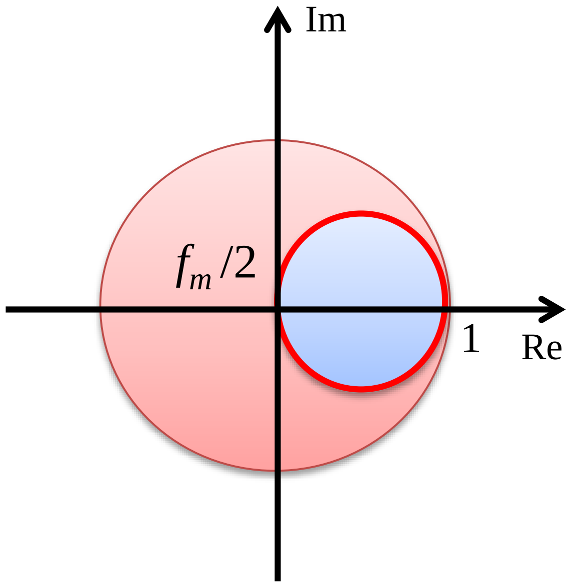
- Esta transformación puede ser utilizada únicamente en el mapeo de sistemas tipo pasa bajo, con frecuencias de corte bajas, ya que no cumple con todas las condiciones de mapeo.

Transformación de Euler

$$s = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{T}$$



Plano S



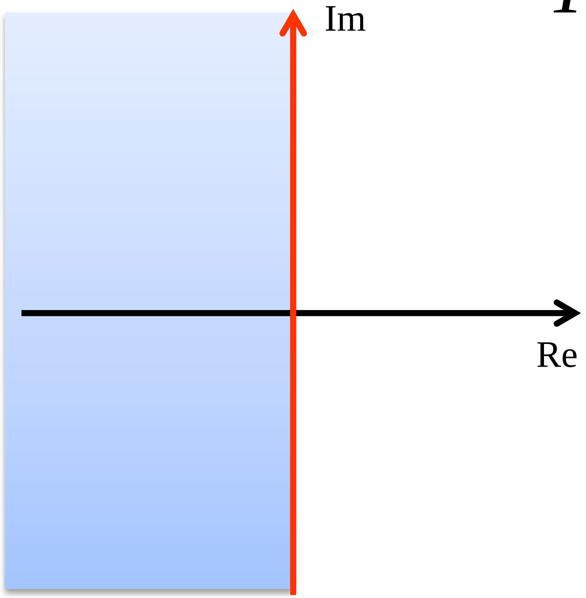
Plano Z

Transformación Bilineal

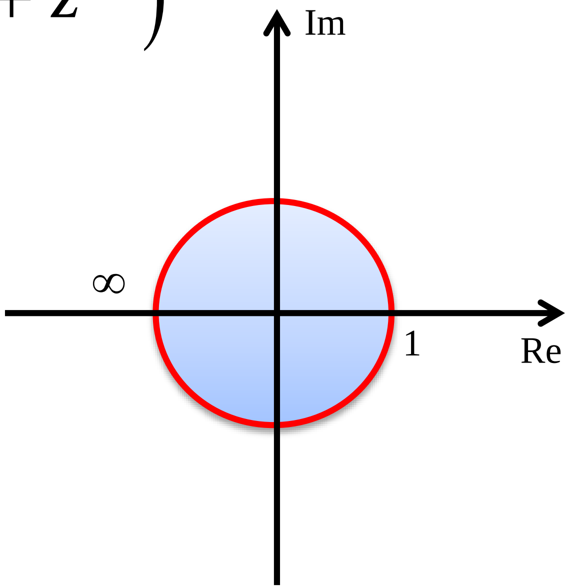
$$s = \frac{2\left(1 - z^{-1}\right)}{T\left(1 + z^{-1}\right)}$$

Transformación Bilineal

$$s = \frac{2}{T}\frac{\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 + z^{-1}\right)}$$

