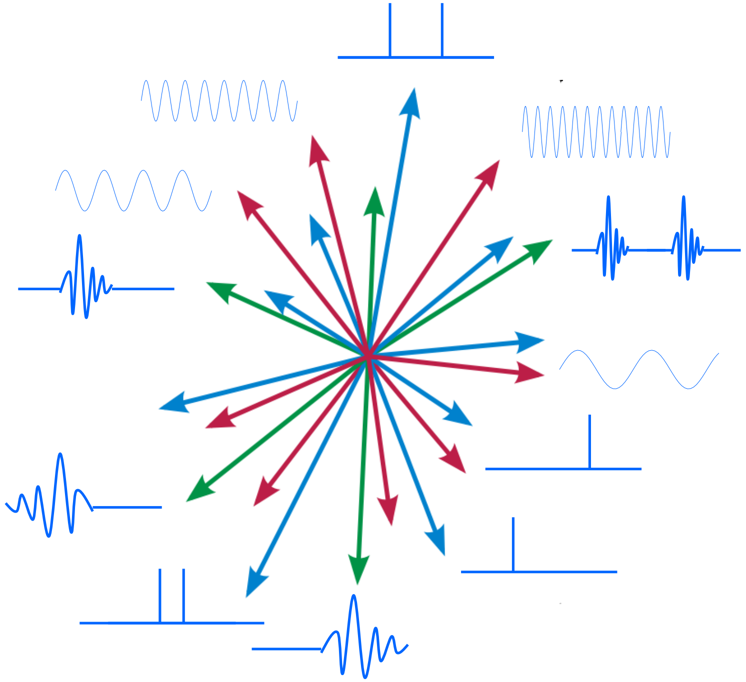
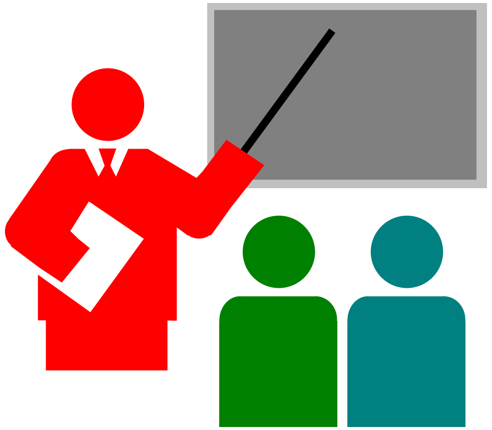
Espacios de Señales



Temas a tratar

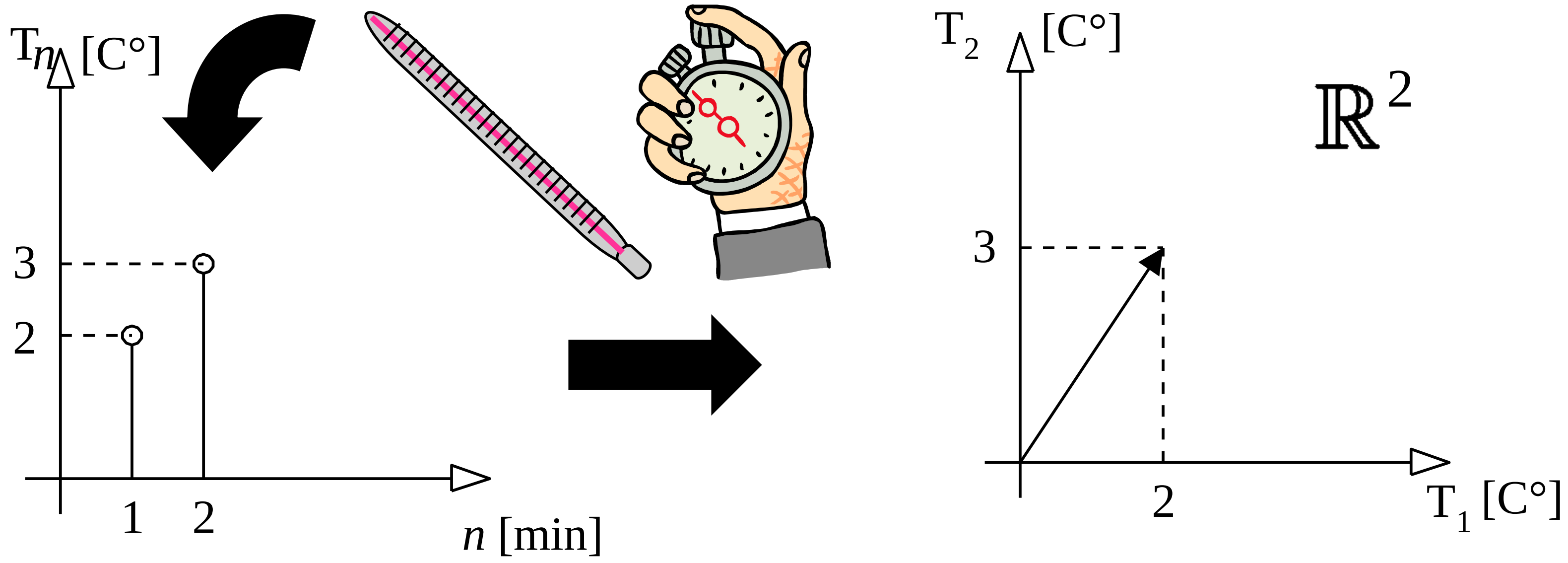
- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Introducción

- En general asociamos a las señales con “elementos aislados”.
- Ahora vamos a incorporar a las señales en “marcos estructurados” como los espacios vectoriales.
- Considerando a las señales como vectores de un espacio *n*-dimensional, podemos:
  - aprovechar las propiedades de la estructura algebraica de los espacios vectoriales.
  - interpretar el procesamiento de las señales desde una perspectiva geométrica.
  - con un abordaje conceptual sencillo e intuitivo…

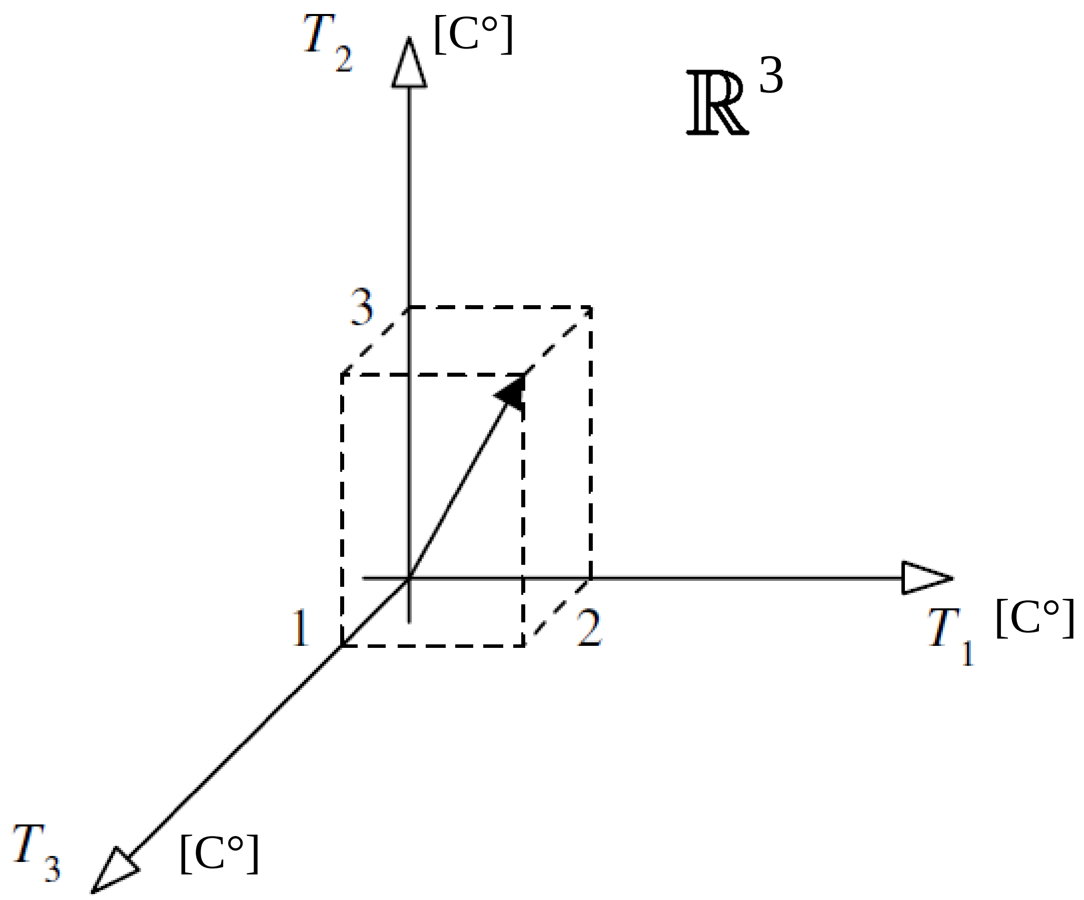
Experimento conceptual



- Medimos la temperatura ambiente a intervalos de 1 minuto...
- Representamos en una gráfica donde el eje de ordenadas indica la magnitud de la temperatura y el de abscisas el tiempo.
- Ahora podemos cambiar la forma de representar esta señal…

Señales y vectores...

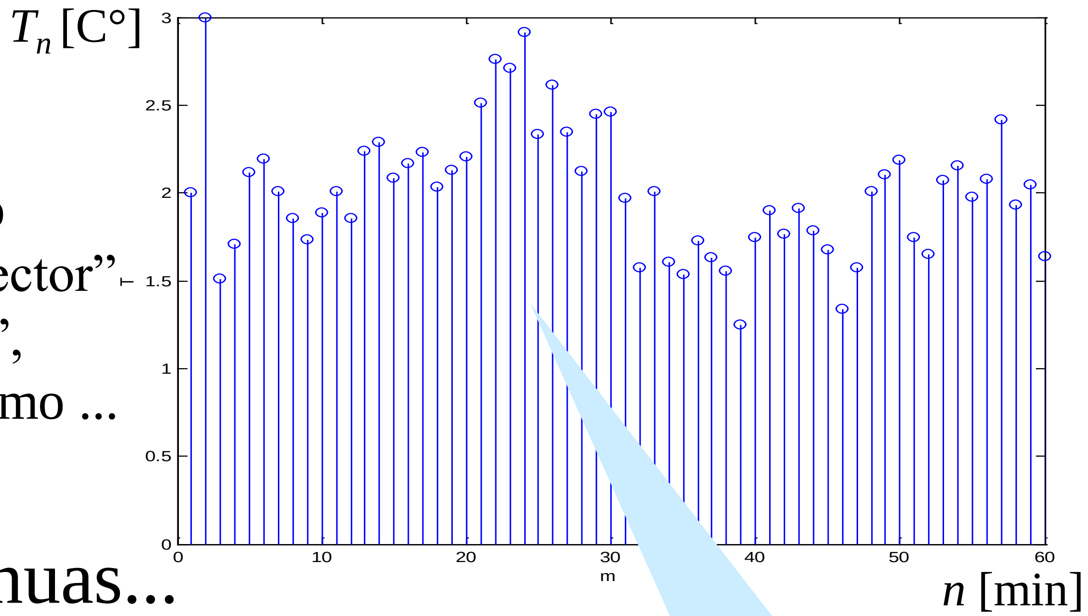
- Si volvemos a medir luego de 1 minuto y vemos que la temperatura es 1 º C …



Señales y vectores...

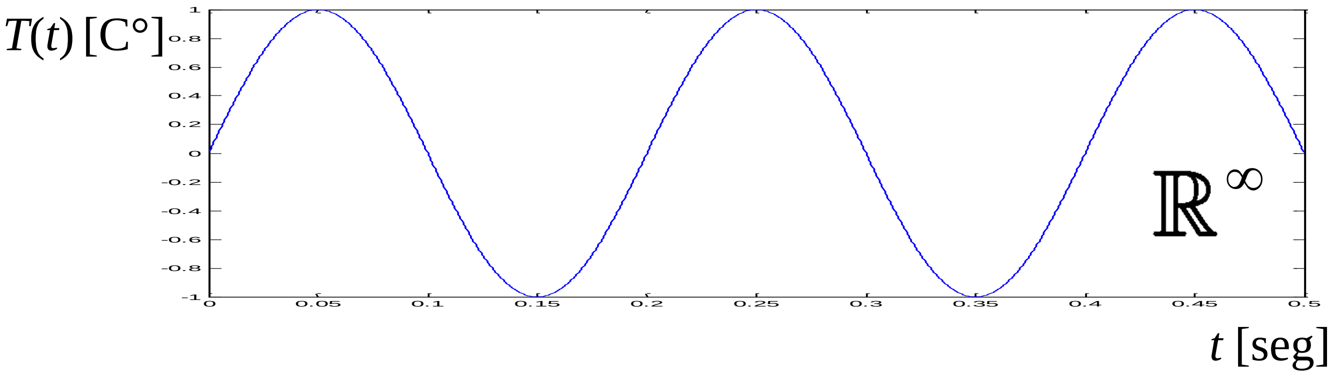
En 1 hora ... $\mathbb{R}^{60}$

Ya no puedo representarlo gráficamente como un “vector” en el espacio “tradicional”, pero el concepto es el mismo ...



Es un solo elemento, vector o punto

Para señales continuas...



Señales y vectores...

- Definimos una señal **x** discreta en R^N como:

$$\mathbf{x} = [x_n]\,; \quad n \in \mathbb{N}; x_n \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

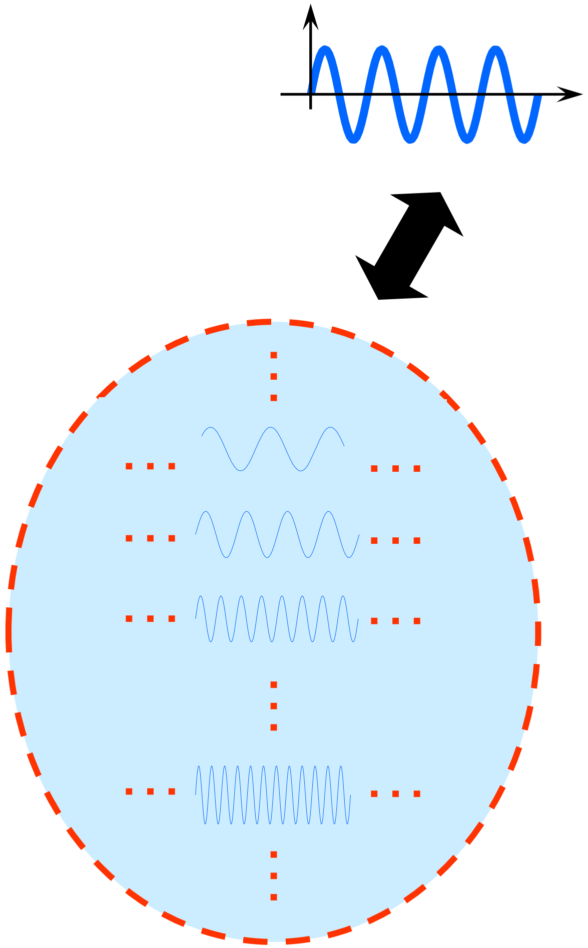
- Definimos una señal **x** continua en R^∞ como:

$$\mathbf{x} = [x(t)]\,; \quad t \in \mathbb{R}; x(t) \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$$

Ahora con varios elementos...

- No nos interesa un elemento aislado…
- Sino c/u en “relación” al resto:

  - Conjuntos de señales.
  - Espacios de señales.
  - Espacios lineales o vectoriales.
  - Espacios normados.

