

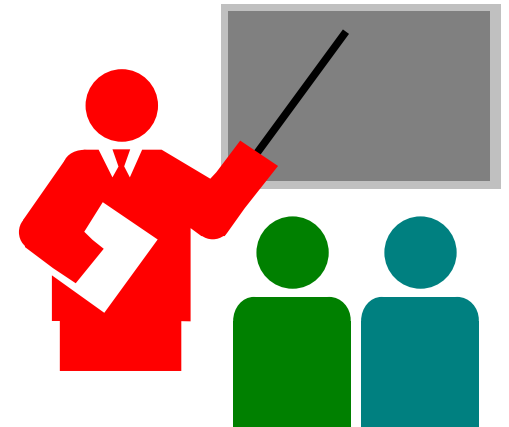
Análisis de Fourier

DFT/FFT



Temas a tratar

- Introducción
- Series de Fourier
- Transformada continua de Fourier
- Propiedades y transformada inversa
- Transformada discreta de Fourier
- Alias de muestreo en el dominio de la frecuencia
- Algoritmos de cálculo.



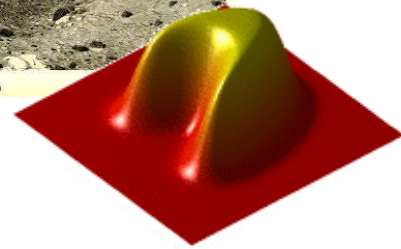
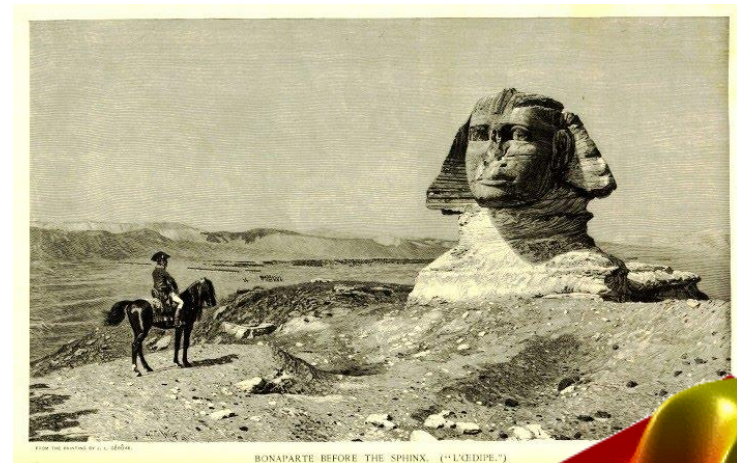
“Análisis” en frecuencias

- La luz del sol puede descomponerse en un espectro de colores.
- El sonido puede descomponerse en señales de frecuencias puras.
- Este análisis puede extenderse también a una amplia variedad de señales analógicas o digitales.

Un poco de historia...



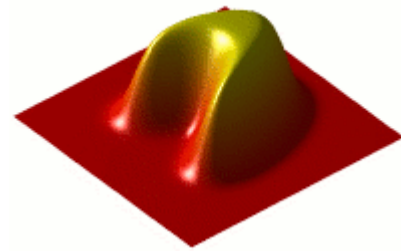
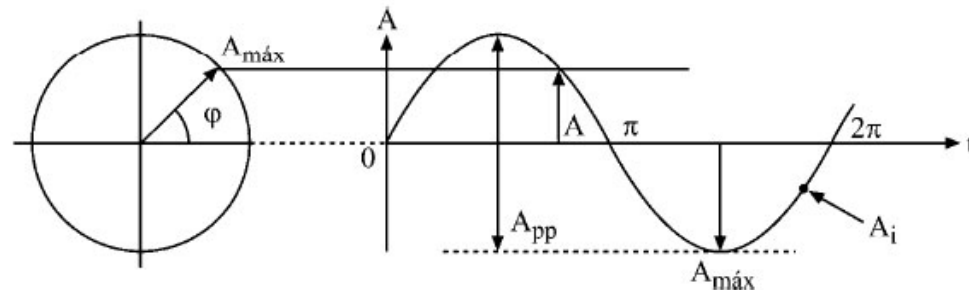
- En 1807 Fourier estudiaba el fenómeno de la conducción del calor en un cuerpo.
- Le interesaba en particular el problema de la difusión del calor en los cañones...



Un poco de historia...



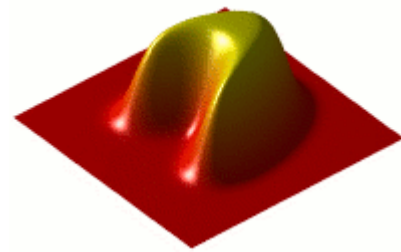
- Sabía que:
 - una cuerda puede vibrar de varios modos, pero **todos armónicos** (la relación entre sus frecuencias es un número fraccionario, *Euler 1748*).
 - las **proyecciones de un vector rotativo** con velocidad angular fija sobre los ejes x e y **dan el coseno y el seno** del ángulo correspondiente.



Un poco de historia...



- La nota producida por una cuerda vendrá determinada por la longitud (L), la tensión (T), la densidad (d) y la sección (S).
 - Así, si disponemos de una cuerda muy tensa y fina, obtendremos una nota aguda;
 - y por el contrario, si la cuerda está poco tensa y es gruesa, la nota será grave.

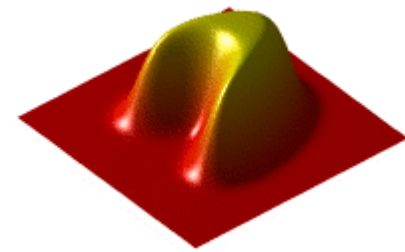
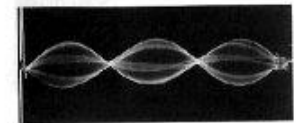
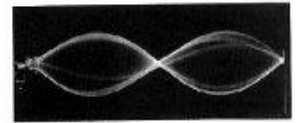
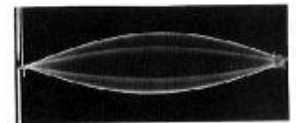
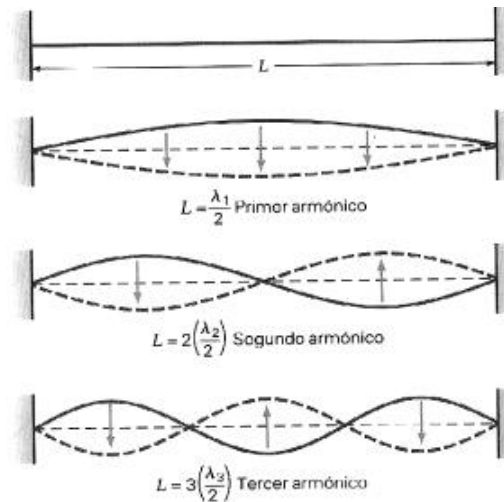


Un poco de historia...



- La frecuencia se puede encontrar a partir de la fórmula:

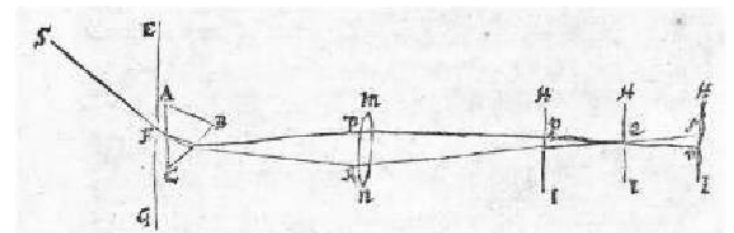
$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{T}{d \cdot S}}$$



Un poco de historia...



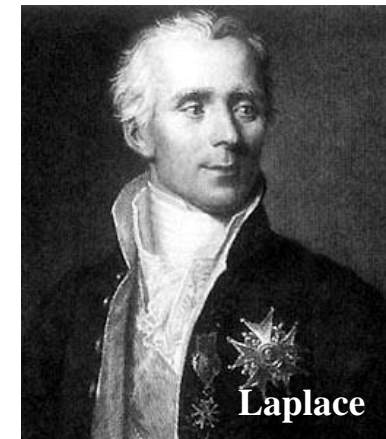
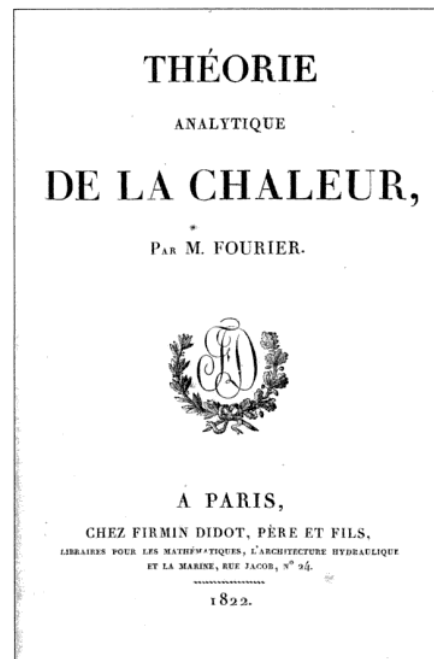
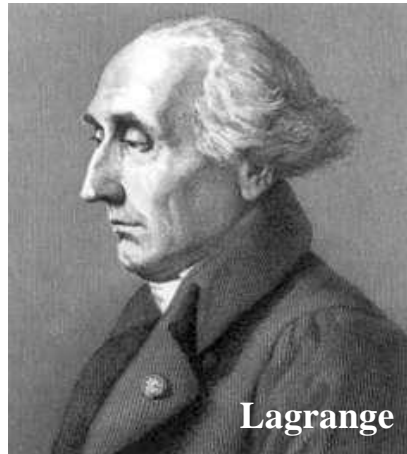
- Con estos conceptos Fourier elaboró su teoría:
 - Sumando funciones armónicas de diferente amplitud y fase podemos construir cualquier función periódica (y la uso para resolver la ecuación del calor).
 - El conjunto de estas armónicas forma el **espectro** (por “*spectrum*”, Newton 1670).



Un poco de historia...

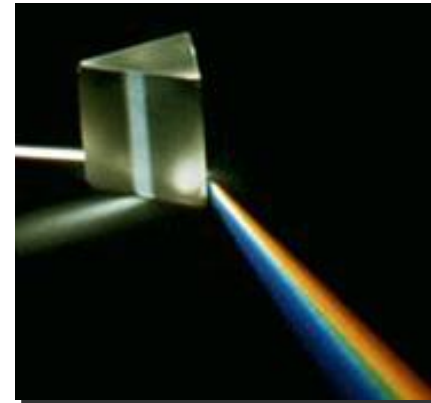


- Su trabajo fue publicado recién en 1822:



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Análisis:
 - Consiste en aislar los componentes del sistema que tienen una forma compleja para tratar de comprender mejor su naturaleza u origen.



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Se dedica al estudio de señales: periódicas o no periódicas, continuas o discretas, en el dominio del tiempo, o de cualquier otra variable unidimensional, bidimensional o multidimensional.
- En sus versiones más avanzadas estudia: procesos estocásticos, funciones de distribución, y topologías complejas, pero sus fundamentos siguen siendo muy simples.

¿Qué es el Análisis de Fourier...?

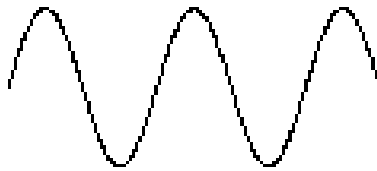
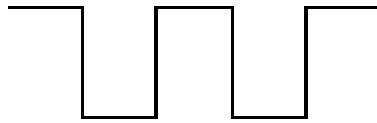
Las señales pueden ser tan variadas como:

- La población de un país a lo largo de los siglos.
- La altura de las mareas en su ciclo mensual.
- La irradiación de una antena, en función del ángulo.
- La forma de onda de la vocal /A/ del francés.
- La iluminación en cada punto de una imagen de TV.
- Las espigas de un electroencefalograma (EEG).
- las rugosidades en el perfil de un terreno.
- las variaciones de resistividad eléctrica, mientras se explora el perfil de un pozo de petróleo.

Transformada de Fourier

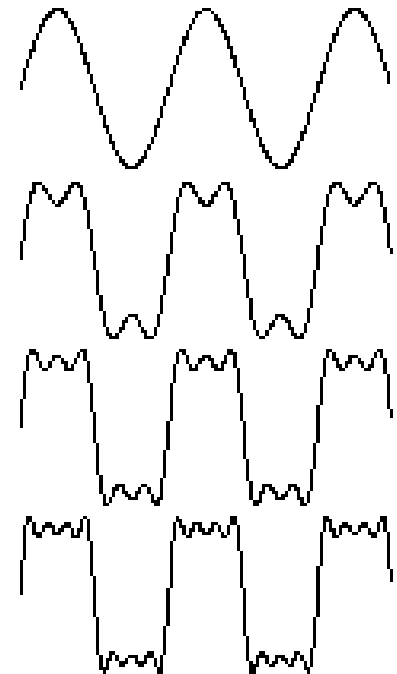
- La TF es una representación de una función en el dominio de la frecuencia:
 - Contiene exactamente la misma información que la señal original
 - Sólo difiere en la manera en que se presenta

Por ejemplo:



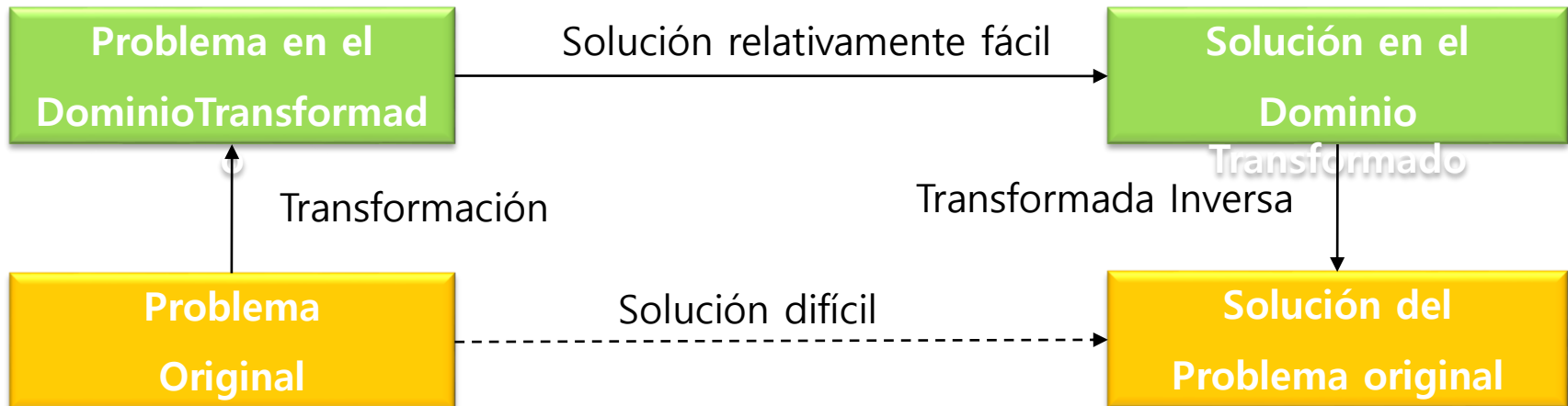
Una onda cuadrada puede obtenerse sumando:

- la fundamental
- menos $\frac{1}{3}$ de la 3er armónica...
- más $\frac{1}{5}$ de la 5ta armónica...
- menos $\frac{1}{7}$ de la 7ma armónica....



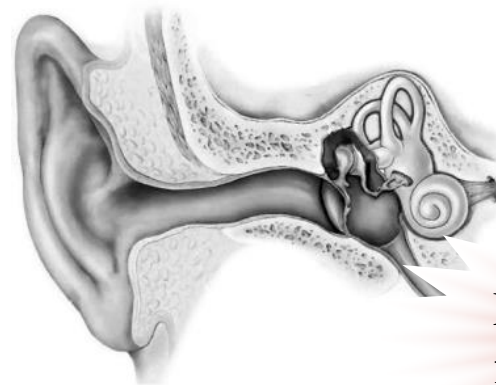
Solución de Problemas

- Un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" (dominio t) originales, a menudo, es más sencillo de resolver al transformarlo al dominio f .
- Después, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



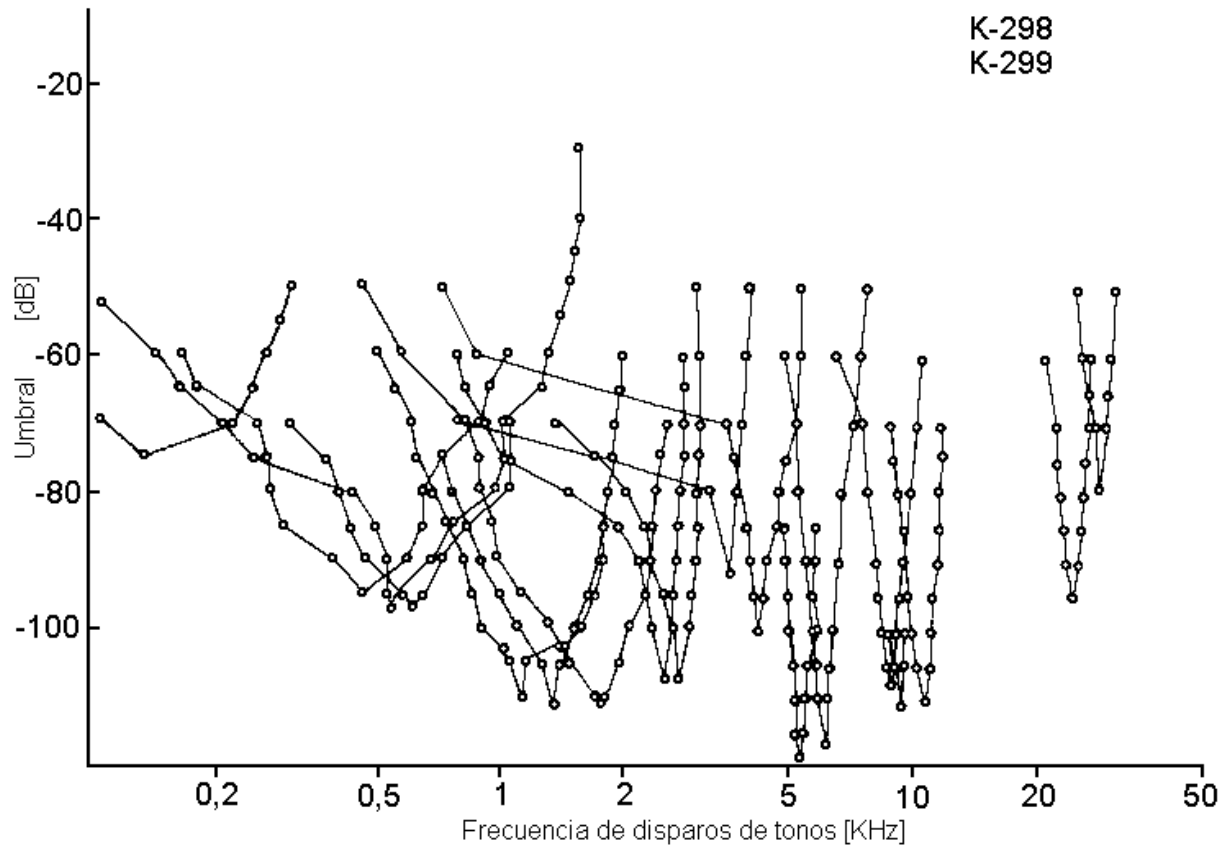
El piano como “analizador” espectral:

- Abrir la tapa del piano y presionar el pedal que controla la intensidad.
- Aplaudir fuerte sobre el piano.
- Se verán y oirán las cuerdas vibrando como eco al sonido del aplauso.
- Las cuerdas que vibran muestran las componentes de frecuencia.
- La cantidad de vibración muestra la amplitud de cada una.
- Cada cuerda actúa como un resonador sintonizado cuidadosamente.



Nuestro oído
funciona “así”

El oído como analizador espectral



- Curvas de sintonía de las fibras del nervio auditivo

Tiempo vs Frecuencia

- Entender la relación entre tiempo y frecuencia es útil:
 - Algunas señales se visualizan mejor en la frecuencia.
 - Algunas señales se visualizan mejor en el tiempo.
 - Esto tiene que ver con la forma en que se presenta la información en cada dominio.
- Ejemplo:
 - Una onda senoidal utiliza “muchas” información para definirse adecuadamente en el tiempo, pero no en la frecuencia.

Volvamos sobre los espacios...

Volviendo sobre espacios...

- Para representar un vector \mathbf{f} en un espacio de n dimensiones generado por el conjunto $\{\mathbf{v}_i\}$, $i = 1..n$ puede usarse la siguiente combinación lineal:
- $\mathbf{f} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$
- Si efectuamos el producto interno por \mathbf{v}_i en ambos miembros:
- $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \dots + c_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \dots + c_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i$$

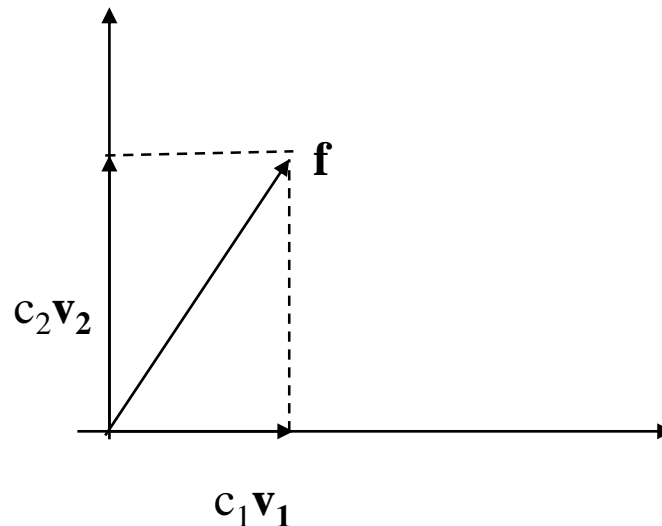
- Si el conjunto de generadores es ortogonal

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

- de donde $c_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i / (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$

Entonces, los coeficientes c_i que permiten expresar a \mathbf{f} en función de una base ortogonal de vectores serán:

$$c_i = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}$$



Qué ocurre si $\{\mathbf{v}_i\}$ no genera el espacio en que está contenido \mathbf{f} ?

- Entonces la suma vectorial anterior es sólo una aproximación a \mathbf{f} , y lleva implícito un error.
- ¿De qué manera se pueden seleccionar adecuadamente los c_i para reducir el error de aproximación?

Vamos a considerar el espacio de las señales
definidas en $[t_1, t_2]$

- Supongamos que queremos representar a la
función $f(t)$ en términos de un conjunto $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,N}$
que es ortogonal en $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ k_i, & i = j \end{cases}$$

Si expresamos la combinación lineal

$$f(t) \sim c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_N \phi_N(t)$$

podemos hallar los coeficientes que
minimicen el ECM

$$ECM = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t) \right)^2 dt$$

Los c_i que cumplen tal condición son los *coeficientes generalizados de Fourier*:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t) dt}$$

Si las funciones $\phi_i(t)$ son complejas se obtienen los coeficientes:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_i^*(t) dt}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_i^*(t) dt}$$

1

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

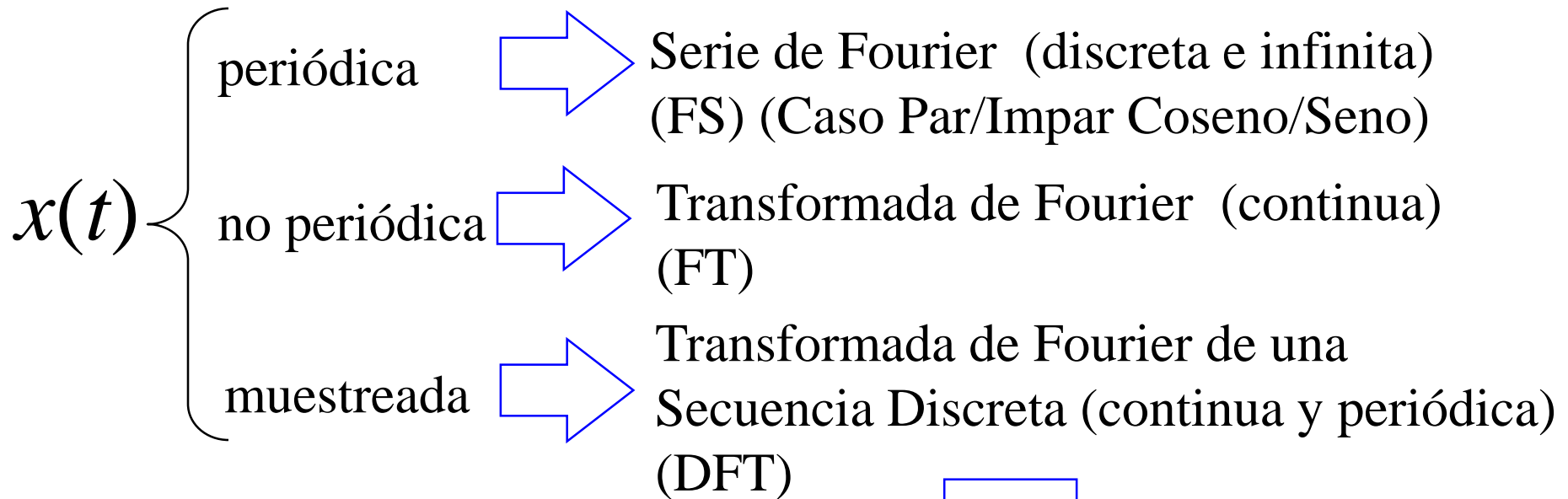
$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt$$

La familia de Fourier

Funciones de Fourier

- Senos y cosenos con frecuencias discretas
 - Series seno y coseno
- Exponenciales complejos con frecuencia discreta
 - Series de Fourier
- Exponenciales complejos continuos
 - Transformada continua de Fourier
- Exponenciales complejos discretos
 - Transformada discreta de Fourier



¿Y si $x(t)$ es aleatoria?

