Identificación de Sistemas

Leandro Vignolo

Procesamiento Digital de Señales
Ingeniería en Informática
FICH-UNL

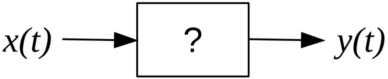
Abril de 2020

Organización de la clase

Organización de la clase

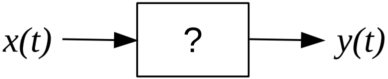
1. Introducción
   - Conceptos generales
   - Aplicaciones
   - Métodos de identificación de sistemas
2. Método de Predicción Lineal
   - Predicción lineal
   - Resolución del sistema de Wiener-Hopf
   - Estimación del orden
3. Método adaptativo de Widrow

¿Qué significa identificar un sistema?



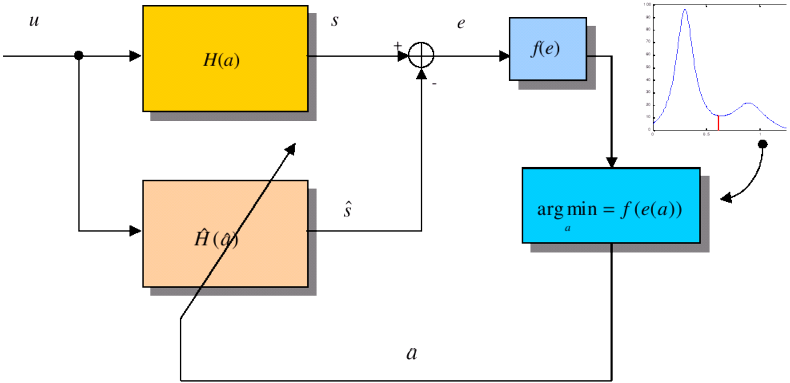
Encontrar un **modelo** y sus **parámetros**, en base a los datos de entrada y salida.

¿Qué significa identificar un sistema?



Encontrar un **modelo** y sus **parámetros**, en base a los datos de entrada y salida.

Esquema general



Aplicaciones

- Predicción
- Compresión
- Telefonía móvil
- Extracción de características
- etc.

Identificación de sistemas

Métodos convencionales

- Sistemas LTI
  - Análisis de la respuesta en sistemas continuos
  - Método de Predicción Lineal
- Métodos adaptativos

Métodos no convencionales

- Técnicas de búsqueda y optimización

Identificación de sistemas

Métodos convencionales

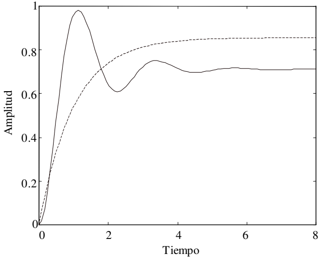
- Sistemas LTI
  - Análisis de la respuesta en sistemas continuos
  - Método de Predicción Lineal
- Métodos adaptativos

Métodos no convencionales

- Técnicas de búsqueda y optimización

Análisis de la respuesta en sistemas continuos

Análisis de la respuesta transitoria (escalón)



1er orden:

$$H(s) = \frac{k}{\zeta s+1}$$

2do orden:

$$H(s) = \frac{k\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$$

1er orden:

Constante de amplificación k

Constante ζ: tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63.7 % del valor final.

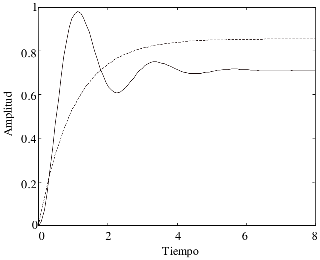
2do orden:

Constante de amplificación k
Frecuencia natural no amortiguada ω

Relación de amortiguamiento ξ

Análisis de la respuesta en sistemas continuos

Análisis de la respuesta transitoria (escalón)



1er orden:

$$H(s) = \frac{k}{\zeta s+1}$$

2do orden:

