CHƯƠNG IV

HỆ THỨC ĐỆ QUI (PHƯƠNG PHÁP ĐẾM CAO CẤP)

I. HỆ THỨC ĐỆ QUI:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho số nguyên $r \geq 0$.

Một quá trình diễn ra gắn liền với tham số nguyên $n \geq r$. Ta muốn *tính trực tiếp* một đại lượng a_n có liên quan đến quá trình trên theo $n \geq r$. Giả sử ta biết được k giá trị ban đầu là $a_r = \alpha_1, a_{r+1} = \alpha_2, \ldots, a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*) và thiết lập được một hệ thức $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n), \forall n \geq r + k$ (**) *tính gián tiếp* a_n *theo* k *số hạng đi trước nó* [trong (**) ít nhất phải có mặt a_{n-k}].

(*) và (**) có thể được cho sẵn hoặc ta tự tính toán trực tiếp từ quá trình trên.

Từ (*) và (**), nếu vế phải của (**) luôn luôn xác định thì ta có duy nhất dãy số thực $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).

Ta nói (**) là *một hệ thức đệ qui cấp* k với *điều kiện ban đầu* (*).

Ví dụ:

a) Tính $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx, \forall n \geq r = 1$.

Ta có $a_1 = \int_1^e \ln x dx = x\ln x\,]_1^e - \int_1^e dx = e - x\,]_1^e = e - (e-1) = 1$ và $\forall n \geq 2$,

$a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n\,]_1^e - \int_1^e n(\ln x)^{n-1} dx = e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - na_{n-1}$. Như vậy

$a_1 = 1$ (*) và $a_n = e - na_{n-1} = f(a_{n-1}, n), \forall n \geq 2$ (**) : hệ thức đệ qui cấp 1.

b) Dãy số nguyên không âm Fibonacci $\{ a_n \mid n \geq r = 0 \}$ có $a_0 = 0, a_1 = 1$ (*) và

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = f(a_{n-1}, a_{n-2}, n), \forall n \geq 2$ (**) : hệ thức đệ qui cấp 2.

c) Tính $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx, \forall n \geq r = 2$. Đặt $t = tgx$ thì $dt = (1 + t^2)dx$ và ta có

$$a_2 = \int_0^{\pi/4} tg^2 x dx = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = \text{t} - \text{arctgt} \ ]_q^1 = 1 - \text{arctg}1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$a_3 = \int_0^{\pi/4} tg^3 x dx = \int_0^{\pi/4} tgx(1+tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tgxdx = \int_0^1 tdt - \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{t^2}{2} \ ]_0^1 + \ln(\cos x) \ ]_0^{\pi/4} = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

và $\forall n \geq 4$, $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx = \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} x(1+tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} xdx = \int_0^1 t^{n-2} dt - a_{n-2} =$

$= \frac{t^{n-1}}{n-1} \ ]_0^1 - a_{n-2} = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$. Như vậy $a_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$, $a_3 = \frac{1-\ln 2}{2}$ (*)

và $a_n = \frac{1}{n-1} - a_{n-2} = f(a_{n-1}, a_{n-2}, n), \forall n \geq 4$ (**) : hệ thức đệ qui cấp 2.

1.2/ GIẢI HỆ THỨC ĐỆ QUI:

Cho hệ thức đệ qui cấp k có $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n), \forall n \geq r + k$ (**) với điều kiện đầu $a_r = \alpha_1, a_{r+1} = \alpha_2, \ldots, a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*).

a) Nếu chỉ giải riêng (**), ta thường có vô số dãy số thực $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (**).

b) Nếu giải đồng thời (*) và (**), ta chỉ có nhiều nhất một dãy số thực $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).

c) Việc thực hiện a) hoặc b) gọi là *giải một hệ thức đệ qui* để tính trực tiếp a_n theo n ($n \geq r$). Nếu thực hiện a), ta nói ta tìm *các nghiệm tổng quát* của (**). Nếu thực hiện b), ta nói ta tìm *một nghiệm riêng* của (**) tương ứng với (*).

Ví dụ:

a) Cho hệ thức đệ qui cấp 3 có

$a_o = 2, a_1 = -5, a_2 = 5$ (*) và $\forall n \geq 3, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ (**).