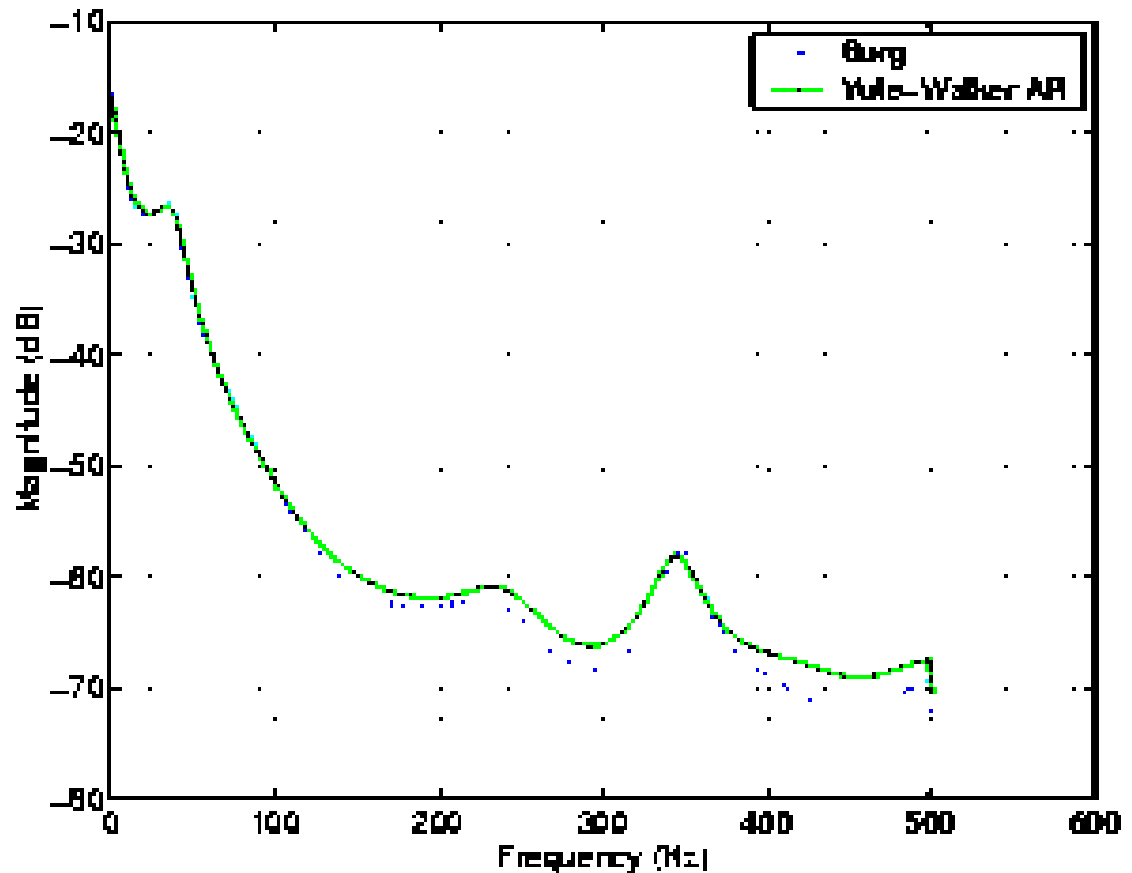
Estimación Espectral

Transformada Discreta de Fourier (DFT) (discreta y finita)

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

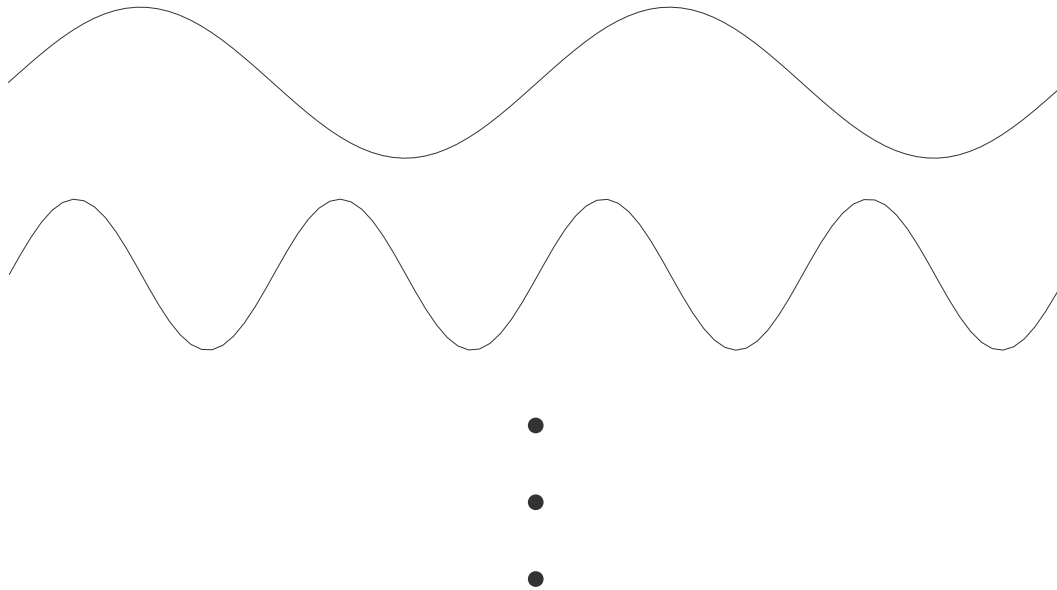
Estimación espectral

- Si $x(t)$ es aleatoria no puedo conocer exactamente su espectro, debo estimarlo.
- Métodos:
 - No paramétricos
 - Paramétricos
 - Subespacio



Series seno: base

$$\varphi_n(t) = \sin(2\pi n f_0 t)$$



Series seno: transformación

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

Series seno: inversa

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

Series coseno:

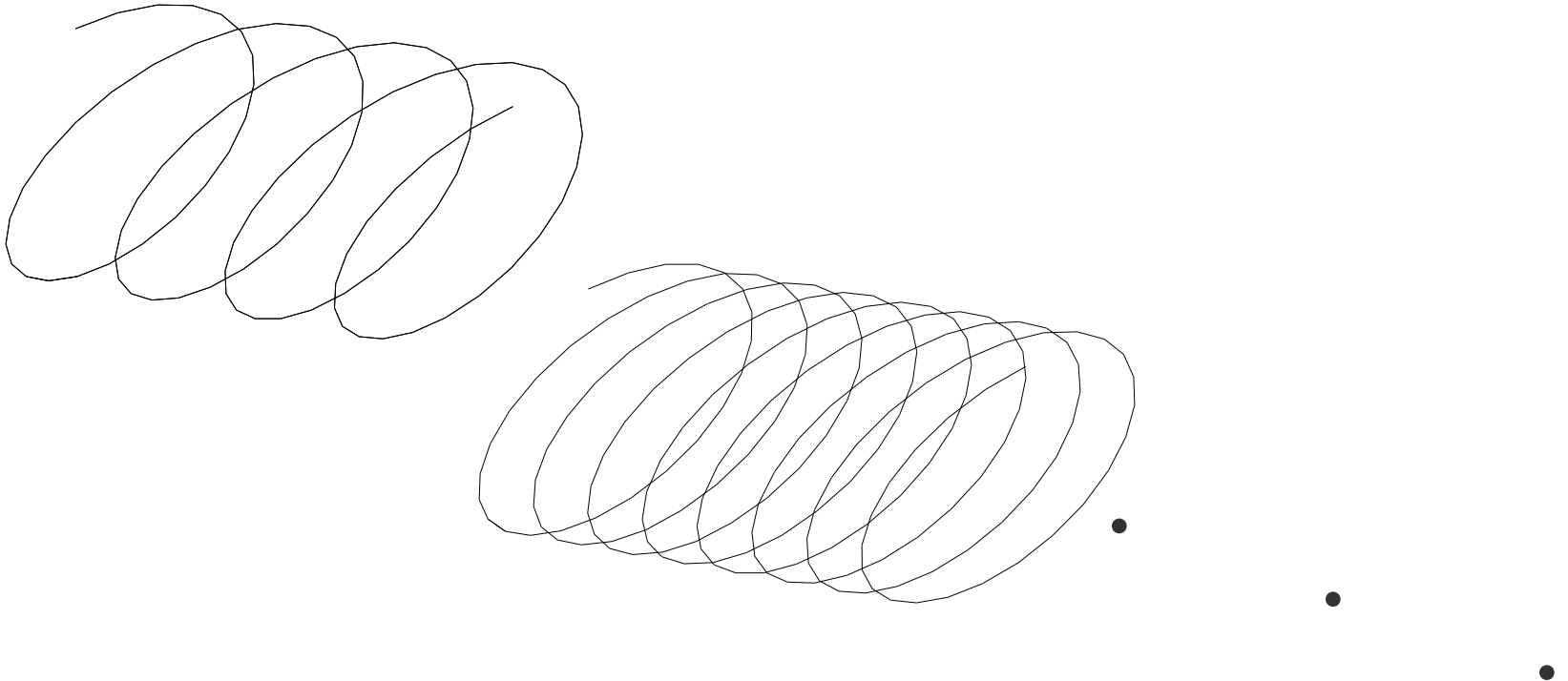
$$\varphi_n(t) = \cos(2\pi n f_0 t)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2\pi n f_0 t)$$

Series de Fourier: base

$$\varphi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$



Serie de Fourier

$$\text{Si } x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kt / T) + b_k \sin(2\pi kt / T)]$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(2\pi kt / T) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(2\pi kt / T) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Serie de Fourier

$$\frac{1}{T} = f_0$$

$$2\pi f_0 = \omega_0$$

$$\text{Si } x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kt / T) + b_k \sin(2\pi kt / T)]$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(2\pi kt / T) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(2\pi kt / T) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Serie de Fourier

La forma compleja de la serie de Fourier es

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{(-j2k\pi t/T)} dt$$

Ecuación de Análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi t/T)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

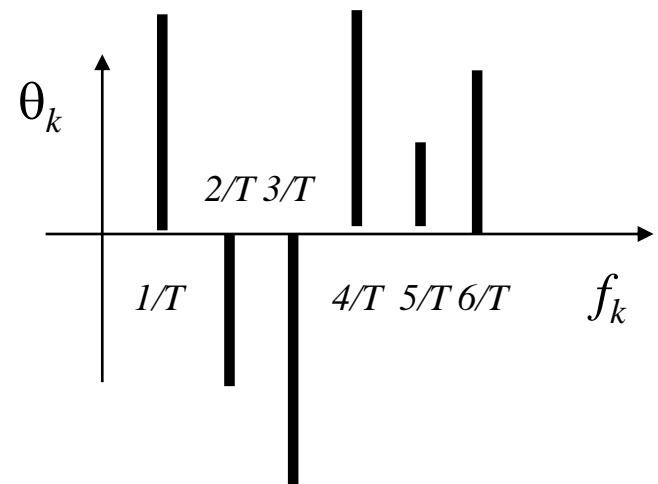
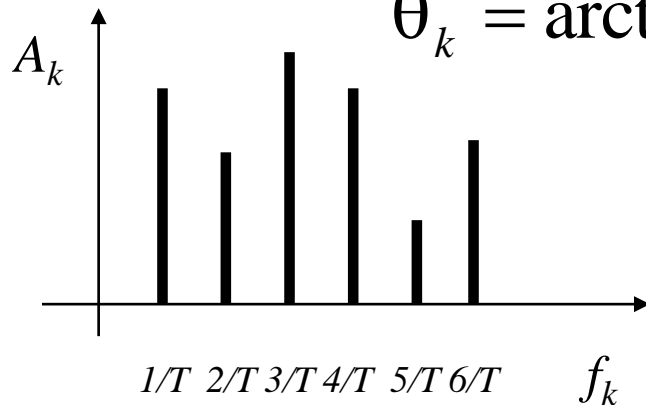
Ecuación de Síntesis

Serie de Fourier

$x(t)$ puede expresarse como una suma de armónicos de la frecuencia fundamental $1/T$

$$A_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\theta_k = \text{arctg}(-b_k / a_k)$$

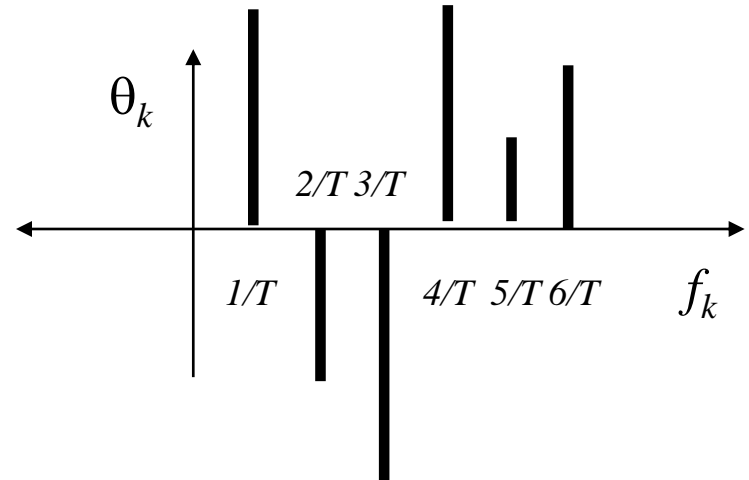
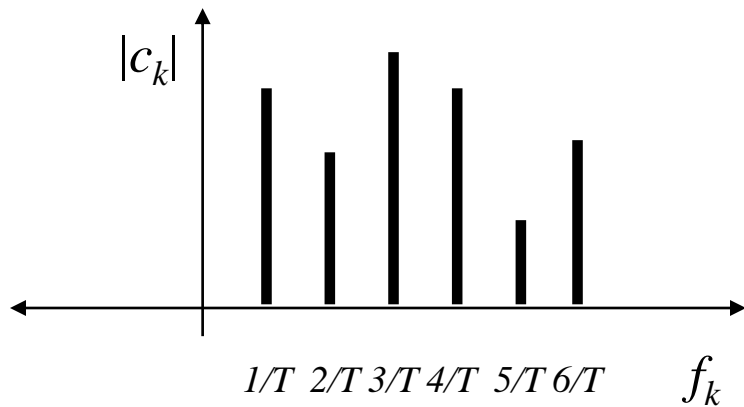


Espectro de una señal periódica

Espectro de Magnitud

(Discretos)

Espectro de Fase



De la Serie de Fourier a la Transformada de Fourier

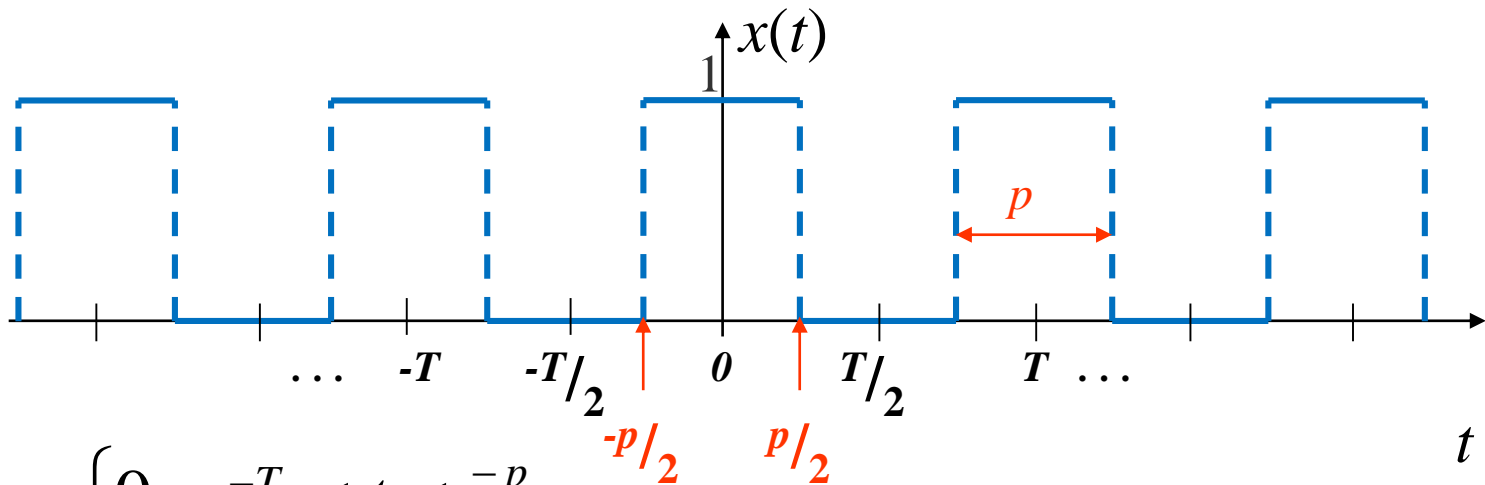
- La SF nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones periódicas* $x(t)$.
- ¿Es posible extender las SF para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones no periódicas*?

¿Qué ocurre cuando $T \rightarrow \infty$?

¿ó $f_0 \rightarrow 0$?

Consideremos la función periódica:

- Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T :



$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

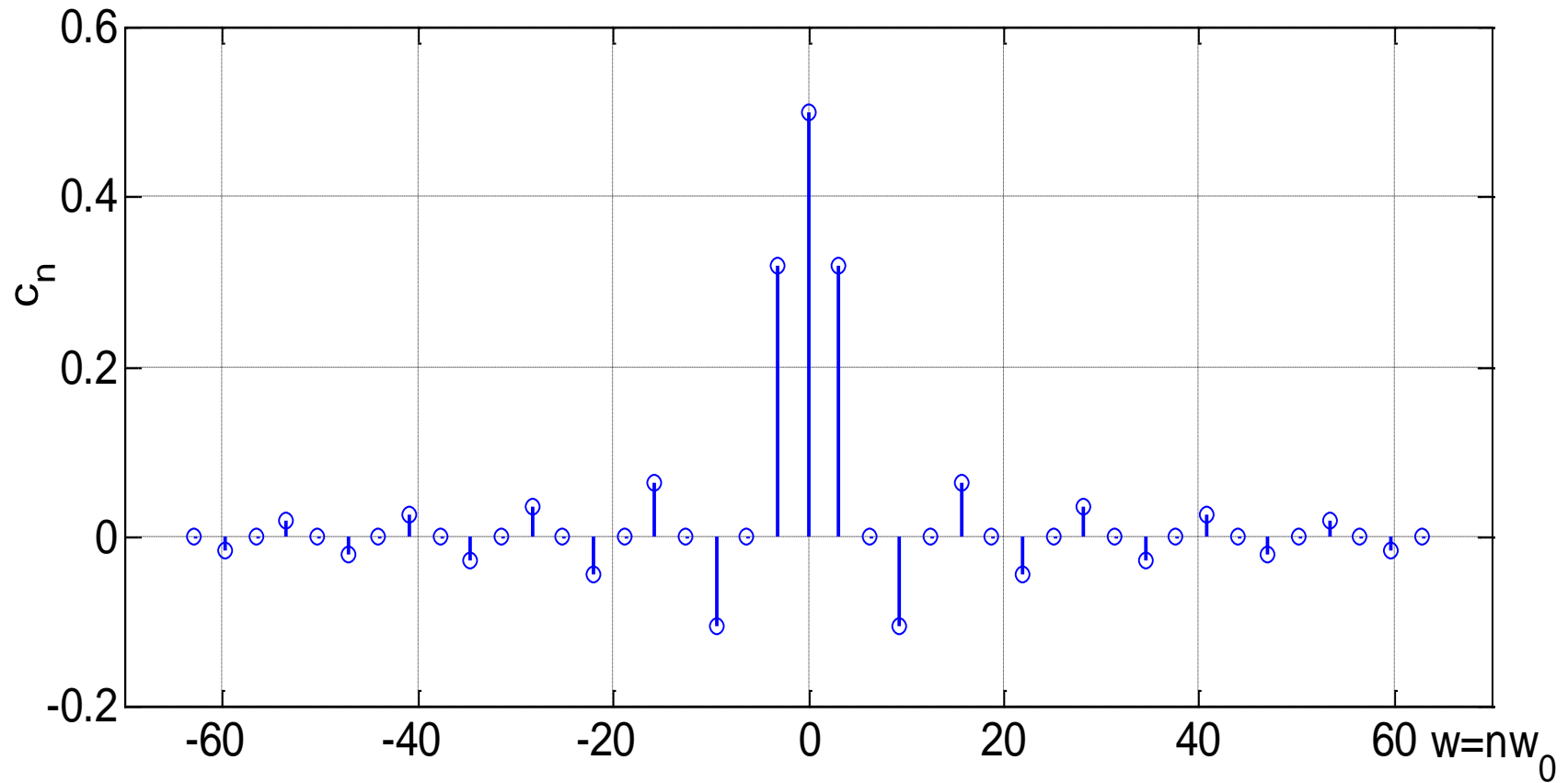
Haciendo las cuentas...

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier son (en este caso todos reales):

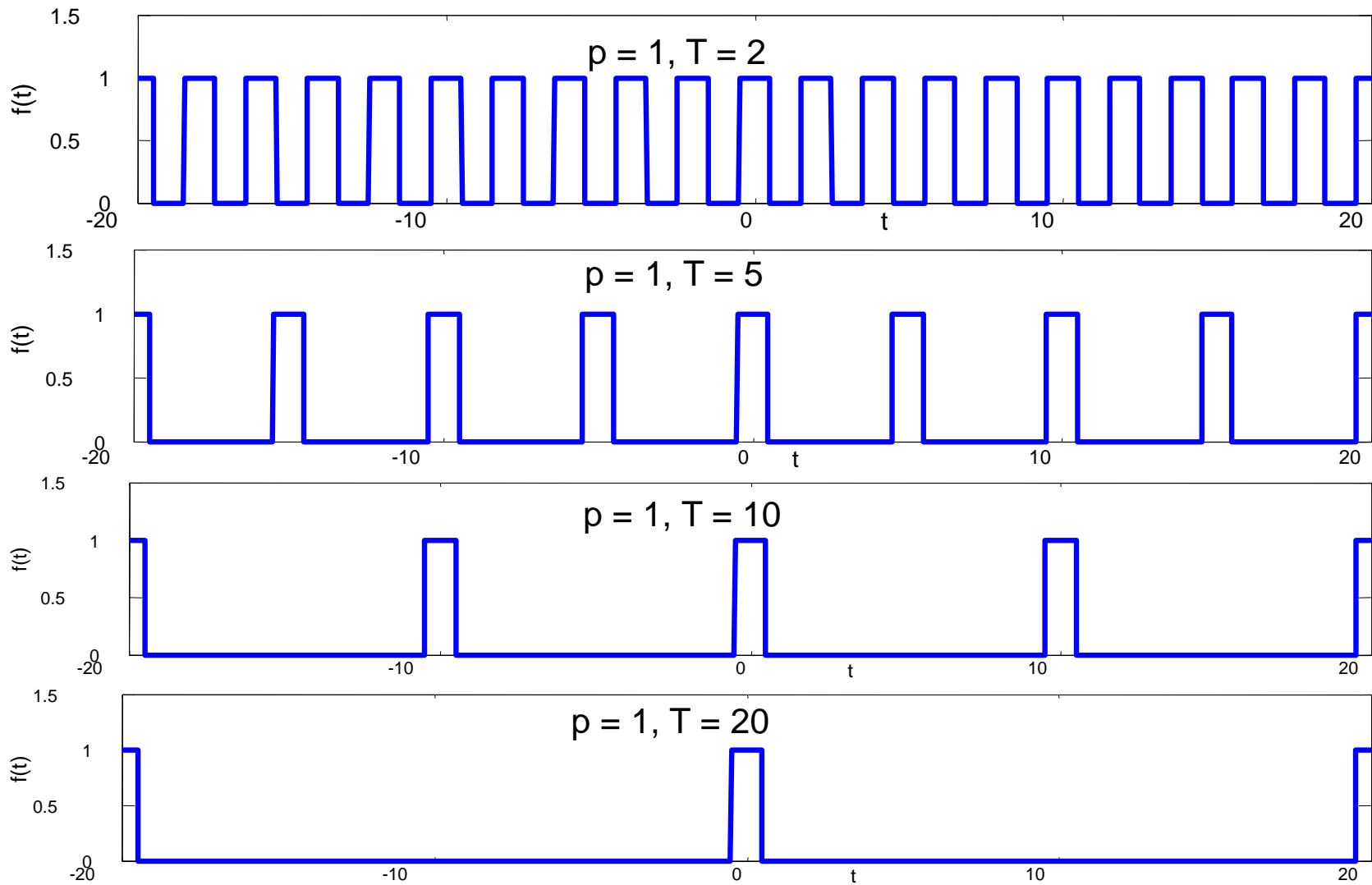
$$c_n = \left(\frac{p}{T} \right) \frac{\text{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

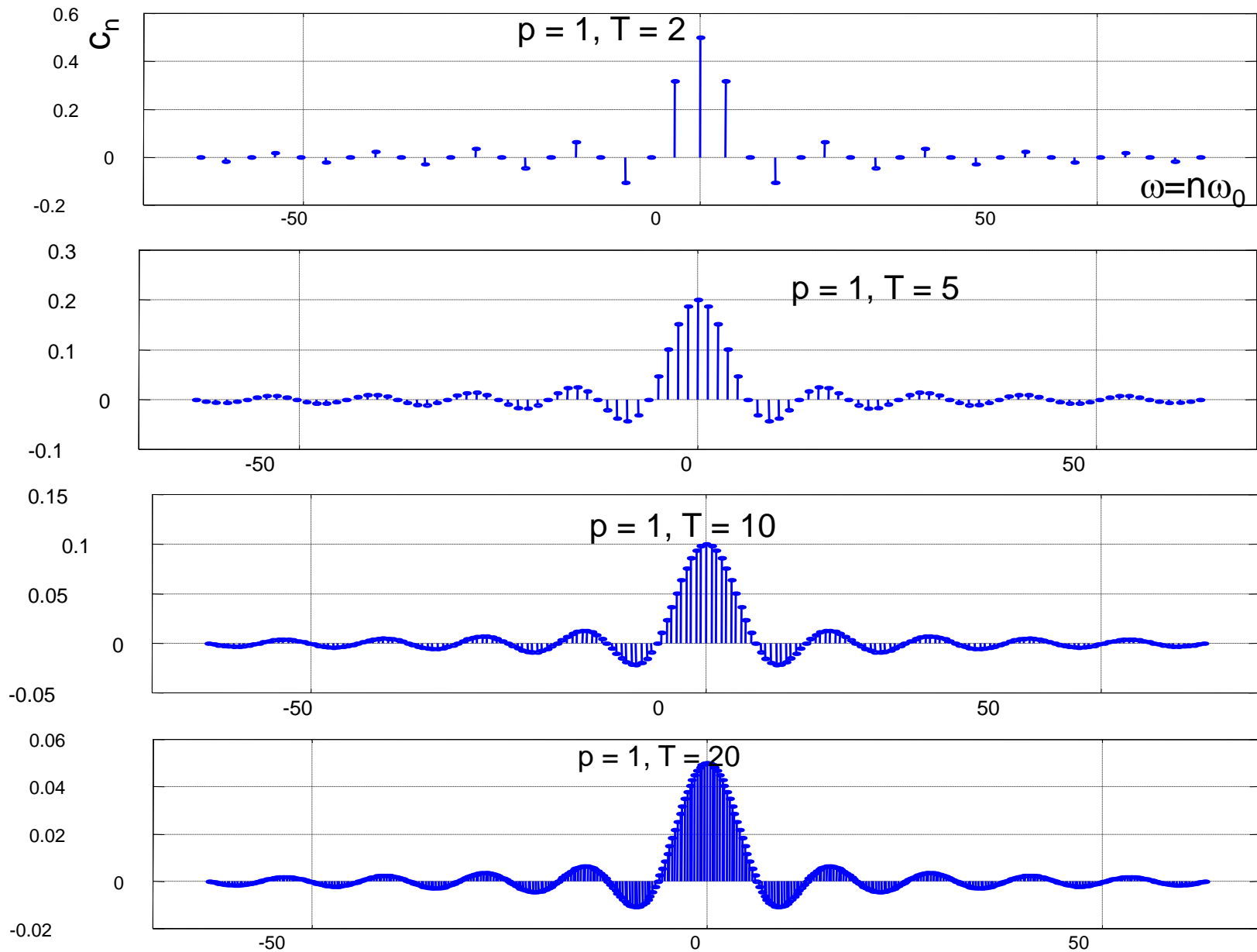
Espectro del tren de pulsos para $p = 1$, $T = 2$



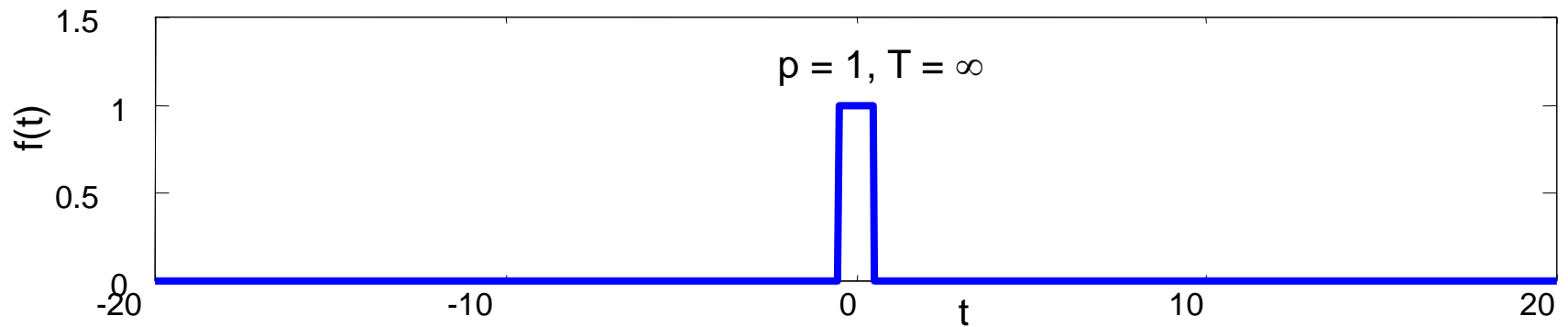
Si el periodo del tren de pulsos aumenta...