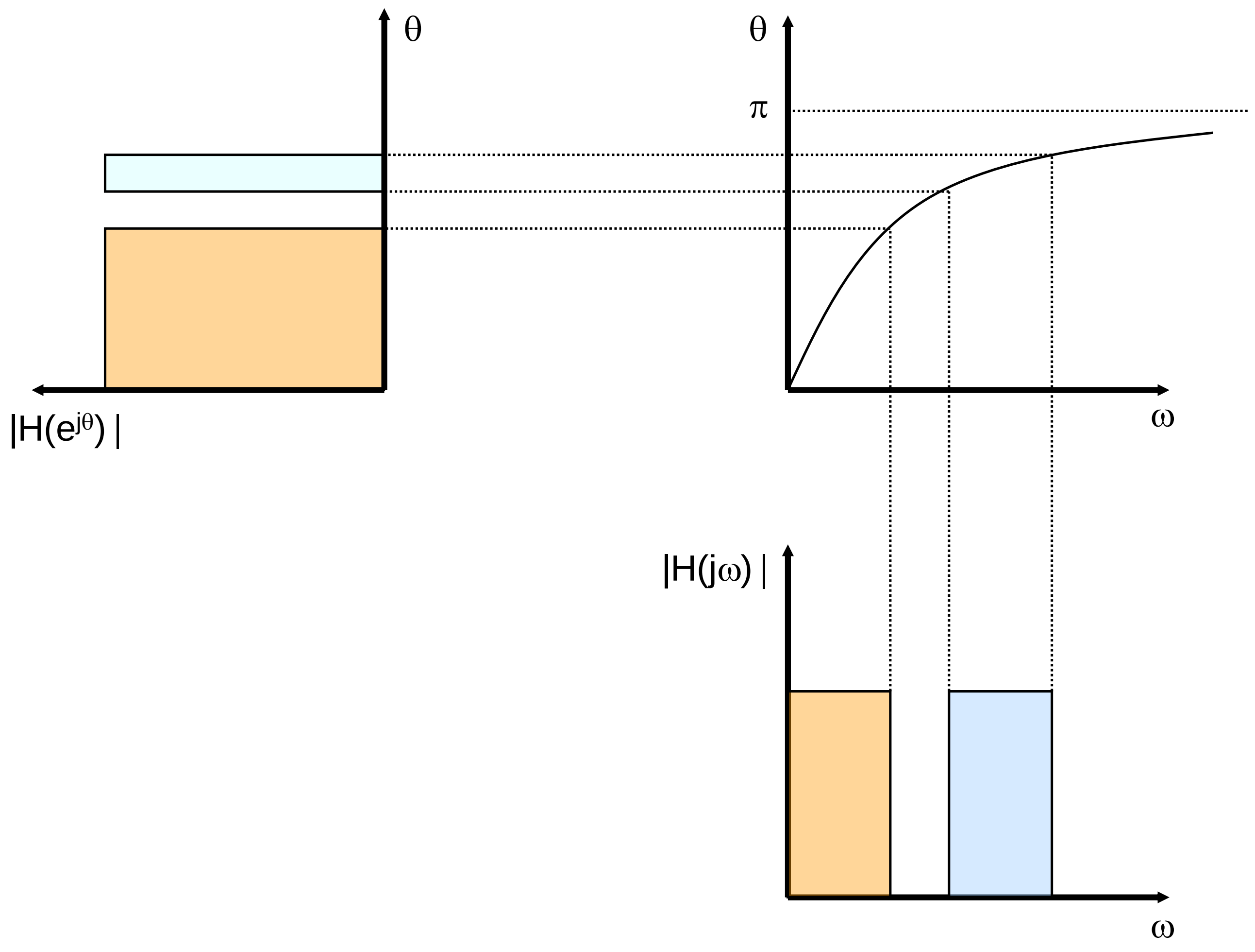


Plano S



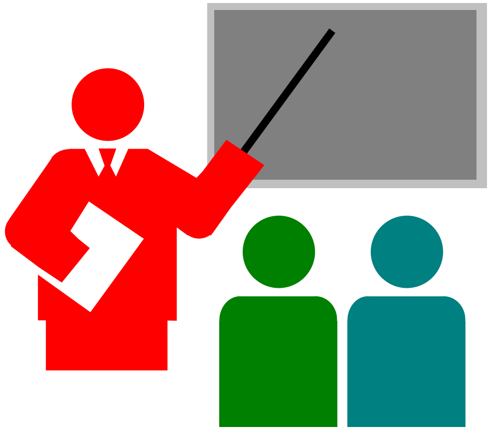
Plano Z

Transformación Bilineal



Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s-z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.



Ecuaciones de Recurrencia

- Cualquier ecuación diferencial ordinaria y de coeficientes constantes :

$$A_p\, y^{(p)}(t) + \ldots + A_1 y'(t) + A_o\, y(t) = B_q\, x^{(q)}(t) + \ldots + B_o\, x(t)$$

donde $y(t)$ es la salida frente a un estímulo $x(t)$, puede expresarse mediante una ecuación de recurrencia de la forma:

$$y[n] = \sum_{i=1}^{p} a_i y[n-i] + \sum_{j=0}^{q} b_j x[n-j]$$

- Partiendo la función de transferencia del sistema, esta se puede expresar en términos de la transformada Z:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{q} b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{q} b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}}$$

$$Y(z) - \sum_{i=1}^{p} a_i Y(z) z^{-i} = \sum_{j=0}^{q} b_j X(z) z^{-j}$$

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{p} a_i Y(z) z^{-i} + \sum_{j=0}^{q} b_j X(z) z^{-j}$$

- Si anti-transformamos la ecuación:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{p} a_i Y(z) z^{-i} + \sum_{j=0}^{q} b_j X(z) z^{-j}$$

- Obtenemos:

$$y[n] = \sum_{i=1}^{p} a_i y[n-i] + \sum_{j=0}^{q} b_j x[n-j]$$

Funciones de Transferencia de Sistemas Discretos

Sistemas Discretos

- Sistemas Autorregresivos(AR).
- Sistemas Moving Average (MA).
- Sistemas ARMA.