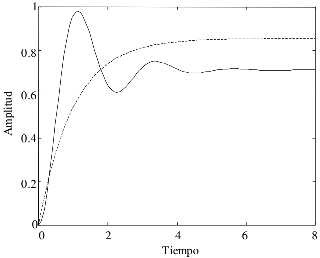
$$H(s) = \frac{k\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$$

Análisis de la respuesta en frecuencia

- Se estimula el sistema con senoidales de frencuencias en el rango de interés
- Se analiza la atenuación en cada caso
- Se aproxima la gráfica de respuesta en frecuencia para obtener los parámetros

Análisis de la respuesta en sistemas continuos

Análisis de la respuesta transitoria (escalón)



1er orden:

$$H(s) = \frac{k}{\zeta s+1}$$

2do orden:

$$H(s) = \frac{k\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$$

Análisis de la respuesta en frecuencia

Desventajas de estos métodos:

- Dificultad en sistemas de alto orden
- Se requiere poder manipular la entrada del sistema

Organización de la clase

1. Introducción
   - Conceptos generales
   - Aplicaciones
   - Métodos de identificación de sistemas

2. Método de Predicción Lineal
   - Predicción lineal
   - Resolución del sistema de Wiener-Hopf
   - Estimación del orden

3. Método adaptativo de Widrow

Predicción lineal

El modelo LTI más general

Modelo ARMA: predicción de la salida en el instante n a partir de salidas y entradas en instantes anteriores

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell u_{n-\ell}$$

$$H(z) = G \frac{1 + \sum_{\ell=1}^{q} b_\ell z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

Predicción lineal

El modelo LTI más general

Modelo ARMA: predicción de la salida en el instante n a partir de salidas y entradas en instantes anteriores

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell u_{n-\ell}$$

$$H(z) = G \frac{1 + \sum_{\ell=1}^{q} b_\ell z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

Simplificaciones iniciales

Modelo Auto Regresivo:

$$H(z) = G\frac{B(z)}{A(z)} \approx \frac{G}{C(z)}$$

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n$$

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

Simplificaciones iniciales

Modelo Auto Regresivo:

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n$$

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

Simplificaciones iniciales

Modelo Auto Regresivo:

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n$$

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

Simplificaciones iniciales

Modelo Auto Regresivo:

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n$$

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

Notación vectorial...

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-k} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_n = -\mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

Notación vectorial...

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-k} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_n = -\mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

Notación vectorial...

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-k} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_n = -\mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

Podemos usar una medida del error instantáneo para minimizar el error entre s_n y $\hat{s}_n$:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Minimizar e_n en todo el proceso - Error Cuadrático Total:

$$\xi^2 = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Para encontrar el mínimo:

$$\nabla_{\mathbf{a}} \; \xi^2 = 0$$

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

Podemos usar una medida del error instantáneo para minimizar el error entre s_n y $\hat{s}_n$:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Minimizar e_n en todo el proceso - Error Cuadrático Total:

$$\xi^2 = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Para encontrar el mínimo:

$$\nabla_{\mathbf{a}} \;\; \xi^2 = 0$$

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

Podemos usar una medida del error instantáneo para minimizar el error entre s_n y $\hat{s}_n$:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Minimizar e_n en todo el proceso - Error Cuadrático Total:

$$\xi^2 = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Para encontrar el mínimo:

$$\nabla_{\mathbf{a}} \; \xi^2 = 0$$

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right)^2 \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n^2 + 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right) \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n s_n^2 \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right\}$$

$$0 = 0 \; + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n + 2 \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} = - \sum_n s_n \mathbf{s}_n$$

Sistema de p ecuaciones con p incógnitas (ecuaciones normales).

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right)^2 \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n^2 + 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right) \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n s_n^2 \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right\}$$

$$0 = 0 + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n + 2 \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} = - \sum_n s_n \mathbf{s}_n$$

Sistema de p ecuaciones con p incógnitas (ecuaciones normales).