...el espectro se "densifica".

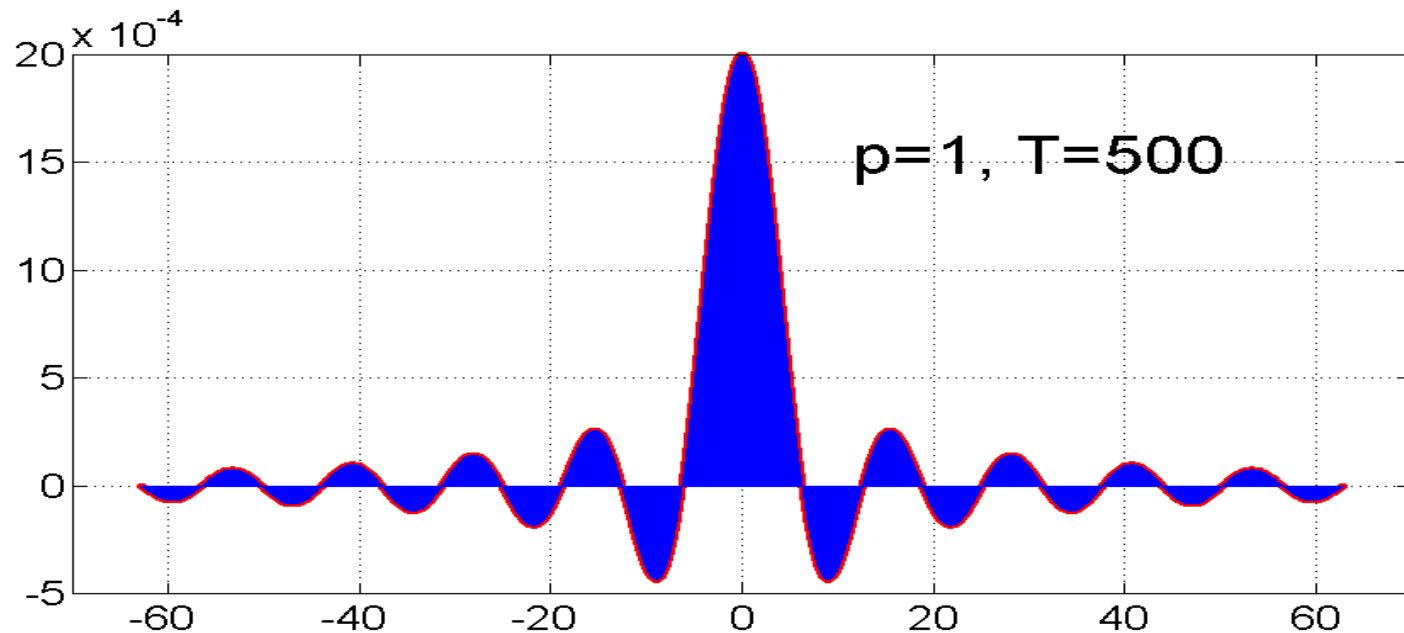


En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Si se hace T muy grande ($T \rightarrow \infty$), el espectro se vuelve "*continuo*":



Transformada de Fourier

$$T \rightarrow \infty$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2k\pi/T} dt$$

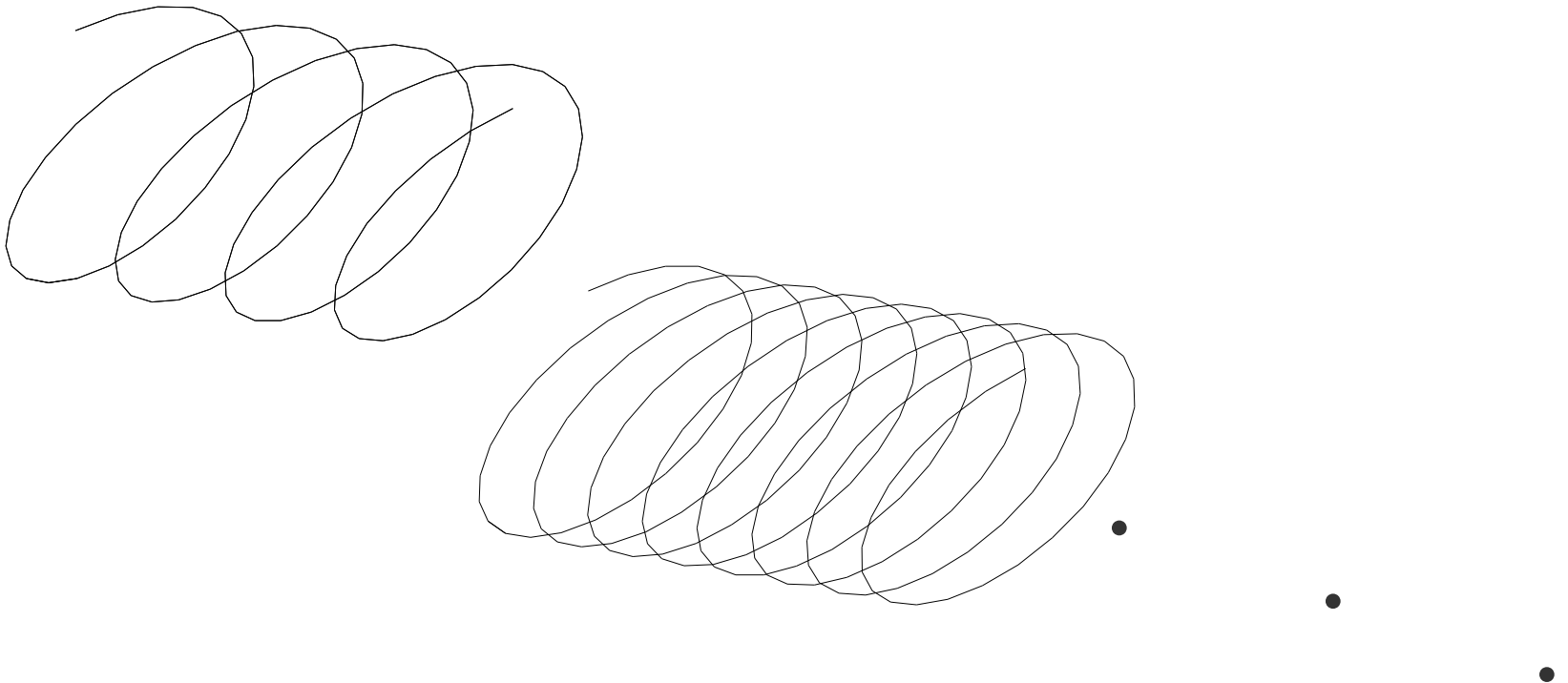
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi/T)t}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Transformada continua de Fourier: base

$$\varphi(t, f) = e^{j2\pi f t}$$



Propiedades de la Transformada de Fourier

En general la TF es un complejo:

$$X(f) = R(f) + j I(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)}$$

donde:

- $R(f)$ es la parte real de la TF
- $I(f)$ es la parte imaginaria
- $|X(f)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de $x(t)$
- $\theta(f)$ es el ángulo de fase de la TF

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$
$$\theta(f) = \tan^{-1}[I(f) / R(f)]$$

Existencia de la FT

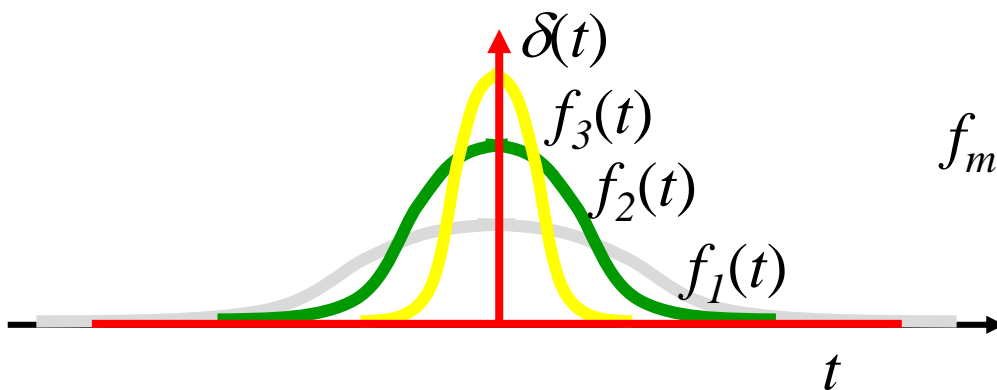
$$\exists X(f) \text{ si } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Es decir, si la señal es de *energía finita*

Las señales transitorias cumplen con esa condición

Existencia de la FT

- Las señales periódicas $(-\infty, \infty)$ no cumplen con esa condición.
- Se requiere la utilización de *funciones generalizadas* o *teoría de distribuciones*.



$$f_m(t) = m \exp[-(mt)^2]/\sqrt{\pi}$$

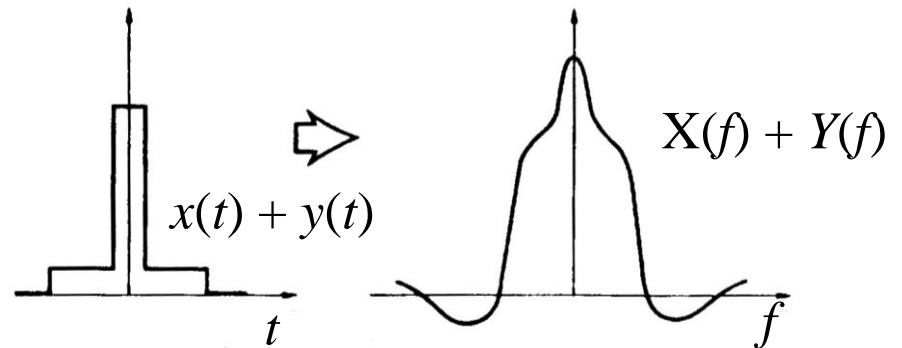
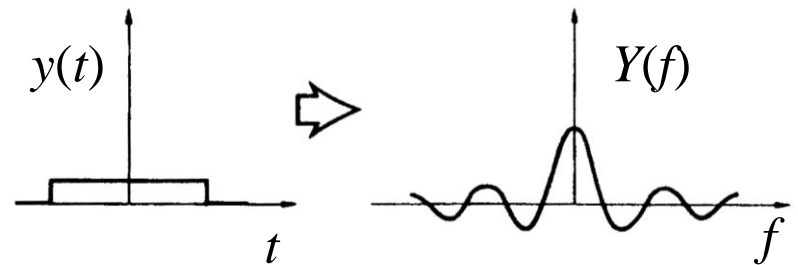
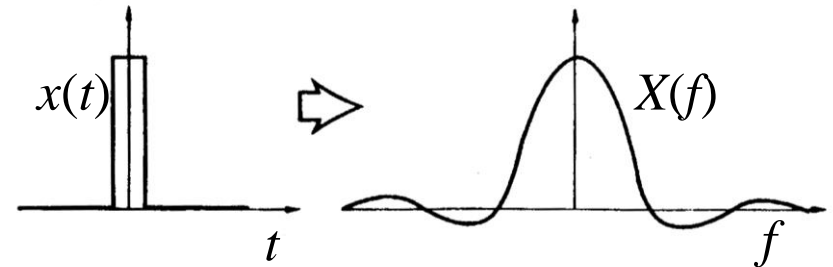
Linealidad

- Si $x(t)$ y $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ y $Y(f)$, entonces:

$$a x(t) + b y(t) \quad \longleftrightarrow \quad a X(f) + b Y(f)$$

Linealidad

$$F\{ax(t) + by(t)\} = aF\{x(t)\} + bF\{y(t)\}$$



Simetría (Dualidad)

- Si $x(t)$ y $X(f)$ son un par de transformadas de Fourier, entonces:

$$X(t) \quad \longleftrightarrow \quad x(-f)$$

Desplazamiento Temporal (retardo)

- Si $x(t)$ está desplazada un valor t_o , entonces:

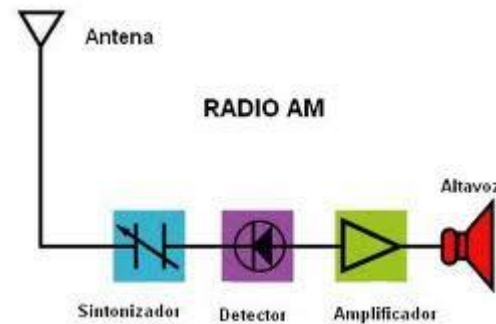
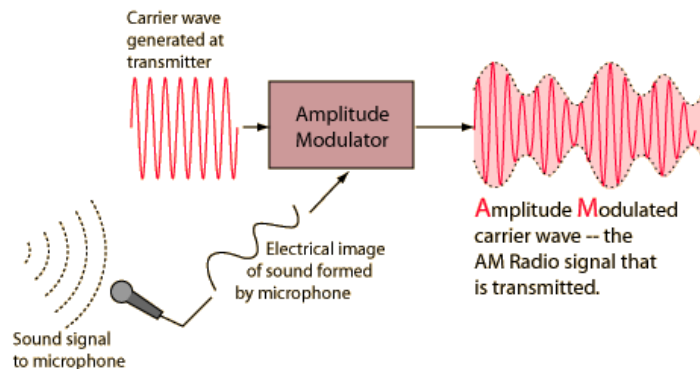
$$x(t - t_o) \quad \Leftrightarrow \quad X(f)e^{-j2\pi f t_o}$$

el desplazamiento temporal no afecta la magnitud de la TF

Desplazamiento Frecuencial (modulación)

- Si $X(f)$ está desplazada un valor f_0 , entonces:

$$X(f - f_0) \longleftrightarrow x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$



Escala Temporal

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

$$x(k t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1/k X(f/k)$$

Escala Frecuencial

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

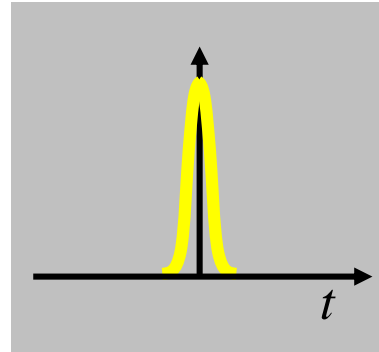
$$X(kf) \iff \frac{1}{|k|} x(t/k)$$

Efecto de la propiedad de escalado

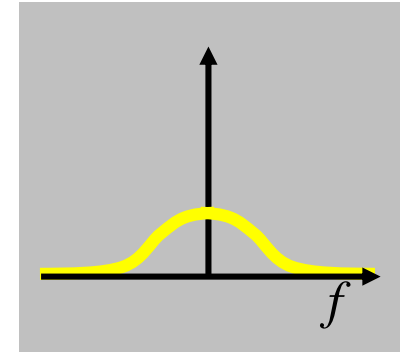
Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

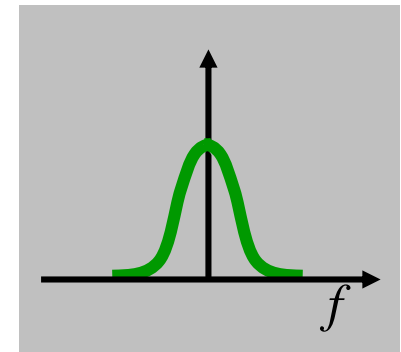
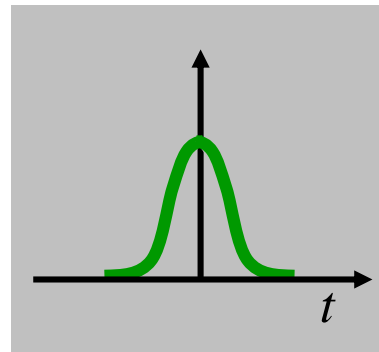
Pulso corto



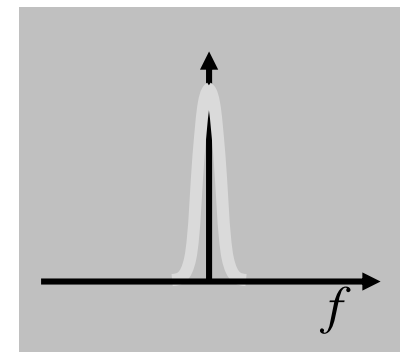
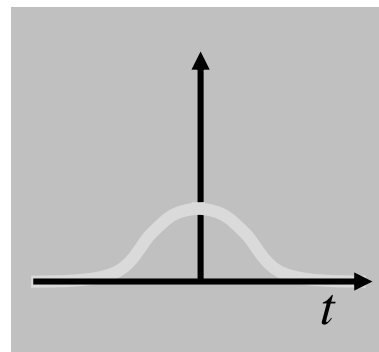
$X(f)$



Pulso medio



Pulso largo



Funciones pares

- Si $x_p(t)$ es una función par, la FT de $x_p(t)$ será par y real:

$$x_p(t) \quad \longleftrightarrow \quad R_p(f)$$

Funciones impares

- Si $x_i(t)$ es una función impar, la FT de $x_i(t)$ será impar e imaginaria pura:

$$x_i(t) \quad \longleftrightarrow \quad I_i(f)$$

Convolución en el tiempo

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

Convolución en la frecuencia

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

No se cumple para la DFT

De la FT a la DFT

¿Qué ocurre ahora cuando
discretizamos?:

$$t \cong nT \qquad f \cong kF$$

$$n = 1 \cdots N,$$

$$k = 1 \cdots N,$$

(simplificando un poco...)

Transformada discreta de Fourier: transformación

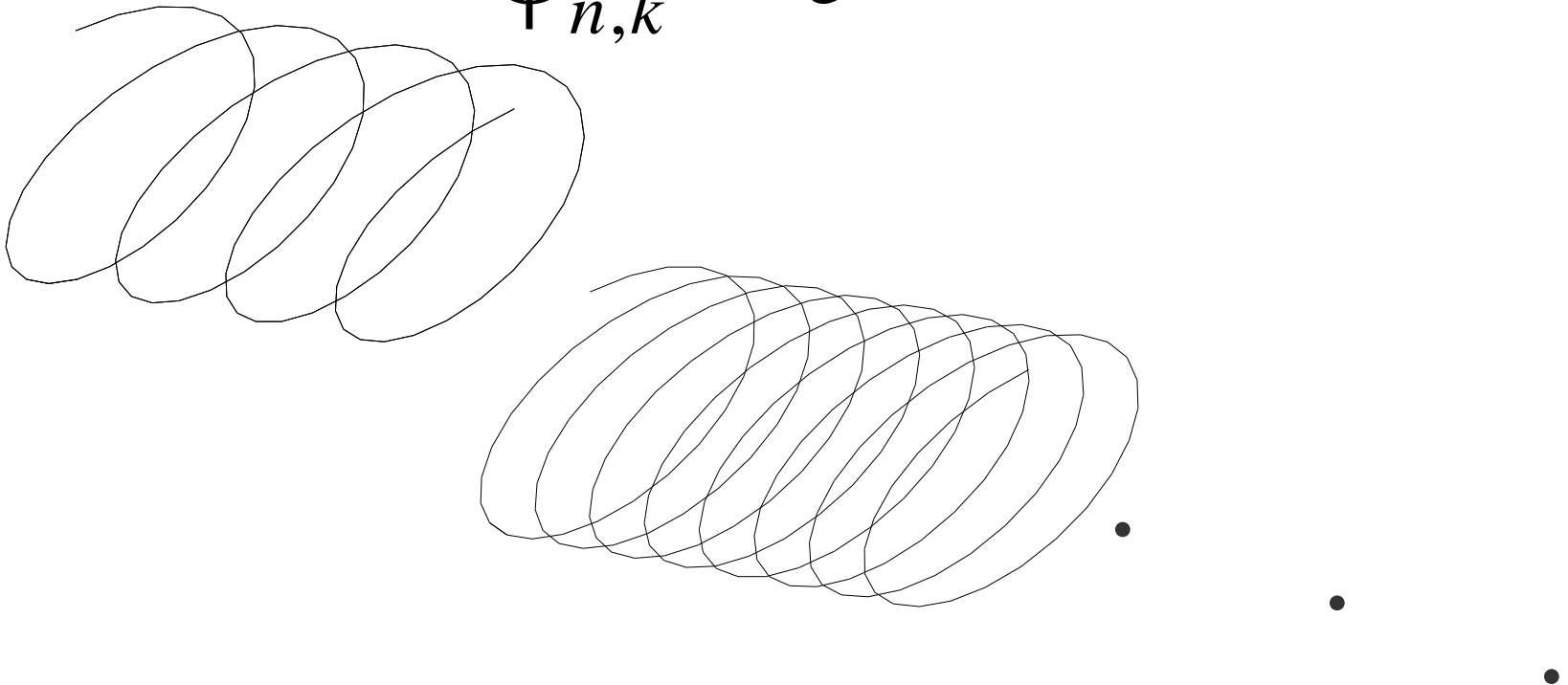
$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: inversa

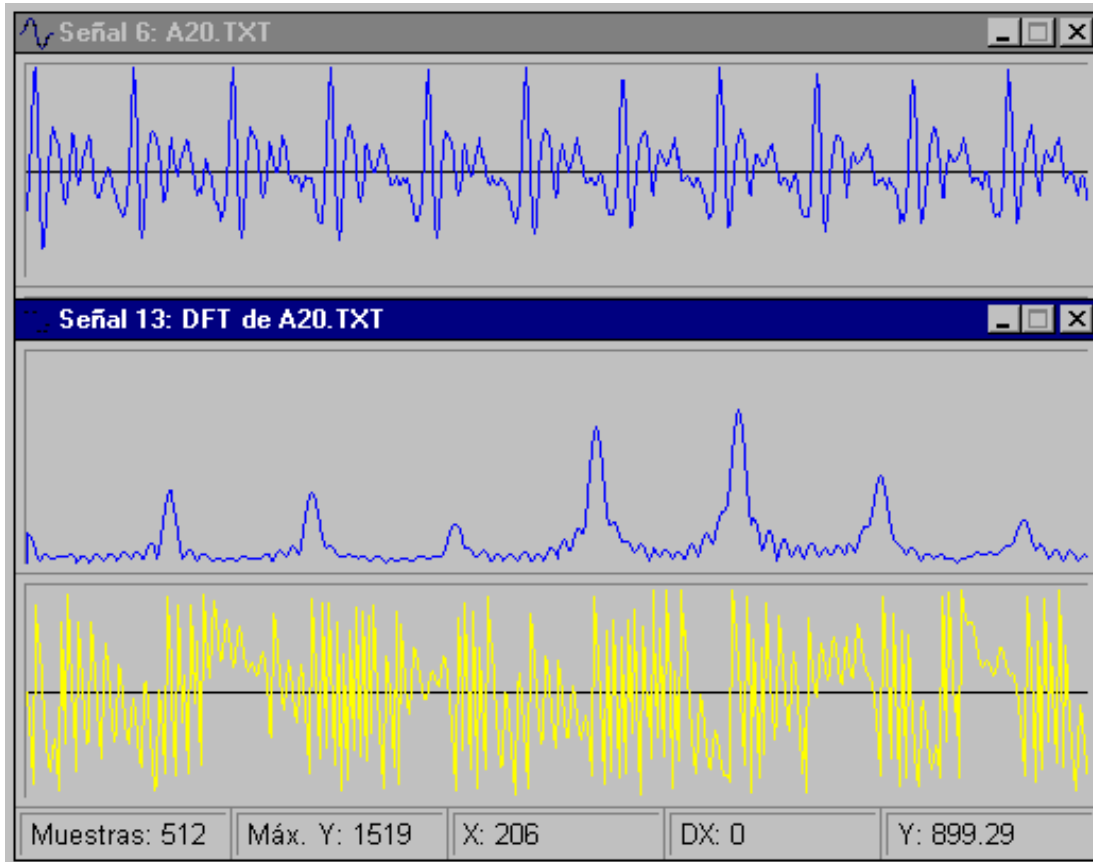
$$x_n = \sum_{k=1}^N X_k e^{j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: base

$$\varphi_{n,k} = e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

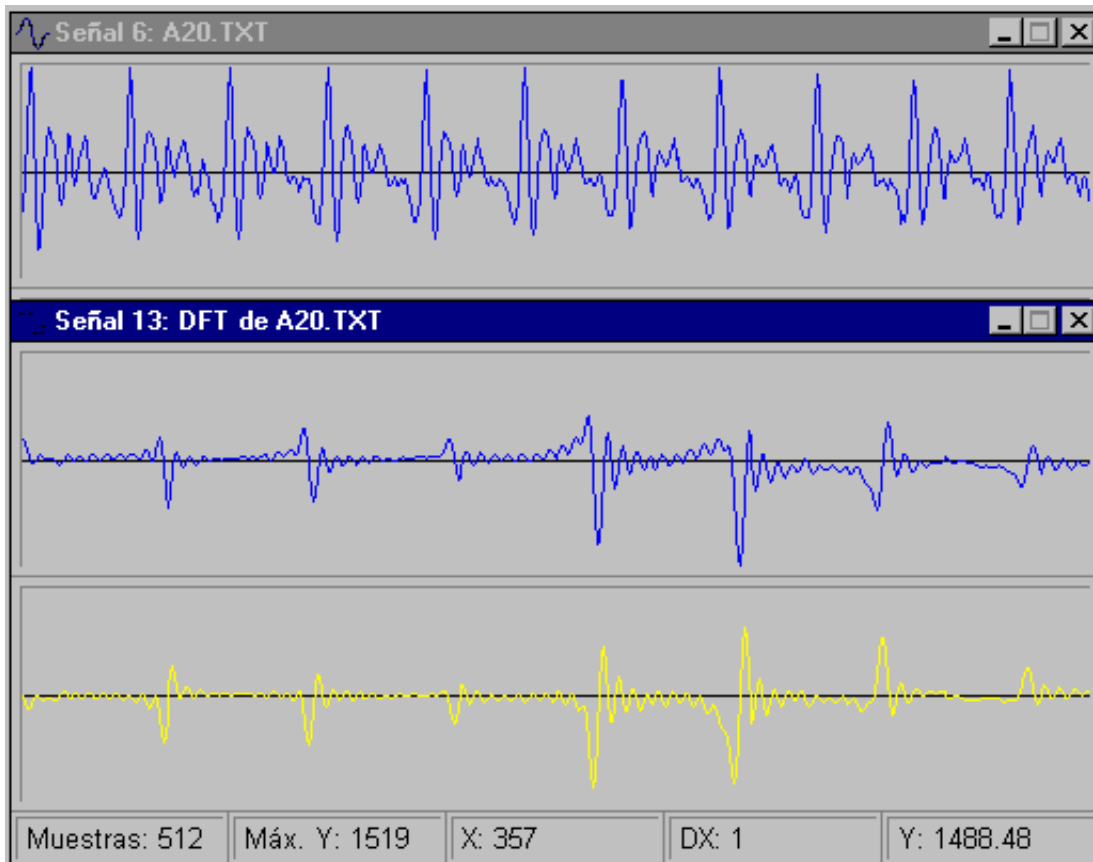


Ejemplo: SigTeach...