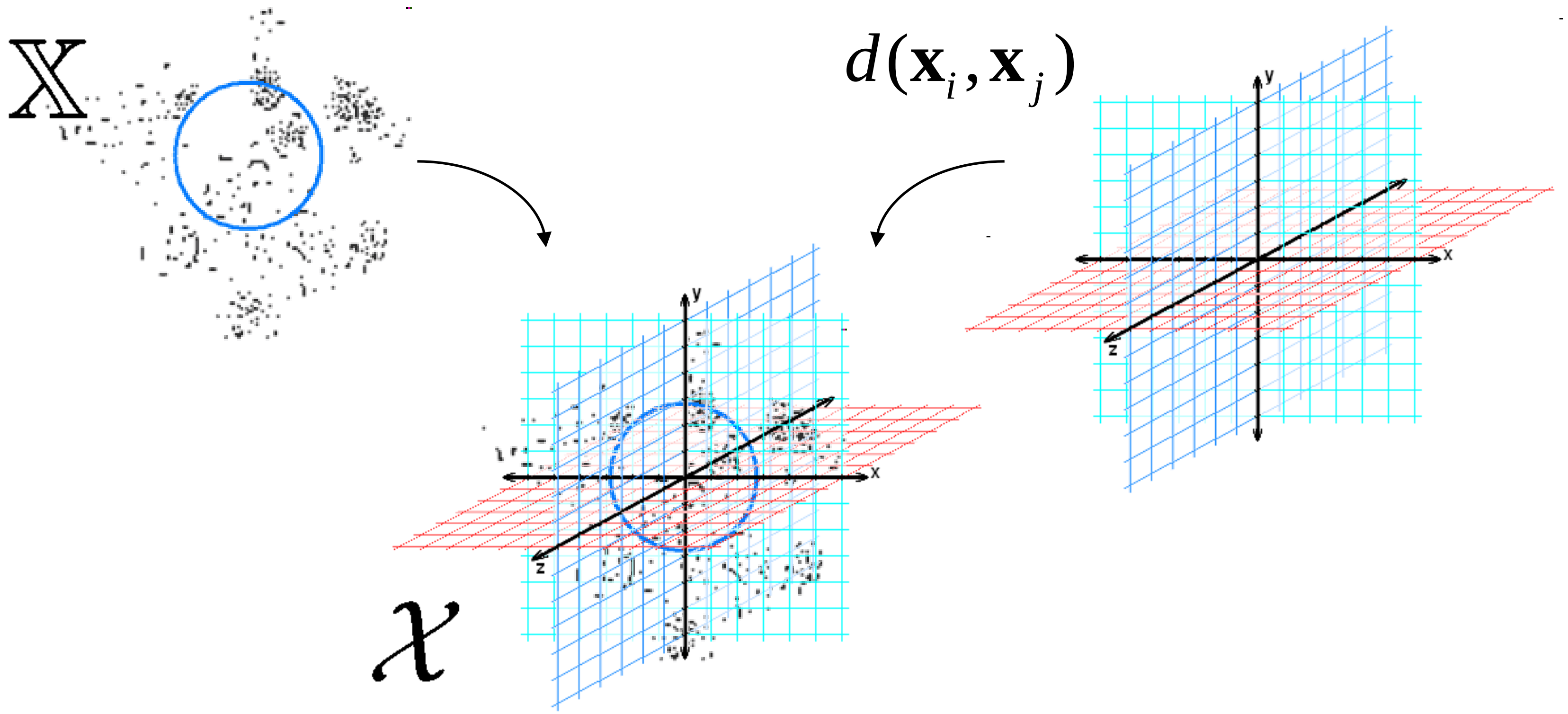


Espacio

Un conjunto de “puntos”

+

un conjunto de relaciones que lo estructuran.



Espacios

Relaciones geométricas:
distancias, tamaños, formas,
alineaciones, ángulos, conexidad.

Otras relaciones definen
otros tipos de estructuras.

El caso más interesante es cuando
distintas estructuras interactúan
en un mismo espacio.

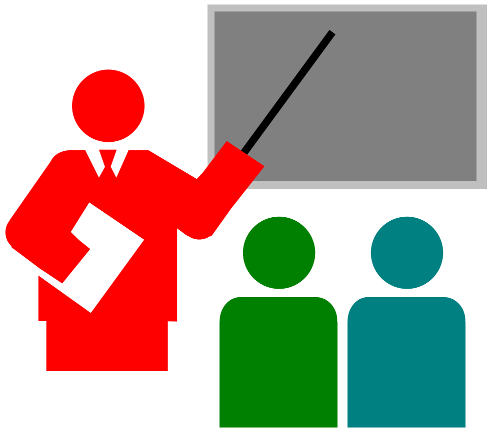
Tipos de espacios

Métricos, topológicos, vectoriales,
afines, euclídeos, de medida,
de probabilidad, de distribuciones, ...

De Hilbert, de Banach, de Krein,
de Orlicz, de Sobolev,
de Schwartz, de Lebesgue,
...

Temas a tratar

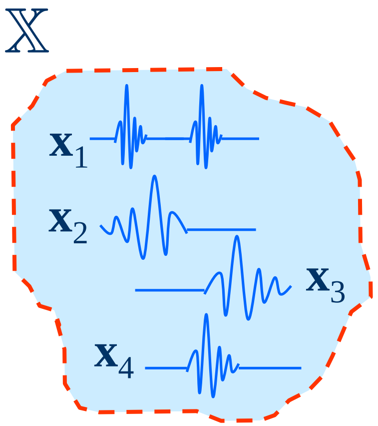
- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Conjuntos de Señales

El matemático alemán George Cantor introdujo la Teoría de Conjuntos en siglo XIX.

Una "señal" es un "punto" o elemento de un conjunto



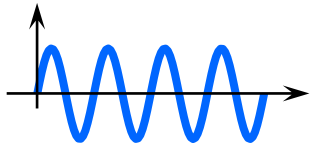
Para ello debo primero definir un conjunto:

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, p\} \qquad p \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

O el conjunto de las *x*, tal que *p* sea cierto, o *p* es cierto, implica que *x* pertenece a $\mathbb{X}$.

Ejemplo:

Conjunto de las **señales sinusoidales: (1)**

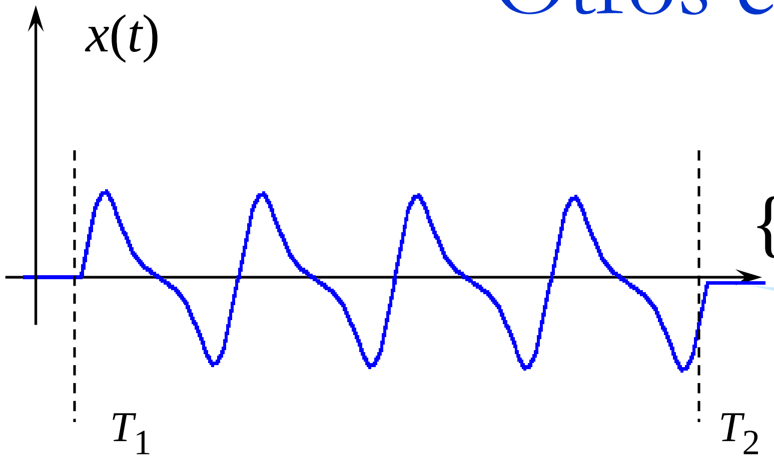


$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, x(t) = \mathrm{Re}[\alpha \exp(\beta + j\omega t)]\}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad -\infty \le t \le \infty \qquad \alpha, \beta, f \in \mathbb{R}$$

Otra forma es como solución de la ecuación diferencial: $\mathbb{X} = \{\mathbf{x};\, \frac{dx}{dt} + x = 0\}$

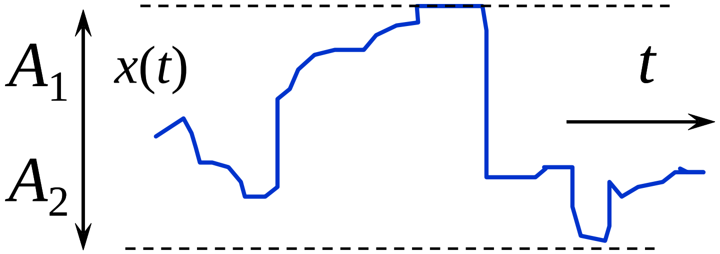
Otros ejemplos...



$$\{\mathbf{x};\, x(t) = 0,\ T_1 > t\ \ v\ t > T_2\}$$

Señales limitadas temporalmente **(2)**

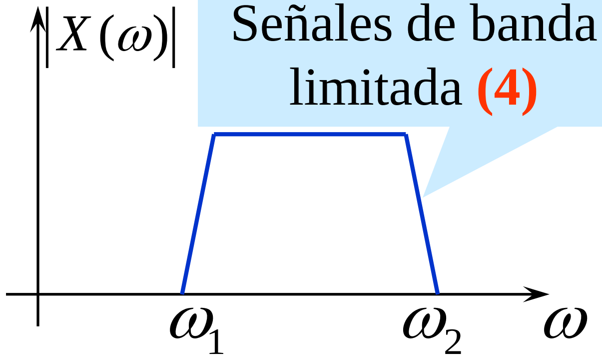
$$\{\mathbf{x};\, x(t) \leq A_1\, v\ x(t) \geq A_2\ \}$$



Señales limitadas en amplitud **(3)**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathbb{X} = \left\{ \mathbf{x};\, \left| X(\omega) \right| = 0, \omega \leq \omega_1, \omega \geq \omega_2 \right\}$$



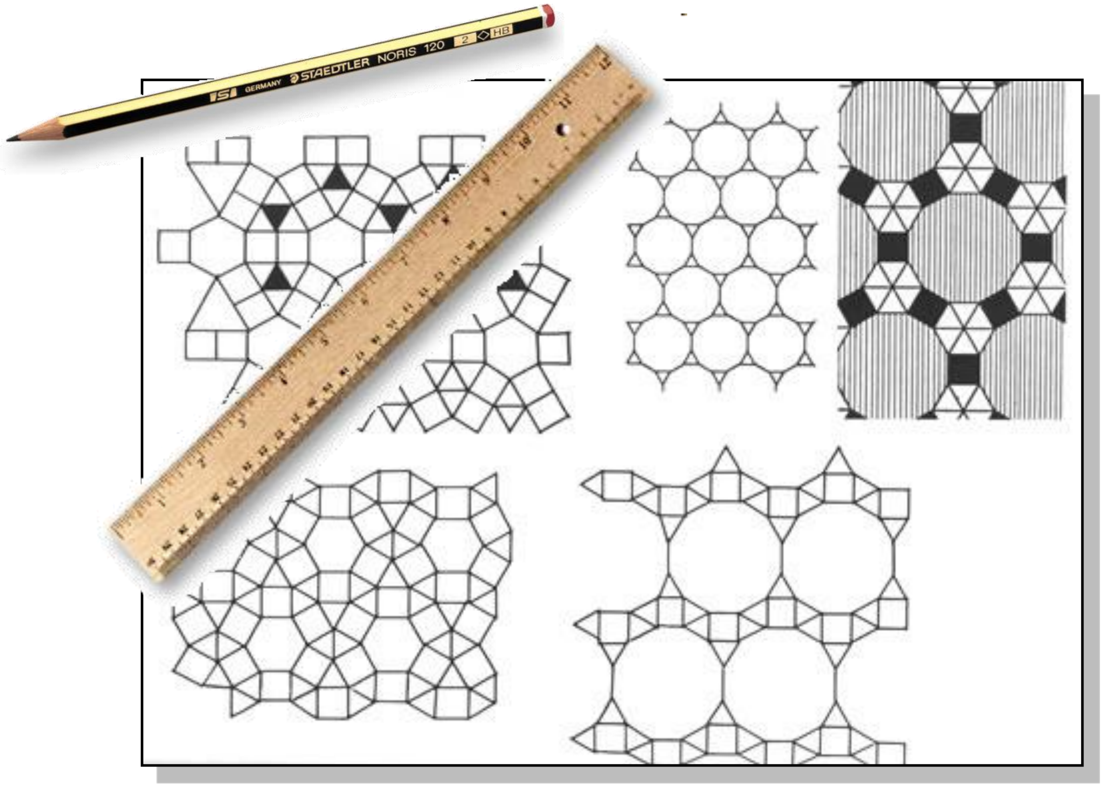
Señales de banda limitada **(4)**

Conjunto, estructura y espacio ...

- Un espacio $\mathcal{X}$ es un conjunto $\mathbb{X}$ de elementos $\mathbf{x}$ que satisfacen una condición de pertenencia p, pero que cumplen además con otra/s propiedad/es.

- En particular, se debe dotar al conjunto de (al menos una):
  - **Estructura geométrica** (espacio de métrico).
  - **Estructura algebraica** (espacio vectorial).
  - …

Estructura Geométrica



Espacio de señales

- Si al conjunto de señales $\mathbb{X}$ definido anteriormente le agregamos una métrica d entonces se convierte en un espacio de señales $\mathcal{X}$.
- Los espacios de señales son espacios métricos cuyos elementos son señales.

