KHOA TOÁN-TIN HỌC
BỘ MÔN GIẢI TÍCH

ĐỀ THI VI TÍCH PHÂN 1B, NĂM HỌC 2016-2017
Thời gian 90 phút. Không sử dụng Multimedia, tài liệu

Bài 1. [Chuỗi số] Khảo sát sự hội tụ của chuỗi ở câu 1 và 2; tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa ở câu 3

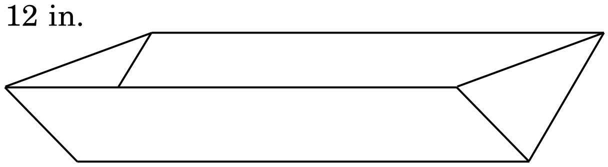
1) (0,5đ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+2}$ 2) (1đ) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n(\sqrt{n}+1)}$ 3) (1đ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

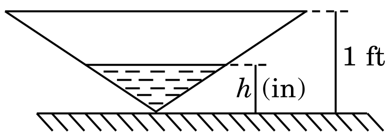
Bài 2. [Đạo hàm]

1) (1đ) Cho hàm số f định bởi $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Sử dụng định nghĩa đạo hàm, hãy chứng minh $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ với mọi x khác 0.

2) (1đ) Cho đường cong (C) có phương trình $x+\sin(x^2+y^2)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})$.

3) (1đ) Một máng nước dài 10 ft mà hai đầu là tam giác cân có cạnh bên 3 ft, chiều cao 1 ft. Máng được bơm nước với công suất 12 ft^3/phút. Hỏi rằng vào lúc mực nước cao 6 in thì tốc độ dâng cao của mực nước là bao nhiêu? Biết rằng 1 ft bằng 12 in.





Bài 3. [Khai triển Taylor]

1) (0,5đ) Hãy viết đa thức Taylor của một hàm f (có đạo hàm vô hạn) xung quanh điểm $a=1$ đến bậc n và dạng phần dư Lagrange với chú thích đầy đủ.

2) (0,5đ) Cụ thể hóa câu trên với hàm f cho bởi $f(x)=\ln x$.

3) (0,5đ) Hãy xấp xỉ giá trị của $\ln 0,9$ với sai số không quá 10^{-4}.

Bài 4. [Tích phân suy rộng] Các tích phân sau có hội tụ không? Nếu có, hãy tính giá trị của chúng.

1) (1đ) $\int_0^{\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$ 2) (1đ) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Bài 5. (1đ) Tại thời điểm t_0, một xe hơi có vận tốc 20 m/s và gia tốc 2 m/s^2. Dùng đa thức Taylor bậc 2, hãy ước tính quãng đường xe đi được trong giây tiếp theo. Có hợp lý không khi dùng xấp xỉ này để xấp xỉ quãng đường trong một phút tiếp theo? Giải thích rõ?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. [Chuỗi số]

1) (0,5đ) Số hạng tổng quát của chuỗi là $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$. Ta thấy

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$, do đó không thể có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, nghĩa là điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thỏa. Vậy chuỗi phân kỳ.

2) (1đ) Số hạng tổng quát của chuỗi là $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}-1}{n(\sqrt{n}+1)} > 0$, với $n \ge 2$. Xét chuỗi Dirichlet $\sum b_n$ với $b_n = \dfrac{1}{n^{7/6}}$, là chuỗi hội tụ vì có mũ là $\frac{7}{6} > 1$. Ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{7/6}(\sqrt[3]{n}-1)}{n(\sqrt{n}+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{3/2}(1-1/\sqrt[3]{n})}{n^{3/2}(1+1/\sqrt{n})} = 1 \in (0;\infty)$. Theo tiêu chuẩn so sánh dạng lim thì chuỗi đề bài cho $\sum a_n$ là hội tụ giống như chuỗi $\sum b_n$.

