TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

Bài tập Chuỗi Taylor và Xấp xỉ bằng BĐT Taylor

➢ Vũ Lê Thế Anh

Cập nhật: 15/02/2017

Xấp xỉ $f(x)$ bằng đa thức Taylor bậc n xung quanh a và ước lượng độ chính xác của xấp xỉ khi x nằm trong đoạn cho trước:

$1/\ f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad x \in [4{,}4.2]$

$2/\ f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad x \in [0{,}0.2]$

$3/\ f(x) = x\sin x\,, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad x \in [-1{,}1]$

Câu 1:

Có: $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad x \in [4{,}4.2]$

Đa thức Taylor bậc $n = 2$ của $f(x)$ quanh $a = 4$:

$$f(x) \sim T_2(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n$$

Có:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f^{(0)}(4) = 2$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f^{(1)}(4) = \frac{1}{8}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f^{(2)}(4) = \frac{-1}{32}$$

Vậy:

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{8}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$$

Ước lượng độ chính xác của phép xấp xỉ là đánh giá độ lớn sai số $|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)|$ trên $[4{,}4.2]$:

Có:

$$\left|f^{(3)}(x)\right| = \left|\frac{3}{8}x^{-5/2}\right| \le \frac{3}{8}.4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{256} = M, \forall x \in [4{,}4.2]$$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-4|^3 \le \frac{3}{256}.\frac{1}{3!}|4.2-4|^3 = \frac{1}{64000}$$

Câu 2:

Có: $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad x \in [0{,}0.2]$

Đa thức Taylor bậc $n = 3$ của $f(x)$ quanh $a = 0$:

$$f(x) \sim T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Có:

$f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 0$

$f^{(2)}(x) = 2\left(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}\right) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = 2\left[2xe^{x^2}(1 + 2x^2) + 4xe^{x^2}\right] = 4xe^{x^2}(3 + 2x^2) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

Vậy:

$$T_3(x) = 1 + x^2$$

Ước lượng độ chính xác của phép xấp xỉ là đánh giá độ lớn sai số $|R_3(x)| = |f(x) - T_3(x)|$ trên $[0,0.2]$:

Có:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|4\left[e^{x^2}(1 + 2x^2)(3 + 2x^2) + 4x^2e^{x^2}\right]\right| = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3)$$

Xét $g(x) = e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3)$

$g'(x) = 2xe^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3) + e^{x^2}(16x^3 + 24x) = 2xe^{x^2}(4x^4 + 20x^2 + 15) \geq 0\ \forall x \in [0,0.2]$

Vậy $g(x)$ đồng biến $\forall x \in [0,0.2] \Rightarrow \max\limits_{[0,0.2]} g(x) = g(0.2) \Rightarrow \left|f^{(4)}(x)\right| = 4g(x) \leq 4g(0.2) = M$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_3(x)| \leq \frac{M}{4!}|x|^4 \leq \frac{g(0.2)}{6} 0.2^4 = \frac{g(0.2)}{3750} \approx 9.676.10^{-4}$$

Câu 3:

Có: $f(x) = x\sin x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad x \in [-1,1]$

Đa thức Taylor bậc $n = 4$ của $f(x)$ quanh $a = 0$:

$$f(x) \sim T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Có:

$f^{(0)}(x) = f(x) = x\sin x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \sin x + x\cos x \Rightarrow f^{(1)}(0) = 0$

$f^{(2)}(x) = 2\cos x - x\sin x \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = -3\sin x - x\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -4\cos x + x\sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = -4$

Vậy:

$$T_4(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4$$

Ước lượng độ chính xác của phép xấp xỉ là đánh giá độ lớn sai số $|R_4(x)| = |f(x) - T_4(x)|$ trên $[-1,1]$:

Có: $\left|f^{(5)}(x)\right| = |5\sin x + x\cos x|$

Xét $g(x) = |5\sin x + x\cos x|$ trên $D = [-1,1]$ có D là miền đối xứng do $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$g(-x) = |5\sin(-x) - xcos(-x)| = |5\sin x + xcos\, x| = g(x)$

Vậy $g(x)$ là hàm chẵn ⇒ đồ thị $g(x)$ đối xứng qua trục tung Oy.