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Espacio de señales

Conjunto de señales

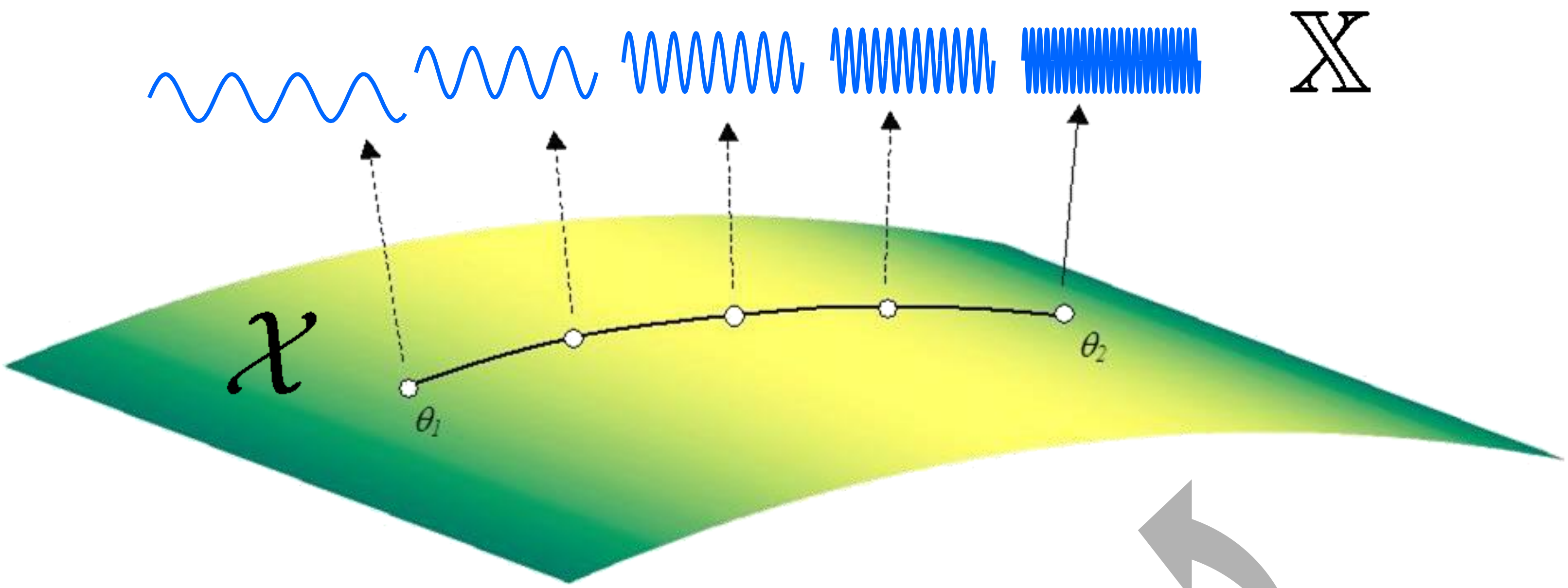
+

Estructura geométrica

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{X}; d\}$$

Distancia / Norma

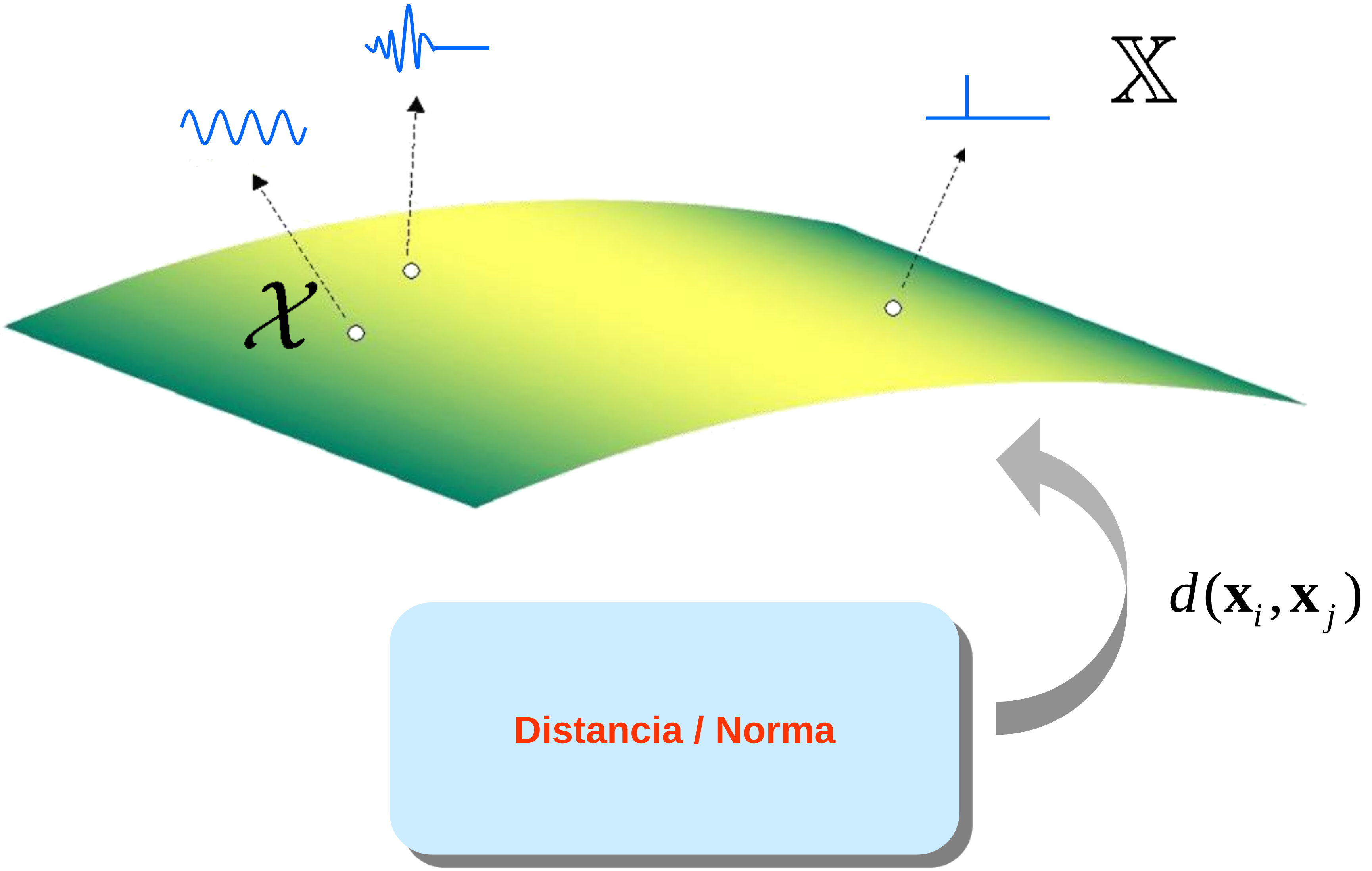
Espacio de señales



$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$

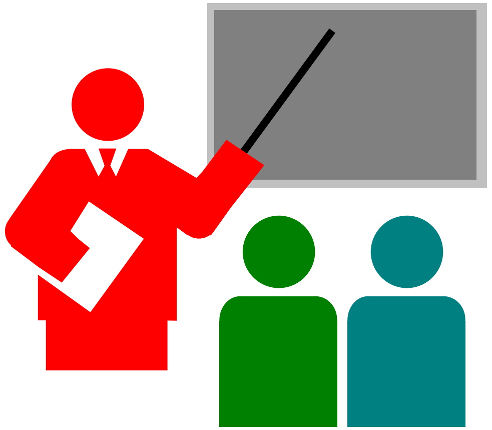
Distancia / Norma

Espacio de señales



Temas a tratar

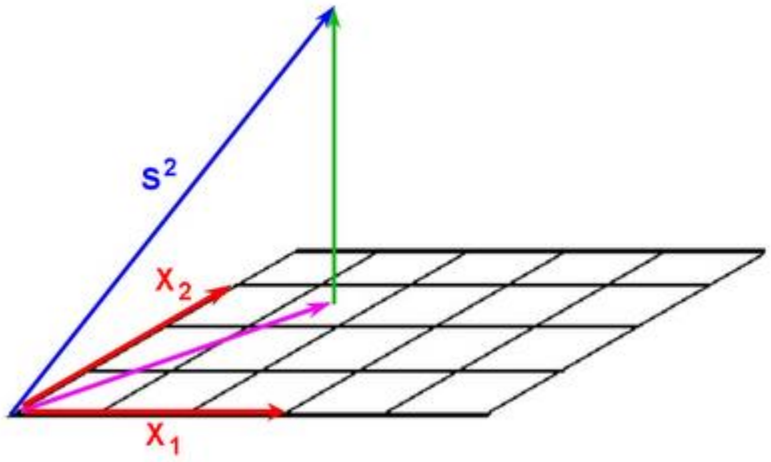
- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Norma *vs* Distancia

- **Norma:** depende de un punto del espacio.

- **Distancia:** función de dos puntos del espacio.



Norma

Analogías entre Señales y Vectores

Norma

- Nos proporciona información acerca del "tamaño" de una señal o vector *x*:
  - Es un número real no negativo:

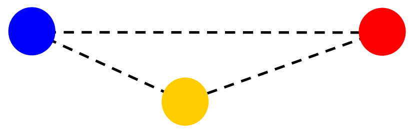
$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

  - Es homogénea con respecto a la escala:

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$$

  - Satisface la desigualdad triangular:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,$$



Hay diferentes normas pero la más empleada es la denominada norma-*p*.

Norma - p

- Secuencias temporales:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

- Señales continuas:

$$1 \leq p < \infty$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

¿Qué pasa cuando *p* es infinito?

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

¿Qué pasa para *p* entre 0 y 1?

- La definición es todavía de interés para $0 < p < 1$, pero la función resultante no define una norma* (porque viola la desigualdad del triangulo ►DEMOSTRAR).

* Salvo en $\mathbf{R}^1$, donde coincide con la norma Euclidea, y en $\mathbf{R}^0$, donde es trivial.

¿ Y cuando p es = 0 ?

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p\to 0} \|\mathbf{x}\|_p^p$$

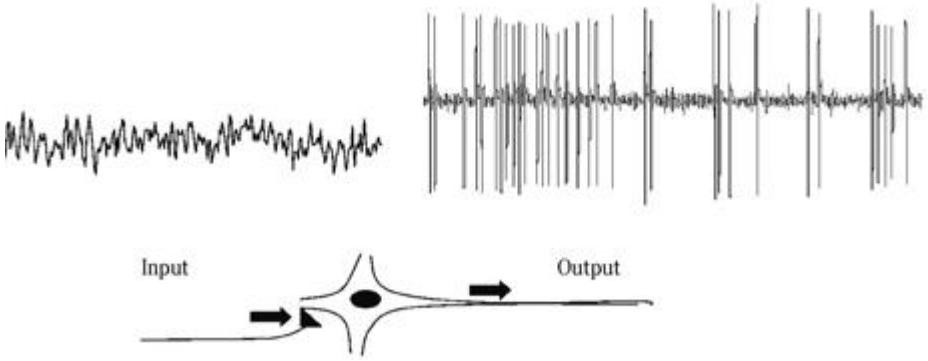
$$\|\mathbf{x}\|_0 = \#\{n : x_n \neq 0\}$$

"Norma-0" >> Medida de "dispersión"

Señal o representación “rala”

- Ralo: Adjetivo que se aplica a los componentes de algo que están separados y poco densos o espesos.





- Viene del latin “rarus” que no significaba “extraño o extravagante” sino “espaciado, disperso” e “infrecuente, escaso, difícil de encontrar” (castellano, año 1250).

http://etimologias.dechile.net/?ralo

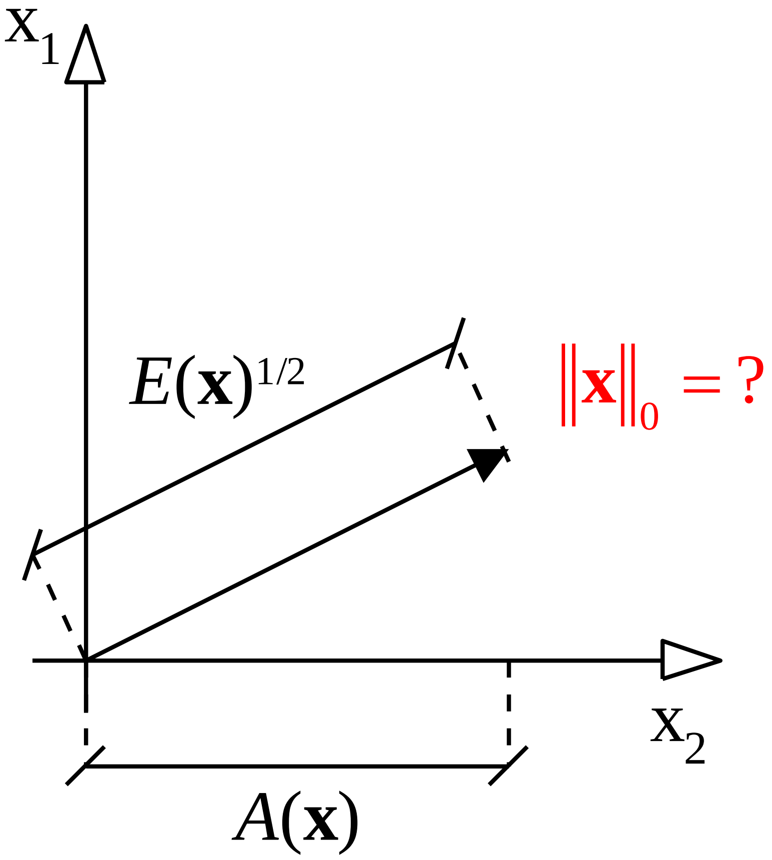
Otros nombres...

$\|\mathbf{x}\|_\infty$ Se denomina amplitud de la señal $\mathbf{x}$

$\|\mathbf{x}\|_2^2$ Se conoce como energía de la señal $\mathbf{x}$

$\|\mathbf{x}\|_1$ Suele llamarse acción de la señal $\mathbf{x}$

Ejemplo: amplitud y energía

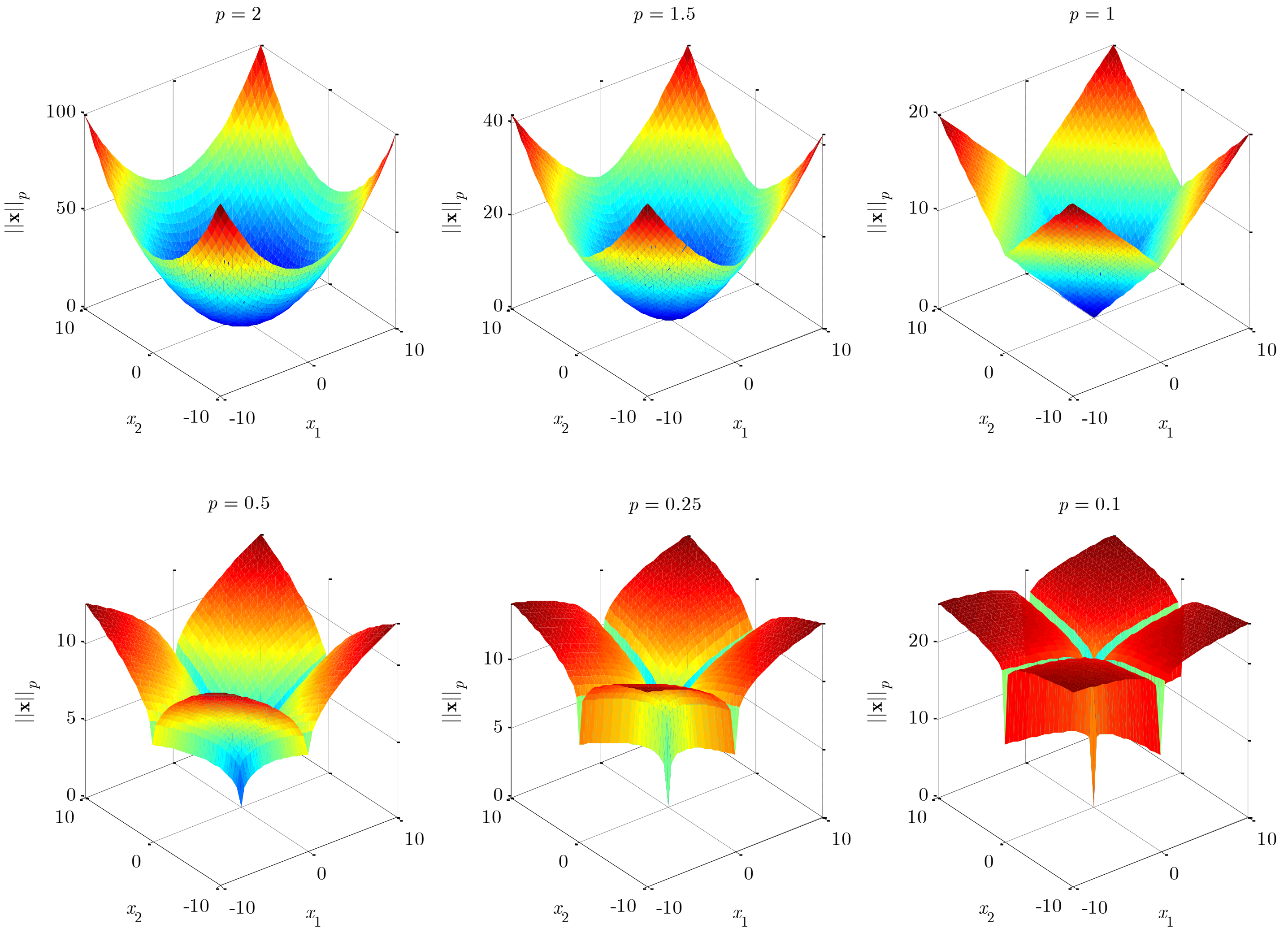


¿La norma-p es la única?

- Existen muchas normas, pero esta es la más utilizada porque permite diferentes comportamientos variando p.

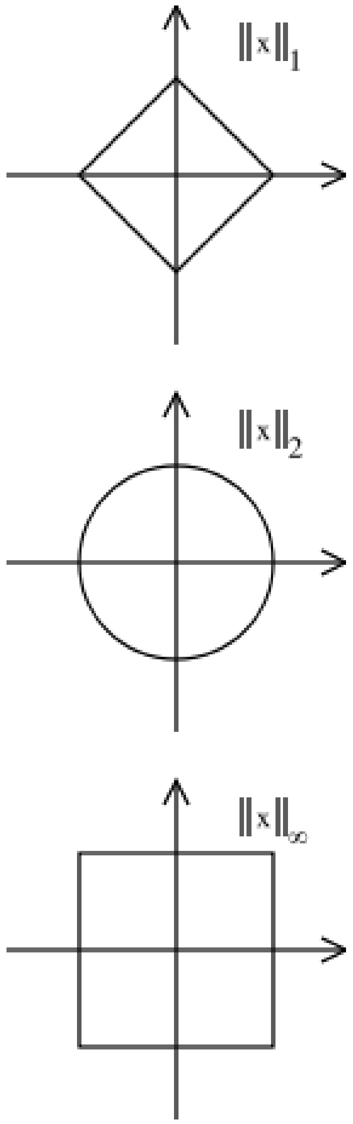
¿Qué ocurre cuando varío p?

Superficie de $||\mathbf{x}||_p$ para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$



¿Qué ocurre cuando varío *p*?

El “círculo unitario” en diferentes normas $\|\mathbf{x}\|_p$ para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$



¿La norma-*p* es la única?

- Otros ejemplos:
  - Norma del Volumen Mínimo (similar a $||\mathbf{x}||_0$)
  - Norma de Cauchy
  - Norma Varimax
  - Otras dependiendo de la aplicación...

Otras medidas útiles:

Potencia media de una señal

$$P_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} \left| x_n \right|^2$$

$$P_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| x(t) \right|^2 dt$$

Otras medidas útiles:

Potencia media TOTAL de una señal

$$P_{\mathbf{x}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} \left| x_n \right|^2$$

$$P_{\mathbf{x}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| x(t) \right|^2 dt$$

Otras medidas útiles:

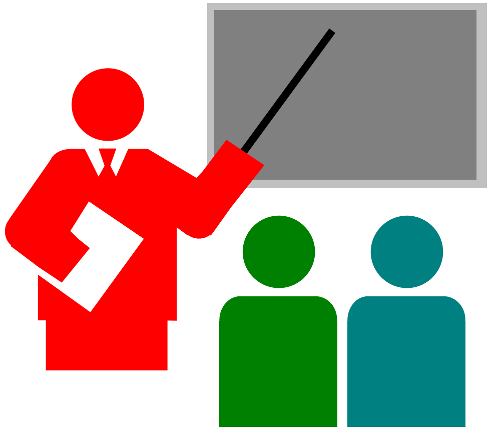
Valor cuadrático medio (RMS):

$$\sqrt{P_{\mathbf{x}}}$$

Otras: Valor medio …

Temas a tratar

- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Distancia

- La distancia es un concepto muy importante asociado a un espacio.
- Nos permite dar sentido geométrico al espacio a través de una "métrica".