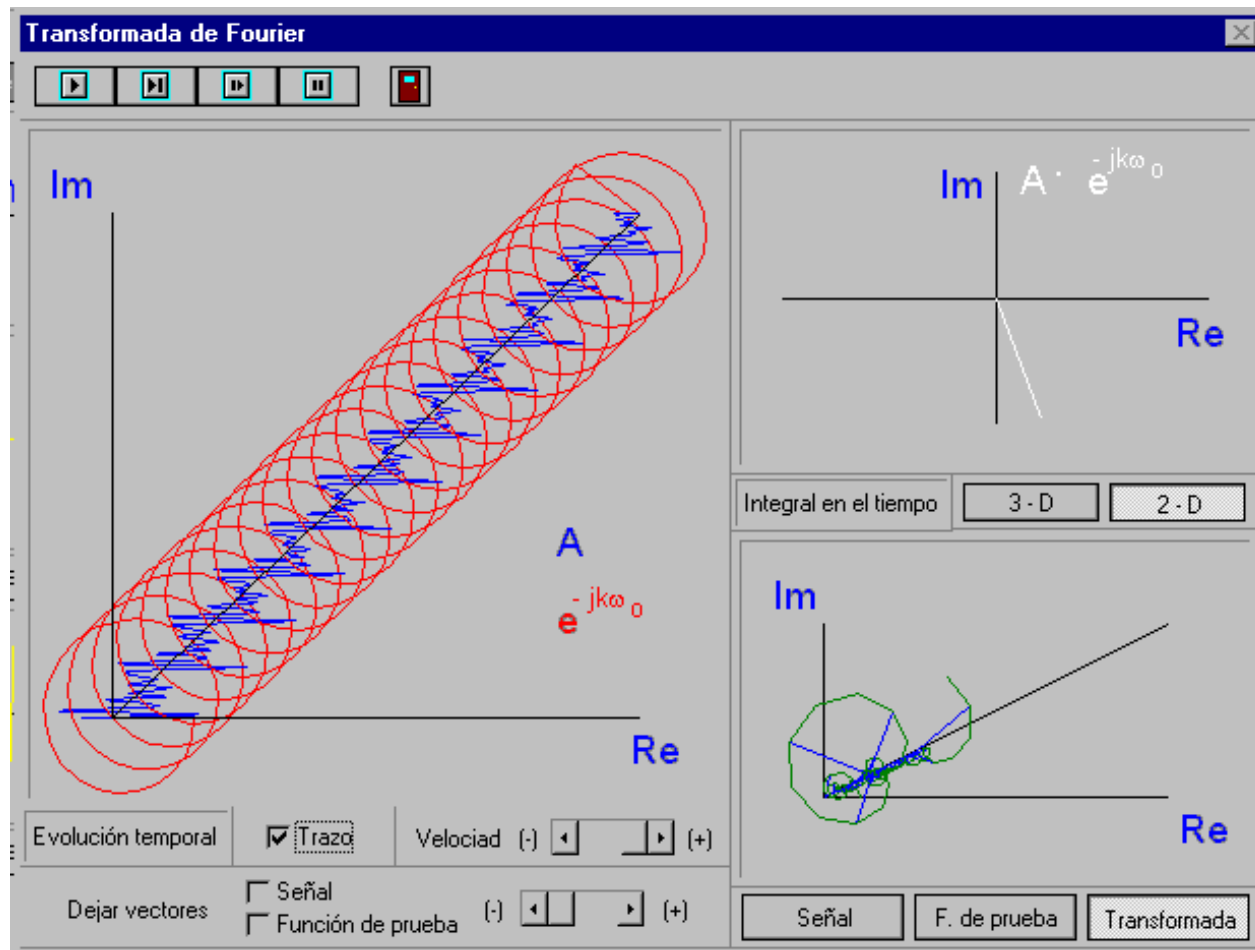
- Magnitud y fase de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Parte Real e Imaginaria de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Otra forma de verlo...

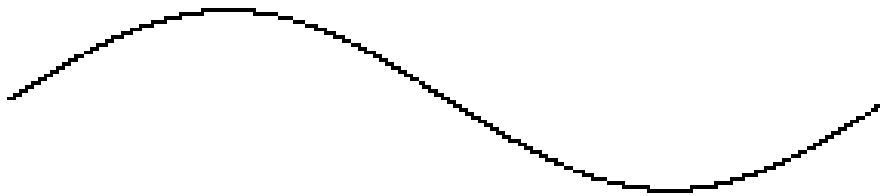
Algunas observaciones...

- Para poder realmente calcular la DFT en la práctica debemos pasar de la señal analógica a una digital
- Esto parece relativamente sencillo, pero no debemos olvidar que en general perdemos información.
- La señal original “sufrir” 3 transformaciones:
 - Muestreo (variable independiente)
 - Ventaneo (variable independiente)
 - Cuantización (variable dependiente)

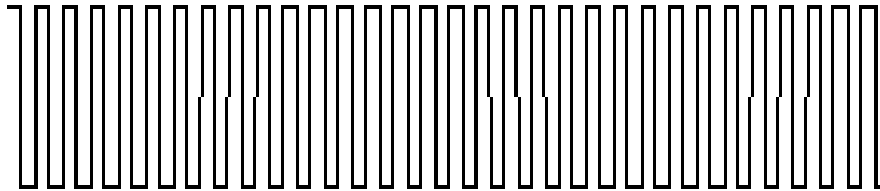
Algunas observaciones...

- Muestreo:
 - Solo medimos a intervalos prefijados por lo cual perdemos los cambios rápidos.
 - Dependemos de la fiabilidad del reloj del sistema.
- Ventaneo:
 - Solo medimos durante un intervalo finito de tiempo por lo cual perdemos los cambios más lentos.
 - La forma de esta ventana también afecta el resultado.

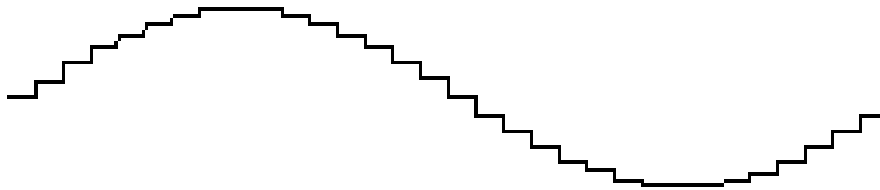
Algunas observaciones...



- Una señal continua

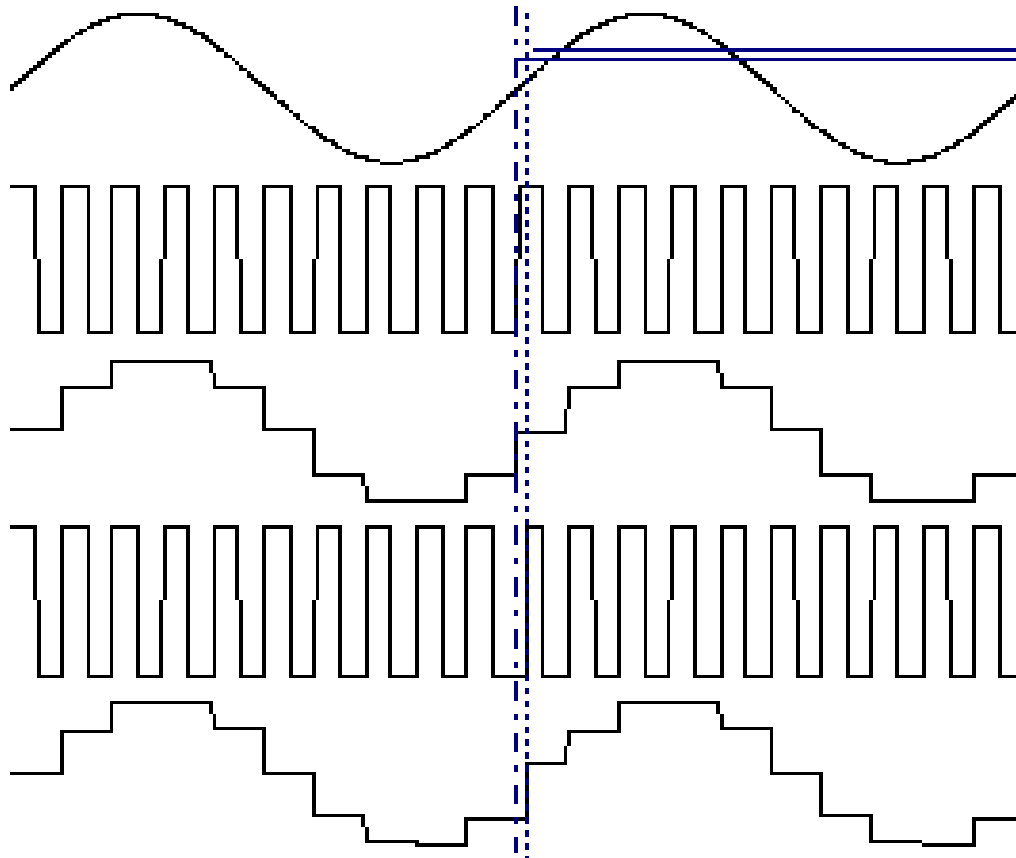


- ...medida contra un reloj...



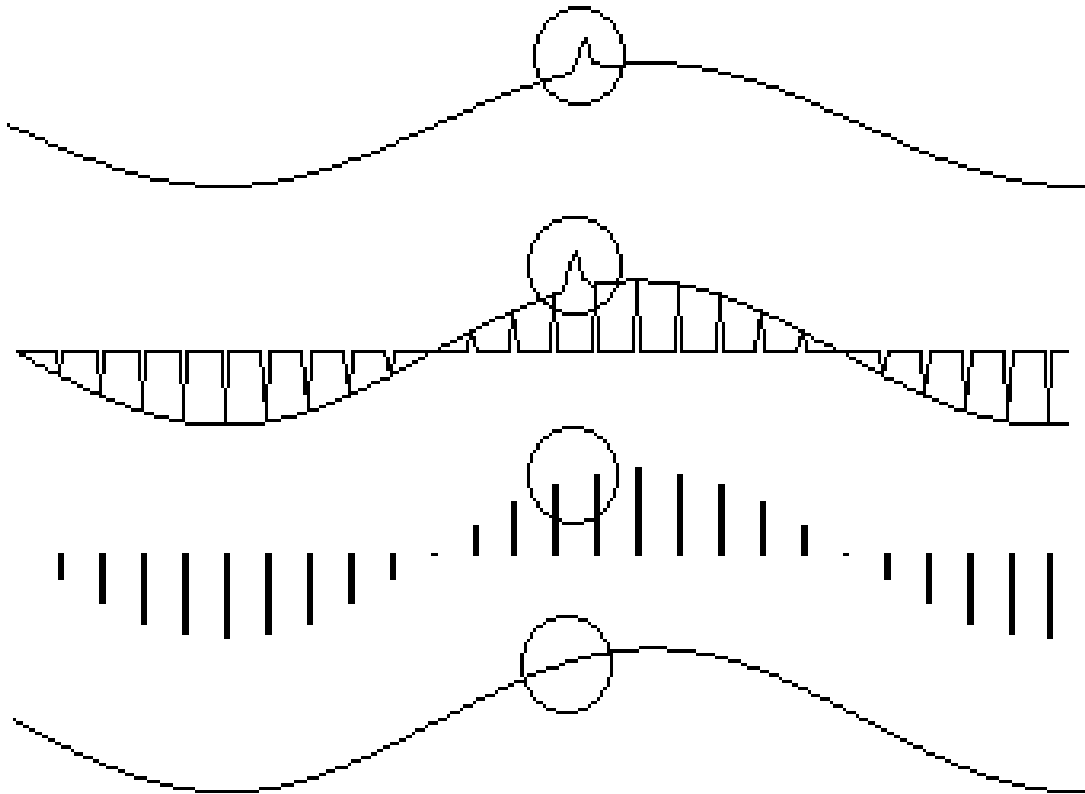
- ...mantiene su valor entre cada pulso del reloj...

Algunas observaciones...



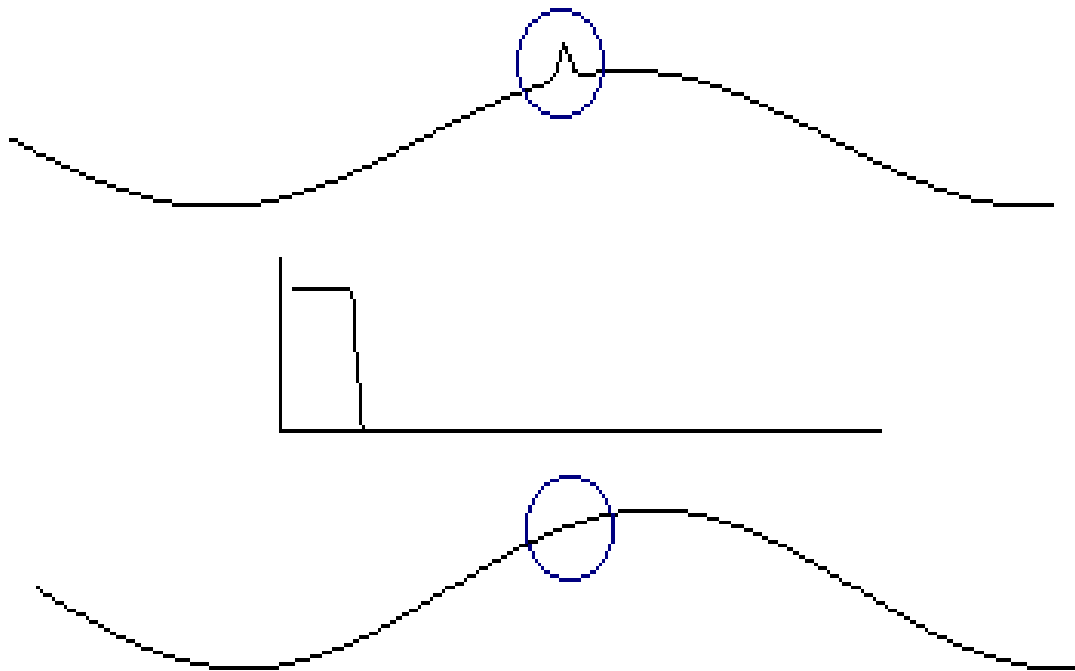
- Un reloj preciso...
- conduce a valores precisos.
- Un error en el reloj...
- ... se traduce en error en los valores.

Algunas observaciones...



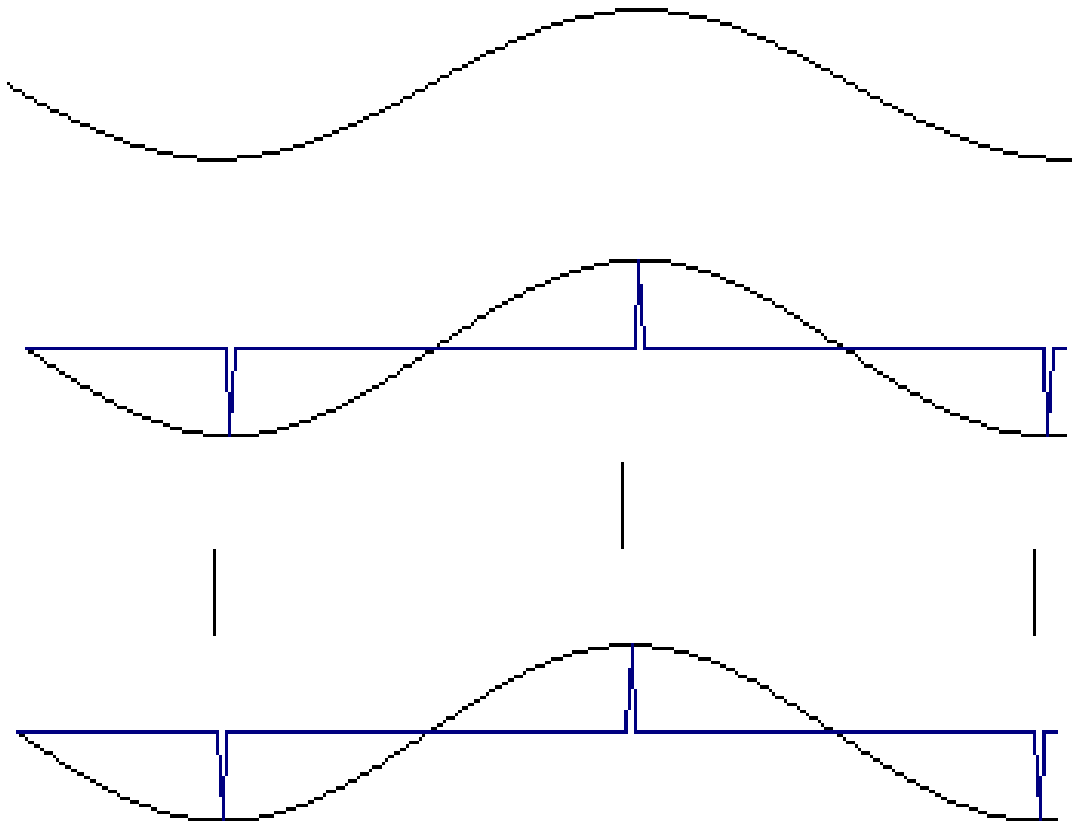
- Una “evento” de la señal...
- que ocurre entre muestras...
- parece como...
- si no hubiese estado allí

Algunas observaciones...



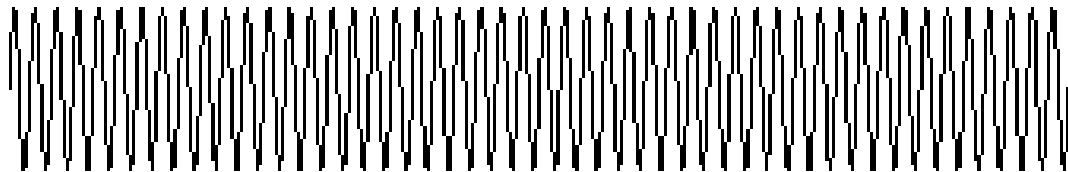
- Las componentes de alta frecuencia...
- ...pasadas por un filtro pasa bajos...
- ...desaparecen

Algunas observaciones...

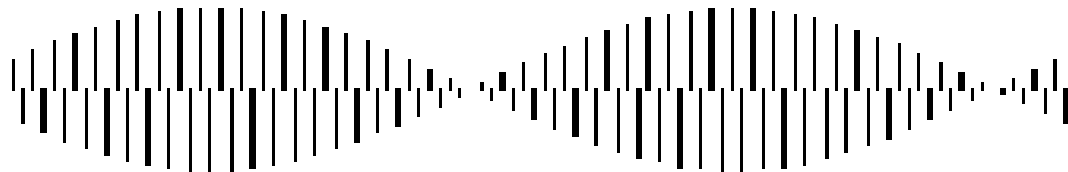


- Una señal periódica...
- muestreada dos veces por ciclo...
- tiene suficiente información como...
- para ser reconstruida

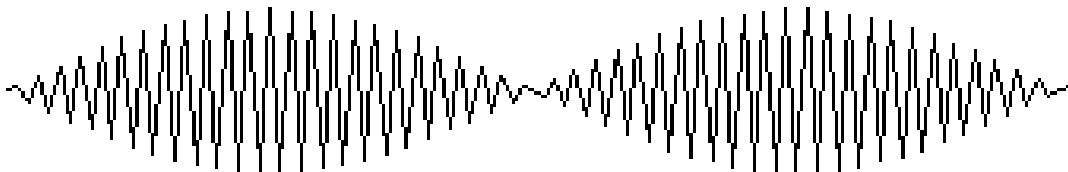
Algunas observaciones...



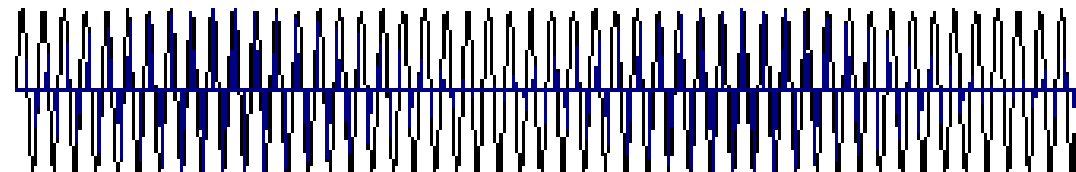
- Una señal de alta frecuencia...



- ...muestreada suficientemente rápido...

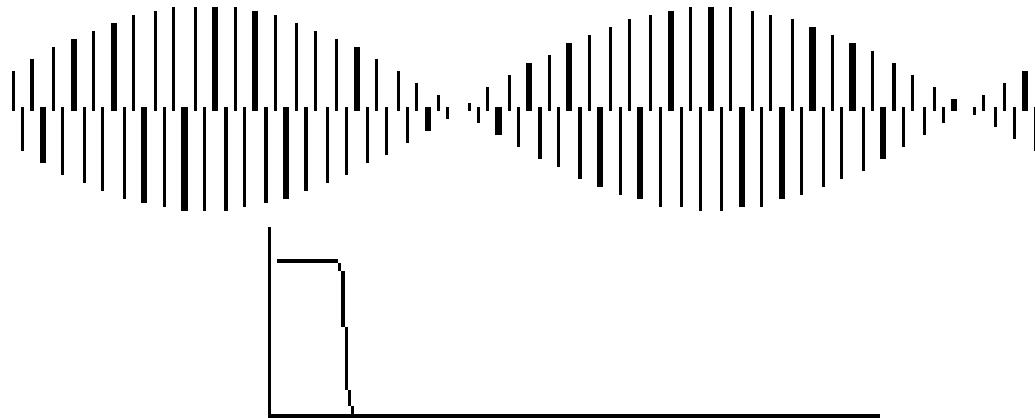


- ...puede verse todavía mal...

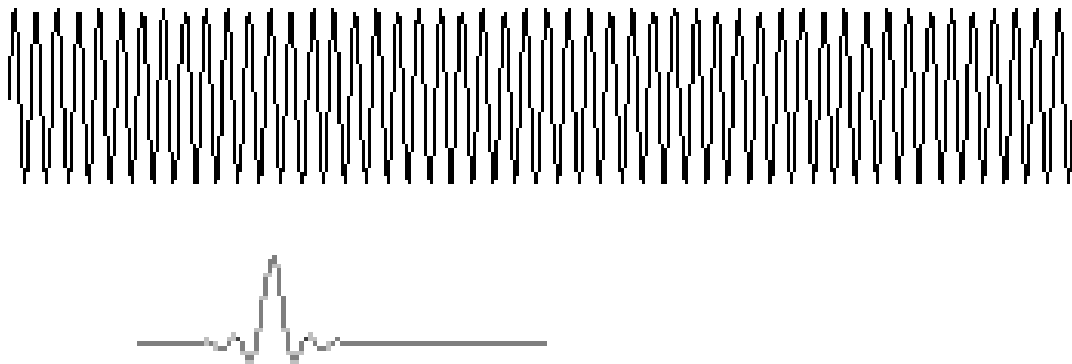


- ...pero puede ser reconstruida.