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right)^2 \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n^2 + 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right) \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n s_n^2 \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right\}$$

$$0 = 0 + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n + 2 \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} = - \sum_n s_n \mathbf{s}_n$$

Sistema de p ecuaciones con p incógnitas (ecuaciones normales).

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right)^2 \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n^2 + 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right) \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n s_n^2 \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right\}$$

$$0 = 0 \; + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n + 2 \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} = - \sum_n s_n \mathbf{s}_n$$

Sistema de p ecuaciones con p incógnitas (ecuaciones normales).

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right)^2 \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \left(s_n^2 + 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right) \right\}$$

$$0 = \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n s_n^2 \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n 2\mathbf{a}^T s_n \mathbf{s}_n \right\} + \nabla_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} \right\}$$

$$0 = 0 \ + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n + 2 \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} = - \sum_n s_n \mathbf{s}_n$$

Sistema de p ecuaciones con p incógnitas (ecuaciones normales).

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

Sistema de ecuaciones de Wiener-Hopf:

$$\left(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right) \mathbf{a} = -\sum_n \mathbf{s}_n s_n$$

con:

$$\mathbf{R} = \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r} = \sum_n \mathbf{s}_n s_n$$

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{r}$$

Cuadrados Mínimos

Minimización del error cuadrático / señales determinísticas

Sistema de ecuaciones de Wiener-Hopf:

$$\left(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right) \mathbf{a} = -\sum_n \mathbf{s}_n s_n$$

con:

$$\mathbf{R} = \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r} = \sum_n \mathbf{s}_n s_n$$

$$\boxed{\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{r}}$$

Autocorrelación
Señales aleatorias

Correlación cruzada:

$$R_{xy}(i,j) = \mathcal{E}\{x[n+i]y^*[n+j]\}$$

Autocorrelación
Señales aleatorias

Correlación cruzada:

$$R_{xy}(i,j) = \mathcal{E}\{x[n+i]y^*[n+j]\}$$

Autocorrelación:

$$R_s(i,j) = \mathcal{E}\{s[n+i]s^*[n+j]\}$$

Autocorrelación

Señales aleatorias

Correlación cruzada:

$$R_{xy}(i,j) = \mathcal{E}\{x[n+i]y^*[n+j]\}$$

Autocorrelación:

$$R_s(i,j) = \mathcal{E}\{s[n+i]s^*[n+j]\}$$

Matriz de autocorrelación:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s(0,0) & R_s(0,1) & R_s(0,2) & \ldots & R_s(0,N-1) \\ R_s(1,0) & R_s(1,1) & R_s(1,2) & \ldots & R_s(1,N-1) \\ R_s(2,0) & R_s(2,1) & R_s(2,2) & \ldots & R_s(2,N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_s(N-1,0) & R_s(N-1,1) & R_s(N-1,2) & \ldots & R_s(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

Autocorrelación

Señales determinísticas: la $\mathcal{E}$ pasa a ser $\sum$ y sólo depende del desplazamiento relativo $(i-j) \rightarrow R_s(i,j) = r_s(i-j)$

$$r_s(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n+i]$$

Autocorrelación

Señales determinísticas: la $\mathcal{E}$ pasa a ser $\sum$ y sólo depende del desplazamiento relativo $(i-j) \to R_s(i,j) = r_s(i-j)$

$$r_s(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n+i]$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(-1) & r_s(-2) & \dots & r_s(-N+1) \\ r_s(1) & r_s(0) & r_s(-1) & \dots & r_s(-N+2) \\ r_s(2) & r_s(1) & r_s(0) & \dots & r_s(-N+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_s(N-1) & r_s(N-2) & \dots & \dots & r_s(0) \end{bmatrix}$$

Autocorrelación

Señales determinísticas: la $\mathcal{E}$ pasa a ser $\sum$ y sólo depende del desplazamiento relativo $(i-j) \rightarrow R_s(i,j) = r_s(i-j)$

$$r_s(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n+i]$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(-1) & r_s(-2) & \dots & r_s(-N+1) \\ r_s(1) & r_s(0) & r_s(-1) & \dots & r_s(-N+2) \\ r_s(2) & r_s(1) & r_s(0) & \dots & r_s(-N+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_s(N-1) & r_s(N-2) & \dots & \dots & r_s(0) \end{bmatrix}$$

Notar que además $r_s(-i) = r_s(i)$ ...