3) (1đ) Chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n (x-1)^n}{\sqrt{n}}$ có hệ số $c_n = \dfrac{10^n}{\sqrt{n}}$. Ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{10^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{10^n}\right) = 10$, suy ra bán kính hội tụ là $R = \dfrac{1}{10}$.

* Tại $x = 1 + \dfrac{1}{10} = \dfrac{11}{10}$, chuỗi trở thành $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, là chuỗi Dirichlet phân kỳ, vì có mũ $\frac{1}{2} < 1$.

* Tại $x = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$, chuỗi trở thành $\sum (-1)^n a_n$ với $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Dãy (a_n) là dãy dương giảm hội tụ về 0, nên chuỗi đang xét là chuỗi đan dấu dạng Leibnitz, do đó hội tụ.

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi là nửa khoảng $[\frac{9}{10}; \frac{11}{10})$.

Bài 2. [Đạo hàm]

1) (1đ) Theo định nghĩa đạo hàm thì

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{x}}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{t-x}{(t-x)(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{tx}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{tx}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ với } x \neq 0.$$

2) (1đ) Nếu xem một khoảng cong ngắn của $(C): x + \sin(x^2+y^2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$ có chứa điểm $A(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, f là ẩn hàm, thì ta có phương trình

$$x + \sin[x^2 + f^2(x)] = 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm ở hai vế của (1) theo biến x, ta được

$$1 + 2[x + f'(x)f(x)]\cos[x^2 + f^2(x)] = 0 \qquad (2)$$

Thay $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$ vào (2) và lưu ý $f(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$, ta được

$$1+2\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}+f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})(-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})\right]\cos\frac{\pi}{6}=0\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1-f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})\right]=0\Rightarrow f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})=1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là $y+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}=f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})$, thay kết quả trên vào, ta được $y+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}=(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}})(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}})$.

3) (1đ) Theo định lý Pythagore, độ dài cạnh đáy của tam giác cân (bề rộng của miệng máng) là $a=2\sqrt{3^2-1^2}=4\sqrt{2}$ (ft). Gọi h (ft) là chiều cao mực nước dâng theo thời gian t (phút), tương ứng là bề rộng mặt nước trong máng là x (ft), thì do tính chất đồng dạng của hai tam giác, ta có $\frac{x}{a}=\frac{h}{1}\Rightarrow x=ah$. Thể tích nước trong máng là $V=10(\frac{1}{2}xh)=5ah^2=20h^2\sqrt{2}$. Theo giả thiết thì

$$\frac{dV}{dt}=12\ (\text{ft}^3/\text{phút})\Rightarrow 20\sqrt{2}\frac{d}{dt}(h^2)=12\Rightarrow h\frac{dh}{dt}=\frac{3}{10\sqrt{2}}.$$

Vào lúc $h=6\ (\text{in})=0,5\ (\text{ft})$ thì ta có

$$0,5\cdot\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\text{lúc } h=0,5}=\frac{3}{10\sqrt{2}}\Rightarrow\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\text{lúc } h=0,5}=\frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Vậy tốc độ dâng của mực nước (theo thời gian) vào lúc mực nước đạt độ cao 6 in là $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ ft/phút.

Bài 3. [Khai triển Taylor]

1) (0,5đ) Đa thức Taylor bậc n của hàm số f xung quanh điểm a là

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

trong đó $f^{(k)}$ là đạo hàm bậc k của f. Phần dư số Lagrange là

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$ trong đó ξ là một số nằm giữa a và x.

2) (0,5đ) Với hàm số f cho bởi $f(x)=\ln x$ thì $\forall k\geq 1, f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$, suy ra $\forall k\geq 1,\frac{f^{(k)}(1)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ và ta có $T_n(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

Phần dư Lagrange là $R_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, trong đó ξ là số nằm giữa 1 và x.

Bài 4. (0,5đ) Lấy kết quả câu 2, ta xấp xỉ $f(0,9)\approx T_n(0,9)$, nghĩa là

$$\ln 0,9\approx(0,9-1)-\frac{1}{2}(0,9-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(0,9-1)^n=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k10^k}$$

Với độ lớn sai số là

$$\left|R_n(0,9)\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(0,9-1)^{n+1}\right|<\frac{1}{9^{n+1}(n+1)},$$ trong đó $0,9<\xi<1$.