- **Significados:** "error" o "diferencia", "disimilitud" o "grado de aproximación" entre dos señales.


Distancia *vs* Norma

- Una métrica puede derivarse a partir de una norma:

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

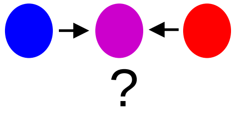
Pueden existir métricas que no deriven de normas

- La norma se refiere a un solo elemento, mientras que la distancia a dos (norma $\equiv$ distancia al origen).

Distancia: Propiedades

1) Es una función de dos puntos *x*, *y* con valor real positivo:

$$d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

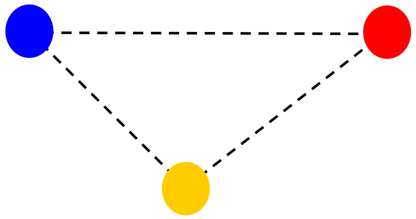


2) Es simétrica:

$$d(x,y) = d(y,x)$$

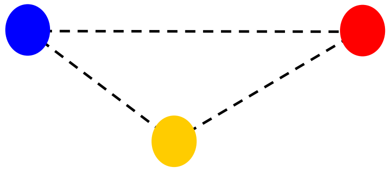
3) Cumple con la desigualdad del triángulo:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

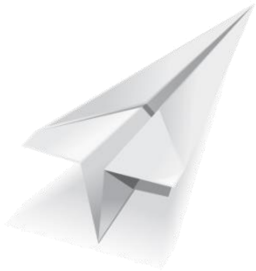


Desigualdad triangular: sentido común …

"Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos"



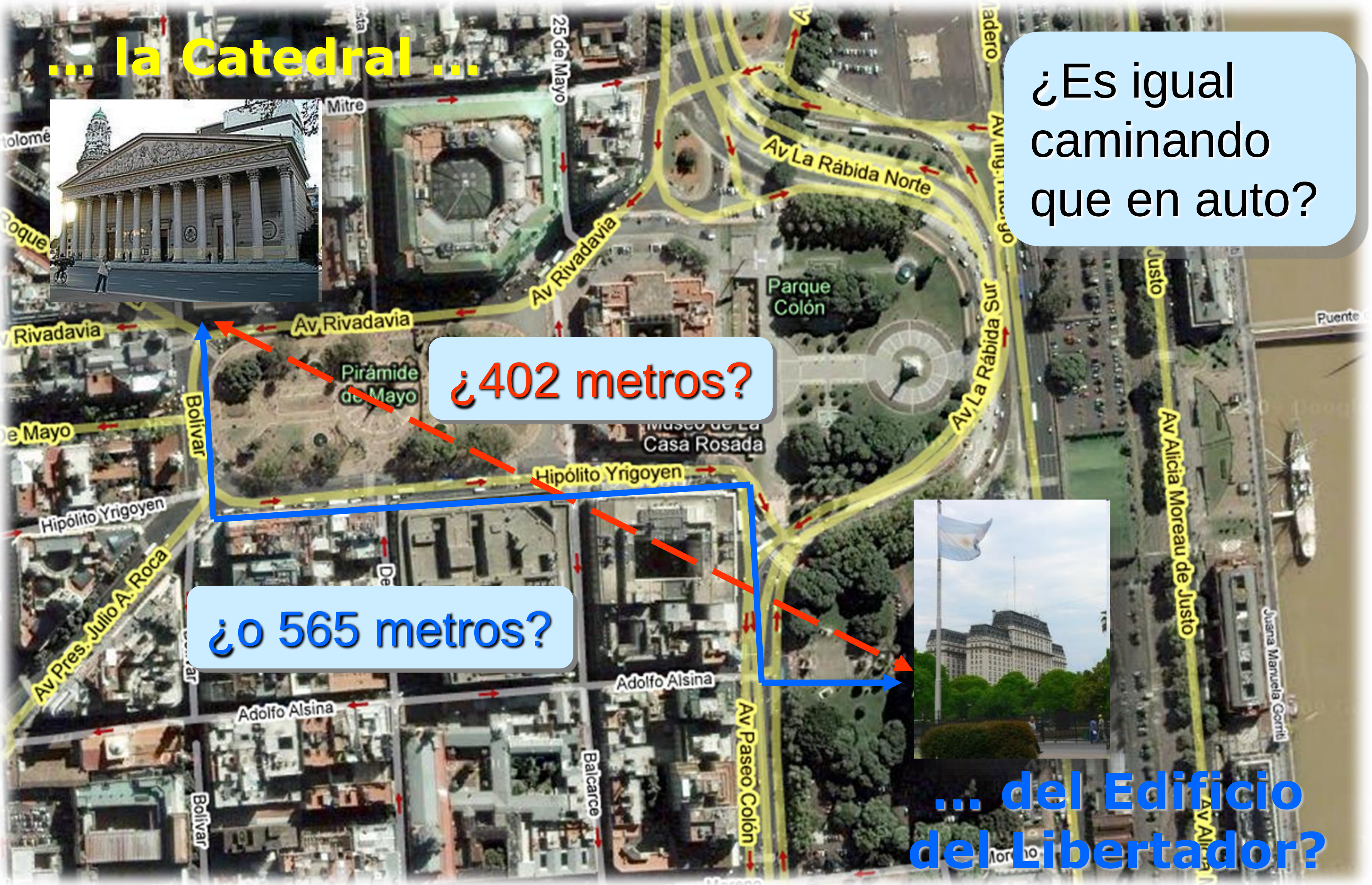
"Si antes de ir a casa paso por lo de un amigo, camino más que si voy derecho a casa, salvo que su casa esté de camino a la mía"



"Si para volar a Buenos Aires hago una escala en Córdoba, tomo otro vuelo de Córdoba a Buenos Aires, pago más que volando directamente"

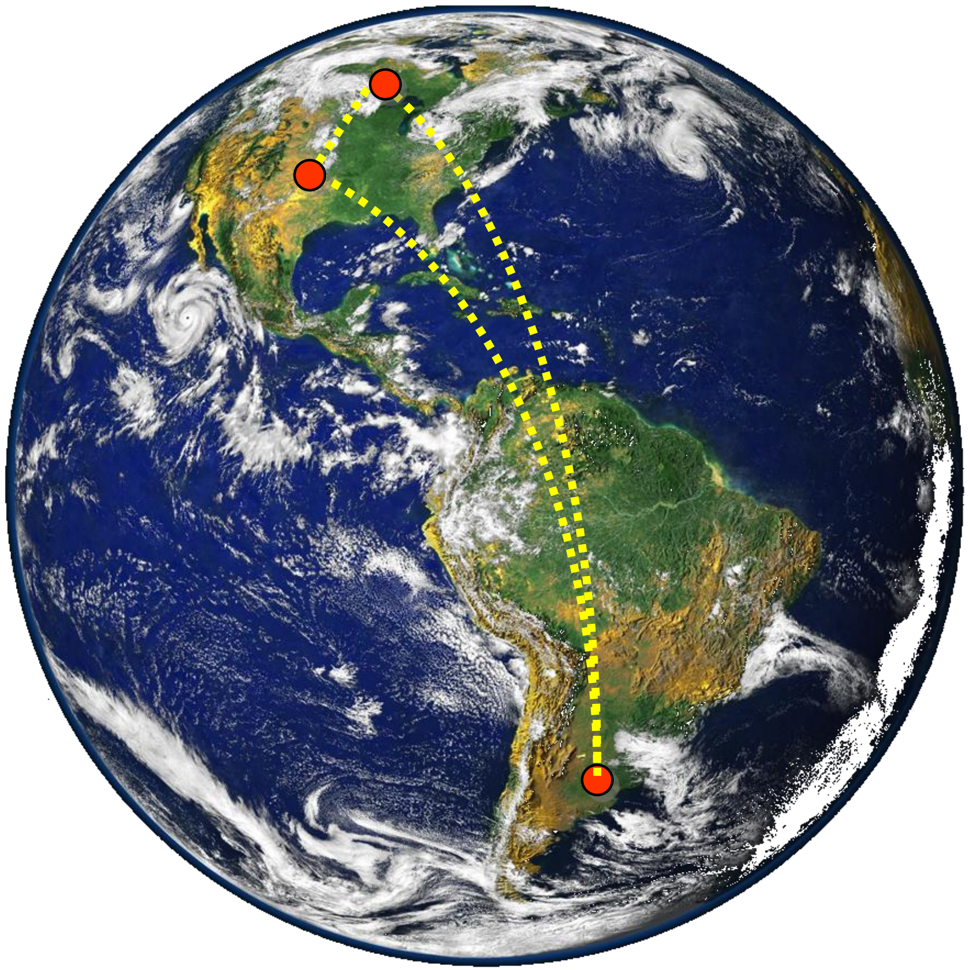
¡No siempre!

¿A qué distancia está ....



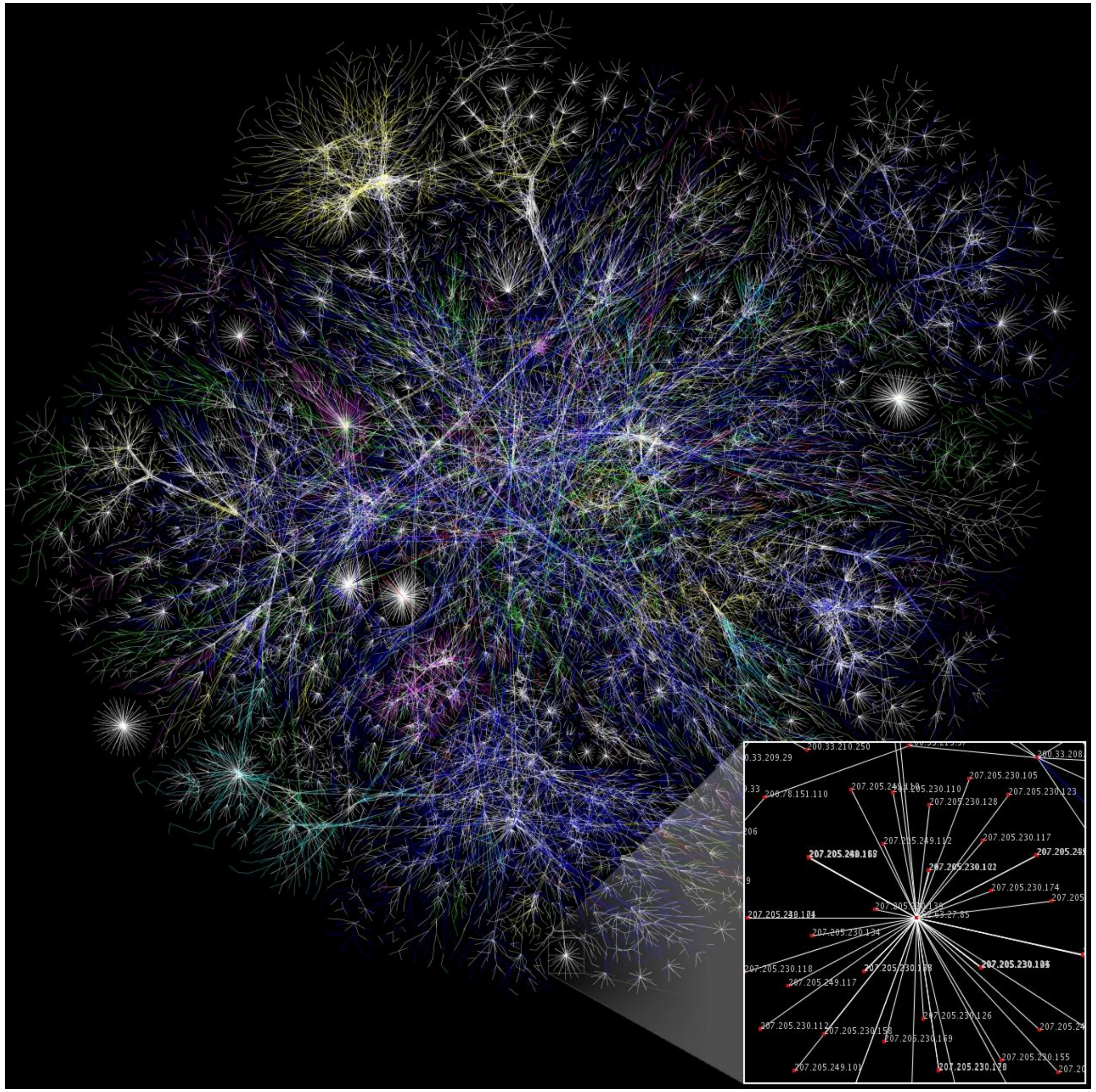
Distancia en Internet

- ¿Cómo medirían las distancias de comunicación por Internet?
- ¿Es razonable medirlas en Kms?

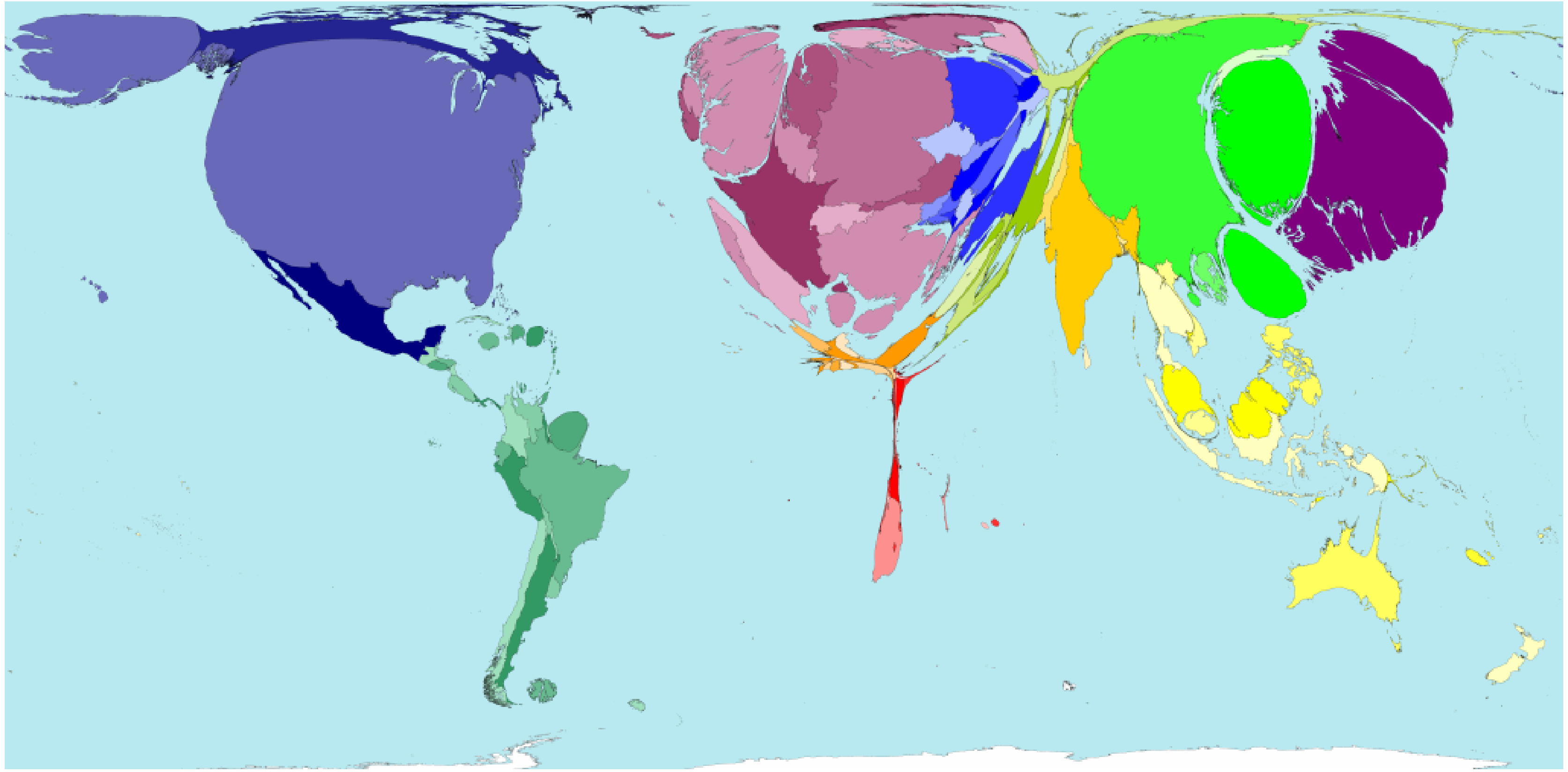


Distancia en Internet

- Mapa parcial de Internet (30%, Enero 2005, opte.org).
- Cada línea se dibuja entre dos nodos (direcciones IP).
- La longitud indica el retardo entre nodos.
- Los colores corresponden a los dominios:
  - Azul: net, ca, us
  - Verde: com, org
  - Rojo: mil, gov, edu
  - Amarillo: jp, cn, tw, au, de
  - Magenta: uk, it, pl, fr
  - Oro: br, kr, nl
  - Blanco: desconocido