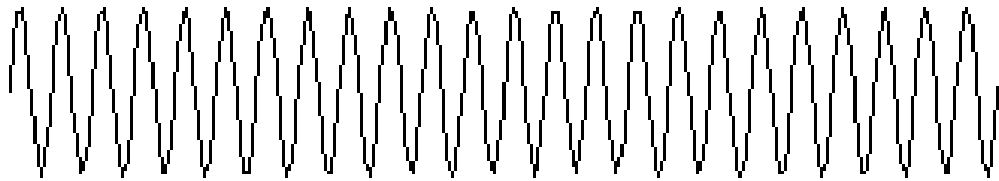
Algunas observaciones...



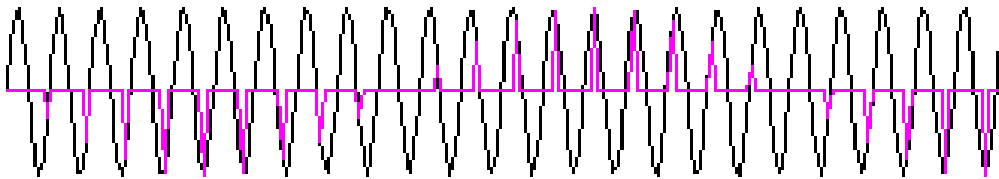
- Una señal muestreada...
- ...debe ser procesada por un filtro pasa-bajos...
- ...para reconstruir la señal original.
- La respuesta al impulso del filtro debe ser una sincrónica.



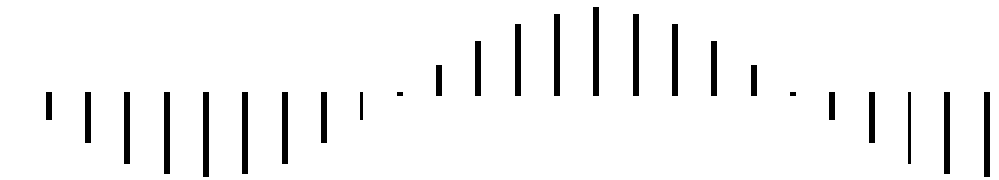
Algunas observaciones...



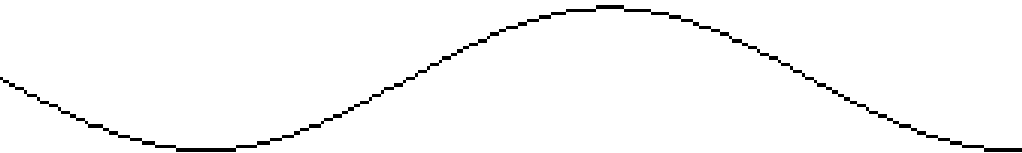
- Una señal de alta frecuencia...



- muestreada a una tasa muy baja...



- parece como...

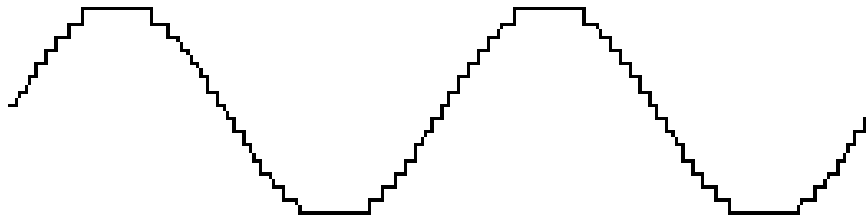
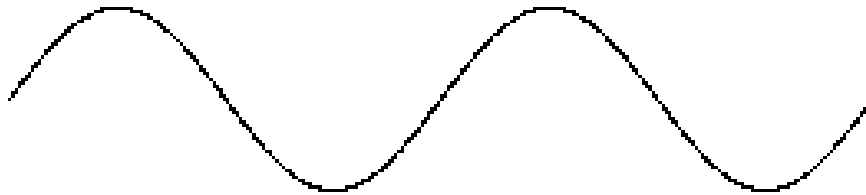


- una señal de menor frecuencia.

Algunas observaciones...

- Cuantización:
 - La precisión está limitada al número de bits disponible.
 - Depende también del rango dinámico de la señal.
 - Los errores introducidos en el proceso son no lineales y dependientes de la señal.
 - También pueden cometerse errores aritméticos dentro del procesador debido a la precisión.

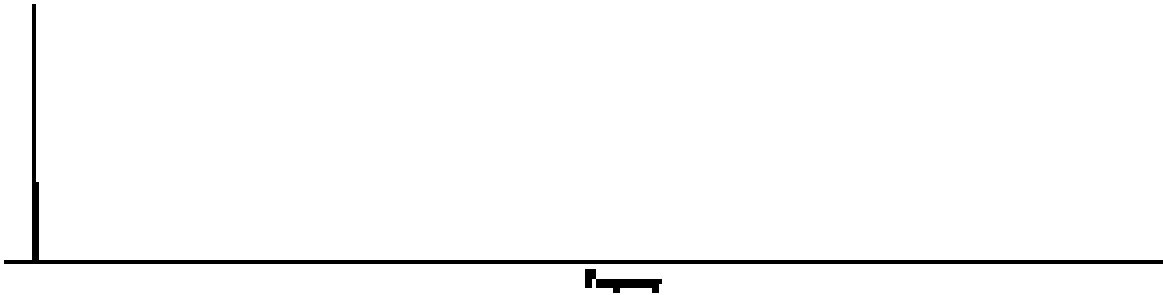
Algunas observaciones...



Ruido de cuantización ($\pm \frac{1}{2}$ LSB)

- La precisión limitada en la cuantización...
- ...conduce a errores...
- ... que dependen de la señal

Algunas observaciones...



- Por ello el espectro de un tono puro...



- ...se ensucia cuando lo cuantizamos.

Algunas observaciones...

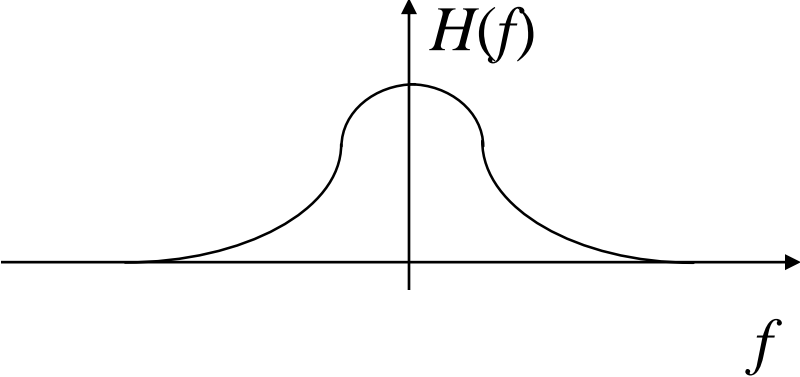
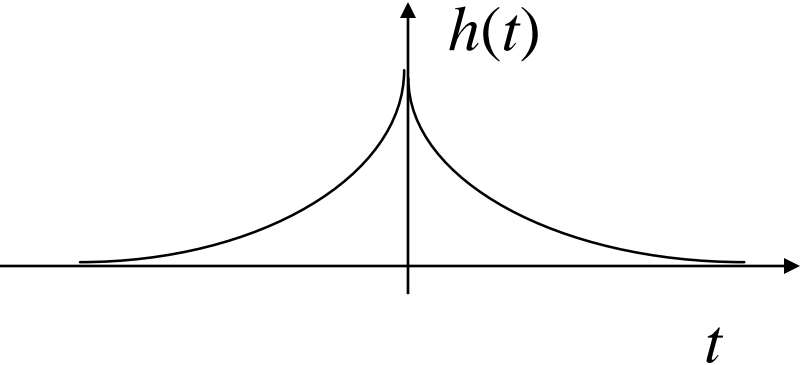
- Ya no podemos movernos libremente entre el dominio frecuencial y temporal sin perder información:
 - Debido a los errores producidos en los cálculos por la precisión, o a que hay información que no podemos medir o calcular.

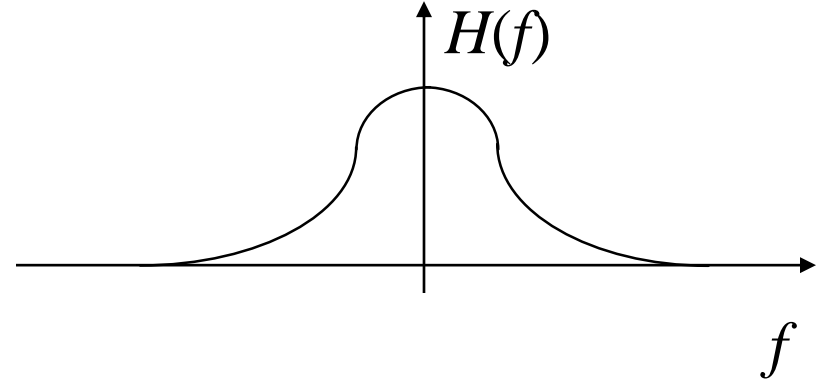
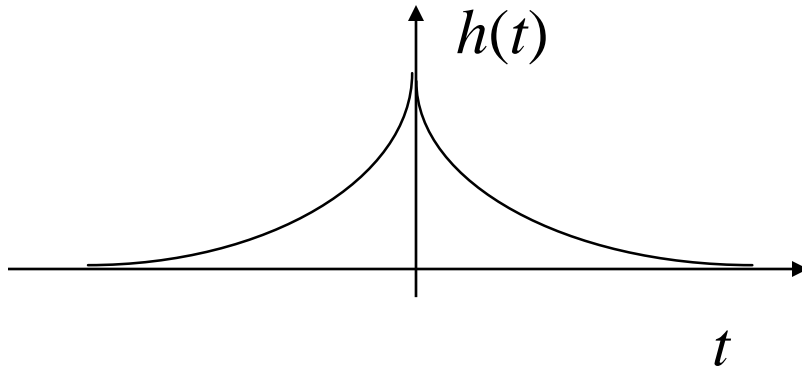
Algunas observaciones...

- Como resumen:
 - Debemos tener bien claros todos estos efectos y tratar de minimizarlos al máximo, en función de los recursos disponibles.

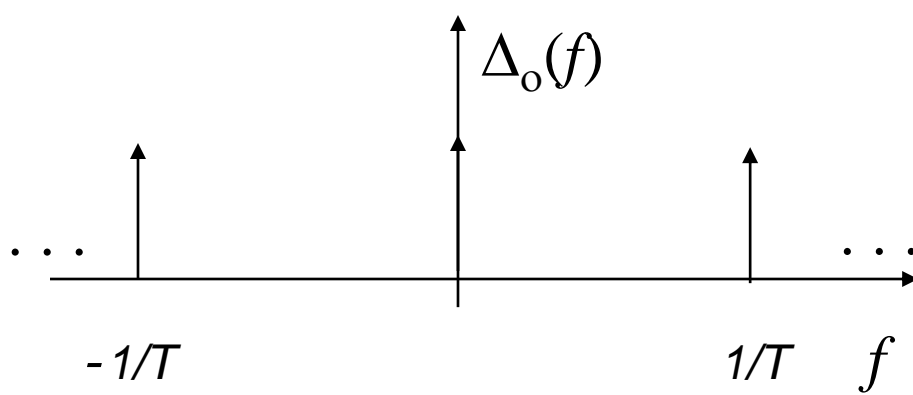
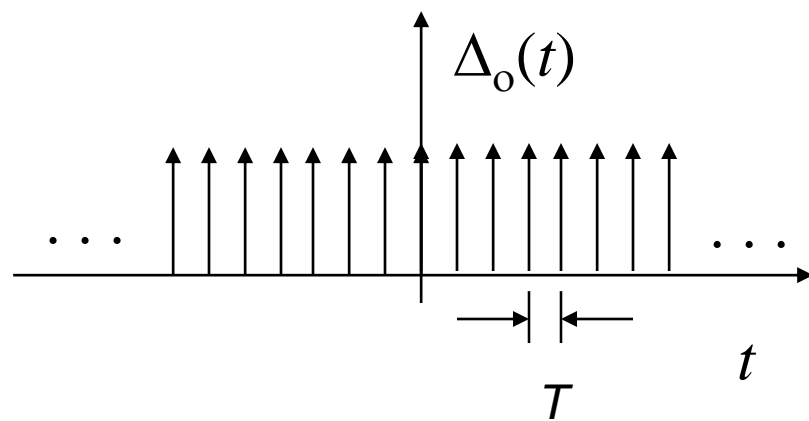
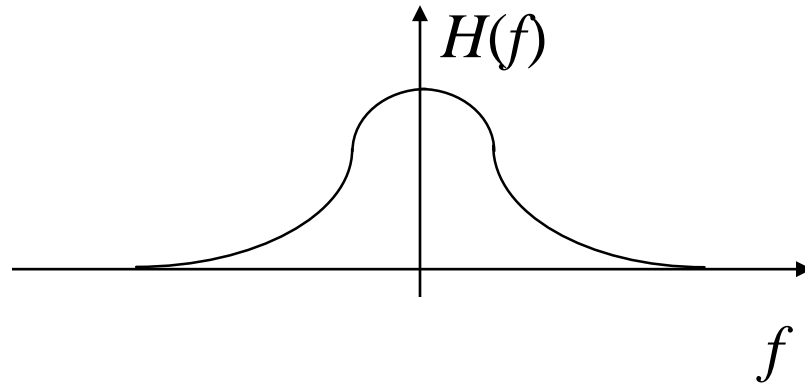
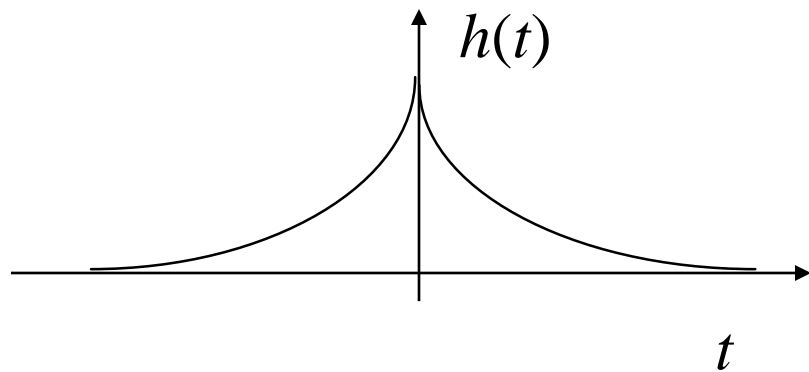
Transformada Discreta de Fourier DFT

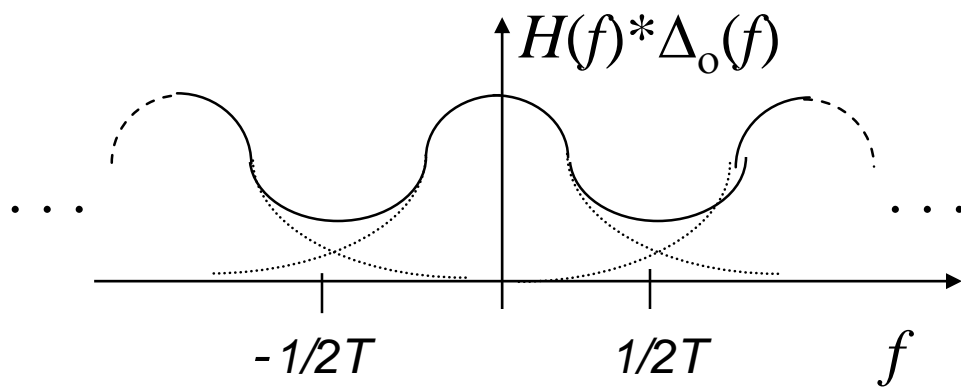
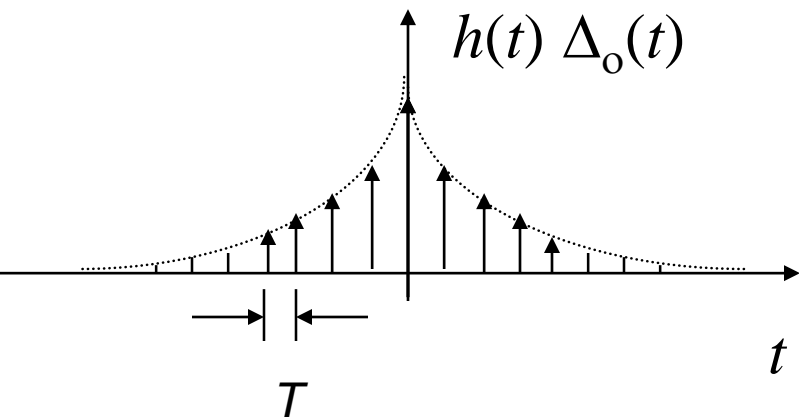
Desarrollo Intuitivo

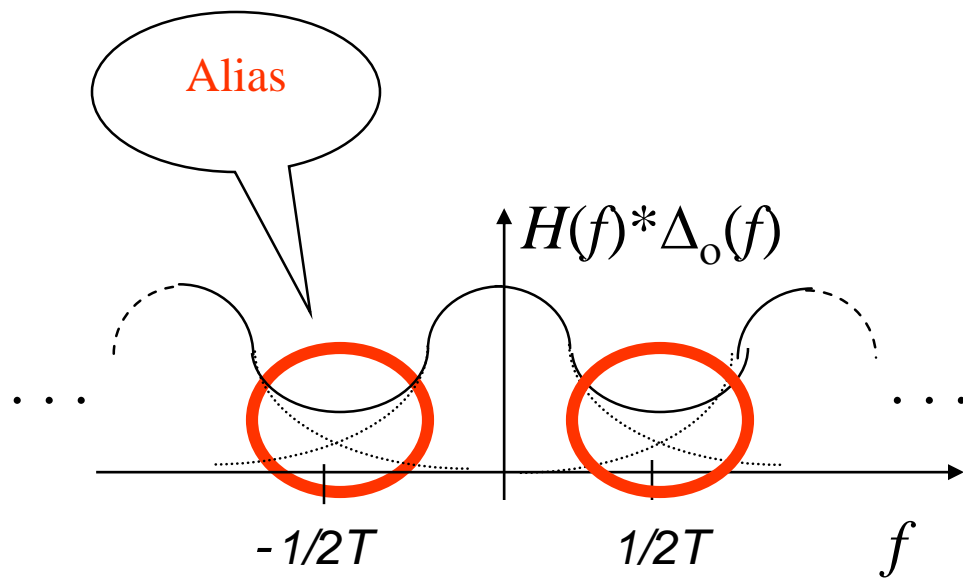
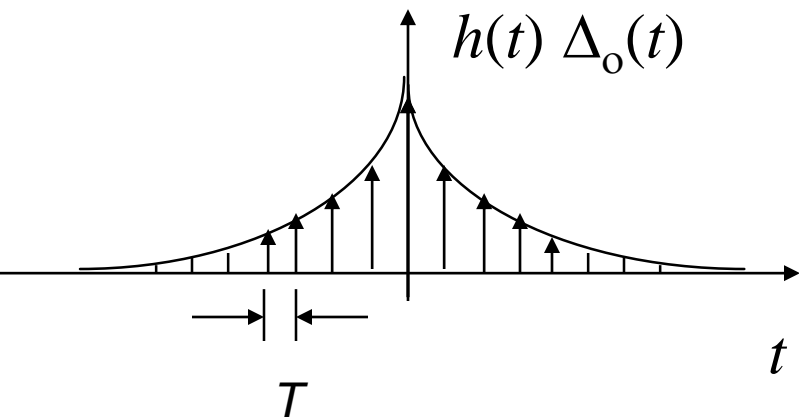


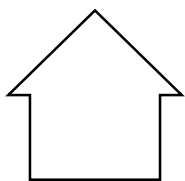
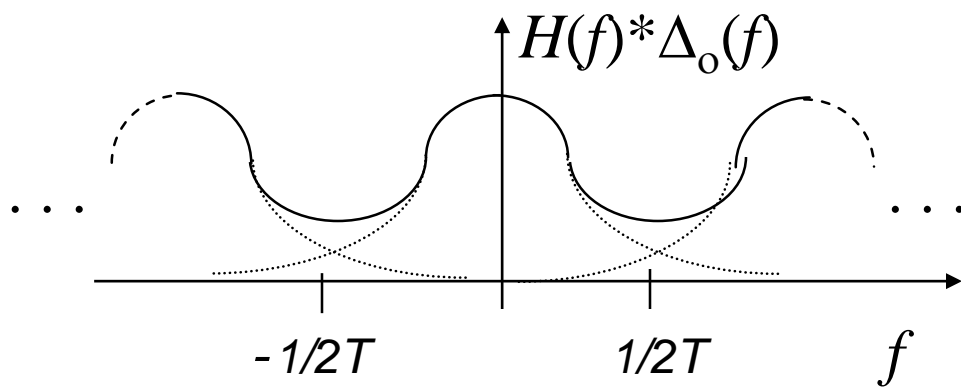
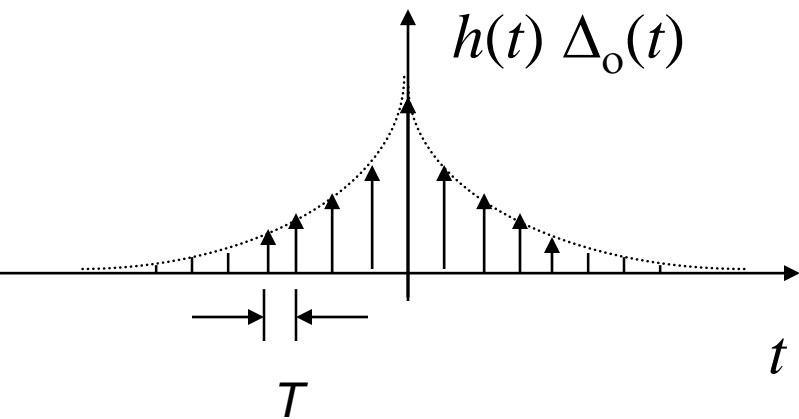


- Buscamos modificar el dominio de la variable tiempo y el de la variable frecuencia para obtener secuencias en ambos dominios aptas de tratarse mediante procesamiento digital.

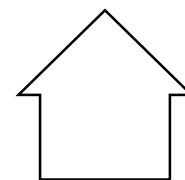
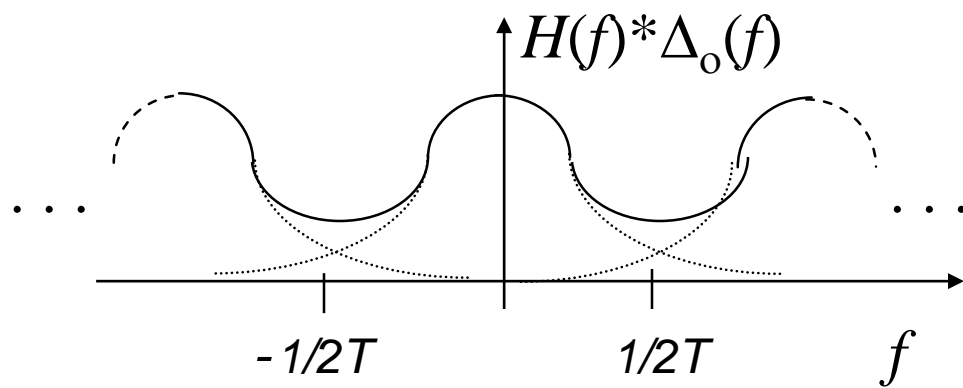
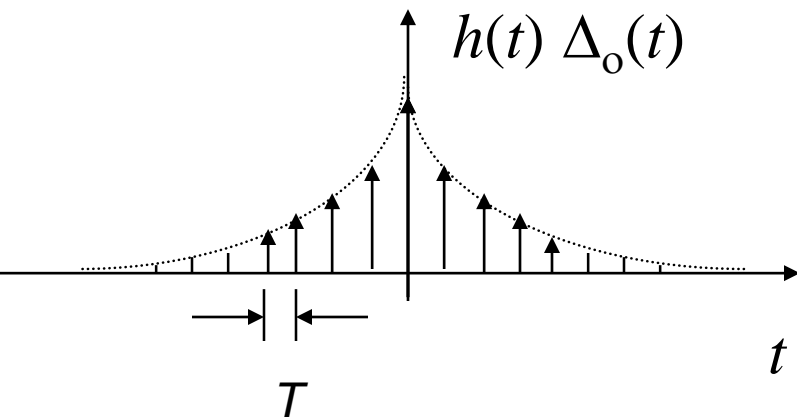




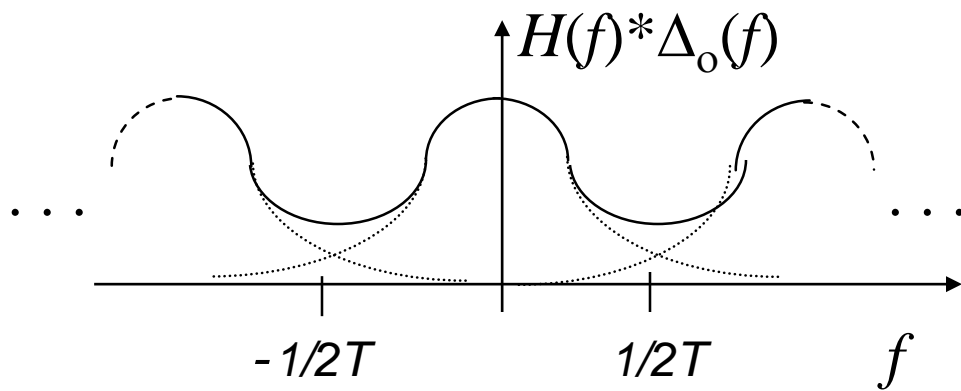
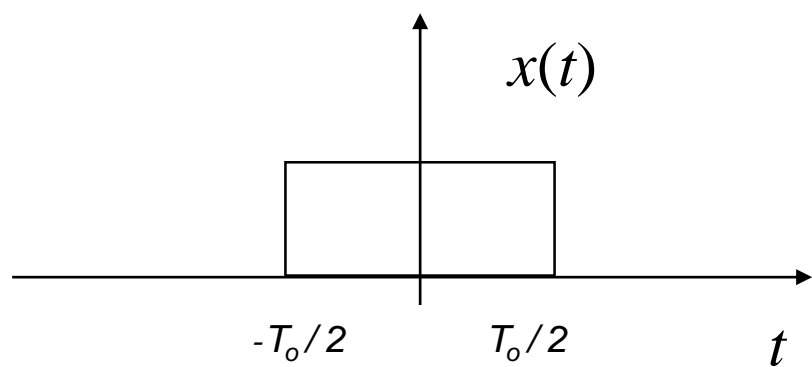
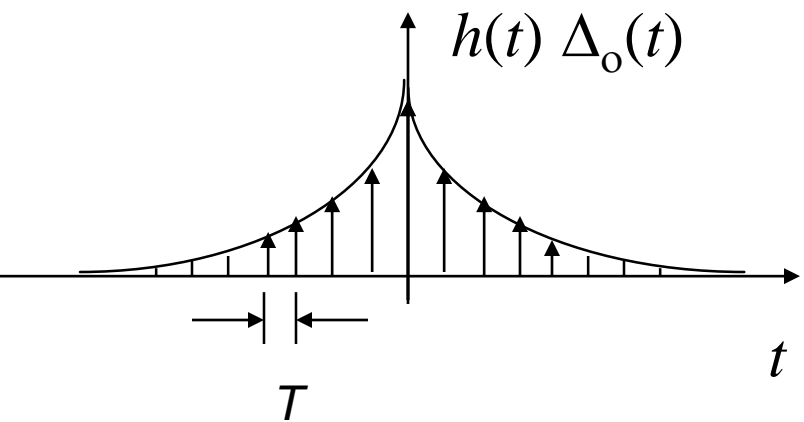