Để độ lớn sai số không quá 10^{-4}, ta chọn giá trị của n sao cho $\frac{1}{9^{n+1}(n+1)}<10^{-4}$, ví dụ $n=3$, thì ta có xấp xỉ theo đúng yêu cầu:

$$\ln 0,9 \approx -\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{2.10^2}+\frac{1}{3.10^3}\right)=-\frac{79}{750}\text{, hoăc là } \ln 0,9 \approx -0,1053\,.$$

Bài 5. [Tích phân suy rộng]

1) (1đ) Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến $e^x=\sqrt{3}\tan u$, lấy vi phân theo biến x ở 2 vế ta được $e^x dx=\sqrt{3}(1+\tan^2 u)du$ và $e^{2x}+3=3(1+\tan^2 u)$. Suy ra

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx=\int \frac{du}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right).$$

Ta xét giới hạn

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^t=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$ hội tụ và có giá trị bằng $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2) (1đ) Tìm nguyên hàm bằng cách đặt $u=2\sqrt{x}$, $du=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ và $v=\ln x$, $dv=\dfrac{dx}{x}$ rồi lấy nguyên hàm từng phần

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int vdu=uv-\int udv=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{2\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\,.$$

Ta xét giới hạn

$$\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{t\to 0+}\ 2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\ \Big|_t^1=\lim_{t\to 0+}\ -4-2\sqrt{t}\ln t+4\sqrt{t}\ =-4-2\lim_{t\to 0+}\ \sqrt{t}\ln t$$

$$=-4-2\lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^{s/2}}\qquad (\text{đặt } s=-\ln t)$$

$$=-4-2\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{s/2}}\qquad (\text{quy tắc Lô-pi-tan})$$

$$=-4.$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ và có giá trị bằng -4.

Bài 6. (1đ) Giả sử phương trình chuyển động thẳng của xe là $s=s(t)$, nghĩa là tại mỗi thời điểm t, xe cách mốc (hệ quy chiếu) một độ dời là s (mét). Tính từ thời điểm t_0, một giây tiếp theo xe sẽ đi được quãng đường là $s(t_0+1)-s(t_0)$. Nếu ta xấp xỉ $s(t)$ bởi đa thức Taylor xung quanh điểm t_0 đến bậc 2,

$s(t)\approx s(t_0)+\dfrac{s'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\dfrac{s''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$, rồi thay $t=t_0+1$, ta ước tính quãng

đường cần tính là $s(t_0+1)-s(t_0)\approx\dfrac{s'(t_0)}{1!}+\dfrac{s''(t_0)}{2!}=20+1=21$ (mét), trong đó vận

tốc và gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 lần lượt là $s'(t_0)=20$ (m/s) và

$s''(t_0)=2$ (m/s^2). Phép xấp xỉ có độ lớn sai số là $\left|R_2(t_0+1)\right|=\dfrac{\left|s^{(3)}(\xi)\right|}{3!}$, trong đó

$t_0 < \xi < t_0 + 1$. Trong thực tế, tốc độ biến thiên gia tốc $s^{(3)}(\xi)$ của xe không lớn (xe không đột ngột thay đổi gia tốc quá lớn trong thời gian ngắn 1 giây), do đó sai số này là nhỏ so với quãng đường 21 mét, ta chấp nhận được.

Nếu dùng phép xấp xỉ trên để ước tính quãng đường trong 1 phút tiếp theo, nghĩa là thay $t = t_0 + 60$ thì độ lớn sai số là $\left|R_2(t_0 + 60)\right| = \frac{\left|s^{(3)}(\xi)\right|}{3!} \cdot 60 = 10\left|s^{(3)}(\xi)\right|$, có thể mang giá trị lớn hơn nhiều so với sai số trước, không hợp lý.

HẾT