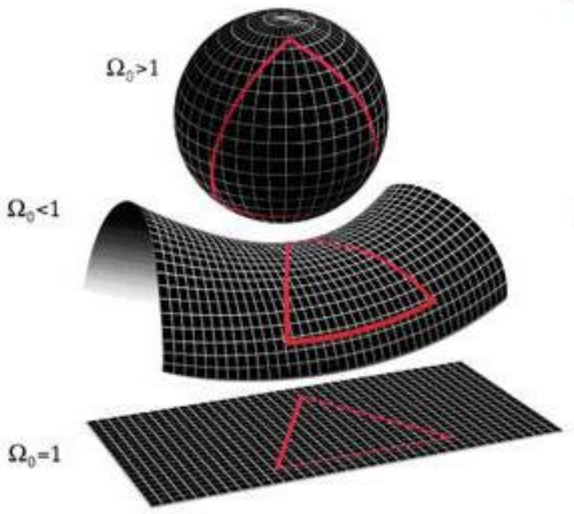
Distancia en Internet

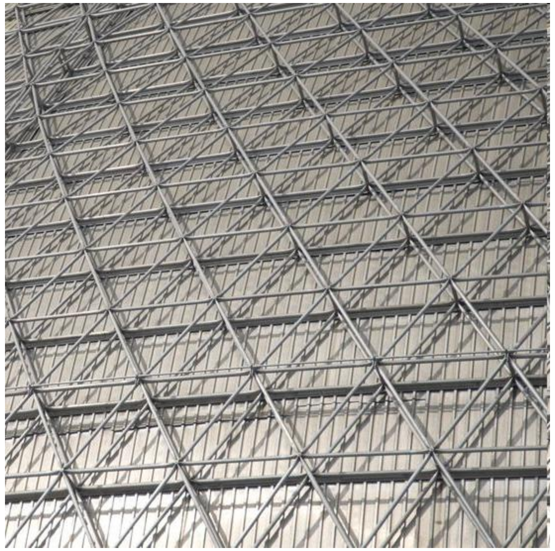


- El mundo visto desde Internet: ¿Qué pasa si modificamos las distancias teniendo en cuenta la cantidad de conexiones?

Entonces …

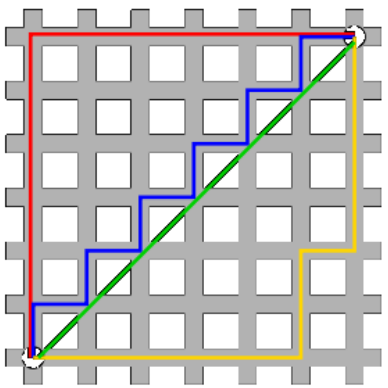
- Diferentes relaciones, diferentes maneras de medir distancias, estructuran el espacio de diferentes formas.



Distancias definida por la norma-*p*

- Como vimos una métrica se puede definir a partir de una norma, por ejemplo la norma-*p*: $d(x, y) = \|x - y\|_p$



	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	5	4	3	2	2	2	2	2	8
7	5	4	3	2	1	1	1	2	7
6	5	4	3	2	1	♔	1	2	6
5	5	4	3	2	1	1	1	2	5
4	5	4	3	2	2	2	2	2	4
3	5	4	3	3	3	3	3	3	3
2	5	4	4	4	4	4	4	4	2
1	5	5	5	5	5	5	5	5	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

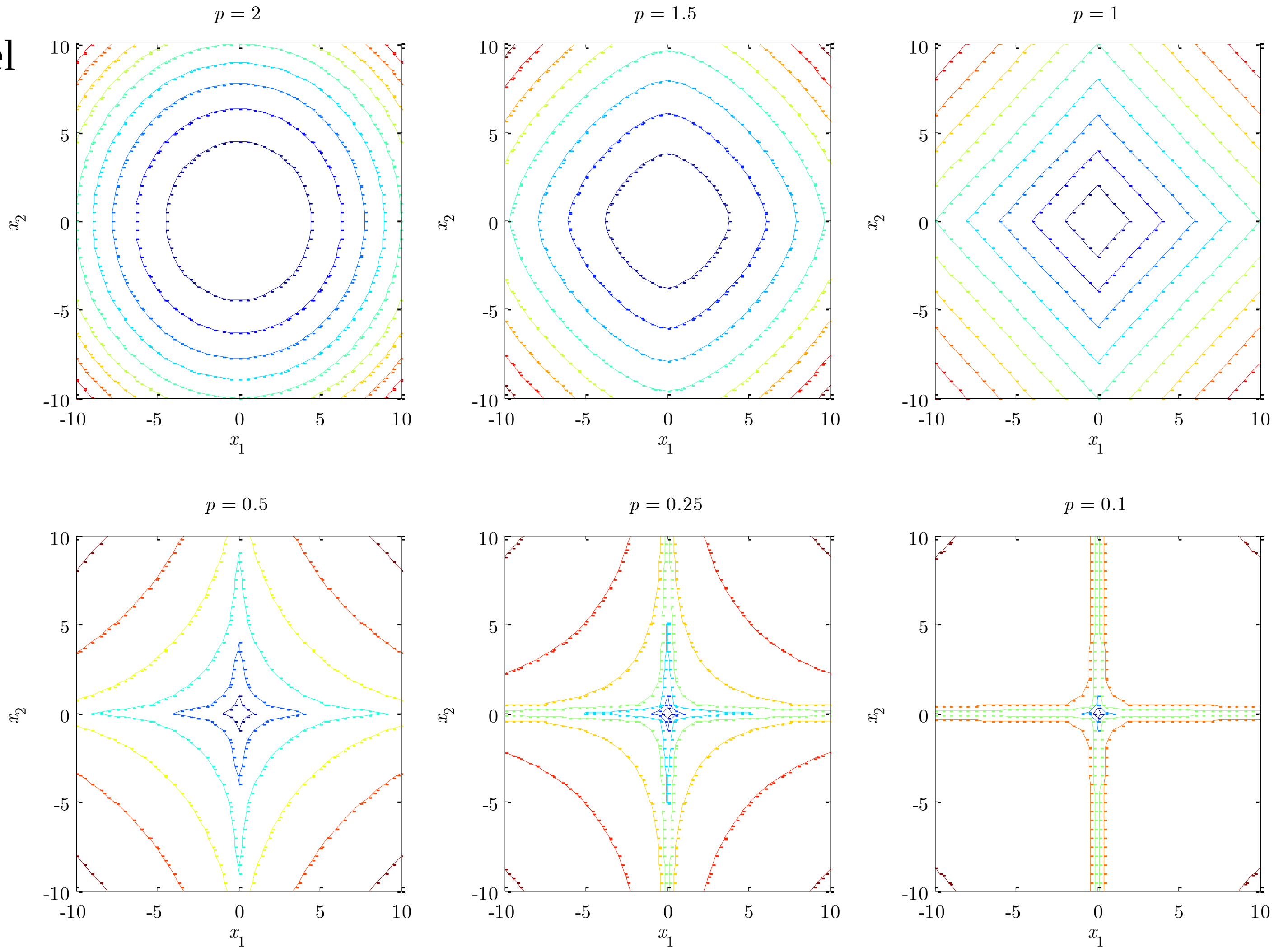
- **Métricas**
  - *Distancias de Minkowski*:

$$L_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} , \quad p \geq 1$$

- **Ejemplos:**
  - *Manhattan (p=1)*: $L_1(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$
  - *Euclidiana (p=2)*: $L_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2}$
  - *Máximo (p=inf)*: $L_\infty(x, y) = \max_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$

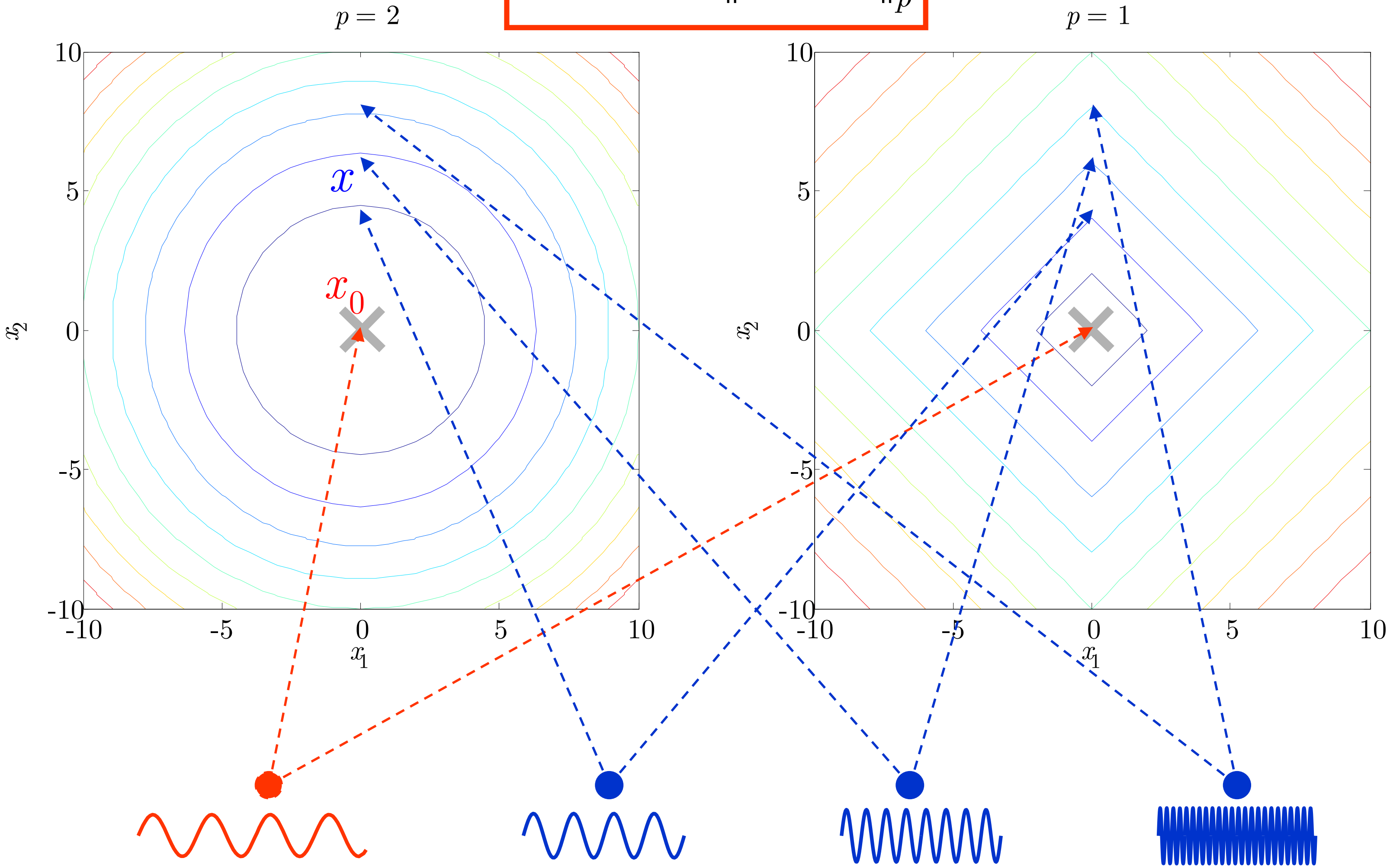
¿Qué ocurre cuando varío *p*?

Curvas de nivel de $\|\mathbf{x}\|_p$ para $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$



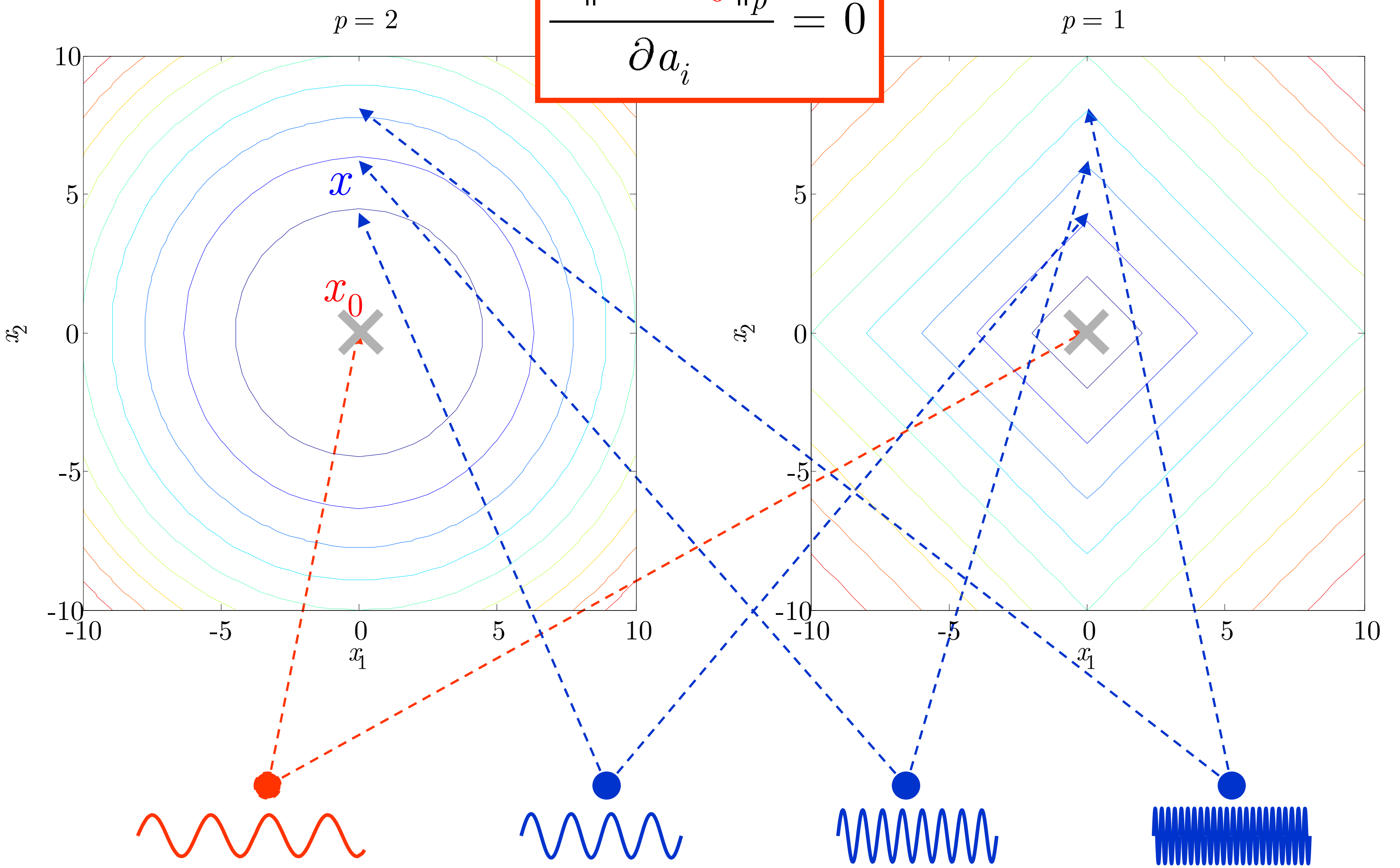
¿Qué ocurre cuando varío *p*?

$$\boxed{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|_p}$$



¿Qué ocurre cuando varío *p*?

$$\boxed{\frac{\partial \left\| x - x_0 \right\|_p}{\partial a_i} = 0}$$



Ejemplos de espacios de señales

- Espacio de secuencias temporales reales:

$$\mathbb{X} = \{x[n]\}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad x[n] \in \mathbb{R}; \quad 1 \le n \le N$$

- Espacio de señales de tiempo continuo reales:

$$\mathbb{X} = \{x(t)\}; \quad t \in \mathbb{R}; \quad x(t) \in \mathbb{R}; \quad -\infty \le t \le \infty$$

  – Ambos suelen usar la métrica euclidea:

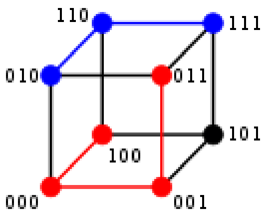
$$d(x,y) = \|x - y\|_2$$

Otras formas de medir distancias

- Distancia de Minkowski con pesos.
- Distancia de Hamming.
- Distancia de Levenshtein.
- Distancia de Mahalanobis.
- Divergencia de Kullback-Leibler.
- Distancia en habla ruidosa.
- Distancia entre huellas digitales.
- ….

