BÀI TẬP VÍ DỤ CŨNG CỐ KIẾN THỨC
CHƯƠNG ĐẠO HÀM VÀ VI TÍCH PHÂN

**Các bạn theo dõi phân tóm tắt lý thuyết để nắm lý thuyết trọng tâm nhé*

Dạng bài ôm sát đề thi

Chương: Đạo hàm

*Quy tắc Lopitan

Bài 1: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)-x]'}{(\tan^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cos^3 x}{2(1+x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x\cos^3 x)'}{(2(1+x)\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x.\sin x-\cos^3 x}{2\sin x+2\cos x.(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

Bài 2: Tính $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[\ln(\tan x)]'}{(\cot 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{\sin^2 2x}.\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{2\sin^2 2x.\cos^3 x}=-1$$

Bài 3: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$

Ta tìm (arcsin x)’.

arcsin x là hàm ngược của sinx $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ nên theo lý thuyết ta tìm đạo hàm của nó như sau

Đặt $y=\sin x$

$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-y^2}$ Hay $\arcsin x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arcsin(\sin x)'=\arcsin y'=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x.\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x-x)'}{(x.\arcsin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)'}{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\dfrac{2x}{-2\sqrt{1-x^2}^{3}}}{\sqrt{1-x^2} - x.\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

*Chuỗi lũy thừa

Bài 4: Tìm miền hội tụ và bán kính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n.9^n}$

Đặt $t = x^2$

Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.9^n}(t-0)^n$ với $c_n = \frac{1}{9^n n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{9^n n}{9.9^n.(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{9(n+1)}\right| = \frac{1}{9} > 0$$

Vậy bán kính hội tụ $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Xét sự hội tụ tại hai đầu mút $x = a \pm 3 = \pm 3$

Tại $x = a \pm 3 = \pm 3$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa nên phân kỳ.

Vậy miền hội tụ là (-3,3)

Bài 5: Tìm miền hội tụ và bán kính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

Đặt $t = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.(t-0)^n$ với $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2(n+1)+1}.(-1)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| = 1 > 0$$

Vậy bán kính hội tụ $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$

Miền hội tụ của chuỗi là $a-1 < t < a+1 \Leftrightarrow -1 < t < 1 \Leftrightarrow -1 < \left(\frac{1-x}{1+x}\right) < 1 \Leftrightarrow x > 0$

Xét sự hội tụ của chuỗi tại đầu mút x = 0

Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ là chuỗi Lebnizt hội tụ do $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ là chuỗi đan dấu và *dãy* $a_n=\frac{1}{2n+1}$ là *dãy* dương giảm

Vậy miền hội tụ là $[0,+\infty)$

Bài 6: Tìm miền hội tụ và bán kính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{1+2n}}{4^{n+1}}.(x+3)^n$

Chuỗi là chuỗi lũy thừa với $c_n=\frac{4^{1+2n}}{4^{n+1}}$, $a=-3$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{2n+2}}{4^{2n}}.\frac{4^n}{4^{n+1}}\right|=4$$

Vậy bán kính hội tụ $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{4}$

Ta xét sự hội tụ tại 2 đầu mút $x=a\pm R=-3\pm\frac{1}{4}$

Tại $x=-3-\frac{1}{4}$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ không hội tụ do với n lẻ, chuỗi hội tụ về -1, với n chẵn, chuỗi hội tụ về 0. Điểm hội tụ không có định nên chuỗi không hội tụ.

Tại $x=-3+\frac{1}{4}$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}1$ là chuỗi phân kỳ

Vậy miền hội tụ là $(-3-\frac{1}{4},-3+\frac{1}{4})$

Chương: TÍCH PHÂN

Bài 7: Tính tích phân suy rộng sau $\int_3^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx$

Đây là tích phân suy rộng loại 1.