$\forall x \in [0,1]$, $g(x) = 5\sin x + x\cos x\,, g'(x) = 6\cos x - x\sin x \geq 0$ $(do\ \forall x \in [0,1], \cos x > \sin x)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} g(x) = \max\limits_{[0,1]} g(x) = g(1) \Rightarrow \left|f^{(5)}(x)\right| = g(x) \leq g(1) = M$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|x|^5 \leq \frac{g(1)}{120} = \frac{5\sin 1 + \cos 1}{120} \approx 0.03956$$

Ước lượng chính xác đến 5 chữ số thập phân:

1/ $\cos 85°$

2/ $e^{0.1}$

Câu 1:

Xét $f(x) = \cos x$ quanh $a = \frac{\pi}{2}$ với $x \in \left[\frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \geq 0$

Có: $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\cos\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq 1 = M, \forall x \in \left[\frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{2}\right]$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left|\frac{17\pi}{36} - \frac{\pi}{2}\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{n+1}, \forall x \in \left[\frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Để đảm bảo luôn thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta cần chọn n nhỏ nhất thỏa:

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{n+1} < 0.00001 \Rightarrow n = 3$$

Đa thức Taylor bậc $n = 3$ của $f(x)$ với $a = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) \sim T_3(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

Vậy:

$$f\left(\frac{17\pi}{36}\right) \sim T_3\left(\frac{17\pi}{36}\right) = -\frac{\pi}{36} - \frac{\pi^3}{139968} \approx 0.08715$$

Với sai số $|R_3(x)| \leq \frac{\pi^4}{40310784} \approx 2.6 * 10^{-6}$.

Câu 2:

Xét $f(x) = e^x$ quanh $a = 0$ với $x \in [0,0.1]$.

$f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0$

Có: $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \leq e^{0.1} < e < 3 = M, \forall x \in [0,0.1]$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!}0.1^{n+1}, \forall x \in [0,0.1]$$

Để đảm bảo luôn thỏa điều kiện đề bài, ta cần tìm n nhỏ nhất thỏa:

$$\frac{3}{(n+1)!}0.1^{n+1} < 0.00001 \Rightarrow n \geq 4$$

Đa thức Taylor bậc $n = 4$ của $f(x)$ quanh $a = 0$ là:

$$f(x) \sim T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Vậy:

$$f(0.1) \sim T_4(0.1) = 1.10517$$

Với sai số $|R_4(x)| \leq 2.5 * 10^{-7}$.

Ước lượng miền giá trị của x để các xấp xỉ có độ chính xác tương ứng:

$1/\ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, |sai\ số| < 0.01$

$2/\ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, |sai\ số| < 0.005$

Câu 1:

Xét $f(x) = \sin x$.

Đa thức Taylor bậc $n = 4$ của $f(x)$ quanh $a = 0$:

$$f(x) \sim T_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Có:

$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

Vậy:

$$T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Có: $\left|f^{(5)}(x)\right| = |\cos x| \leq 1 = M, \forall x \in \mathbb{R}$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_4(x)| = |f(x) - T_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|x|^5 = \frac{|x|^5}{120}$$

Sai số đề bài chính là sai số Lagrange $R_3(x)$ của xấp xỉ Taylor trên. Để thỏa yêu cầu:

$$\frac{|x|^5}{120} < 0.01 \Rightarrow -\sqrt[5]{1.2} < x < \sqrt[5]{1.2}$$

Câu 2:

Xét $f(x) = \cos x$.

Đa thức Taylor bậc $n = 5$ của $f(x)$ quanh $a = 0$:

$$f(x) \sim T_5(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Có:

$f^{(0)}(x) = f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(1)}(0) = 0$

$f^{(2)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$

$f^{(5)}(x) = -\sin x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 0$

Vậy:

$$T_5(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

Có: $\left|f^{(6)}(x)\right| = |-\cos x| \leq 1 = M, \forall x \in \mathbb{R}$

Theo Bất đẳng thức Taylor:

$$|R_5(x)| = |f(x) - T_5(x)| \leq \frac{M}{6!}|x|^6 = \frac{x^6}{720}$$

Sai số đề bài chính là sai số Lagrange $R_3(x)$ của xấp xỉ Taylor trên. Để thỏa yêu cầu:

$$\frac{x^6}{720} < 0.005 \Rightarrow -\sqrt[6]{3.6} < x < \sqrt[6]{3.6}$$