Giải (**), ta có nghiệm tổng quát $a_n = p + q(-1)^n + s.2^n, \forall n \geq 0$ ($p, q, s \in \mathbf{R}$).

Kết hợp thêm (*), ta có $2 = p + q + s$, $-5 = p - q + 2s$, $5 = p + q + 4s$. Từ đó $p = -3, q = 4, s = 1$ và $a_n = -3 + 4(-1)^n + 2^n, \forall n \geq 0$ là nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

b) Cho hệ thức đệ qui cấp 2 có $a_1 = 3$, $a_2 = -4$ (*) và $\forall n \geq 1$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ (**).

Giải (**), ta có vô số dãy số thực $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ thỏa [chẳng hạn chọn $a_n = p$, $\forall n \geq 1$ ($p \geq 0$ tùy ý)]. Kết hợp thêm (*), ta không có dãy số thực $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ nào thỏa (*) và (**) vì $a_3 = \sqrt{a_2a_1} = \sqrt{(-4)3} = \sqrt{-12}$ vô nghĩa : bài toán vô nghiệm.

II. HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG THUẦN NHẤT:

2.1/ HỆ THỨC CẤP 1: Cho $a_n = \lambda a_{n-1}$, $\forall n \geq r + 1$ (**) ($\lambda \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq r + 1$ và ta lập đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$. Ta thấy (**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda^n$, $\forall n \geq r$ ($p \in \mathbf{R}$).

Ví dụ: Cho $a_o = 5$ (*) và $a_n = -4a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ (**) có đa thức tương ứng $f(x) = x + 4$. (**) có nghiệm tổng quát $a_n = p(-4)^n$, $\forall n \geq 0$ ($p \in \mathbf{R}$). Từ (*), ta có $5 = p(-4)^o = p$. Vậy $a_n = 5(-4)^n$, $\forall n \geq 0$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

2.2/ HỆ THỨC CẤP 2:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$, $\forall n \geq r + 2$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ và $\mu \neq 0$) (**).

Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0$, $\forall n \geq r + 2$ và ta lập tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$ với biệt thức $\Delta = \lambda^2 + 4\mu$.

a) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ với hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2.

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_o)^2$ với nghiệm thực kép λ_o .

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)\lambda_o^n$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

c) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phức dạng lượng giác $d(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$.

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = d^n(p\cos n\varphi + q\sin n\varphi)$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Ví dụ:

a) Cho $a_1 = -16, a_2 = 2$ (*) và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $\forall n \geq 1$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ ($\lambda_1 = 3 \neq \lambda_2 = -2$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p.3^n + q(-2)^n$, $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $-16 = 3p - 2q$ và $2 = 9p + 4q$ nên $p = -2$ và $q = 5$.

Vậy $a_n = (-2)3^n + 5(-2)^n$, $\forall n \geq 1$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

b) Cho $a_2 = 0, a_3 = -64$ (*) và $a_{n+1} = 8a_n - 16a_{n-1}$, $\forall n \geq 3$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ (nghiệm kép $\lambda_o = 4$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)4^n$, $\forall n \geq 2$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $0 = 16(p + 2q)$ và $-64 = 64(p + 3q)$ nên $p = 2$ và $q = -1$.

Vậy $a_n = (2 - n)4^n$, $\forall n \geq 2$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

c) Cho $a_o = 3, a_1 = 6$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2$ và $f(x)$ có hai nghiệm phức có dạng lượng giác $1 \pm i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3})$.

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = 2^n(p\cos\frac{n\pi}{3} + q\sin\frac{n\pi}{3})$, $\forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), ($3 = p$ và $6 = p + q\sqrt{3}$) nên ($p = 3$ và $q = \sqrt{3}$).