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx=\lim_{t\to\infty}\int_3^{t}\frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x-2}}\right)\Bigg|_3^t$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}}-\frac{-2}{\sqrt{3-2}}\right)$$

$$\text{khi } t\to\infty\Rightarrow\frac{-2}{\sqrt{t-2}}\to 0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}}\right)=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}}-\frac{-2}{\sqrt{3-2}}\right)=2$$

Vậy tích phân hội tụ về 2

Bài 8: Tính tích phân suy rộng sau $\int_0^{\infty}\frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

Dễ thấy đây là tích phân suy rộng loại 1

$$\int_0^{\infty}\frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$$

Ta tìm (arctan x)’, đặt $y=\tan x\Rightarrow y'=1+\tan^2 x=1+y^2$

Theo cách tìm đạo hàm hàm ngược (arctan x là hàm ngược của tanx $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

$$\arctan(\tan x)'=\arctan(y)'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{1+y^2}$$

Hay $\arctan(x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Đặt $u=\arctan x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2}$ và $x=\tan u$

Tích phân trở thành $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\arctan 0}^{\arctan t}\dfrac{u.\tan u}{1+\tan^2 u}du=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\dfrac{1}{8}\big(\sin(2x)-2x\cos(2x)\big)\right]\Bigg|_{\arctan 0}^{\arctan t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left[\sin(2\arctan t)-2.\arctan t.\cos(2\arctan t)-\sin 0+2.0.\cos 0\right]$$

Do khi $t\to\infty\Rightarrow\arctan t\to\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}\left[\sin(2\arctan t)-2.\arctan t.\cos(2\arctan t)-\sin 0+2.0.\cos 0\right]=\frac{\pi}{8}$$

Vậy tích phân hội tụ về $\dfrac{\pi}{8}$

Bài 9: Tính tích phân suy rộng sau $\displaystyle\int_{-2}^{14}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

Ta thấy đây là tích phân suy rộng loại 2

$$\int_{-2}^{14}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}=\lim_{t\to-2+}\int_{t}^{14}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$$

$$=\lim_{t\to-2+}\left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{x+2}^{3}\right)\Bigg|_t^{14}=\lim_{t\to-2+}\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{14+2}^{3}-\sqrt[4]{t+2}^{3}\right)=\frac{32}{3}$$

Bài 10: Xác định tích phân suy rộng sau hội tụ hay phân kỳ $\displaystyle\int_0^5\frac{xdx}{x-2}$

Ta thấy hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ không xác định tại x=2

Vậy đây là tích phân suy rộng loại 2

$$\int_0^5\frac{xdx}{x-2}=\int_0^2\frac{xdx}{x-2}+\int_2^5\frac{xdx}{x-2}=\lim_{t\to2-}\int_0^t\frac{xdx}{x-2}+\lim_{t\to2+}\int_t^5\frac{xdx}{x-2}$$

$$=\lim_{t\to2-}\big(x+2\ln|(x-2)|\big)\Big|_0^t+\lim_{t\to2+}\big(x+2|\ln(x-2)|\big)\Big|_t^5$$

$$=\lim_{t\to2-}\big(t+2\ln|t-2|-2\ln 2\big)+\lim_{t\to2+}\big(5+2\ln 3-t-2\ln|t-2|\big)$$

Ta có khi $\left[\begin{array}{l} t \to 2- \\ t \to 2+ \end{array}\right. \Rightarrow |t-2| \to 0+ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 2-} |t-2| = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 2+} |t-2| = -\infty \end{cases}$ *xem thêm đồ thị hàm số y = lnx*

Vậy tích phân suy rộng phân kỳ

Bài 11: Tính tích phân suy rộng sau $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

Ta thấy tích phân vừa có cận từ $-\infty$ vừa có cận tại 0 mà tại đó hàm số $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ không xác định, vậy đây là sự kết hợp của tích phân loại 1 và tích phân loại 2

Tích phân trở thành

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0}\int_{t}^{k} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0-}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{t}^{k}\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0-}\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{k}}\right)\right)$$

Khi $t \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{t} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{t}} \to e^{0} = 1$

Khi $k \to 0- \Rightarrow \frac{1}{k} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{k}} \to e^{-\infty} = 0$ *xem thêm đồ thị* $y = e^{x}$

Vậy tích phân hội tụ về 1