Autocorrelación

Señales determinísticas: la $\mathcal{E}$ pasa a ser $\sum$ y sólo depende del desplazamiento relativo $(i-j) \rightarrow R_s(i,j) = r_s(i-j)$

$$r_s(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n+i]$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(1) & r_s(2) & \dots & \dots & r_s(N-1) \\ r_s(1) & r_s(0) & r_s(1) & \dots & \dots & r_s(N-2) \\ r_s(2) & r_s(1) & r_s(0) & \dots & \dots & r_s(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_s(N-2) & \dots & \dots & \dots & r_s(0) & r_s(1) \\ r_s(N-1) & r_s(N-2) & \dots & \dots & r_s(1) & r_s(0) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_s$ es **simétrica** y **Toeplitz**.

Sistema de Wiener-Hopf

Matriz y vector de autocorrelación

$$\boxed{\left(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right)\mathbf{a} = -\sum_n \mathbf{s}_n s_n}$$

$$\mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\sum_n \mathbf{s}_n s_n = \sum_n s_n \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n s_{n-1} s_n \\ \sum_n s_{n-2} s_n \\ \vdots \\ \sum_n s_{n-p} s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s(1) \\ r_s(2) \\ \vdots \\ r_s(p) \end{bmatrix} = \mathbf{r}$$

Sistema de Wiener-Hopf

Matriz y vector de autocorrelación

$$\boxed{\left(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right) \mathbf{a} = -\sum_n \mathbf{s}_n s_n}$$

$$\mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\sum_n s_n \mathbf{s}_n = \sum_n s_n \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n s_{n-1} s_n \\ \sum_n s_{n-2} s_n \\ \vdots \\ \sum_n s_{n-p} s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s(1) \\ r_s(2) \\ \vdots \\ r_s(p) \end{bmatrix} = \mathbf{r}$$

Sistema de Wiener-Hopf

Matriz y vector de autocorrelación

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T = \sum_n \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix} [s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots s_{n-p}] =$$

$$\sum_n \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & \cdots & s_{n-1}s_{n-p} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & \cdots & s_{n-2}s_{n-p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-p}s_{n-1} & s_{n-p}s_{n-2} & \cdots & s_{n-p}s_{n-p} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_s$$

Sistema de Wiener-Hopf

Matriz y vector de autocorrelación

$$\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T = \sum_n \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix} \left[s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots s_{n-p} \right] =$$

$$\sum_n \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & \cdots & s_{n-1}s_{n-p} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & \cdots & s_{n-2}s_{n-p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ s_{n-p}s_{n-1} & s_{n-p}s_{n-2} & \cdots & s_{n-p}s_{n-p} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_s$$

Sistema de Wiener-Hopf

Rango de la sumatoria

Ejemplo: un sistema de orden $P = 3$

$$\mathbf{R}_s = \sum_{n=?}^{?} \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & s_{n-1}s_{n-3} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & s_{n-2}s_{n-3} \\ s_{n-3}s_{n-1} & s_{n-3}s_{n-2} & s_{n-3}s_{n-3} \end{bmatrix},$$

Sistema de Wiener-Hopf

Rango de la sumatoria

Ejemplo: un sistema de orden $P = 3$

$$\mathbf{R}_s = \sum_{n=?}^{?} \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & s_{n-1}s_{n-3} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & s_{n-2}s_{n-3} \\ s_{n-3}s_{n-1} & s_{n-3}s_{n-2} & s_{n-3}s_{n-3} \end{bmatrix},$$