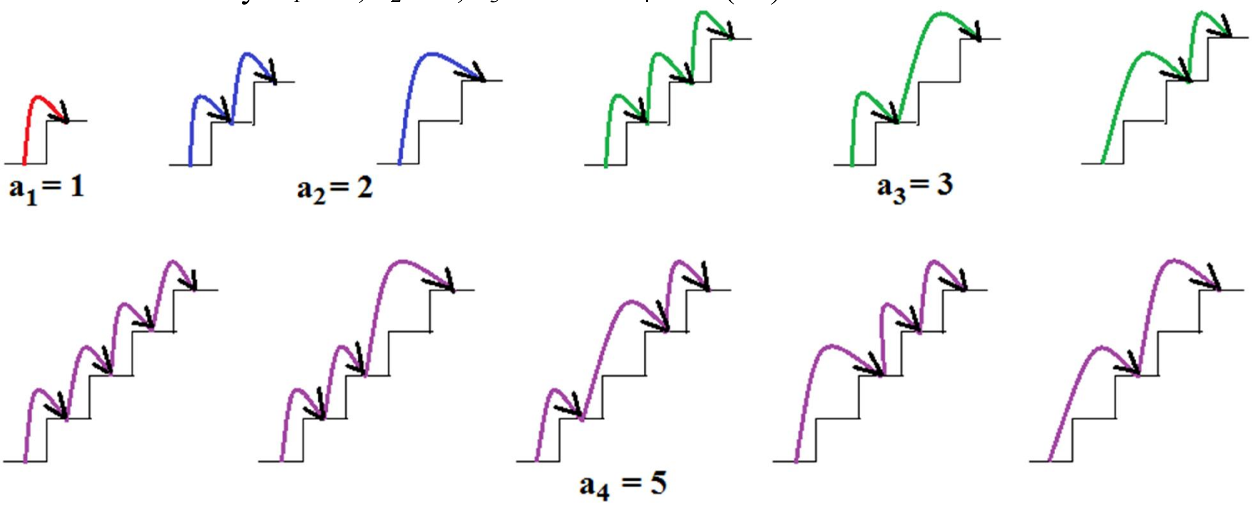
Vậy $a_n = 2^n(3\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})$, $\forall n \geq 0$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

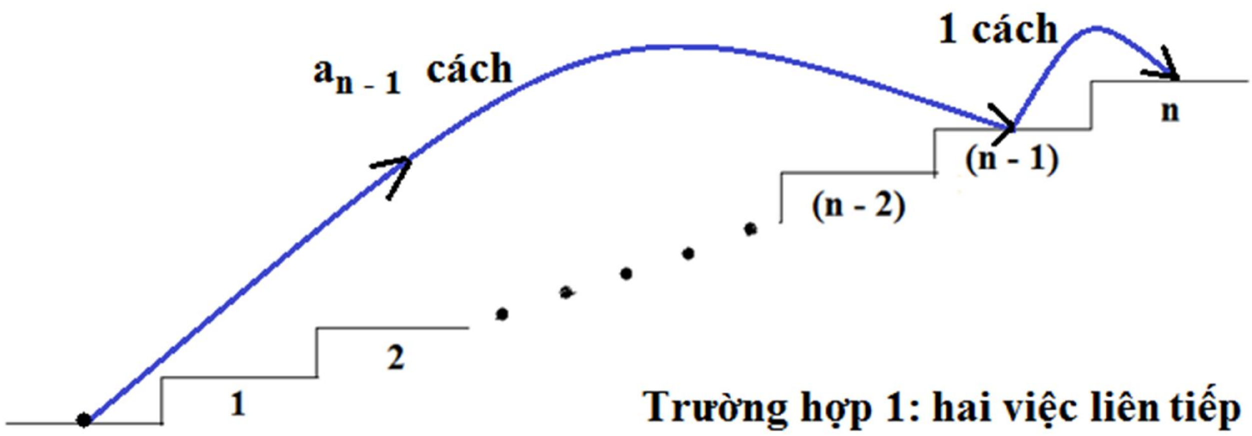
d) Cho $n \geq 1$. An đi từ mặt đất (bậc thang thứ 0) lên cầu thang đến bậc thang thứ n. Mỗi bước chân của An sẽ lên được 1 hoặc 2 bậc thang.