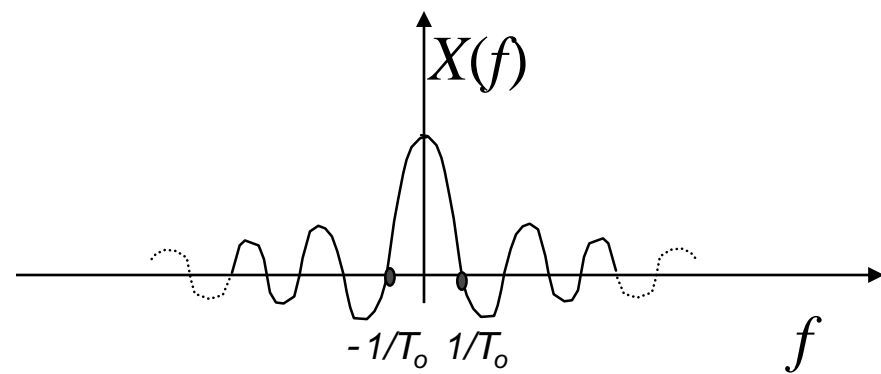
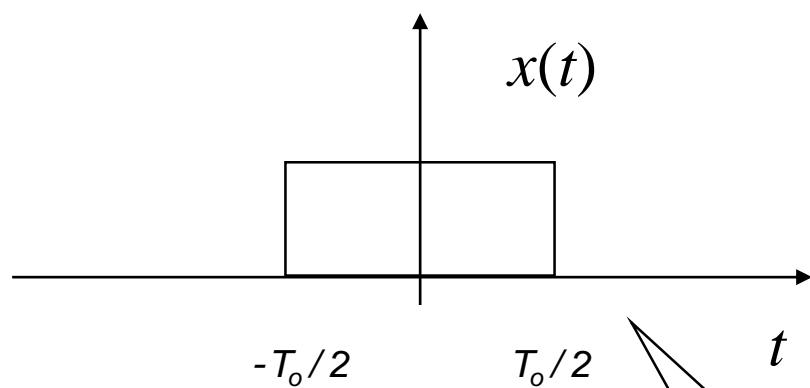
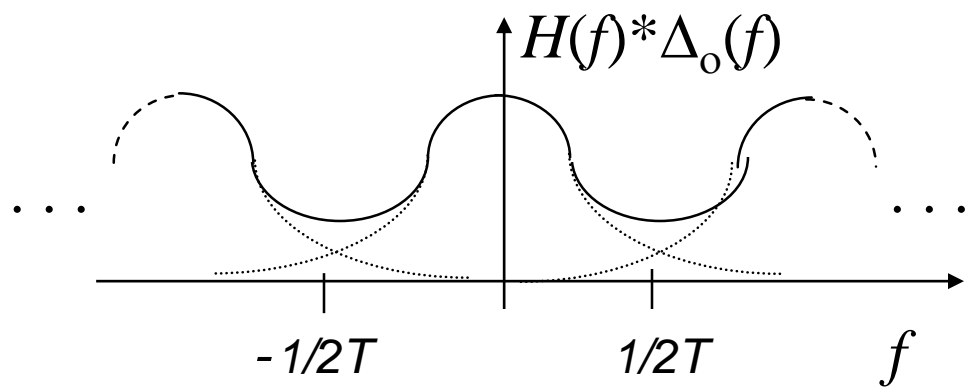
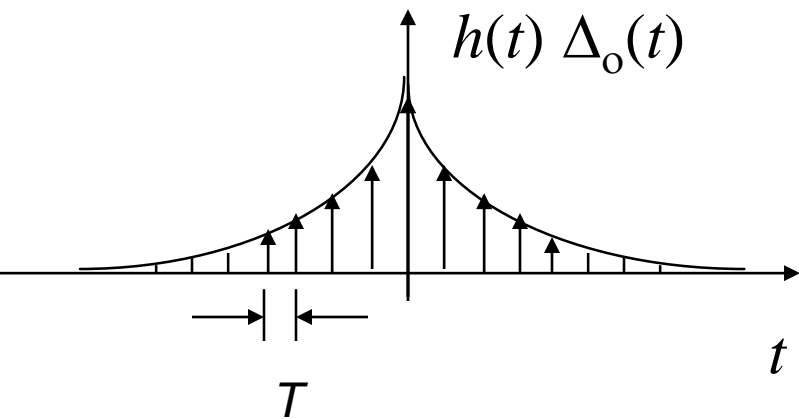


Infinitas muestras

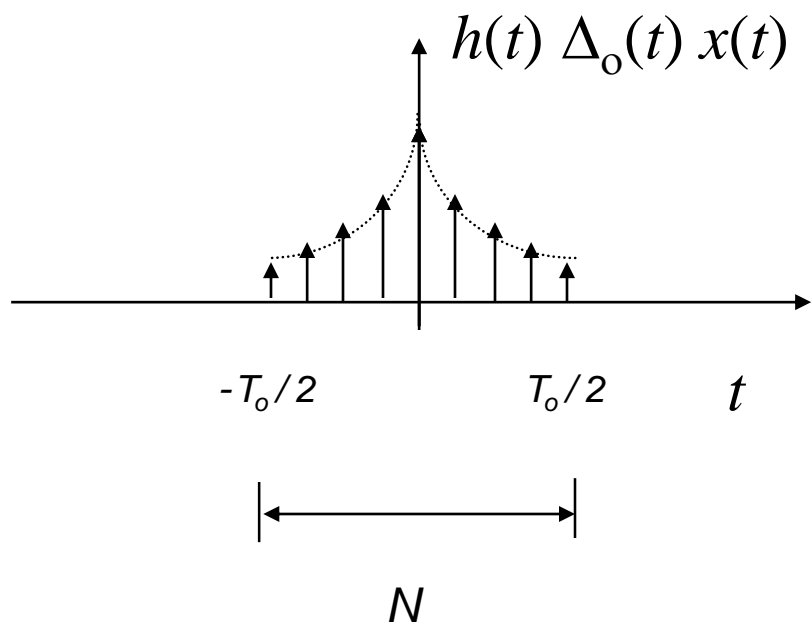


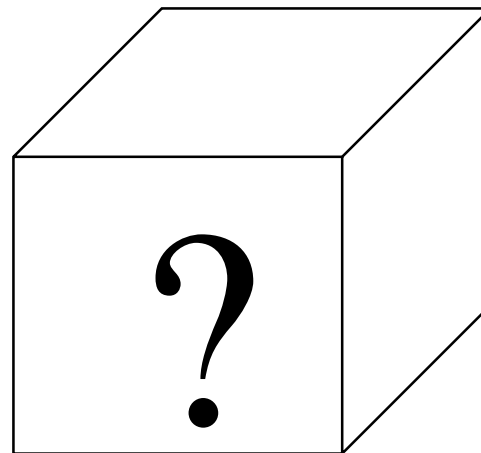
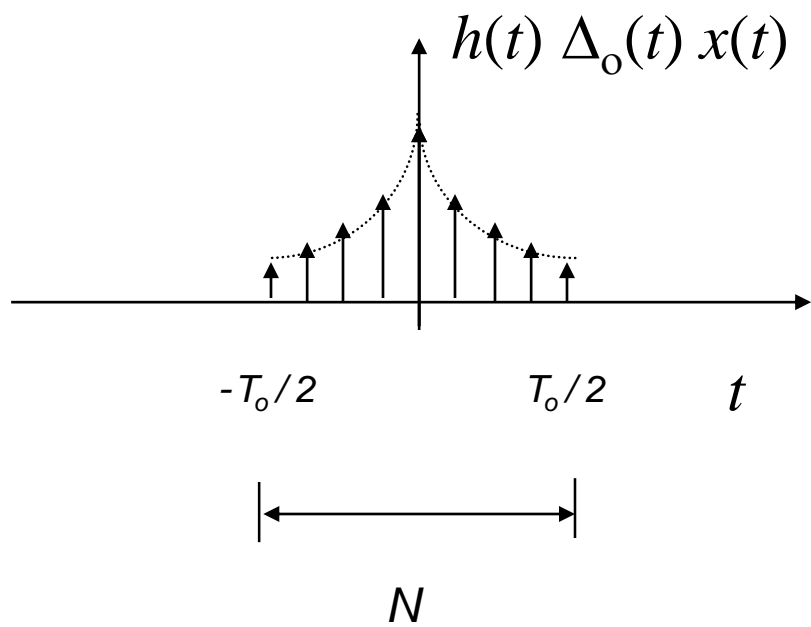
espectro continuo

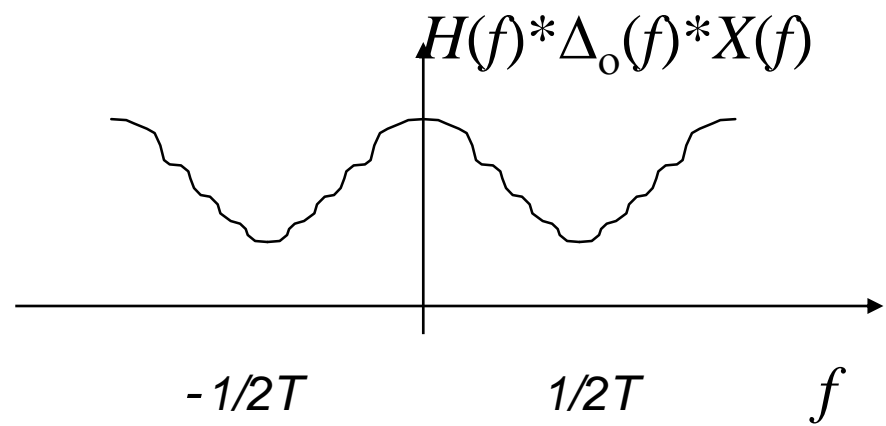
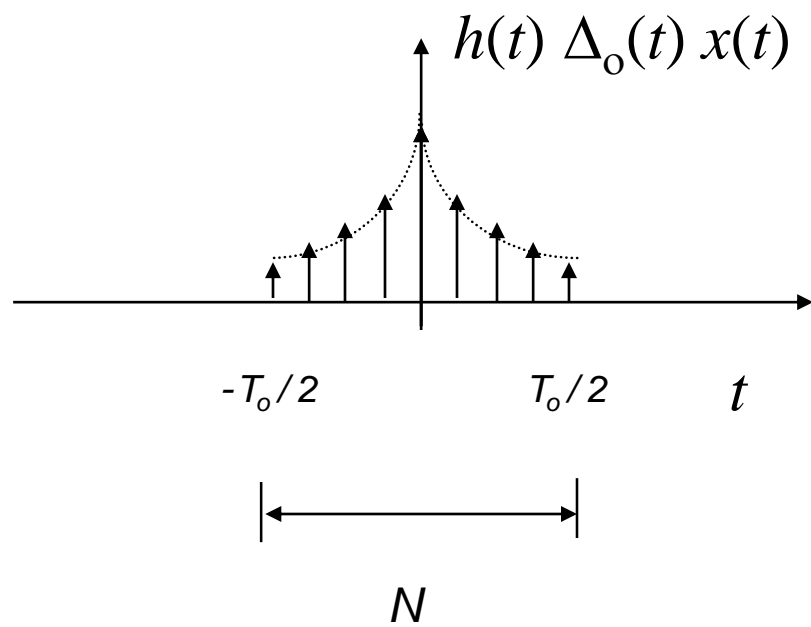




Ventaneo



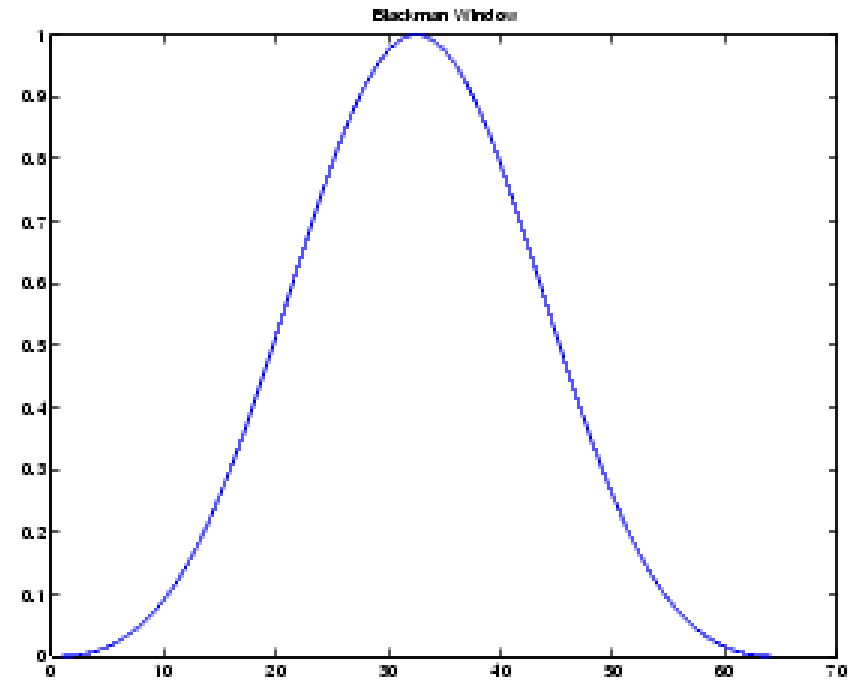
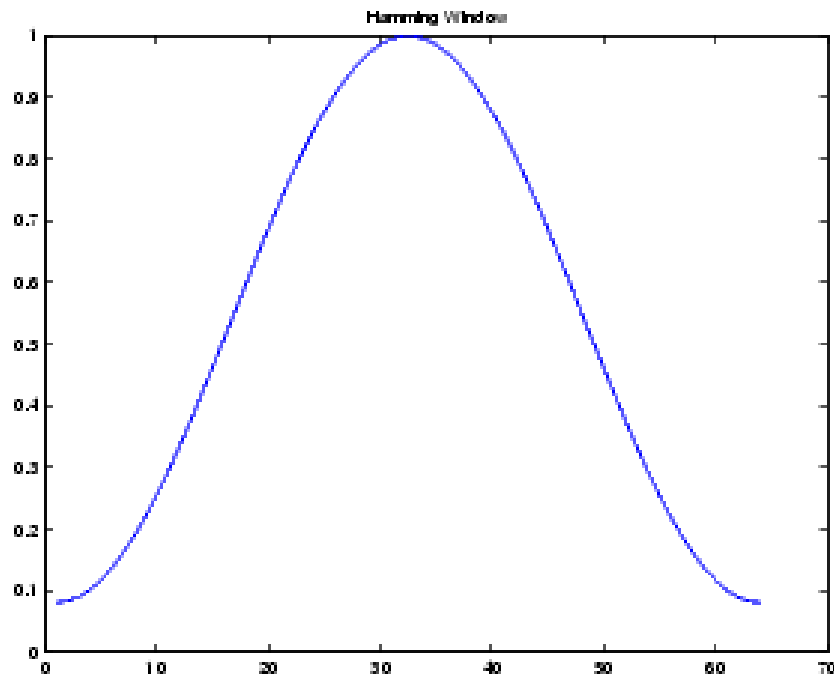


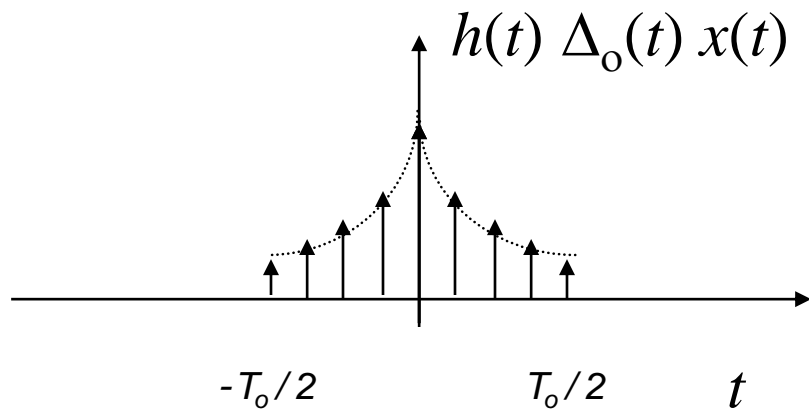


Ventanas: Hamming y Blackman

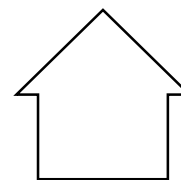
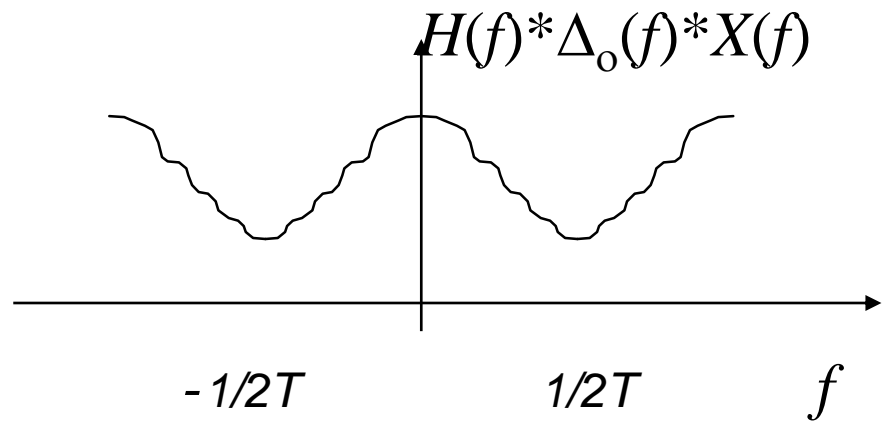
$$w[k+1] = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$w[k+1] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{k}{n-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

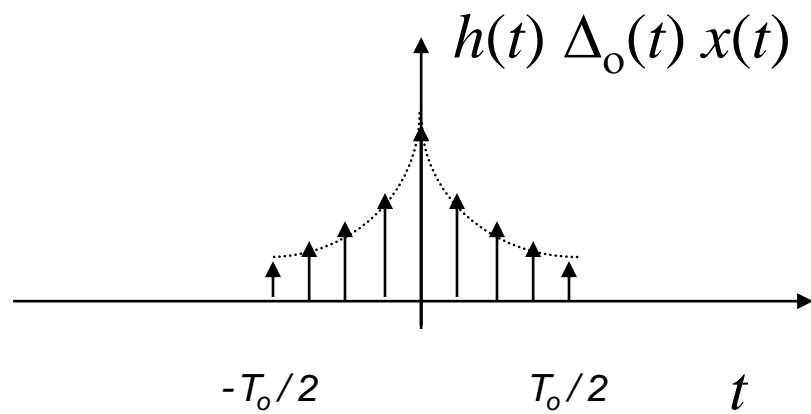




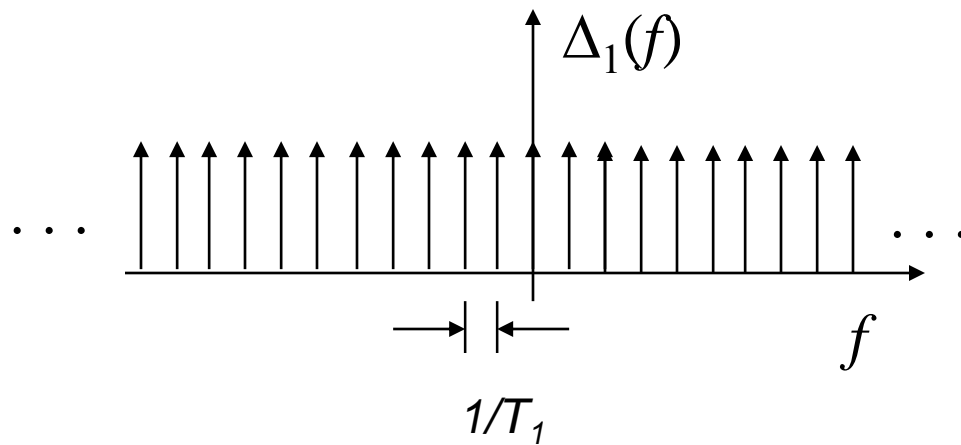
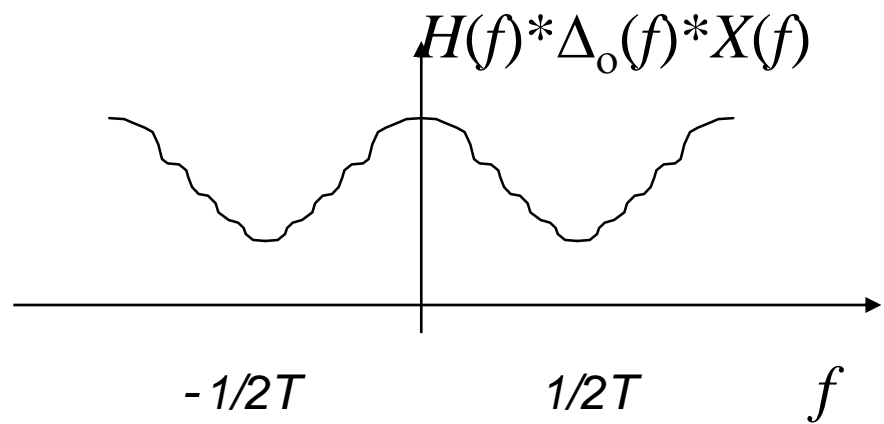
N

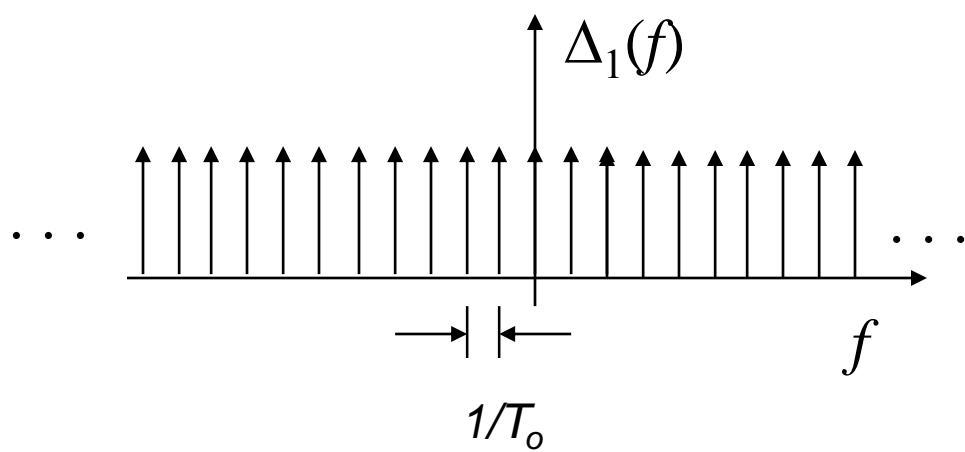
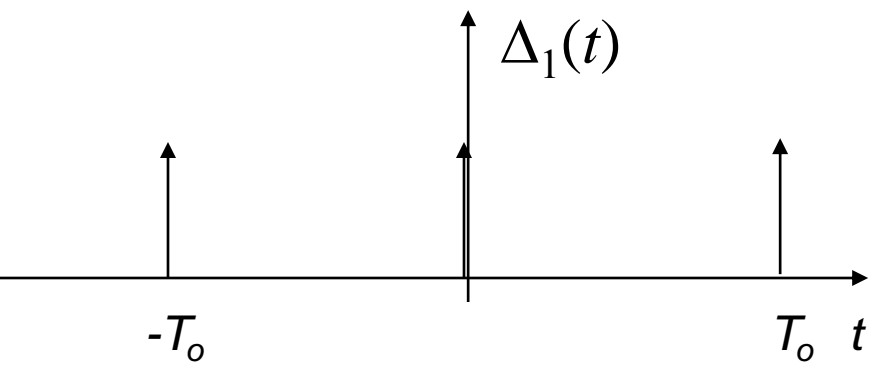
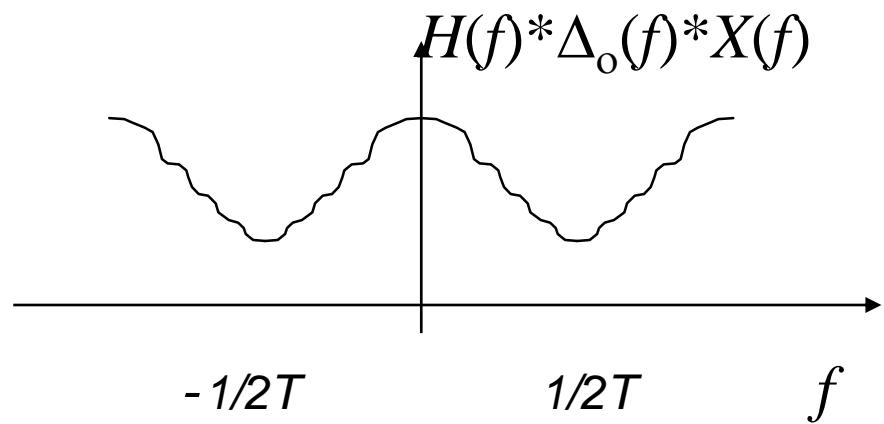
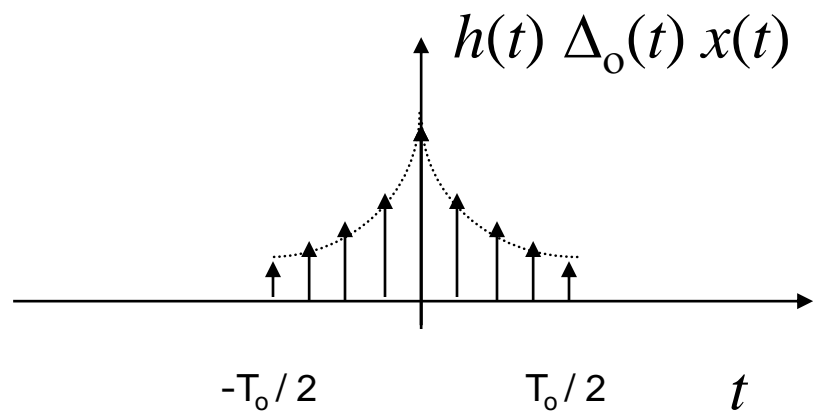


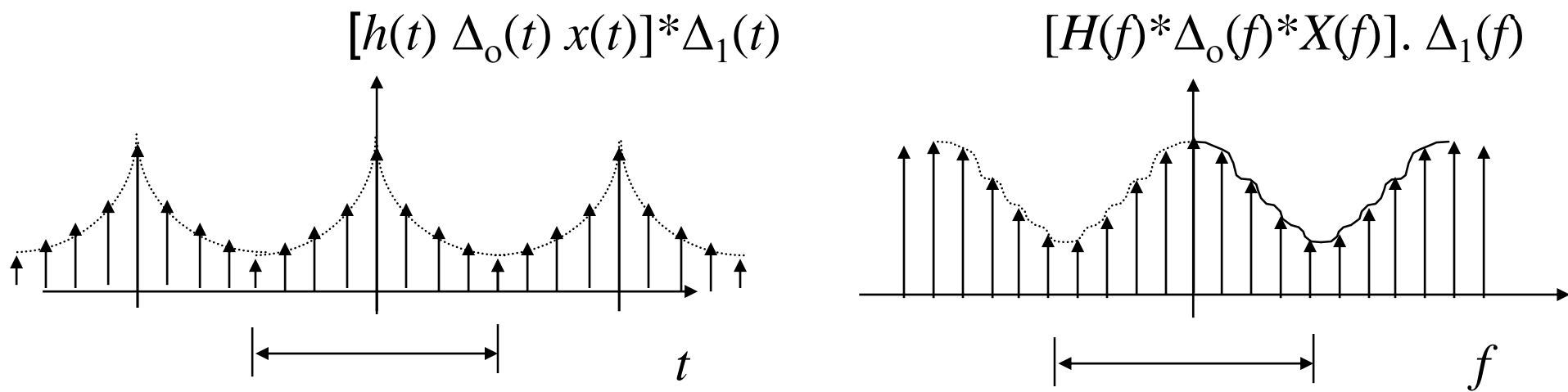
sigue continuo



$\Delta_1(t)$







N \leftarrow \rightarrow N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}$$

$$n, k = 0, 1, 2, 3, \dots N - 1$$

Transformada Rápida de Fourier FFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Si consideramos que $W = e^{-j2\pi/N}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Esta expresión define un sistema de N ecuaciones.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Si $N = 4$

$$X(0) = x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0$$

$$X(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3$$

$$X(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6$$

$$X(3) = x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

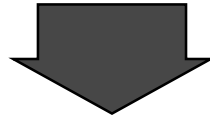
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como W es complejo y $x(n)$ puede serlo, son necesarias **N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas** para realizar este cálculo.