Distancia de Hamming

La distancia de Hamming (1915-1998) entre dos "palabras" es el número de posiciones en que difieren.

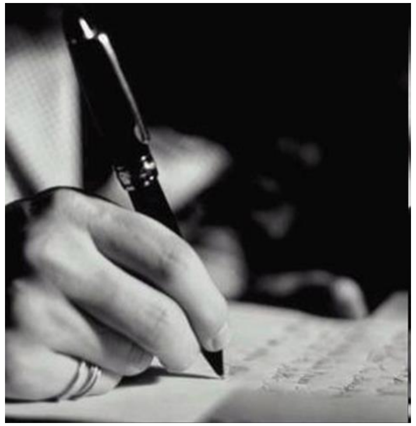


Otras distancias…

Distancia de Levenshtein (distancia de edición)

- Distancia entre palabras:
  - Número mínimo de operaciones requeridas para transformar una cadena de caracteres en otra.
  - Operaciones: inserción, eliminación o sustitución de un carácter.

- Es útil en programas que determinan cuán similares son dos cadenas de caracteres, como es el caso de los correctores de ortografía.



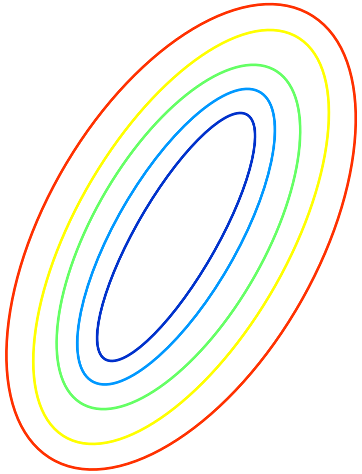
Vladimir Levenshtein, Rusia 1965.

Otras distancias…

Distancia de Mahalanobis:

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^T C^{-1} (x-y)}$$

matriz de covarianza



Toma en cuenta la estadística de los datos

Prasanta Chandra Mahalanobis, India 1936.

Divergencia de Kullback-Leibler

- Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ dos señales en $\mathbb{R}^N$ y sea D_{KL} la denominada "*Divergencia de Kullback-Leibler*“:

$$D_{\text{KL}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} x[i] \log \frac{x[i]}{y[i]}$$

- ¿Es una distancia?¿Por qué?

Distancia en habla ruidosa

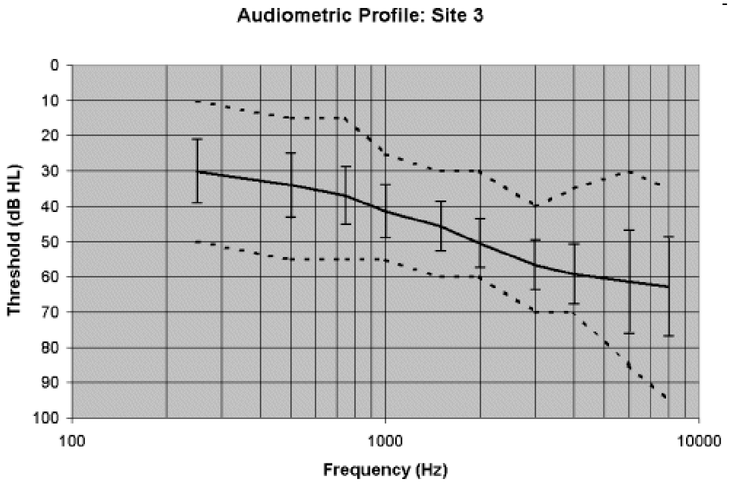


TABLA 1: Porcentaje de reconocimiento de palabras

	RUIDO BLANCO			RUIDO MURMULLO		
	-5 dB	0 dB	5 dB	-5 dB	0 dB	5 dB
PSS	84.3	94.1	98.1	76.4	89.3	95.6
WIENER	84.8	94.3	95.5	**87.9**	94.7	**97.6**
LogSTSA	**92.9**	**96.3**	**98.9**	86.9	**95.2**	**97.6**

- La SNR no es una buena medida de la inteligibilidad del habla, ¿Cómo la medimos entonces?

Distancia en habla ruidosa

- LAR
  - Diferencia entre los espectros limpio y ruidoso:

$$LAR(m) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left(\log \frac{1 + r_s(m)}{1 - r_s(m)} - \log \frac{1 + r_{\hat{s}}(m)}{1 - r_{\hat{s}}(m)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- PESQ
  - Modelo de percepción auditiva:

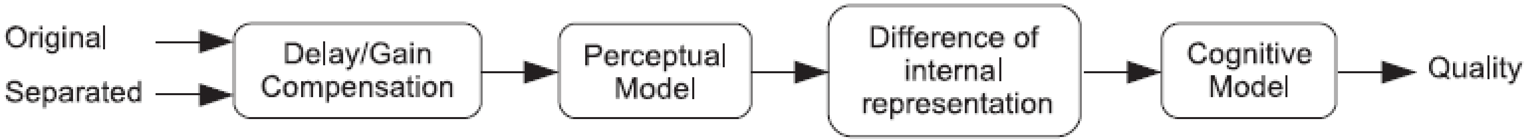
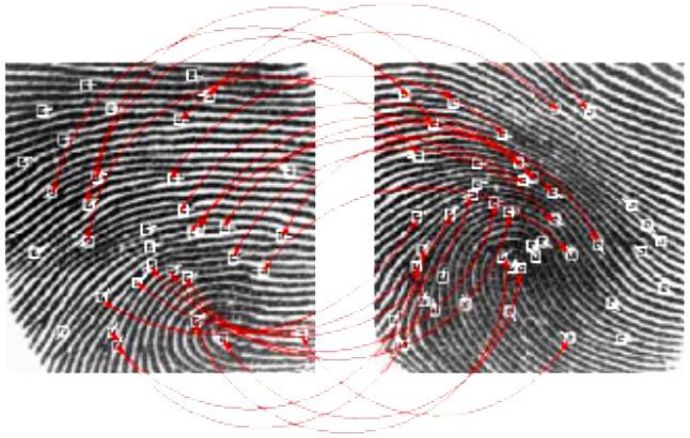


Fig. 1. Scheme of the stages in PESQ calculation.

Leandro Di Persia, Diego Milone, Hugo Leonardo Rufiner, Masuzo Yanagida, *"Perceptual evaluation of blind source separation for robust speech recognition"*, Signal Processing 88 (2008) 2578– 2583.

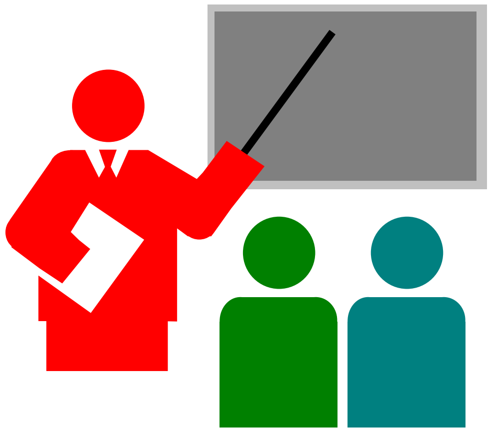
Distancia entre huellas digitales …



La mejor distancia a utilizar depende de la aplicación …

Temas a tratar

- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Producto Interno

Analogías entre Señales y Vectores

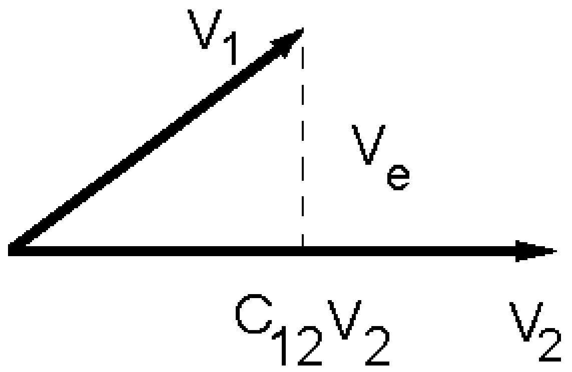
Producto interno

Otra medida de

similitud

entre señales

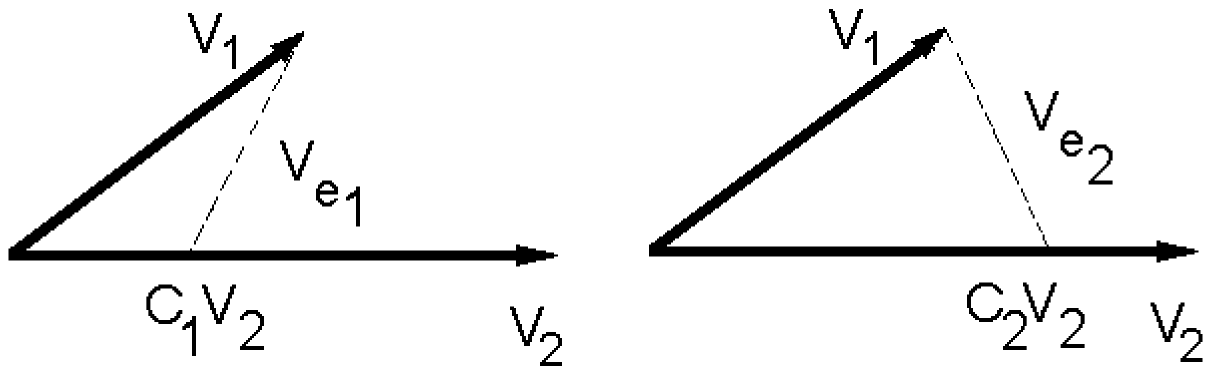
Componente de un vector en otro



- Proyección de $\mathbf{v}_1$ sobre $\mathbf{v}_2$
- Menor error de modo que:

$$\mathbf{v}_1 = c_{12}\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_e$$

Otras alternativas podrían ser



Pero no cumplen la condición de error mínimo…

¿Cómo calculamos c_{12}?

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

¿Cómo calculamos c_{12}?

La componente de la componente de $\mathbf{v}_1$ a lo largo de $\mathbf{v}_2$ será:

$$c_{12}\,|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1|\cos(\theta)$$

Además, sabemos que:

$$< \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > = |\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|\cos(\theta)$$

¿Cómo calculamos c_{12}?

Ahora podemos escribir:

$$c_{12} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

c_{12} mide el ***parecido*** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

c_{12} mide el ***parecido*** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Si $\mathbf{v}_2$ tiene norma unitaria:

$$\boxed{c_{12} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

Producto Interno, normas y métricas

- Al definir el producto interno se obtiene también una norma y una métrica para el espacio:

$$\left\| \mathbf{x} \right\|_2^2 = \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle$$

Producto interno en *¿señales continuas?*

Producto interno …

- El concepto de proyección y ortogonalidad de vectores se puede extender a las señales.

- Se considerarán dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ donde se se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ en un cierto intervalo $(t_{1,}\ t_2)$

Se desea aproximar f_1 mediante f_2

$$f_1(t) \approx C_{12}\, f_2(t) \text{ en } (t_1 < t < t_2).$$

Se define la función error $f_e(t)$:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12}\, f_2(t).$$

Debemos encontrar un valor de C_{12} que minimice el error entre las dos funciones

$$EM = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) - C_{12} f_2(t) \right] dt}{t_2 - t_1}$$

$$ECM = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t)\, dt}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{\partial ECM}{\partial C_{12}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} (f_2(t))^2\, dt}$$

$$\frac{\partial ECM}{\partial C_{12}} = 0$$

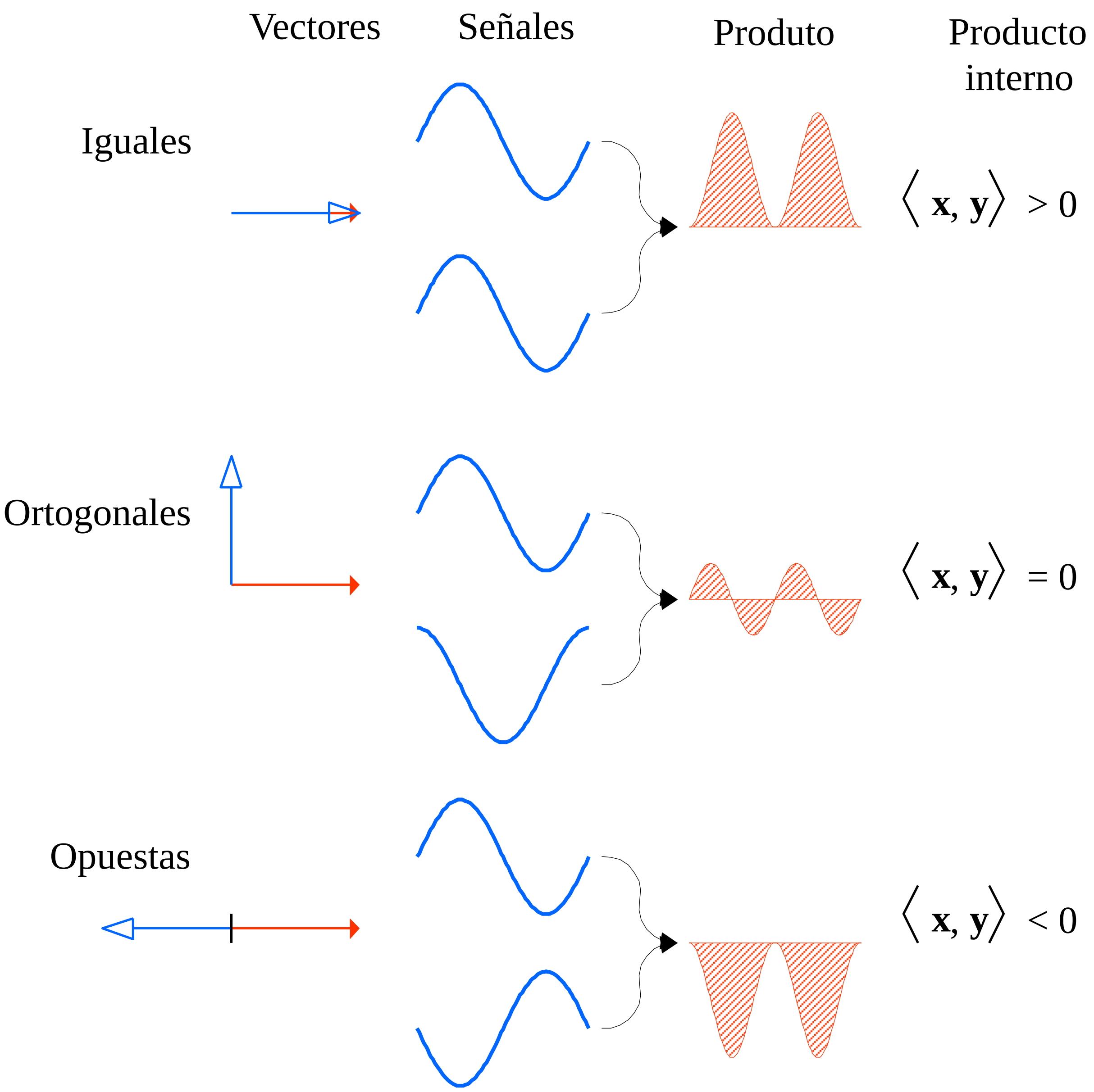
$$\downarrow$$

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\overline{f_2(t)}\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\overline{f_2(t)}\, dt}$$

Si nuestra señal puede tomar valores complejos

Ortogonalidad de Funciones

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\overline{f_2(t)}\, dt = 0$$


Vectores
Señales
Produto
Producto interno
Iguales
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle > 0$
Ortogonales
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$
Opuestas
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < 0$

Transformaciones lineales...

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

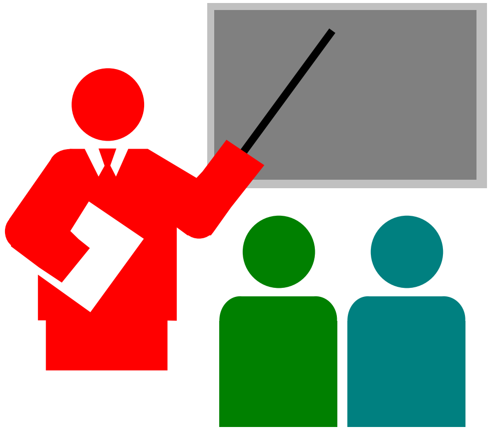
Otras operaciones lineales...