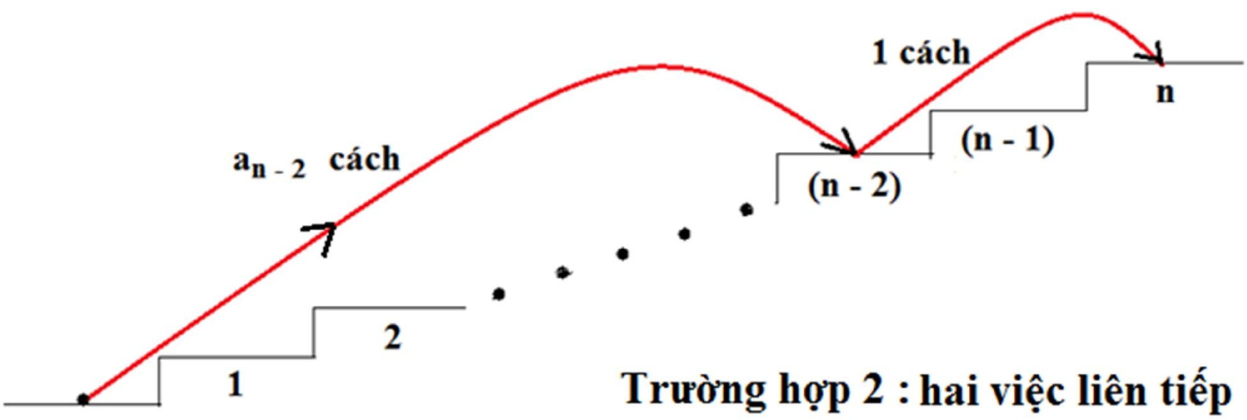
Hỏi An có bao nhiêu cách bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n ?

$\forall n \geq 1$, đặt a_n là số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n.

Dễ thấy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ và $a_4 = 5$ (**)







Khi An bước từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n, có đúng một trong hai trường hợp sau xảy ra : An *có đặt chân lên bậc thang thứ* (n – 1) hoặc *không đặt chân chân lên bậc thang thứ* (n – 1).

Trường hợp 1 : Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà *có đặt chân lên bậc thang thứ* (n – 1) là $a_{n-1}.1 = a_{n-1}$.

Trường hợp 2: Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà *không đặt chân lên bậc thang thứ* (n – 1) là $a_{n-2}.1 = a_{n-2}$.

Ta có hệ thức đệ qui $a_1 = 1, a_2 = 2$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3$ (**) với đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n, \forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $1 = \alpha p + \beta q$ và $2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ nên $p = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ và $q = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$.

Vậy $a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}, \forall n \geq 1$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

e) Dãy số nguyên Fibonacci $a_o = 0, a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$) (**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n, \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $0 = p + q$ và $1 = \alpha p + \beta q$ nên $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $q = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \forall n \geq 0$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

III. HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG KHÔNG THUẦN NHẤT:

3.1/ HỆ THỨC CẤP 1:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \varphi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r + 1$ (**) trong đó $\lambda, \alpha \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} = 0, \forall n \geq r + 1$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (□) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**).

a) Nếu $\alpha \neq \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$

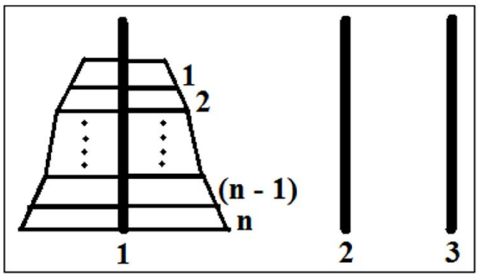
trong đó $\psi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\psi_m) = m$.

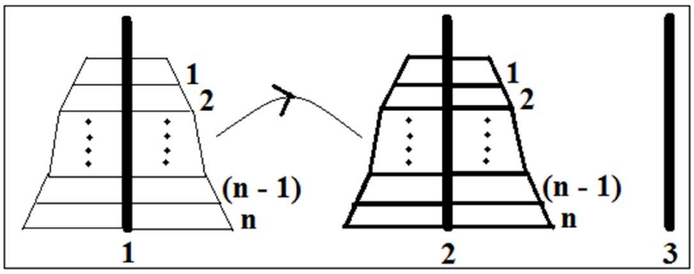
b) Nếu $\alpha = \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$

trong đó $\psi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\psi_m) = m$.