Si sumamos $n = 1 \ldots 3$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} s_0s_0 + s_1s_1 + s_2s_2 & s_0s_{-1} + s_1s_0 + s_2s_1 & s_0s_{-2} + s_1s_{-1} + s_2s_0 \\ s_{-1}s_0 + s_0s_1 + s_1s_2 & s_{-1}s_{-1} + s_0s_0 + s_1s_1 & s_{-1}s_{-2} + s_0s_{-1} + s_1s_0 \\ s_{-2}s_0 + s_{-1}s_1 + s_0s_2 & s_{-2}s_{-1} + s_{-1}s_0 + s_0s_1 & s_{-2}s_{-2} + s_{-1}s_{-1} + s_0s_0 \end{bmatrix}$$

R_s es simétrica pero no es Toeplitz.

Método de Covariancia: intervalo finito

Sistema de Wiener-Hopf
Rango de la sumatoria

Ejemplo: un sistema de orden $P = 3$

$$\mathbf{R}_s = \sum_{n=?}^{?} \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & s_{n-1}s_{n-3} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & s_{n-2}s_{n-3} \\ s_{n-3}s_{n-1} & s_{n-3}s_{n-2} & s_{n-3}s_{n-3} \end{bmatrix},$$

Si $s_n \neq 0$ sólo para $n = 1 \dots 3$ y sumamos desde $-\infty$ hasta ∞:

$$r_{1,1} = \sum_{-\infty}^{\infty} s_{n-1}s_{n-1} = \dots s_{-1}s_{-1} + s_0 s_0 + s_1 s_1 + s_2 s_2 + s_3 s_3 + s_4 s_4 + s_5 s_5 + \dots$$

Sistema de Wiener-Hopf
Rango de la sumatoria

Ejemplo: un sistema de orden $P = 3$

$$\mathbf{R}_s = \sum_{n=?}^{?} \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & s_{n-1}s_{n-3} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & s_{n-2}s_{n-3} \\ s_{n-3}s_{n-1} & s_{n-3}s_{n-2} & s_{n-3}s_{n-3} \end{bmatrix},$$

Si $s_n \neq 0$ sólo para $n = 1 \ldots 3$ y sumamos desde $-\infty$ hasta ∞:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 & s_2s_1 + s_3s_2 & s_3s_1 \\ s_1s_2 + s_2s_3 & s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 & s_2s_1 + s_3s_2 \\ s_1s_3 & s_1s_2 + s_2s_3 & s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 \end{bmatrix}$$

Sistema de Wiener-Hopf

Rango de la sumatoria

Ejemplo: un sistema de orden $P = 3$

$$\mathbf{R}_s = \sum_{n=?}^{?} \begin{bmatrix} s_{n-1}s_{n-1} & s_{n-1}s_{n-2} & s_{n-1}s_{n-3} \\ s_{n-2}s_{n-1} & s_{n-2}s_{n-2} & s_{n-2}s_{n-3} \\ s_{n-3}s_{n-1} & s_{n-3}s_{n-2} & s_{n-3}s_{n-3} \end{bmatrix},$$

Si $s_n \neq 0$ sólo para $n = 1 \ldots 3$ y sumamos desde $-\infty$ hasta ∞:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 & s_2s_1 + s_3s_2 & s_3s_1 \\ s_1s_2 + s_2s_3 & s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 & s_2s_1 + s_3s_2 \\ s_1s_3 & s_1s_2 + s_2s_3 & s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_s$ es simétrica y Toeplitz.
Sólo necesitamos sumar $2N - 1$ términos.

Método de Correlación: intervalo "infinito"

Señales aleatorias

En el caso de señales **aleatorias** debemos considerar el valor **esperado** del error instantáneo:

$$\xi^2 = \mathcal{E}\left[e_n^2\right] = \mathcal{E}\left[s_n^2\right] + \mathbf{a}^T 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + \mathbf{a}^T \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a}$$

$$\nabla_{\mathbf{a}} \xi^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a} = -\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right]$$

Autocorrelación (señales aleatorias): $R_s(i,j) = \mathcal{E}\{s[n+i]s^*[n+j]\}$

Señales estacionarias:
La matriz de correlación $\mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] = \mathbf{R}$ es simétrica y Toeplitz, como en el caso de señales determinísticas.