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

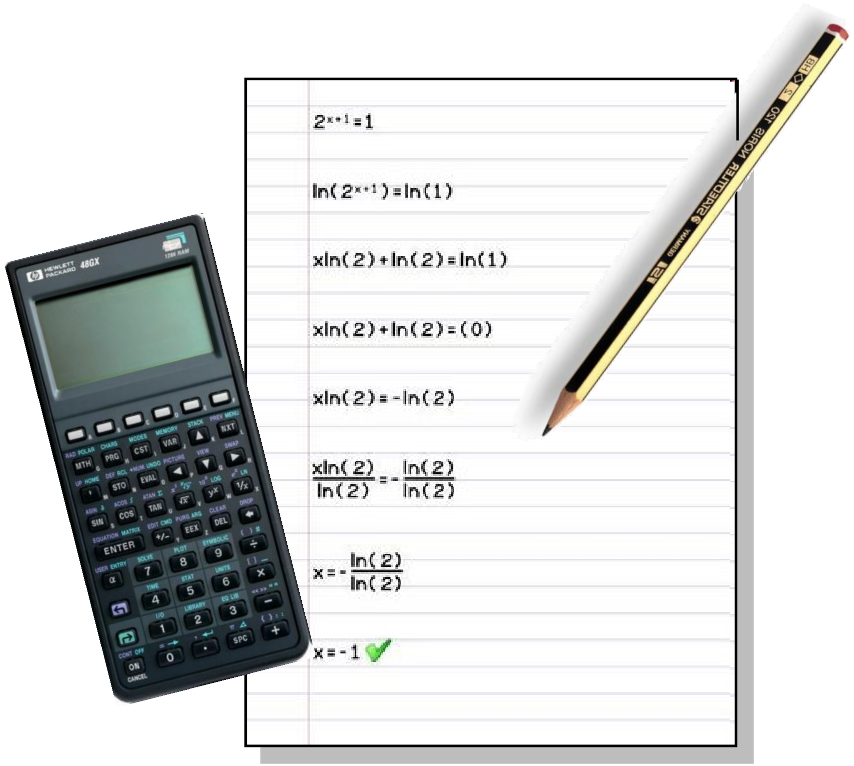
$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau$$

Temas a tratar

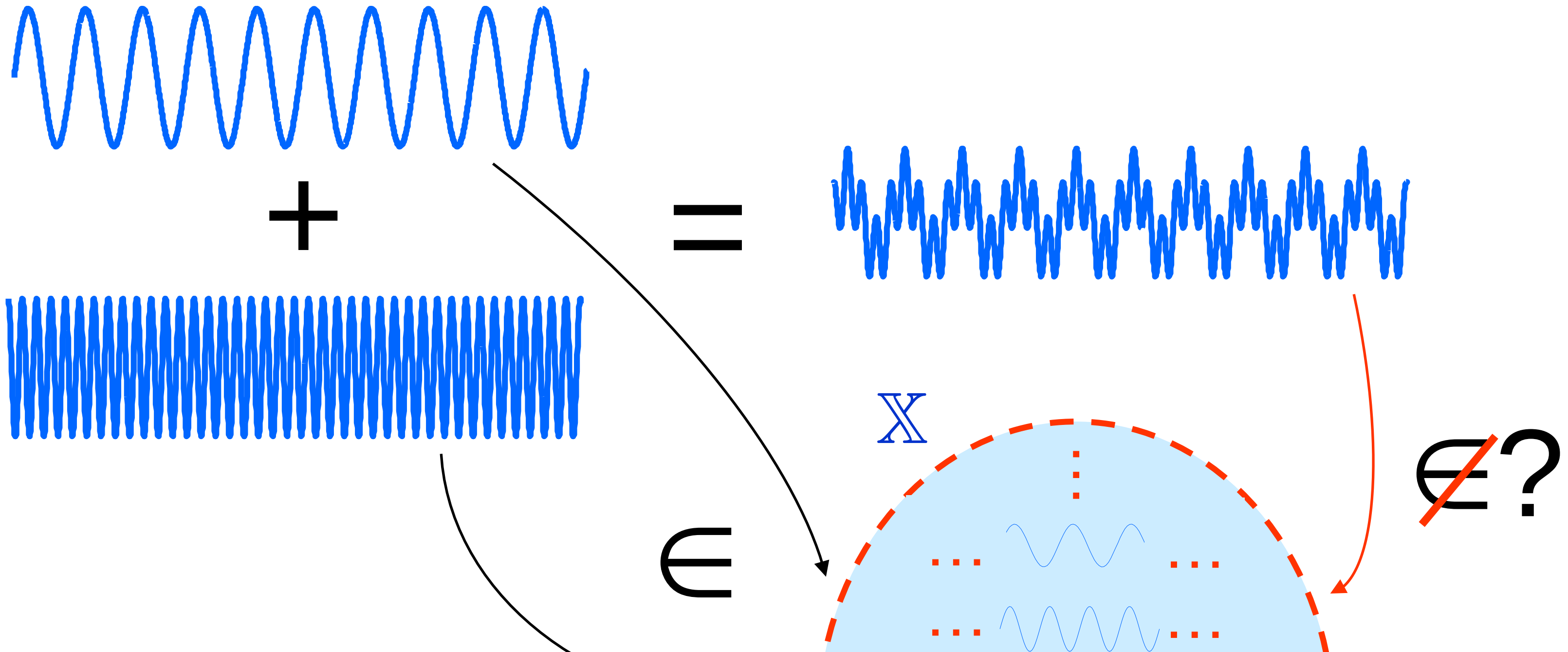
- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.

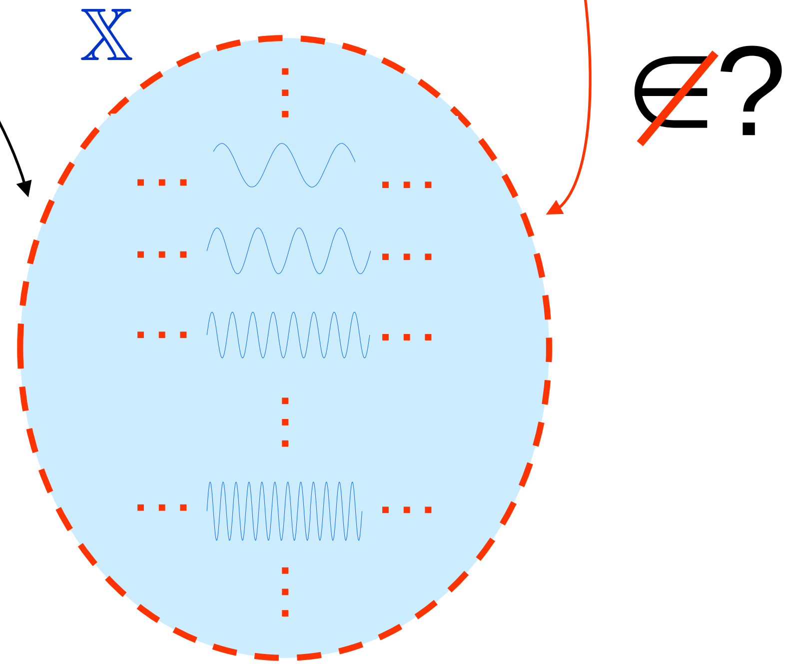


Estructura Algebraica



¿Qué pasa si sumo dos señales de $\mathbb{X}$?





Ej: Conjunto de las
señales sinusoidales (1)

$$\mathbb{X} = \{x;\, x(t) = \mathrm{Re}[\alpha \exp(\beta + j\omega t)]\}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad -\infty \le t \le \infty \qquad \alpha, \beta, f \in \mathbb{R}$$

Campo Escalar

- $\mathbb{K}$ es un campo escalar (un conjunto)
  - Adición $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  - Producto $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  - Neutro aditivo: 0
  - Neutro multiplicativo: 1

- Ejemplos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Espacio Lineal

- Conjunto para el que están definidas las operaciones binarias (cerradas) de:
  - Multiplicación de cualquier elemento por un escalar
  - Adición entre cualesquiera de sus elementos
- Estas operaciones son conmutativas, asociativas y distributivas.
- Poseen elemento neutro y cancelativo.

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{S}; \mathbb{K}; +; \cdot\}$$

Espacio Lineal

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{S}; \mathbb{K}; +; \cdot\}$$

I. La adición es cerrada:
$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S; \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

II. La adición es conmutativa:
$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}; \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

III. La adición es asociativa:
$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}; \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S$

IV. Existe un único elemento $\mathbf{0} \in S$ que es neutro respecto a la adición:
$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}; \quad \forall\, \mathbf{x} \in S$

V. El producto por un escalar es cerrado:
$\alpha\mathbf{x} \in S; \quad \forall\, \mathbf{x} \in S \wedge \forall\, \alpha \in K$

VI. El producto por un escalar es asociativo:
$\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}; \quad \forall\, \mathbf{x} \in S \wedge \forall\, \alpha, \beta \in K$

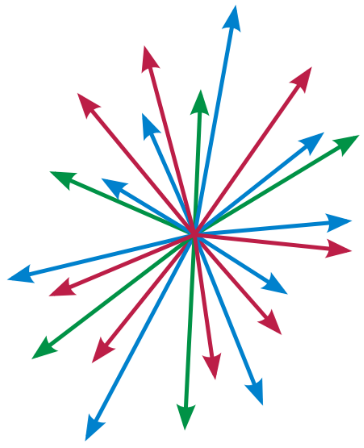
VII. El producto por un escalar es distributivo según:
$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}; \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \wedge \forall\, \alpha \in K$

VIII. El producto por un escalar es distributivo según:
$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}; \quad \forall\, \mathbf{x} \in S \wedge \forall\, \alpha, \beta \in K$

IX. Existe un único elemento $1 \in K$ que es neutro respecto al producto por un escalar:
$1\mathbf{x} = \mathbf{x}; \quad \forall\, \mathbf{x} \in S$

Espacio Lineal

- A los elementos de los espacios lineales los llamamos vectores y podemos referirnos al espacio como espacio vectorial.



(1) no es un espacio vectorial.

Espacios Normados

- Son aquellos espacios vectoriales en los que todos sus elementos poseen norma finita.

- Ejemplos:
  - Los subconjuntos de señales que poseen energía finita o acción finita son espacios normados:

$$L_1(\mathbb{R}) \quad L_2(\mathbb{R}) \quad \ell_1(\mathbb{Z}) \quad \ell_2(\mathbb{Z})$$

Espacios Normados

- Ejemplos:

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| dt < \infty \right\};\quad t \in \mathbb{R};\quad x(t) \in \mathbb{R},\quad -\infty \leq t \leq \infty$$

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt < \infty \right\};\quad t \in \mathbb{R};\quad x(t) \in \mathbb{R};\quad -\infty \leq t \leq \infty$$

$$\ell_1(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right| < \infty \right\};\quad n \in \mathbb{N};\quad x[n] \in \mathbb{R};\quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$\ell_2(\mathbb{R}) = \left\{ x;\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 < \infty \right\};\quad n \in \mathbb{N};\quad x[n] \in \mathbb{R};\quad -\infty \leq n \leq \infty$$

(pueden definirse también en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}$)

Espacios con Producto Interno

- Debido a la importancia del producto interno para comparar señales aparece este tipo particular de espacios.

- Un espacio con producto interno:

$$I(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) = <\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}>,$$

  es un espacio vectorial con un producto interno definido en él.

Espacios con Producto Interno

- Como ya vimos, al definir el producto interno se obtiene también una norma y una métrica para el espacio:

$$\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2 = \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle$$

Espacio Euclídeo

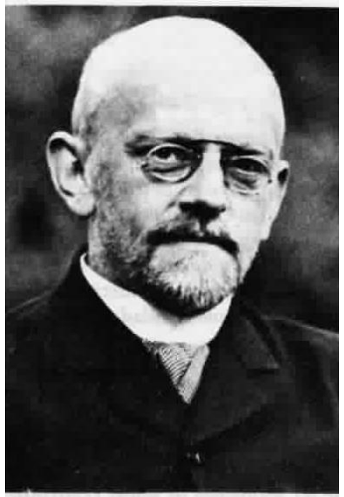
- Es el espacio matemático *n*-dimensional usual, una generalización de los espacios de 2 y 3 dimensiones estudiados por Euclides.
- Estructuralmente es:
  - un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre los reales
  - la norma es la asociada al producto escalar ordinario (norma 2).

Euclides
(300 a.C, Grecia)

- Se denota como: $\mathbb{R}^N$

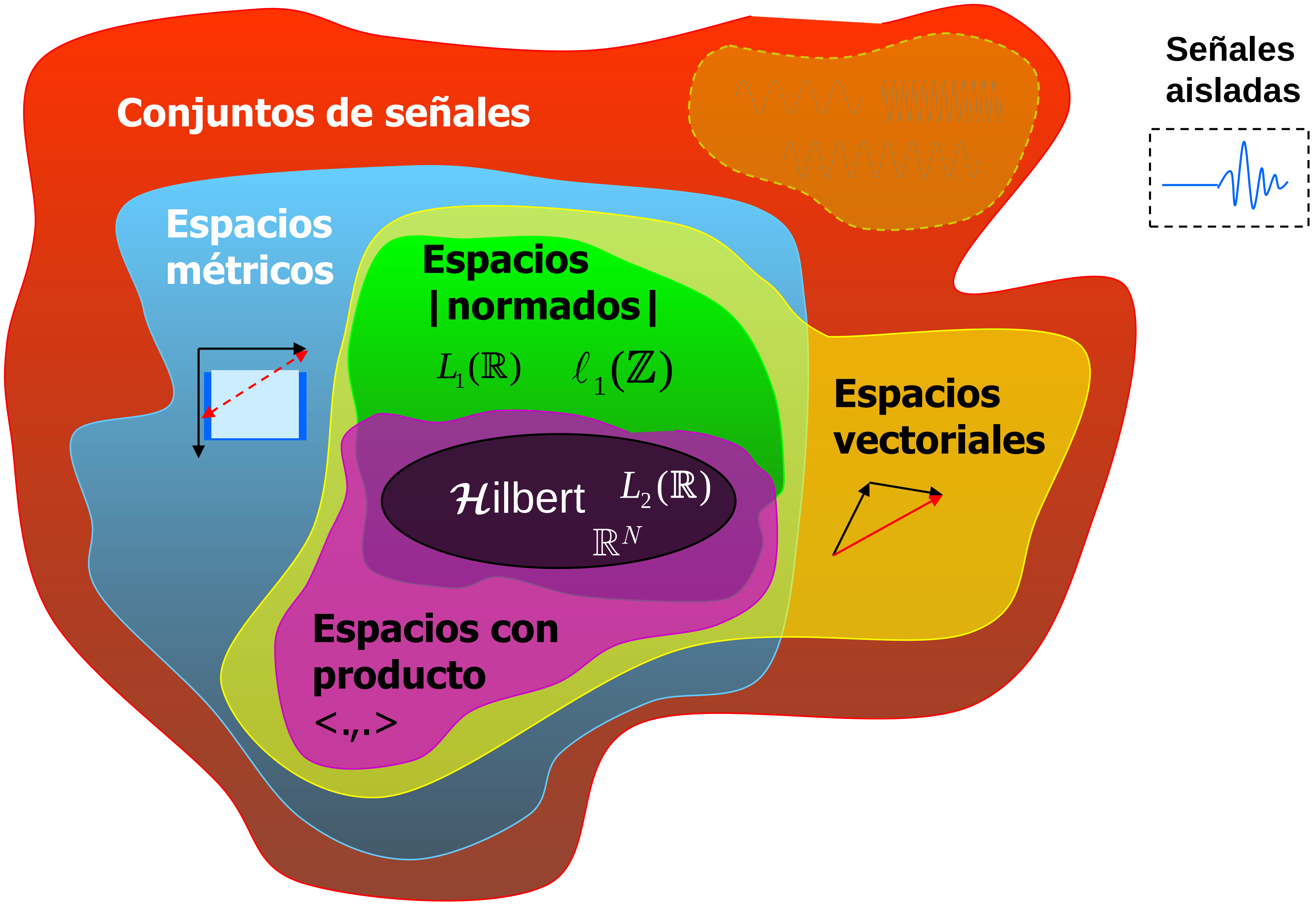
Espacios de Hilbert

- $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma generada por $< \mathbf{x} , \mathbf{x} >$.
- Completo significa que no tiene “agujeros”.
- Constituye una generalización del concepto de espacio euclídeo.
- Permite extender nociones de espacios de dimensión finita a los de dimensión infinita.