Sistemas AR

- Su salida en un instante depende del valor actual de la entrada y de los valores anteriores de la propia salida

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0}{\left(a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_pz^{-p}\right)}$$

Sistemas MA

- Su salida depende solamente del valor actual de la señal de entrada y sus valores anteriores.

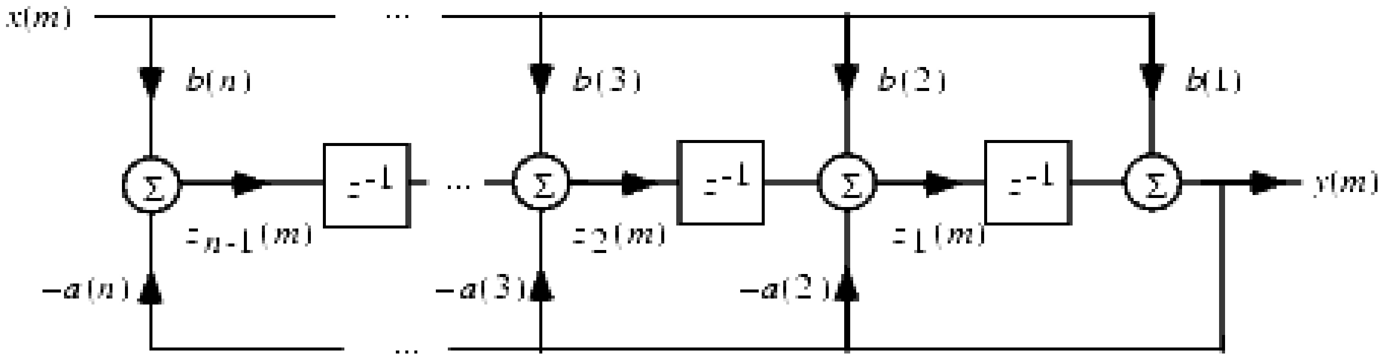
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}$$

Sistemas ARMA

- Son los más generales, donde la salida depende de valores anteriores de la entrada y de la propia salida.

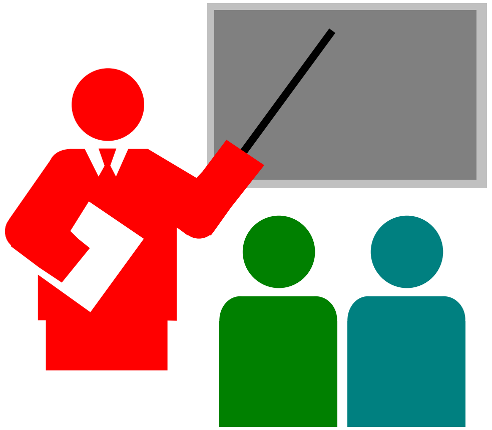
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\left(b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_qz^{-q}\right)}{\left(a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_pz^{-p}\right)}$$

Sistemas ARMA



Temas a tratar

- Introducción y definición de TZ.
- Relación entre TL y TZ.
- Relación entre TF y TZ.
- Mapeos *s*-*z*.
- Sistemas discretos y TZ.
- TZ inversa.



El Problema de la Inversión

Dada una $X(z)$:

¿Cómo hallar la secuencia $x[n]$ asociada?

El Problema de la Inversión

- Fórmula de Inversión
- Desarrollo en serie de potencias
- Uso de tablas

Fórmula de Inversión

- La secuencia $x[n]$ se obtiene resolviendo una integral de contorno por aplicación del teorema de los residuos.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

- Frecuentemente esta metodología es muy compleja y por lo tanto poco utilizada.

Desarrollo en serie e inspección

- Se desarrolla

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}=$$

$$=x[0]+x[T]z^{-1}+x[2T]z^{-2}+\ldots$$

- y se obtienen los valores de $x[n]$ por inspección

Tablas

- En este método se intenta expresar la función $X(z)$ como una suma:

$$X(z) = X_1(z) + \ldots + X_k(z)$$

donde $X_1(z), \ldots, X_k(z)$ son funciones con transformadas inversas conocidas:

$$x_1[n], \ldots , x_k[n]$$

- Si $X(z)$ puede expresarse así, su transformada inversa $x[n]$ será la suma:

$$X[n] = x_1[n] + \ldots + x_k[n]$$

Bibliografía recomendada

- Oppenheim, A. V. and R. W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing, Prentice-Hall, 1989.
- Kwakernaak: Cap. 8
- Sinha: Cap. 6