$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Es posible factorizar la matriz \mathbf{W} de modo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Observación: Se intercambiaron los renglones 2 y 3 de X

Podemos tomar un vector intermediario

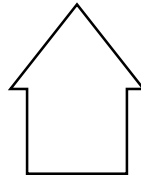
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

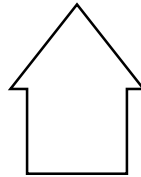
donde $x_1(0)$ puede calcularse como $x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$

$$x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$$



Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$



Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$

donde además se verifica que $W^0 = -W^2$
por lo que

$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

pero el segundo término **ya fue calculado** para hallar $x_1(0)$



$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

por lo cual estamos ahorrando una multiplicación compleja

Análogamente $x_1(3)$ también puede calcularse con sólo **una** suma y **ninguna** multiplicación adicional.

Por lo que el vector intermediario x_1 puede calcularse con cuatro sumas y dos multiplicaciones

Volviendo al cálculo inicial tenemos

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

Donde, por un razonamiento análogo, puede realizarse la operación con cuatro sumas y 2 multiplicaciones

- En total hemos empleado 4 multiplicaciones y 8 sumas complejas
- El cálculo realizado en la forma primitiva hubiese requerido 16 multiplicaciones y 12 sumas complejas

- Para $N = 2^\gamma$ el algoritmo de la FFT es simplemente un procedimiento para factorizar una matriz $N \times N$ en γ matrices que minimizan el número de productos y sumas complejas

FFT

- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

FFT

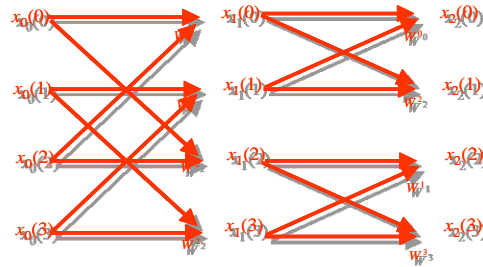
- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

Si $N=1024$ y asumimos que el tiempo de cómputo es proporcional al número de multiplicaciones, la relación de velocidades es de

200 a 1

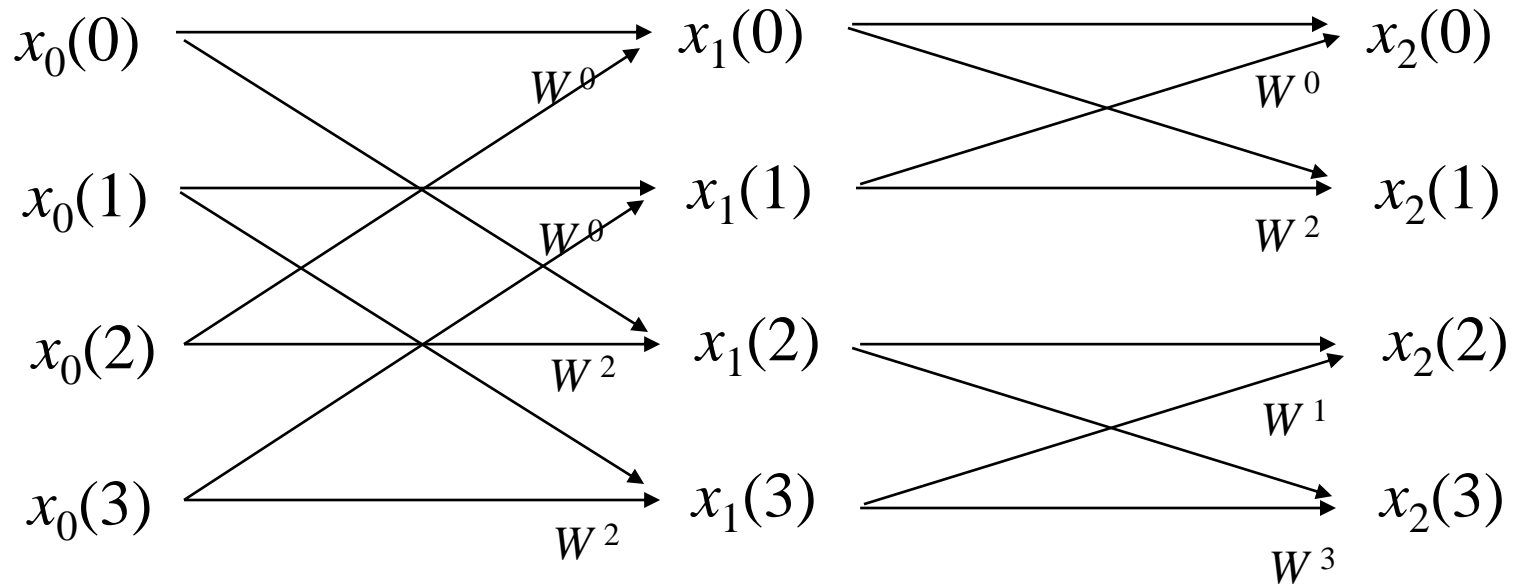


Diagramas “mariposa”

Revisando la factorización ...

Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$



Diagramas “mariposa”

Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$

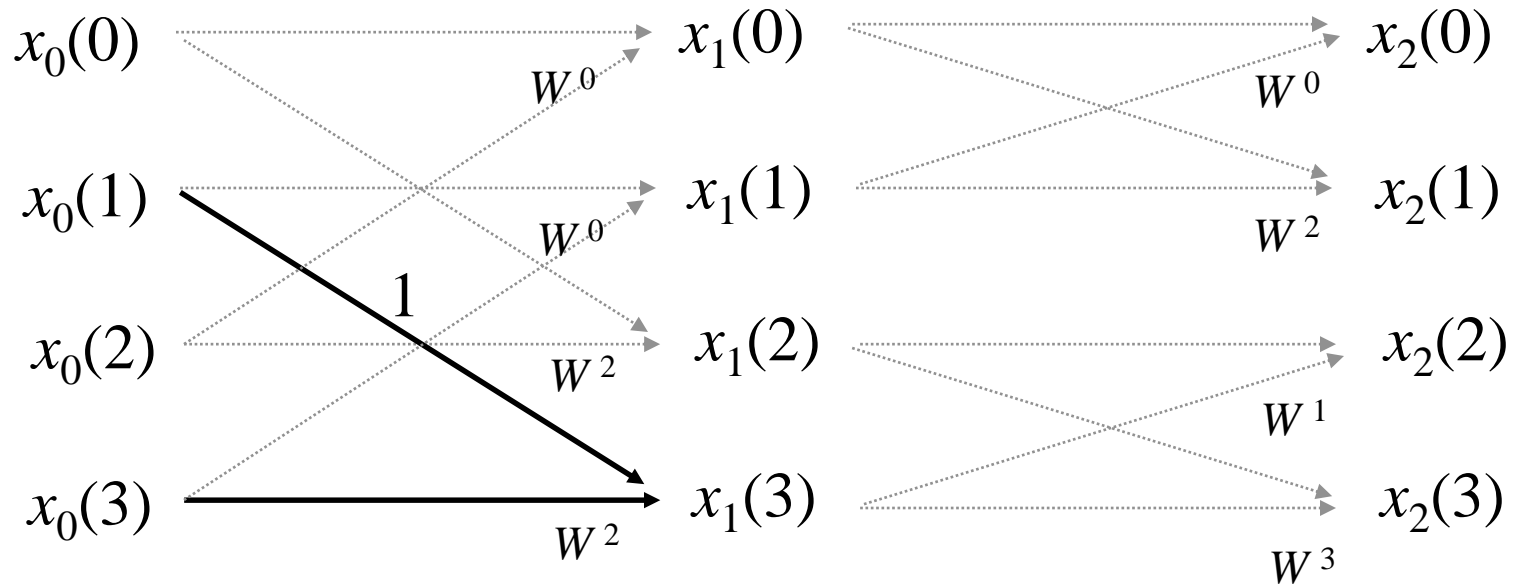


Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$

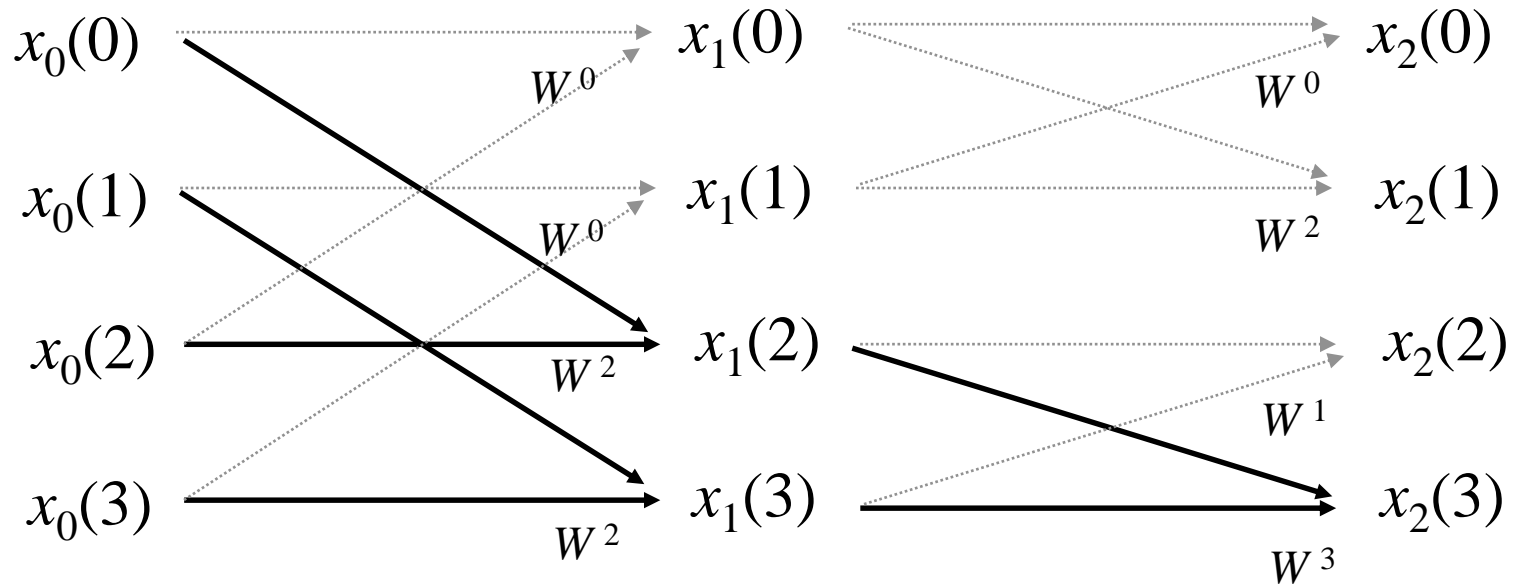
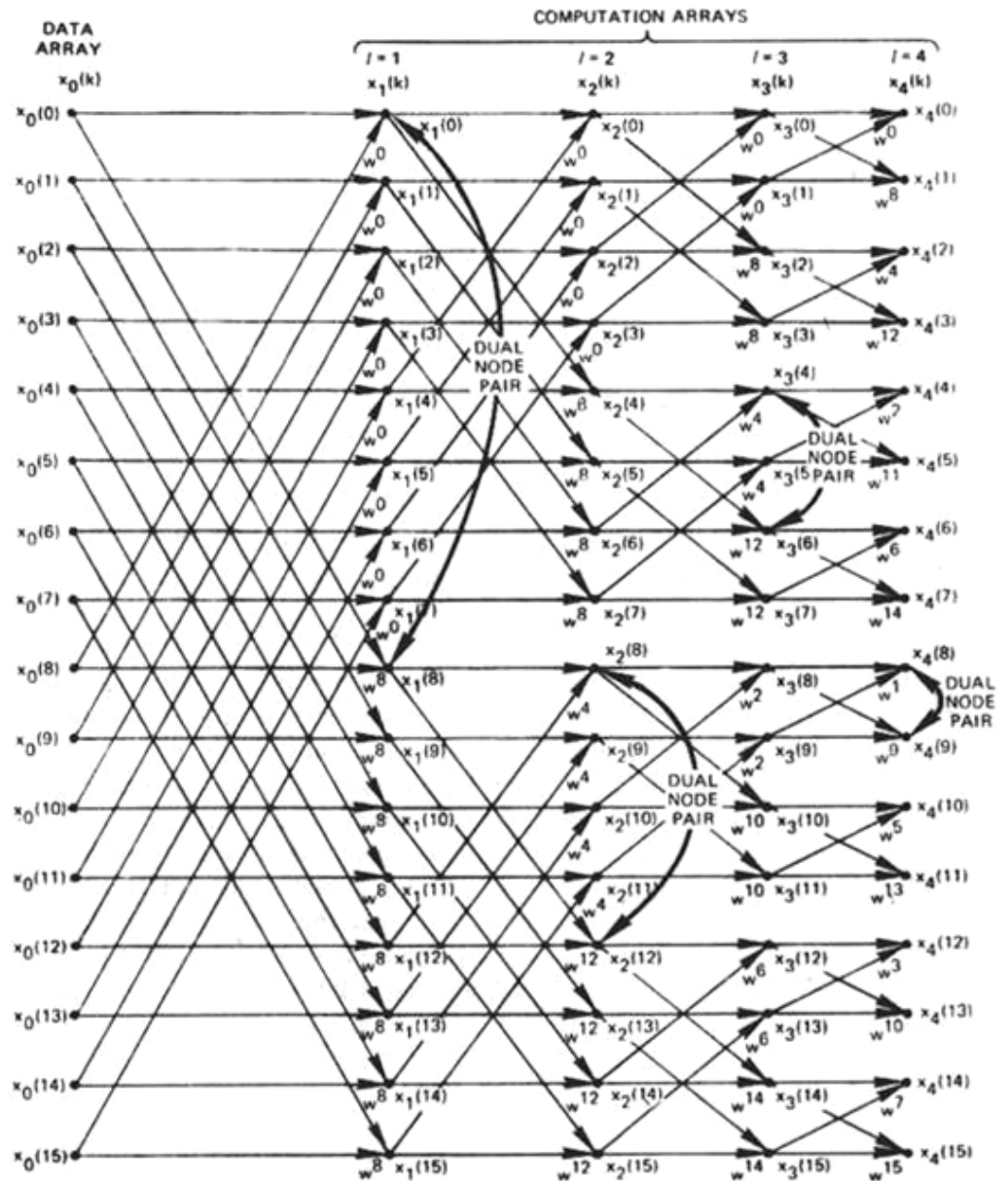
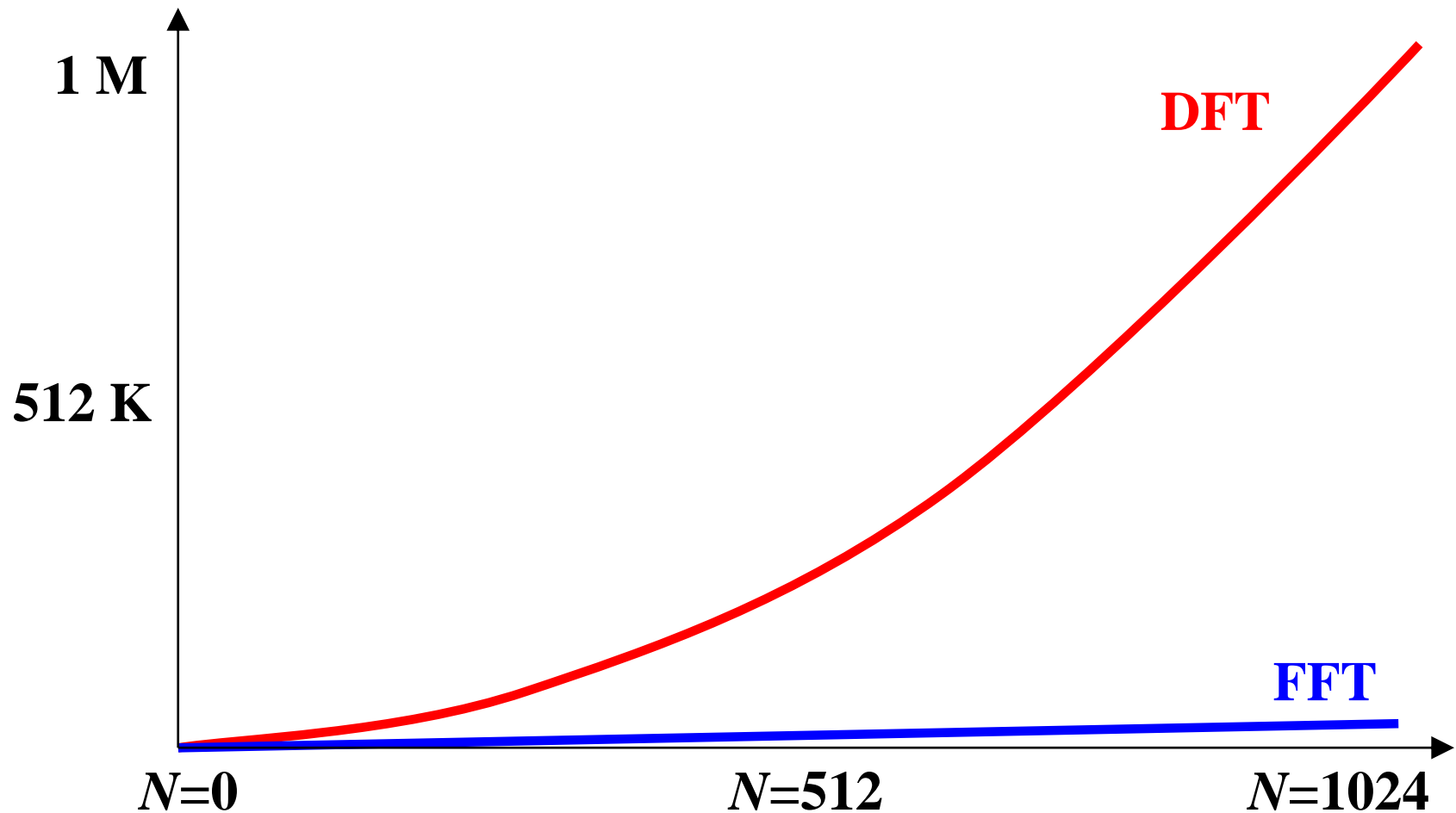


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 16$



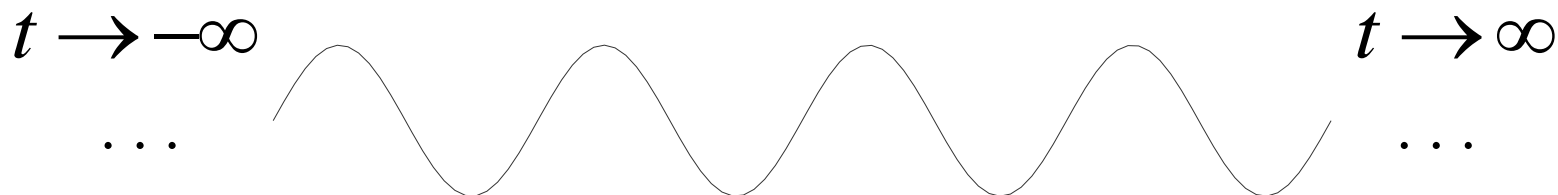
Multiplicaciones FFT vs. DFT



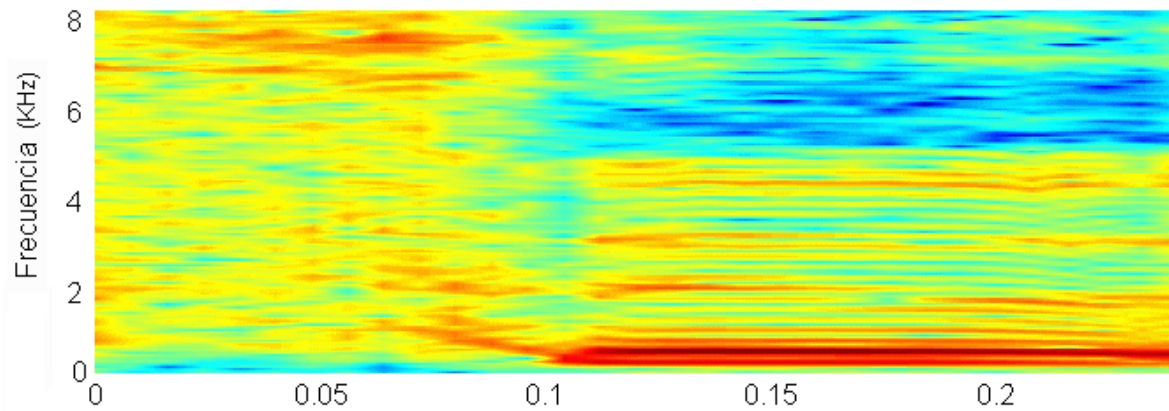
Introducción al Análisis Tiempo- Frecuencia

¿Problemas con señales no estacionarias o transitorias...?

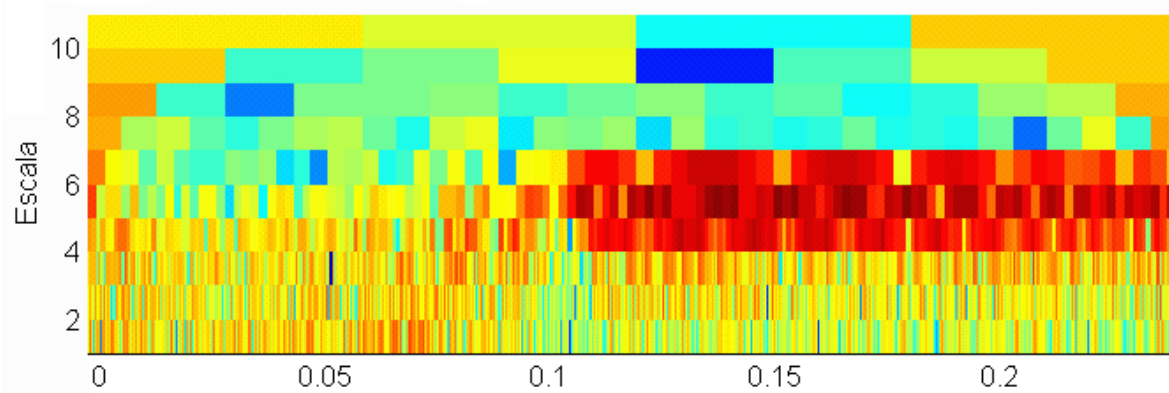
- La familia de Fourier está “diseñada” para analizar señales cuyo “comportamiento” o propiedades no varíen en el tiempo...