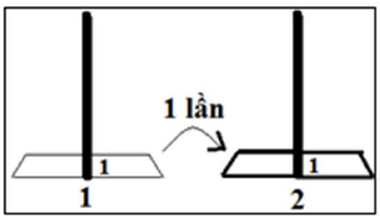
<u>Ví dụ:</u>

a) Bài toán THÁP HÀ NỘI: Cho $n \geq 1$. Có 3 cọc **1**, **2** và **3**. Tại cọc **1** đang có n cái đĩa tròn có bán kính khác nhau (khi đặt đĩa vào bất cứ cọc nào, ta luôn luôn phải tuân thủ việc đặt đĩa nhỏ ở phía trên đĩa lớn). Hãy di chuyển hết n đĩa này qua cọc **2** (mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa và có thể đặt tạm đĩa vào cọc trung gian trong quá trình chuyển đĩa). Hỏi ta phải cần bao nhiêu lần chuyển đĩa để thực hiện yêu cầu đã nêu ?

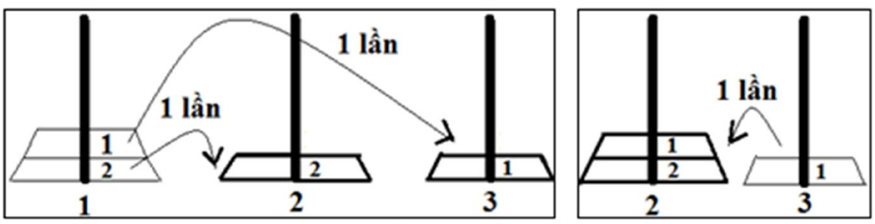




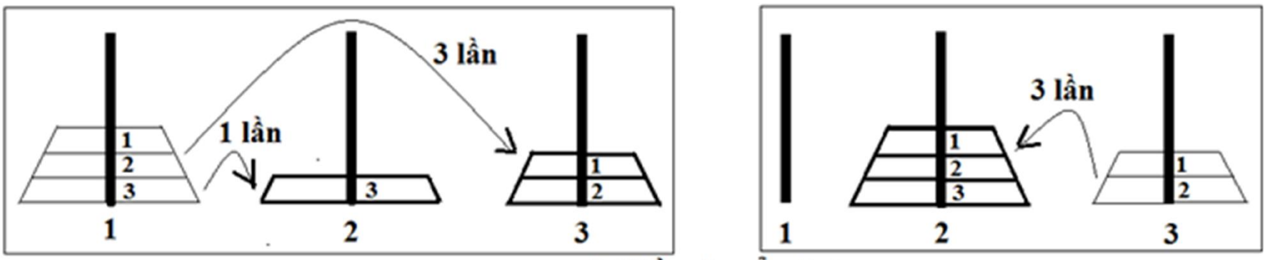
Đặt a_n = số lần chuyển đĩa cần có để chuyển n đĩa từ cọc **1** qua cọc **2** ($n \geq 1$).



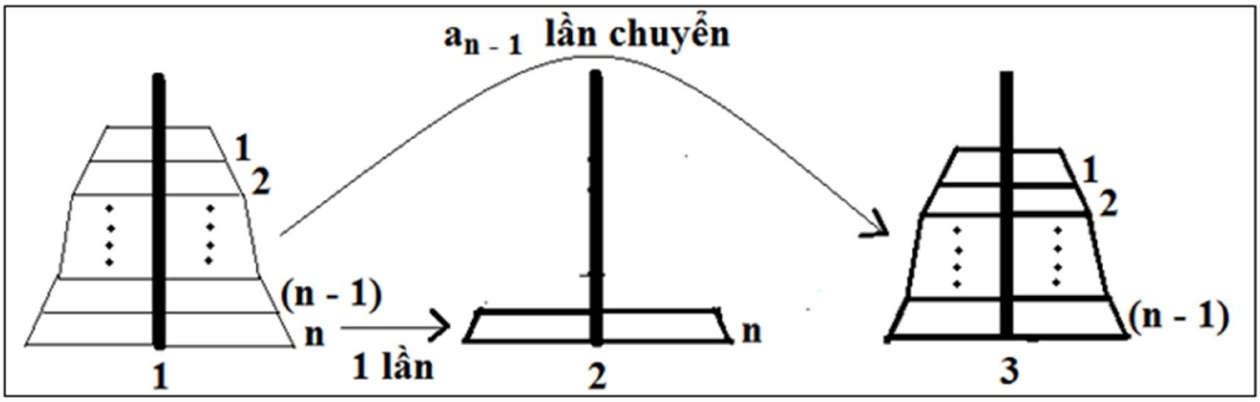
a_1 = 1 (1 lần chuyển đĩa)

