TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

Sửa Đề thi VTP 1B K15

- Vũ Lê Thế Anh

Cập nhật: 14/02/2017

Bài 1:

a/ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ với $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>0,\forall n\geq 1$ là chuỗi đan dấu có:

+ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$;
+ $n+1>n>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \Leftrightarrow a_{n+1}<a_n, \forall n\geq 1$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ là chuỗi Leibnitz hội tụ.

b/ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ là chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$ với $c_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}\frac{\sqrt[3]{n}}{(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\right|=1>0$$

Bán kính hội tụ: $R=\frac{1}{1}=1$

+ Khi $|x|<1 \Rightarrow x\in(-1,1)$, chuỗi đề bài hội tụ.

+ Khi $x=1$, chuỗi đề bài trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Theo kết quả câu a, đây là chuỗi Leibnitz hội tụ.

+ Khi $x=-1$, chuỗi đề bài trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ là chuỗi phân kỳ do là chuỗi Dirichlet có $\alpha=\frac{1}{3}<1$.

+ Khi $|x|>1$, chuỗi đề bài phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ là $(-1,1]$.

Bài 2:

a/ Theo định nghĩa đạo hàm, ta có đạo hàm của f(x) tại a là:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{a}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{a}\sqrt{x}}=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ là: $f'(4)=\frac{-1}{2*4*\sqrt{4}}=\frac{-1}{16}$

Phương trình tiếp tuyến tại $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ là: $y=f'(4)(x-4)+f(4)=-\frac{1}{16}(x-4)+\frac{1}{2}=\frac{-1}{16}x+\frac{3}{4}$

b/ $(C): y^2 = x^3 + 3x^2$

Xét một đoạn cong ngắn của (C) qua $(1, -2)$ và coi đó là đồ thị của ẩn hàm $y = f(x)$.

Có: $[f(x)]^2 = x^3 + 3x^2$

Lấy đạo hàm hai vế, ta có: $2f(x)f'(x) = 3x^2 + 6x$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $(1, -2)$ là $f'(1)$ thỏa:

$$2f(1)f'(1) = 3 * 1^2 + 6 * 1 \Leftrightarrow \ -4f'(1) = 9 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{9}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến tại $(1, -2)$ của (C) là:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{9}{4}(x-1) - 2 = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$$

Bài 3:

a/

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

Xét: $f(x) = e^{\sin x} - e^x$ và $g(x) = \sin x - x$

Có:

$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\sin 0} - e^0 = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \sin 0 - 0 = 0 - 0 = 0$

Vậy $\frac{f(x)}{g(x)}$ là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Có:

$f'(x) = e^{\sin x} \cos x - e^x \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = e^{\sin 0} \cos 0 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$g'(x) = \cos x - 1 \Rightarrow \ \lim_{x\to 0} g(x) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Vậy $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cũng là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Có:

$f''(x) = e^{\sin x} \cos^2 x - e^{\sin x} \sin x - e^x \Rightarrow \lim_{x\to 0} f''(x) = 1 - 0 - 1 = 0$

$g''(x) = -\sin x \Rightarrow \ \lim_{x\to 0} g(x) = -0 = 0$

Vậy $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ cũng là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Có:

$f^{(3)}(x) = e^{\sin x}\cos^3 x - 3\,\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cos x - e^{\sin x}\cos x - e^x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = 1 - 0 - 1 - 1 = -1$

$g^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(3)}(x)}{g^{(3)}(x)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

b/ Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{dt}{t^2+3}$$

Đặt $t = \sqrt{3}\tan u \left(|u| < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dt = \sqrt{3}\,(1+\tan^2 u)du$

$$\int \frac{dt}{t^2+3} = \int \frac{\sqrt{3}\,(1+\tan^2 u)}{3(1+\tan^2 u)}du = \frac{1}{\sqrt{3}}\int du = \frac{1}{\sqrt{3}}u + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int_0^k \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{3}}\Big|_0^k = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{e^k}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{e^k}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{e^k}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Vậy tích phân suy rộng $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$ hội tụ và có giá trị bằng $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Bài 4: $f(x) = \sqrt{x}$

a/ Đa thức Taylor $T_3(x)$ của $f(x)$ đến bậc 3, xung quanh điểm 4 là:

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3}\frac{f^k(4)}{k!}(x-4)^k$$

Có:

$f^{(0)}(x) = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f^{(0)}(4) = 2$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f^{(1)}(4) = \frac{1}{4}$

$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f^{(2)}(4) = \frac{-1}{32}$

$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} \Rightarrow f^{(3)}(4) = \frac{3}{256}$

$$f(x) \approx T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

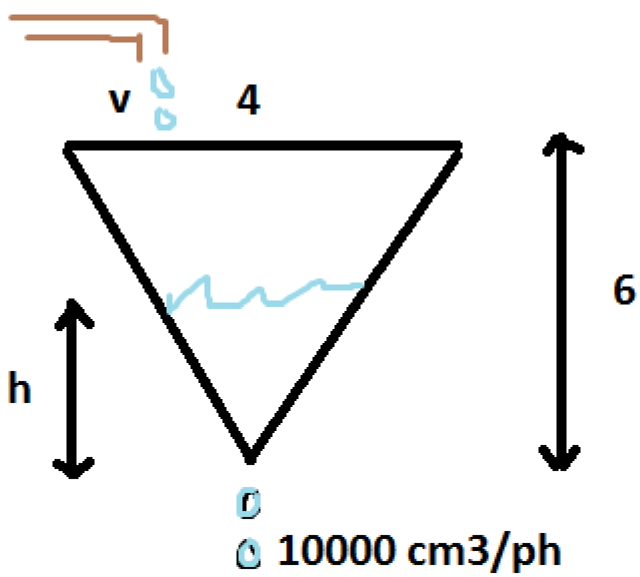
b/ Đánh giá độ chính xác của xấp xỉ $f(4.2) = \sqrt{4.2} \approx T_3(4.2)$ tức là đánh giá độ lớn sai số $|R_3(x)| = |f(x) - T_3(x)|$ với $4 \le x \le 4.2$.

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{-15}{16}x^{-7/2}\right| = \frac{15}{16}|x|^{-7/2} \le \frac{15}{16}4^{-7/2} = M$$

Theo bất đẳng thức Taylor:

$$|R_3(x)| \le \frac{M}{4!}|x-4|^4 \le \frac{15}{16}4^{-7/2}\frac{1}{4!}|4.2-4|^4 = \frac{1}{2048000} \approx 4.8828 * 10^{-7}$$

Bài 5:



Gọi h (cm) là độ cao mực nước của bể, r (cm) là bán kính mặt nước (một hình tròn) và V (cm^3) là thể tích nước trong bể.

Dựa vào hình vẽ, có tỉ lệ: $\frac{r}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$

Thể tích nước trong bể: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{27}$ (cm^3)

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt} \ (1)$$

Theo đề bài:

Thể tích V thay đổi theo tốc độ $\frac{dV}{dt} = v - 10^4$ $(cm^3/phút)$ với v $(cm^3/phút)$ là công suất bơm nước cần tìm.

Tại $h = 200$ (cm), tốc độ dâng cao của mực nước là $\frac{dh}{dt} = 20$ $(cm/phút)$.

Thế các dữ kiện trên vào (1):

$$v - 10^4 = \frac{200^2\pi}{9} * 20 \Rightarrow v = 10^4\left(\frac{80}{9}\pi + 1\right)\ (cm^3/phút)$$

Vậy công suất cần tìm là $v = 10^4\left(\frac{80}{9}\pi + 1\right)\ (cm^3/phút)$.