Señales localmente estacionarias.

Señales aleatorias

En el caso de señales **aleatorias** debemos considerar el valor **esperado** del error instantáneo:

$$\xi^2 = \mathcal{E}\left[e_n^2\right] = \mathcal{E}\left[s_n^2\right] + \mathbf{a}^T 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + \mathbf{a}^T \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a}$$

$$\nabla_{\mathbf{a}} \xi^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a} = -\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right]$$

Autocorrelación (señales aleatorias): $R_s(i,j) = \mathcal{E}\{s[n+i]s^*[n+j]\}$

Señales estacionarias:
La matriz de correlación $\mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] = \mathbf{R}$ es simétrica y Toeplitz, como en el caso de señales determinísticas.

Señales localmente estacionarias.

Señales aleatorias

En el caso de señales **aleatorias** debemos considerar el valor **esperado** del error instantáneo:

$$\xi^2 = \mathcal{E}\left[e_n^2\right] = \mathcal{E}\left[s_n^2\right] + \mathbf{a}^T 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + \mathbf{a}^T \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a}$$

$$\nabla_{\mathbf{a}} \xi^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a} = -\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right]$$

Autocorrelación (señales aleatorias): $R_s(i,j) = \mathcal{E}\{s[n+i]s^*[n+j]\}$

Señales estacionarias:
La matriz de correlación $\mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] = \mathbf{R}$ es simétrica y Toeplitz, como en el caso de señales determinísticas.

Señales localmente estacionarias.

Resolución del sistema de Wiener-Hopf

Algoritmo de Levinson-Durbin

$$E_0 = r_0$$

$$\text{Para } \; 1 \leq i \leq p \rightarrow \begin{cases} k_i = -\frac{1}{E_{i-1}} \left[r_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-1} r_{i-j} \right] \\ a_{i,i} = k_i \\ a_{j,i} = a_{j,i-1} + k_i a_{i-j,i-1}, \quad 1 \leq j \leq i-1 \\ E_i = E_{i-1}(1 - k_i^2) \end{cases}$$

Coeficientes a_{ij}:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

Resolución del sistema de Wiener-Hopf

Algoritmo de Levinson-Durbin

$$E_0 = r_0$$

$$\text{Para } \; 1 \leq i \leq p \rightarrow \begin{cases} k_i = -\frac{1}{E_{i-1}} \left[r_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-1} r_{i-j} \right] \\ a_{i,i} = k_i \\ a_{j,i} = a_{j,i-1} + k_i a_{i-j,i-1}, \quad 1 \leq j \leq i-1 \\ E_i = E_{i-1}(1 - k_i^2) \end{cases}$$

Coeficientes a_{ij}:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n,$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n, \qquad \text{si } \; u_n = \delta_n \quad \rightarrow \quad h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n,$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n, \qquad \text{si} \;\; u_n = \delta_n \quad \rightarrow \quad h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n,$$

Si multiplicamos por h_n y sumamos para n:

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_n h_n \sum_k a_k h_{n-k} + \sum_n h_n G\,\delta_n,$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n, \qquad \text{si } \ u_n = \delta_n \quad \rightarrow \quad h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n,$$

Si multiplicamos por h_n y sumamos para n:

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_n h_n \sum_k a_k h_{n-k} + \sum_n h_n G\,\delta_n,$$

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_k a_k \sum_n h_n h_{n-k} + G \sum_n h_n \delta_n,$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n, \qquad \text{si } \ u_n = \delta_n \quad \rightarrow \quad h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n,$$

Si multiplicamos por h_n y sumamos para n:

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_n h_n \sum_k a_k h_{n-k} + \sum_n h_n G\,\delta_n,$$