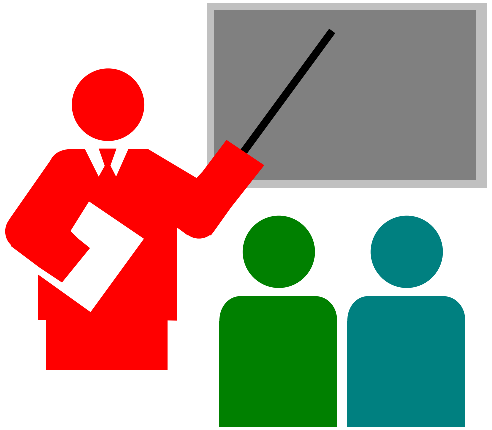
David Hilbert
(1862-1943, Alemania)

Conjuntos, espacios y señales …

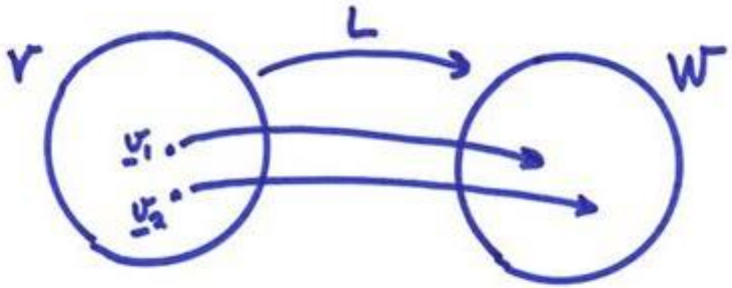


Temas a tratar

- Introducción: señales, vectores y espacios.
- Conjuntos de señales y espacios métricos.
- Estructura geométrica:
  - Normas.
  - Distancias.
  - Producto interno.
- Estructura algebraica:
  - Espacios vectoriales y señales.
- Bases y transformaciones lineales.



Bases y transformaciones



Próxima clase ….

Conjunto generador

Dado un conjunto N vectores (señales) $\boldsymbol{X_0}=\{x_i\}$ con $N < \infty$:

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$$

combinación lineal de vectores x_i, donde α_i son escalares.

Variando los α_i se genera un nuevo conjunto $\boldsymbol{X}$, que en el caso que sea un espacio vectorial entonces $\boldsymbol{X}_0$ es un *conjunto generador* de ese espacio.

Definición de base

$$\text{Base} \begin{cases} \text{Conjunto generador.} \\ \{x_i\} \text{ linealmente independientes.} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = 0 \qquad \{x_i\} \text{ son linealmente independientes}$$

Volvemos sobre ortogonalidad…

Si el conjunto $\boldsymbol{X_0}$ es **ortogonal**

$$
\begin{cases}
\langle x_i, x_j \rangle = 0 \;\forall\; i \neq j \\
\langle x_i, x_j \rangle = k \;\forall\; i = j
\end{cases}
$$

O, si $k = 1$ entonces $\boldsymbol{X_0}$ es **ortonormal**.

Entonces, si $\boldsymbol{X_0}$ es una base del espacio vectorial $\boldsymbol{X}$, los coeficientes α_i se pueden calcular mediante el *producto interno* entre el vector (señal) y cada uno de los elementos de la base.

Representación de señales

Suponga que quiere representar el vector $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^N$ generado por el conjunto $\boldsymbol{X}_0=\{x_i\}$, con $i = 1 .. N$.

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_N x_N$$

Efectuando producto interno por $\boldsymbol{x}_i$ a ambos miembros:

$$\langle x, x_i \rangle = \alpha_1 \langle x_1, x_i \rangle + \alpha_2 \langle x_2, x_i \rangle + \ldots + \alpha_N \langle x_N, x_i \rangle$$

Representación de señales

Si $\boldsymbol{X}_0$ es ortogonal, entonces: $\langle x, x_i \rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle$

$$\alpha_i = \frac{\langle x, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle} = \frac{\langle x, x_i \rangle}{\|x_i\|^2}$$

Si $\boldsymbol{X}_0$ es ortonormal, entonces: $\langle x, x_i \rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i \rangle$

$$\alpha_i = \langle x, x_i \rangle$$

Concepto importante: α_i es la componente de la señal x en x_i.

Base no completa

Si $\{x_i\}$ no genera el espacio en que está contenido $\boldsymbol{x} \rightarrow$ base no es completa.

$$X_b = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boldsymbol{x}$ =[2, 4, 7]

$\boldsymbol{x}=c_1.\boldsymbol{e_1}+c_2.\boldsymbol{e_2} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \boldsymbol{x}$ = [2, 4, 0]

$$c_1 = \langle x, e_1 \rangle = 2$$

$$c_2 = \langle x, e_2 \rangle = 4$$

Base no completa

Entonces la suma vectorial anterior es sólo una aproximación a **x**, y lleva implícito un error.

¿De qué manera se pueden seleccionar adecuadamente los c_i para reducir el error de aproximación?

Base no completa

Suponga que quiere representar el vector **y** en R^N generado por el conjunto ortogonal $\mathbf{X}_0=\{x_i\}$, con i= 1..N.

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_N x_N$$

$$ECT = \|e\|_2^2 = \|y - \tilde{y}\|_2^2 = \left\| y - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right)^2$$

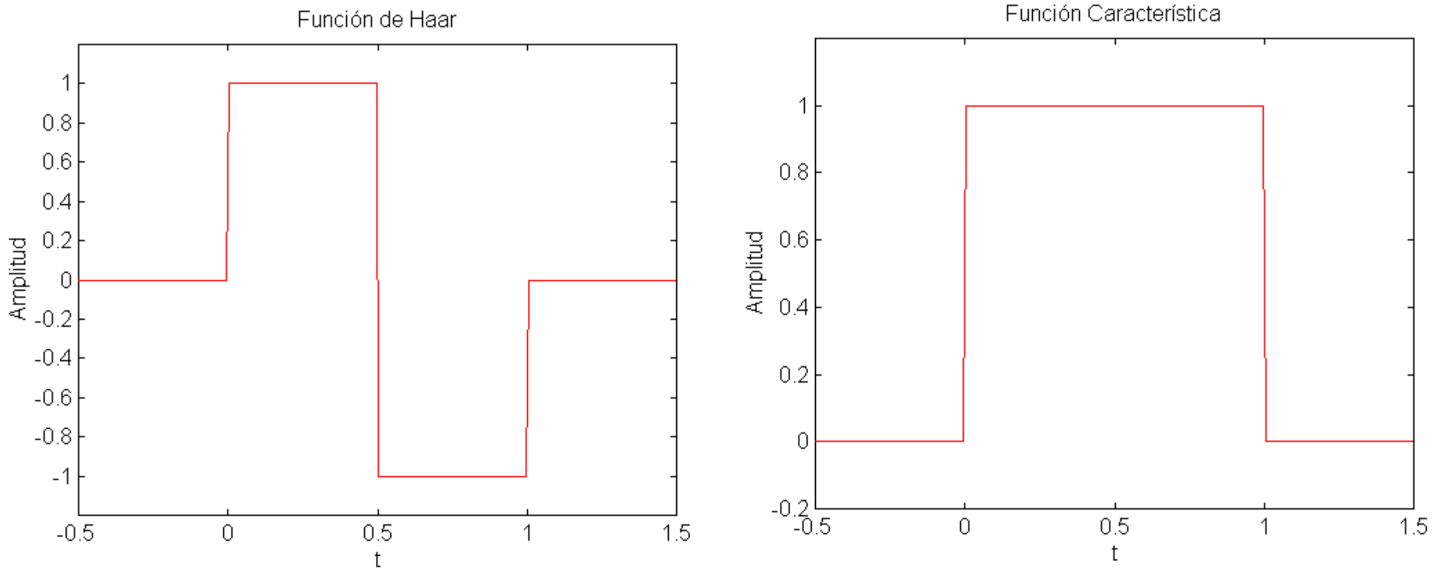
$$\frac{\partial ECT}{\partial t} = 0 \longrightarrow \alpha_i = \frac{\langle y, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle}$$

Ejemplos: Bases ortogonales

- Polinomios de Legendre [-1,1]
- Polinomios de Chebyshev [-1, 1]
- Polinomios de Hermite [- ∞, ∞]
- Funciones de Hermite [- ∞, ∞]
- Funciones de Walsh [0,T]
- Funciones de Haar [0,1]
- Wavelets
- Funciones de Fourier

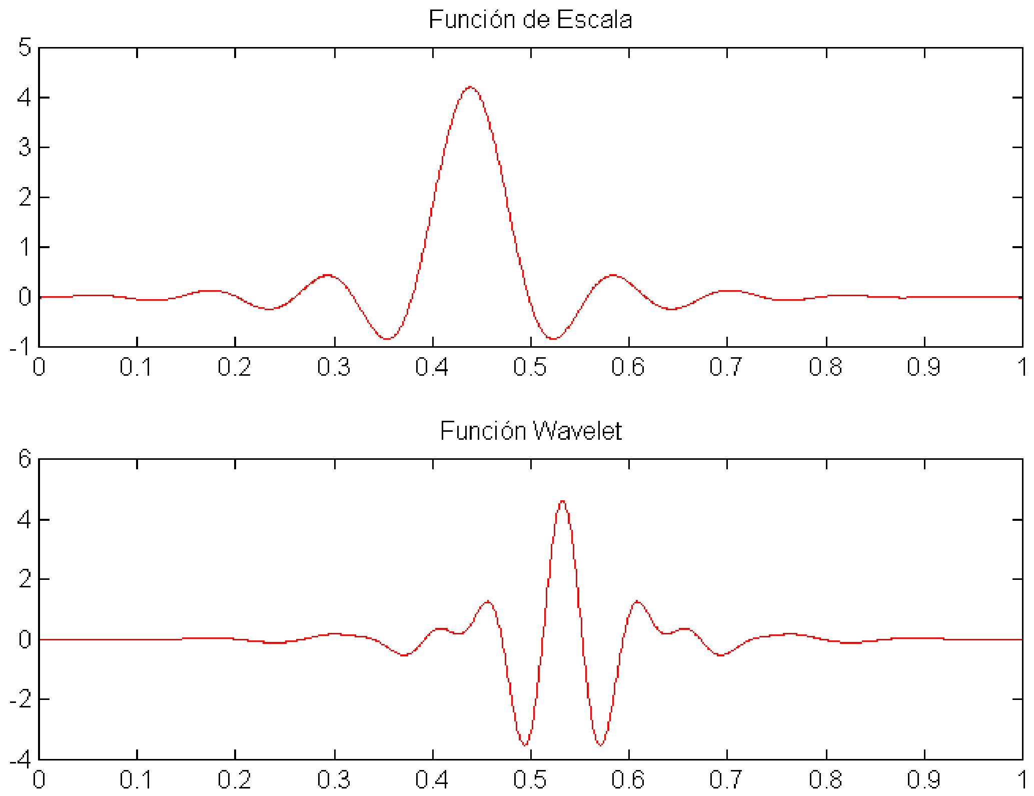
Ejemplo: Wavelets

- Funciones de Haar:



Ejemplo: Wavelets

- Onditas de Meyer:



Ejemplo: Cambio de base

$\mathbf{x}$= [4, 8, 9]

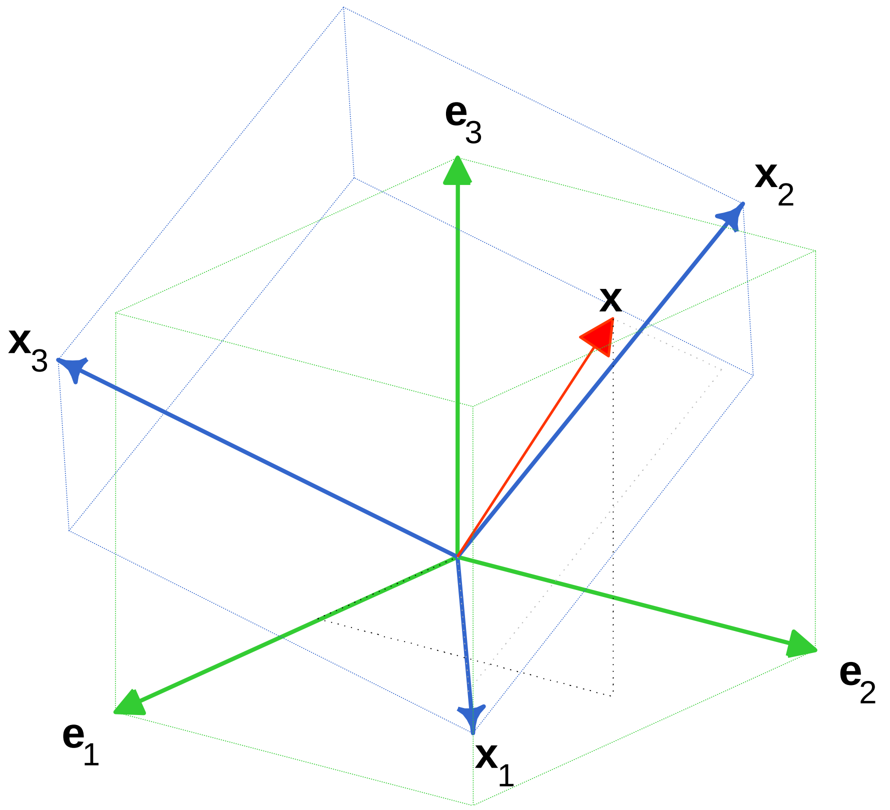
$$X_e = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbf{x}_{\mathbf{Xe}}=\alpha_1.\mathbf{e}_1+\alpha_2.\mathbf{e}_2+\alpha_3.\mathbf{e}_3 =4.\mathbf{e}_1+8.\mathbf{e}_2+9.\mathbf{e}_3= [4,8,9]$

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbf{x}_{\mathbf{X1}}=\beta_1.x_1+ \beta_2.x_2+ \beta_3.x_{3=}\ 6\sqrt{2}.\mathbf{x}_1+11/3\sqrt{2}.\mathbf{x}_2+5/3\sqrt{2}.\mathbf{x}_3=[4,8,9]$

Ejemplo: Cambio de base



Ejemplo: Cambio de base

¿Cómo pasar de $\mathbf{X_e}$ a $\mathbf{X_1}$?

$$\mathbf{x}_{\mathbf{Xe}}=\mathbf{x}_{\mathbf{X1}}=\beta_1.\mathbf{x}_1+\beta_2.\mathbf{x}_2+\beta_3.\mathbf{x}_3=\beta_1.\mathbf{x}_1+\beta_2.\mathbf{x}_2+\beta_3.\mathbf{x}_3=6\sqrt{2}.\mathbf{x}_1+11/3\sqrt{2}.\mathbf{x}_2+5/3\sqrt{2}.\mathbf{x}_3=[4,8,9]$$

$$[\beta_1.\mathbf{x}_1+\beta_2.\mathbf{x}_2+\beta_3.\mathbf{x}_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\end{array}.\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$x_{Xe}=M.x_{X1}$$

M: matriz de trancisión o de cambio de base.

$$x_{X1}=M^T.x_{Xe}$$

Cambio de base

Energía de una señal discreta

$$E(x) = \sum_{n=1}^{N} \left\| x(n) \right\|^2$$

$$E(x_{X1}) = \left\| [4,8,9] \right\|^2 = 161$$

$$E(x_{X1e}) = \left\| \left[6\sqrt{2}, \frac{11}{3}\sqrt{6}, \frac{5}{3}\sqrt{3} \right] \right\|^2 = 161$$

Si ambas bases son ortonormales:

$$E(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \beta_n^2$$

Si una de ellas es solo ortogonal:

$$\langle x_n, x_n \rangle = k_n \quad \rightarrow E(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{N} k_n \beta_n^2$$

Bibliografía

- Mertins, *"Signal Analysis"*, John Wiley & Sons
- Franks, "*Teoría de la señal*", Reverté.
- De Coulon, "*Signal Theory and Processing*", Artech-House.
- Lathi, "*Modern Digital and Analog Communication Systems*", Holt, Rinehart & Winston.
- Citas completas y repaso en:
  - Milone, Rufiner, Acevedo, Di Persia, Torres, *"Introducción a las señales y los sistemas discretos"*, EDUNER (Cap. 2).