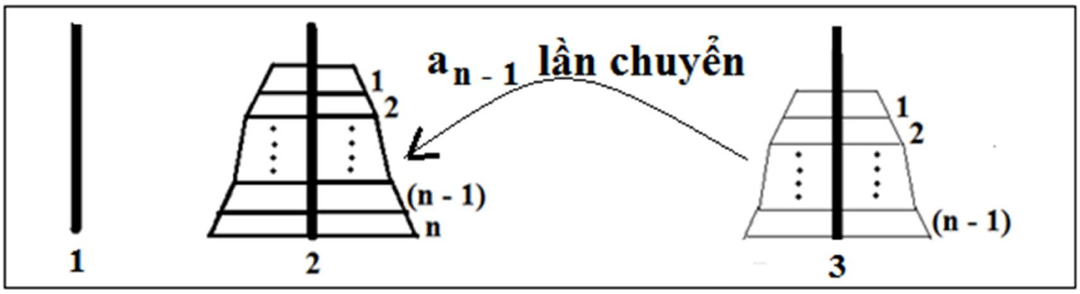


a_2 = 3 (3 lần chuyển đĩa)



$a_3 = 7$ (7 lần chuyển đĩa)





Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} + 1, \forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 2 \neq \alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 1$ có $\deg(\varphi_o) = 0$. Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng

$a_n - 2a_{n-1} = 0, \forall n \geq 2$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - 2)$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.2^n, \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n \psi_o(n) = q, \forall n \geq 1$ ($q \in \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$).

Thay $a_n'' = q, \forall n \geq 1$ vào (**), ta có $q = 2q + 1$ nên $a_n'' = q = -1, \forall n \geq 1$.

Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = p.2^n - 1, \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $1 = 2p - 1$ nên $p = 1$. Vậy $a_n = 2^n - 1, \forall n \geq 1$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

b) Tính $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \forall n \geq 1$.

Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + n^2, \forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 1 = \alpha$ và $\varphi_2(n) = n^2$ có $\deg(\varphi_2) = 2$. Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng

$a_n - a_{n-1} = 0, \forall n \geq 2$ (□) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = x - 1$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n = p, \forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_2(n) = n(qn^2 + sn + t), \forall n \geq 1$ ($q, s, t \in \mathbf{R}$ và $q \neq 0$). Thay $a_n'' = (qn^3 + sn^2 + tn), \forall n \geq 1$ vào (**), ta có

$qn^3 + sn^2 + tn = q(n-1)^3 + s(n-1)^2 + t(n-1) + n^2, \forall n \geq 2$ ($\forall n \in \mathbf{Z}$).

Thế $n = 0, n = 1$ và $n = 2$ vào đồng nhất thức trên, ta có hệ phương trình

$s - t - q = 0, q + s + t = 1$ và $7q + 3s + t = 4$. Giải ra ta được $q = \frac{1}{3}, s = \frac{1}{2}$,

$t = \frac{1}{6}$ và $a_n'' = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n), \forall n \geq 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = p + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = p + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \forall n \geq 1$

($p \in \mathbf{R}$). Từ (*) ta có $1 = p + 1$ nên $p = 0$. Vậy $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1$

là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

3.2/ HỆ THỨC CẤP 2:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2} + \varphi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r + 2$ (**) trong đó $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbf{R}$, $\mu \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0, \forall n \geq r + 2$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (□) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**).

a) Nếu α không là nghiệm của $f(x)$ [$f(\alpha) \neq 0$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\psi_m) = m$.

b) Nếu α là nghiệm đơn của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 \neq f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\psi_m) = m$.

c) Nếu α là nghiệm kép của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n^2\psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến x và $\deg(\psi_m) = m$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $a_2 = 37$, $a_3 = -97$ (*) và $a_{n+1} = 9a_{n-1} + 5.2^n$, $\forall n \geq 3$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 0$, $\mu = 9$, $\alpha = 2$ và $\varphi_o(n) = 5$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+1} - 9a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq 3$ (□) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ có $f(2) = -5 \neq 0$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.3^n + q(-3)^n$, $\forall n \geq 2$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 2^n\psi_o(n) = t.2^n$, $\forall n \geq 2$ ($t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$).