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_k a_k \sum_n h_n h_{n-k} + G \sum_n h_n \delta_n,$$

$$r_0 = -\sum_k a_k r_k + G^2,$$

Determinación de la constante de ganancia G

Modelo AR:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n, \qquad \text{si } \; u_n = \delta_n \quad \rightarrow \quad h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n,$$

Si multiplicamos por h_n y sumamos para n:

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_n h_n \sum_k a_k h_{n-k} + \sum_n h_n G\,\delta_n,$$

$$\sum_n h_n h_n = -\sum_k a_k \sum_n h_n h_{n-k} + G \sum_n h_n \delta_n,$$

$$r_0 = -\sum_k a_k r_k + G^2,$$

lo que demuestra que:

$$G^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{a} + r_0.$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Determinación de la constante de ganancia G

Recordemos la expresión del Error Cuadrático Total:

$$E_p = \sum_n (s_n - \hat{s}_n)^2 = \sum_n \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2 \sum_n s_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a} + \sum_n \mathbf{a}^T \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = \sum_n s_n^2 + 2\mathbf{a}^T \sum_n s_n \mathbf{s}_n + \mathbf{a}^T \sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} + \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

$$E_p = r_0 + 2\mathbf{a}^T \mathbf{r} - \mathbf{a}^T \mathbf{r}$$

$$\boxed{E_p = r_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{r} = G^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{G = \sqrt{E_p}}$$

Estimación del orden

Error de predicción final

E_p decrece monótonamente con p.

¿Cuál es el p óptimo?

Definimos el error normalizado como:

$$V_p = \frac{E_p}{r_0}$$

Definimos un umbral γ e incrementamos p hasta satisfacer:

$$1 - \frac{V_{p+1}}{V_p} < \gamma$$

Estimación del orden

Error de predicción final

E_p decrece monótonamente con p.

¿Cuál es el p óptimo?

Definimos el error normalizado como:

$$V_p = \frac{E_p}{r_0}$$

Definimos un umbral γ e incrementamos p hasta satisfacer:

$$1 - \frac{V_{p+1}}{V_p} < \gamma$$

Estimación del orden

Criterio de Akaike

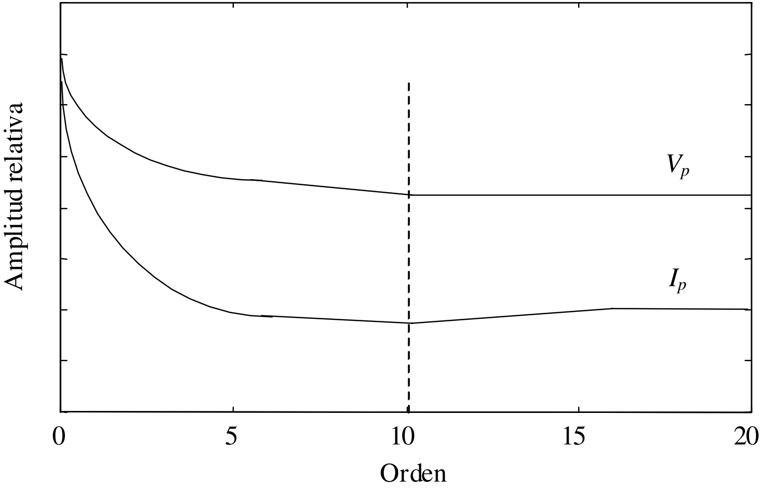
Basado en teoría de la información define:

$$I_p = \log E_p + \frac{2p}{N_e}$$

$$N_e = \frac{E_w}{E_r} N.$$

Este criterio provee un mínimo en el p óptimo.