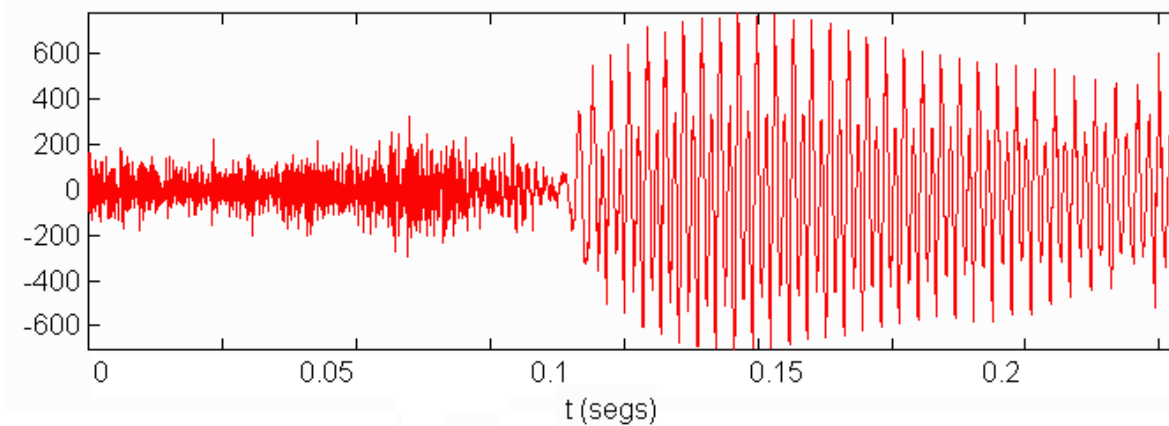
- Se requiere otra “base” que permita realizar este análisis...



Espectrogram



Escalograma

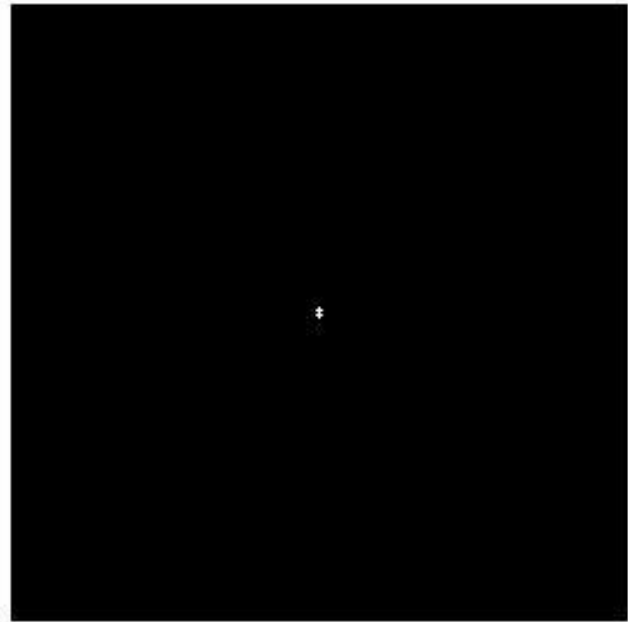


Sonograma

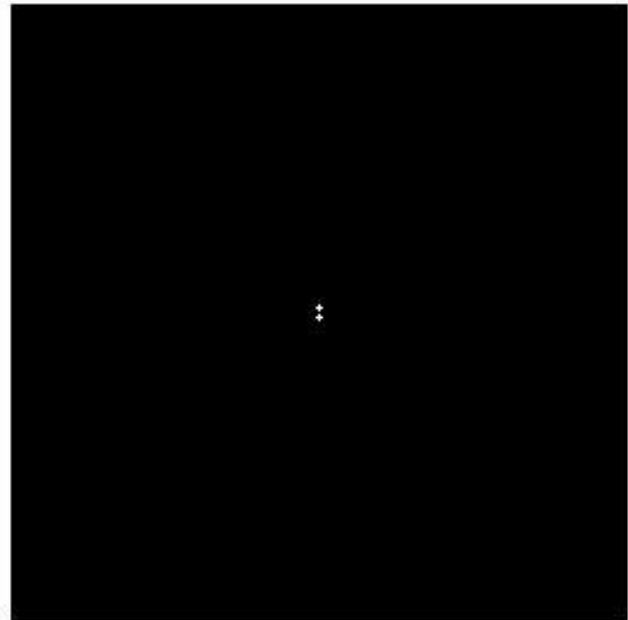
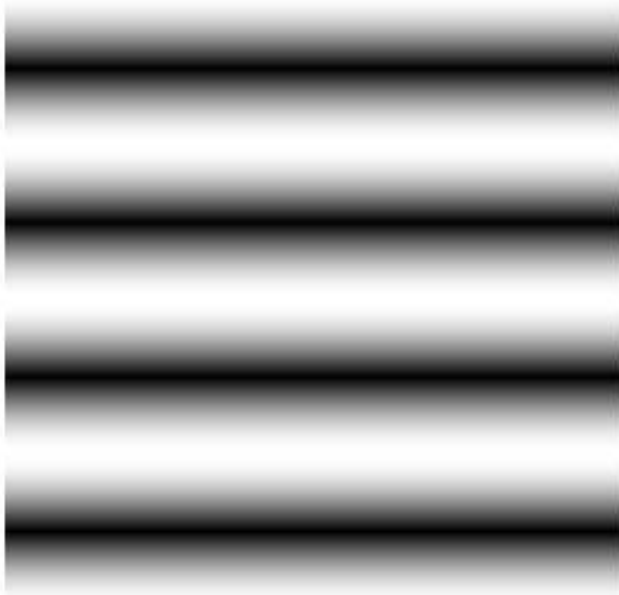
Análisis de Fourier en Imágenes

Transformada de Fourier en 2D

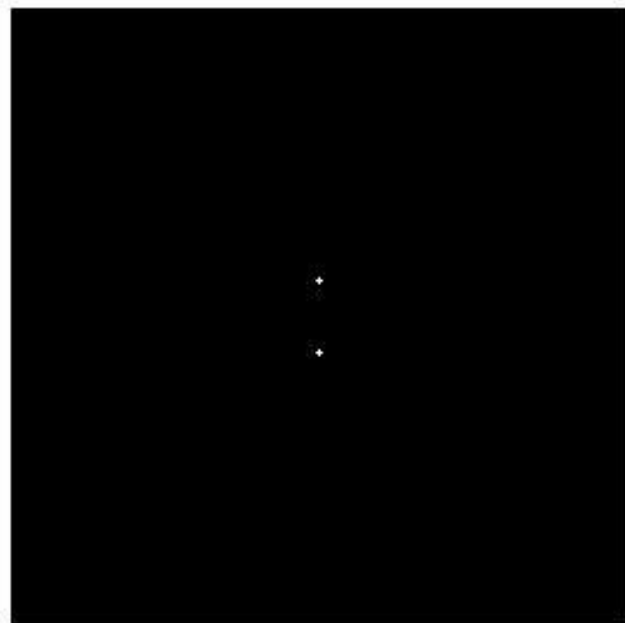
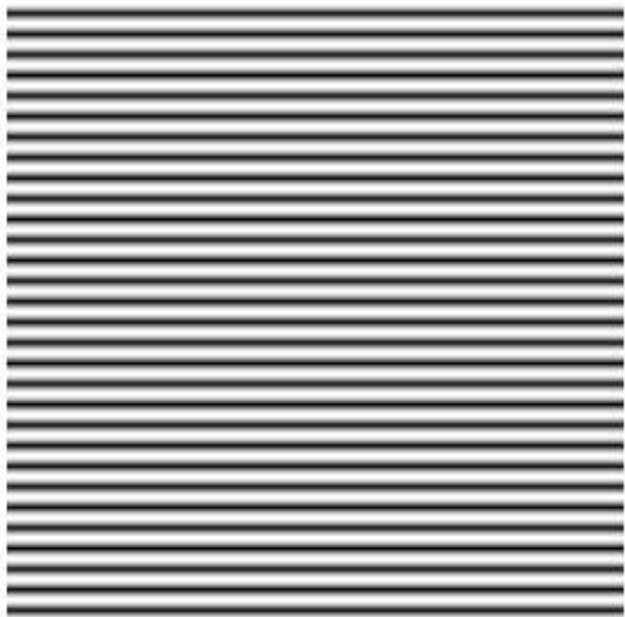
$$\sin(y) = \sin(1y)$$



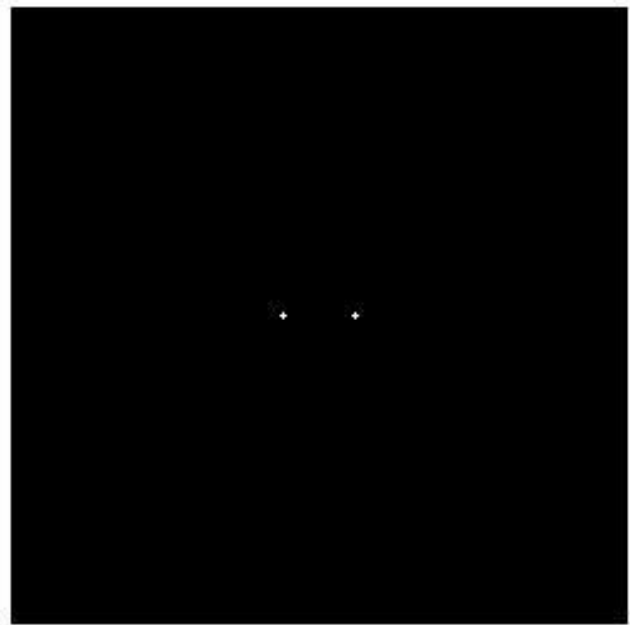
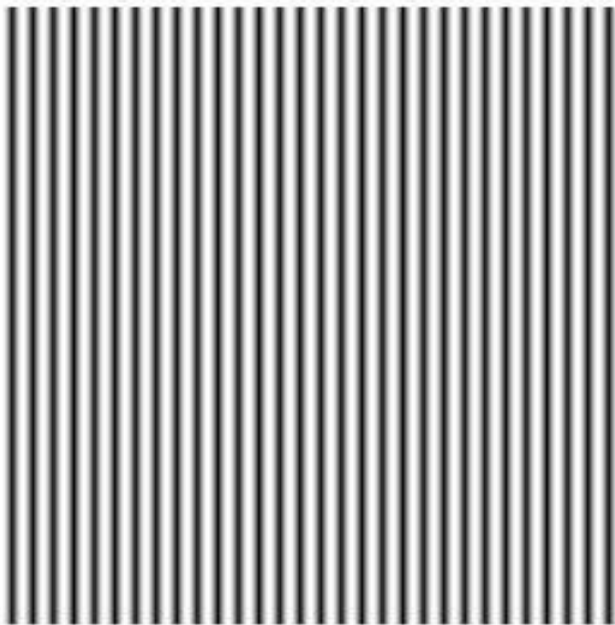
$$\sin(2y)$$



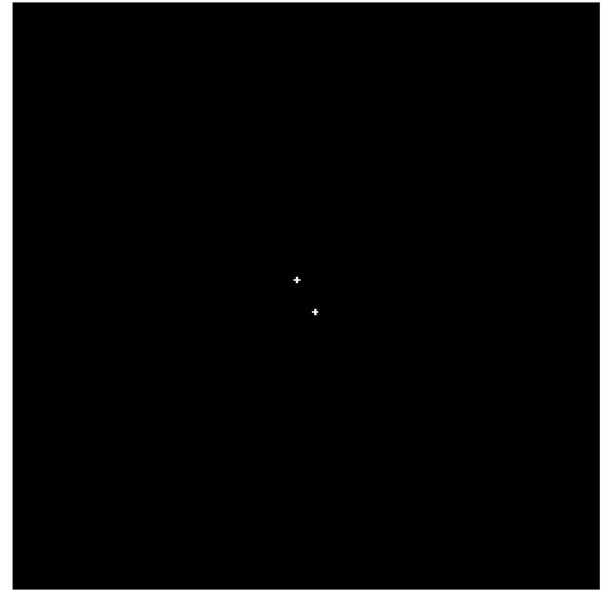
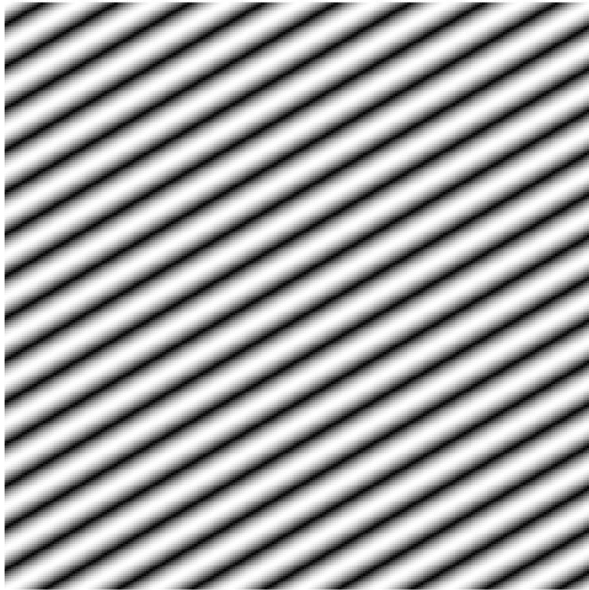
$\sin(15y)$



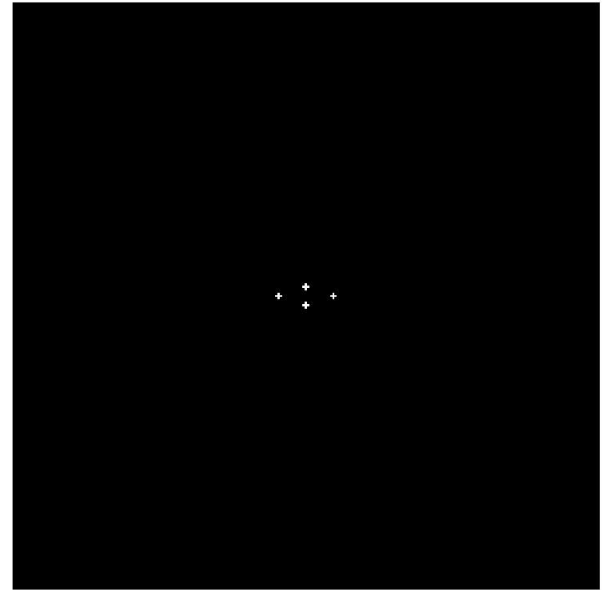
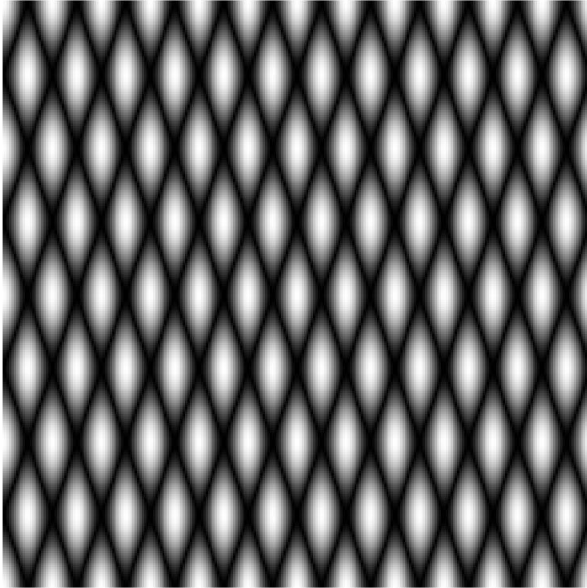
$$\text{sen}(15x)$$



$$\text{sen}(3.5x + 7y)$$

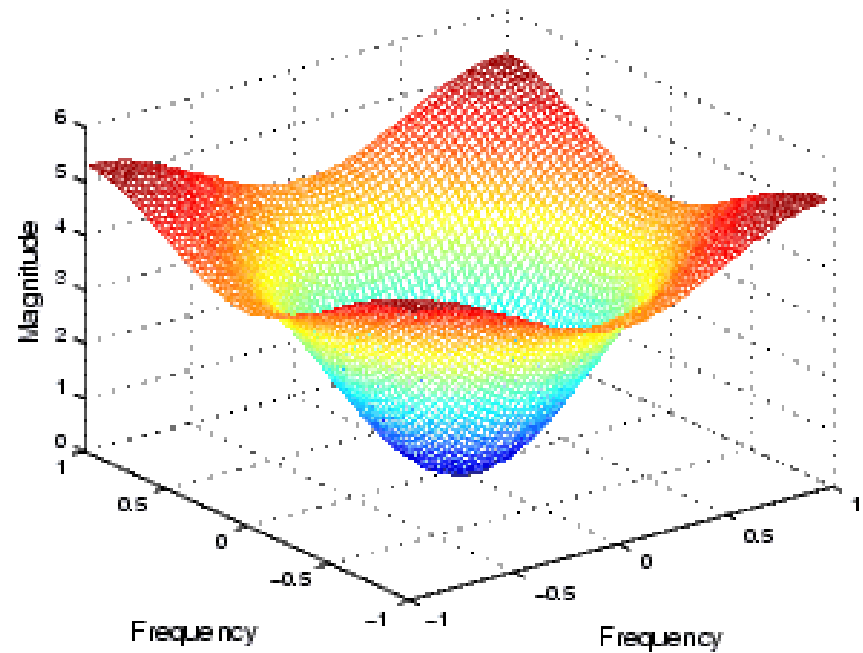
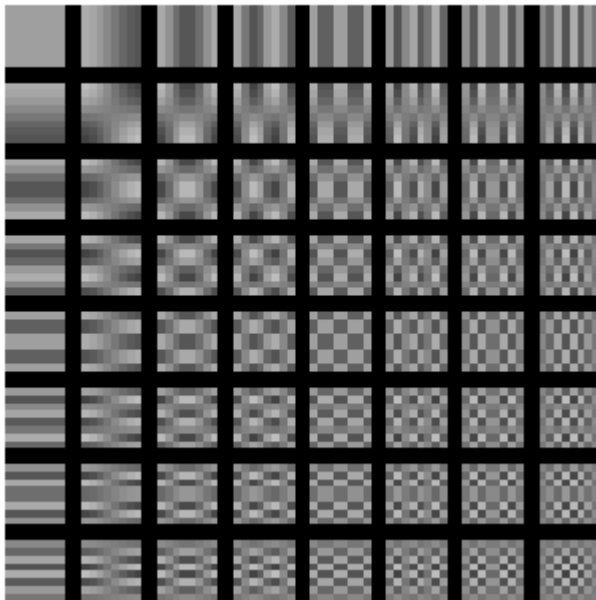


$$\sin(12x) + \sin(4y)$$

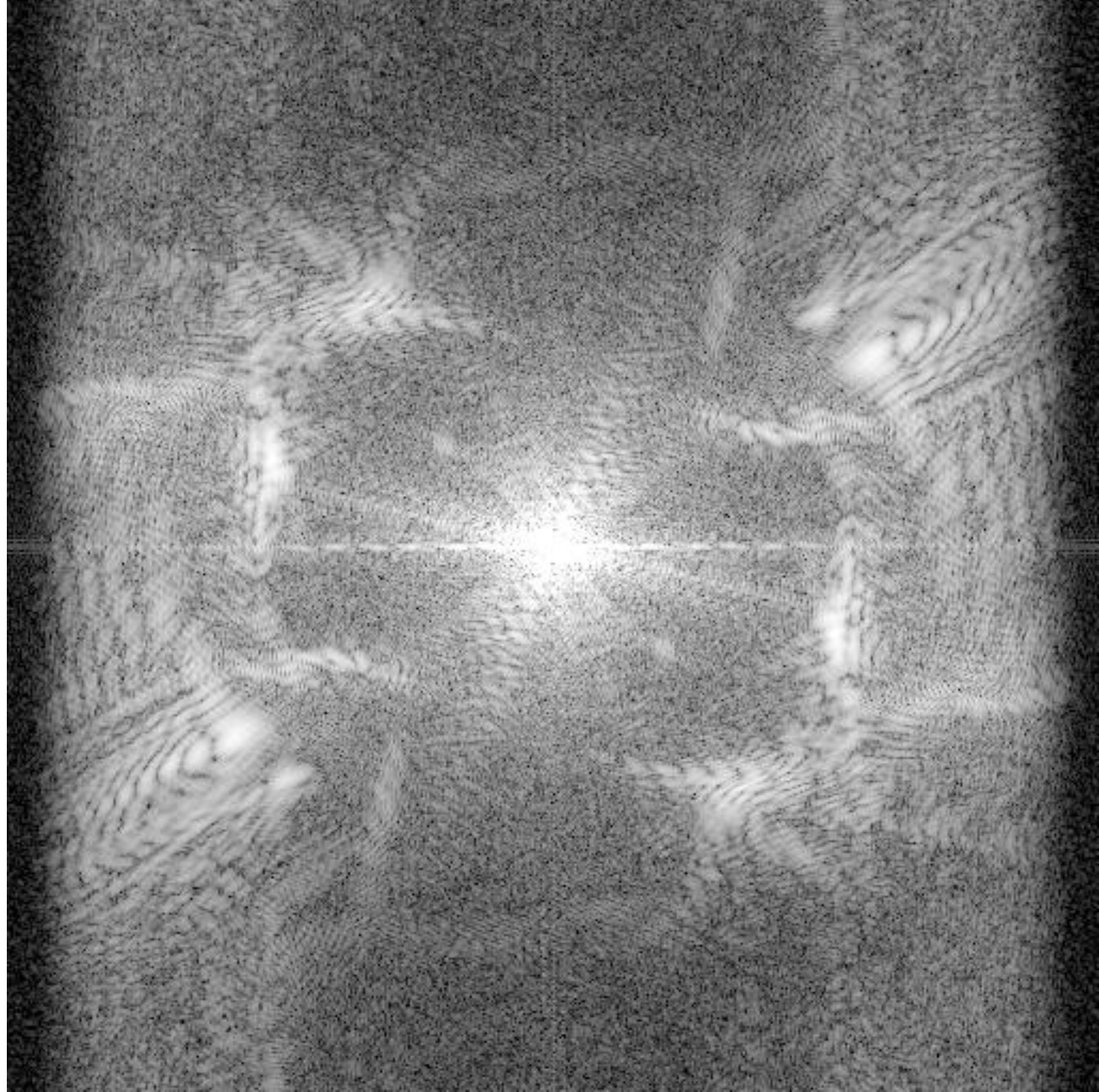


Fourier Bidimensional

- Ahora la base es:





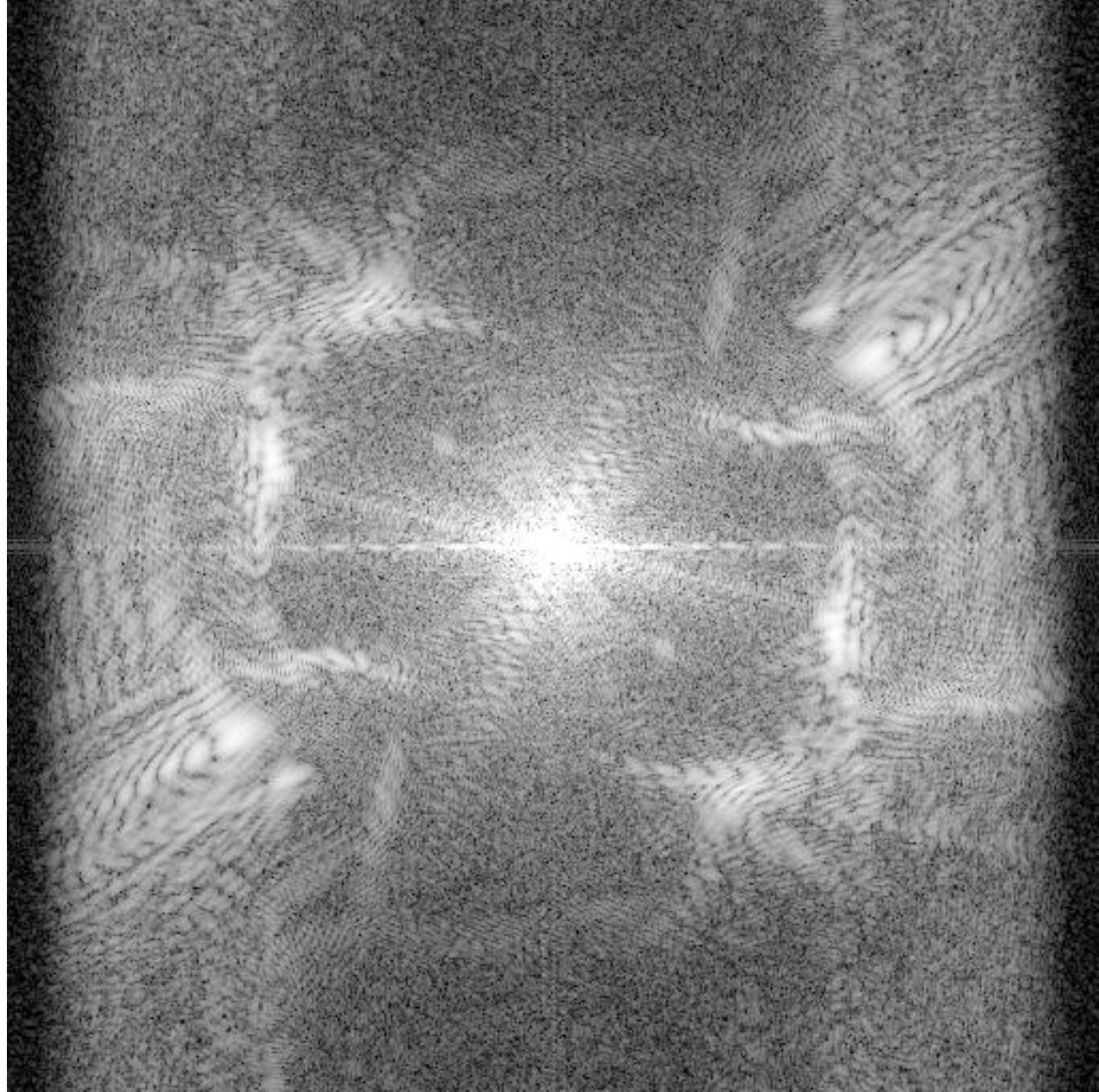


Ejemplo: Compresión 2D

Para almacenar o transmitir.

Submuestreo,
en el espacio de la imagen.

Filtrado,
en el espacio de frecuencias.











Bibliografía recomendada

- Brigham: 2.1 a 2.3, 5.1, 5.3, 5.4, 6.1 a 6.3, 6.5
- Oppenheim, A. V. and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989, p. 611-619.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.
- Duhamel, P. and M. Vetterli, "Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art," *Signal Processing*, Vol. 19, April 1990, pp. 259-299.