Thay $a_n'' = t.2^n$, $\forall n \geq 2$ vào (**), ta có $t.2^{n+1} = 9t.2^{n-1} + 5.2^n$, $\forall n \geq 3$, nghĩa là $t = -2$ và $a_n'' = -2^{n+1}$, $\forall n \geq 2$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = \; = p.3^n + q(-3)^n - 2^{n+1}$, $\forall n \geq 2$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $37 = 9p + 9q - 8$ và $-97 = 27p - 27q - 16$ nên $p = 1$ và $q = 4$.

Vậy $a_n = 3^n + 4(-3)^n - 2^{n+1}$, $\forall n \geq 2$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

b) Cho $a_o = 73$, $a_1 = 92$ (*) và $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n + 24, \forall n \geq 0$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = -4$, $\mu = 5$, $\alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 24$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0, \forall n \geq 0$ (□)

và đa thức tương ứng $f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$ có $f(1) = 0 \neq f'(1)$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n + q(-5)^n = p + q(-5)^n, \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$)

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_o(n) = tn, \forall n \geq 0$ ($t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Thay $a_n'' = tn, \forall n \geq 0$ vào (**), ta có $t(n + 2) = -4t(n+1) + 5tn + 4, \forall n \geq 0$, nghĩa là $t = 4$ và $a_n'' = 4n, \forall n \geq 0$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = p + q(-5)^n + 4n, \forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $73 = p + q$ và $92 = p - 5q + 4$ nên $p = \frac{151}{2}$ và $q = -\frac{5}{2}$.

Vậy $a_n = \dfrac{8n + (-5)^{n+1} + 151}{2}, \forall n \geq 0$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

c) Cho $a_1 = 84$, $a_2 = 49$ (*) và $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2} + 6(2n - 1)(-7)^n, \forall n \geq 3$ (**)

Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = -14$, $\mu = -49$, $\alpha = -7$ và $\varphi_1(n) = 6(2n - 1)$ có $\deg(\varphi_1) = 1$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n + 14a_{n-1} + 49a_{n-2} = 0, \forall n \geq 3$ (□)

và đa thức tương ứng $f(x) = x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$ có $f(-7) = 0 = f'(-7)$.

(□) có nghiệm tổng quát $a_n' = (p + nq)(-7)^n, \forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng

$a_n'' = (-7)^n n^2\psi_1(n) = (-7)^n n^2(sn + t), \forall n \geq 1$ ($s, t \in \mathbf{R}$ và $s \neq 0$).

Thay $a_n'' = (-7)^n n^2(sn + t), \forall n \geq 1$ vào (**), ta có

$(-7)^n n^2(sn + t) = 6(2n - 1)(-7)^n - 14(-7)^{n-1}(n - 1)^2[\, s(n - 1) + t \,] -$

$- 49(-7)^{n-2}(n - 2)^2[\, s(n - 2) + t \,]$, $\forall n \geq 3$, nghĩa là

$sn^3 + tn^2 = 2(n - 1)^2(sn - s + t) - (n - 2)^2(sn - 2s + t) + 12n - 6, \forall n \geq 3$ ($\forall n \in \mathbf{Z}$)

Thế $n = 1$ và $n = 2$, ta có $2t = 6$ và $3s + t = 9$ nên $s = 2$ và $t = 3$, nghĩa là

$a_n'' = n^2(2n + 3)(-7)^n$, $\forall n \geq 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = (p + qn + 3n^2 + 2n^3)(-7)^n$, $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $84 = -7(p + q + 5)$ và $49 = 49(p + 2q + 28)$ nên

$p = -7$ và $q = -10$. Vậy $a_n = (2n^3 + 3n^2 - 10n - 7)(-7)^n$, $\forall n \geq 1$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).