Estimación del orden: comparación



Organización de la clase

Método adaptativo de Widrow

Consideremos s_n no-estacionaria y volvamos al error cuadrático instantáneo:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2 = \xi_n^2$$

Tenemos que buscar el mínimo en cada instante n:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mu(-\nabla \xi_n^2)$$

(método de Newton)

Método adaptativo de Widrow

Consideremos s_n no-estacionaria y volvamos al error cuadrático instantáneo:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2 = \xi_n^2$$

Tenemos que buscar el mínimo en cada instante n:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mu(-\nabla \xi_n^2)$$

(método de Newton)

Método adaptativo de Widrow

$$\hat{\nabla}\xi_n^2 = \frac{\partial\, e_n^2}{\partial\, \mathbf{a}_n} = 2e_n \frac{\partial\left(s_n + \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n\right)}{\partial \mathbf{a}_n} = 2e_n \mathbf{s}_n$$

Método adaptativo de Widrow

$$\hat{\nabla}\xi_n^2 = \frac{\partial\, e_n^2}{\partial\, \mathbf{a}_n} = 2e_n \frac{\partial\left(s_n + \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n\right)}{\partial \mathbf{a}_n} = 2e_n \mathbf{s}_n$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - 2\mu e_n \mathbf{s}_n$$

donde $\mathbf{a}_0$ se inicializa en $[-0{,}5, 0{,}5]$ y $0 < \mu < \frac{1}{T(\mathbf{R})}$

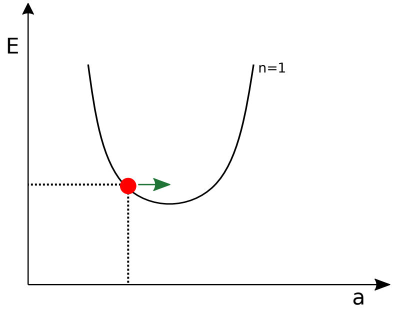
Método adaptativo de Widrow

$$\hat{\nabla}\xi_n^2 = \frac{\partial\, e_n^2}{\partial\, \mathbf{a}_n} = 2e_n \frac{\partial\left(s_n + \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n\right)}{\partial \mathbf{a}_n} = 2e_n \mathbf{s}_n$$

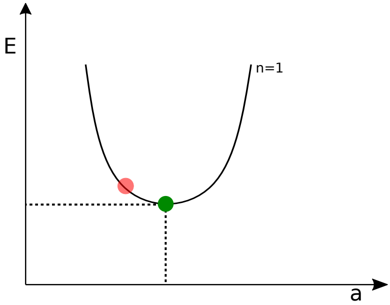
$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - 2\mu e_n \mathbf{s}_n$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_N] = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,0} & a_{p,1} & \cdots & a_{p,N} \end{bmatrix}$$

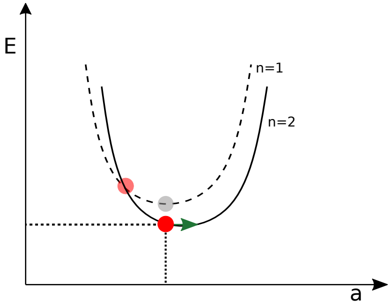
Método adaptativo de Widrow



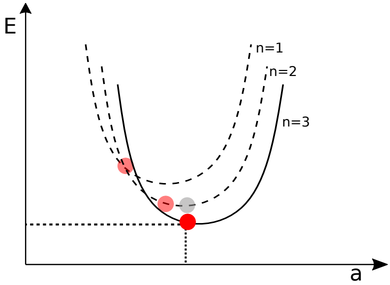
Método adaptativo de Widrow



Método adaptativo de Widrow



Método adaptativo de Widrow



Bibliografía

- J. Makhoul, "Linear Prediction: A Tuturial Review", Proc. IEEE, volumen 63, no. 4, páginas 561-580, 1975.
- L. R. Rabiner y B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice Hall, 1975. Capítulo 12.
- J. R. Deller, J. G. Proakis, J. H. Hansen, Discrete-Time Processing of Speech Signals, Prentice Hall, 1993. Capítulo 5.
- C. W. Therrien, Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing, Prentice Hall, 1992. Capítulos 4 y 8.
- J. G. Proakis y D. G. Manolakis, Tratamiento digital de señales, 3ra edición, 1998. Capítulo 11.