

Chương 5. SỐ NGUYÊN

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

5.1 Phép chia

Một số hàm liên quan tới phép chia và biểu diễn số nguyên.

- `iquo(a, b)`: tính phần thương khi chia a cho b
- `irem(a, b)`: tính phần dư khi chia a cho b
- `convert(n, base, b)`: biểu diễn theo cơ số b của số nguyên n , kết quả được viết theo thứ tự ngược.
- `convert([a0, a1, ..., ak-1, ak], base, b, c)`: chuyển một số có dạng biểu diễn theo cơ số b ($(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$) sang dạng biểu diễn theo cơ số c . Lưu ý dạng biểu diễn được viết theo thứ tự ngược.
- `convert(n, binary)`: biểu diễn nhị phân của n .
- `convert(n, octal)`: biểu diễn bát phân của n .
- `convert(n, hex)`: biểu diễn thập lục phân của n .

```
> iquo(234, 5);
                                46
> irem(234, 5);
                                4
> convert(23234, base, 4);      #Lưu ý kết quả là thứ tự ngược lại
                                [2, 0, 0, 3, 2, 2, 1, 1]
> convert([2, 0, 0, 3, 2, 2, 1, 1], base, 4, 10);
                                [4, 3, 2, 3, 2]
> convert(2324, binary);
                                100100010100
> convert(2324, octal);
                                4424
> convert(4534, hex);
                                11B6
```

5.2 Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất

- `igcd(a1, a2, ..., an)`: tính ước chung lớn nhất của a_1, a_2, \dots, a_n .
- `ilcm(a1, a2, ..., an)`: tính bội chung nhỏ nhất của a_1, a_2, \dots, a_n .

- `igcdex(a, b, 's', 't')`: trả về giá trị $d = \text{igcd}(a, b)$ và hai giá trị s, t sao cho $d = sa + tb$

```
> igcd(8723122, 30556708);
                                254
> igcd(24, 12, 18);
                                6
> lcm(24, 12, 18);
                                72
> igcdex(712, 546, 's', 't');
                                2
> s;
                                125
> t;
                               -163
```

5.3 Số nguyên tố

- `isprime(a)`: kiểm tra a có phải là số nguyên tố không?
- `ithprime(n)`: số nguyên tố thứ n
- `nextprime(a)`: số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng a
- `prevprime(a)`: số nguyên tố lớn nhất mà nhỏ hơn hay bằng a
- `ifactor(a)`: phân tích a thành thừa số nguyên tố.
- `ifactors(a)`: phân tích a thành thừa số nguyên tố và được viết dưới dạng danh sách.

```
> isprime(265261);
                                true
> ithprime(45);
                                197
> nextprime(14);
                                17
> prevprime(35);
                                31
> ifactor(29717395672536);
                                (2)3(3)5(11)(13)2(31)(265261)
> ifactors(29717395672536);
                                [1, [[2, 3], [3, 5], [11, 1], [13, 2], [31, 1], [265261, 1]]]
> ifactors(-29717395672536);
                                [-1, [[2, 3], [3, 5], [11, 1], [13, 2], [31, 1], [265261, 1]]]
```

Phần II. Bài tập

Ký hiệu : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Bài 5.1 Tìm tất cả $k \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $(k^2 + 5k + 5)(k^2 - 2k - 9) = 1$ b) $(3k^2 + 4k - 17)(-5k^2 + k + 49) = -2$

Bài 5.2 Tìm tất cả $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $x + y + xy = 0$ b) $3^x = 4y + 1$ c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{y}{3}$ d) $\frac{x}{4} = \frac{1}{y} + \frac{3}{4}$

Bài 5.3 Cho $n \in \mathbb{N}$ và $m, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

a) $7 \mid (2^n - 1) \Leftrightarrow 3 \mid n$ e) 121 không chia hết $(k^2 + 3k + 5)$
b) 7 không chia hết $(2^n + 1)$ f) $11 \mid (6k - 7m) \Leftrightarrow 11 \mid (4m - 5k)$
c) 100 không chia hết $(9^n + 1)$ g) $13 \mid (m + 4k) \Leftrightarrow 13 \mid (10m + k)$
d) $11 \mid (k^2 + 3k + 5) \Leftrightarrow k = 4t + 11$ với $t \in \mathbb{Z}$ h) $17 \mid (3m + 2k) \Leftrightarrow 17 \mid (5m + 9k)$

Bài 5.4 Tìm số nguyên a sao cho

a) $a \equiv -15 \pmod{27}$ và $126 \leq a \leq 152$. c) $a \equiv 99 \pmod{41}$ và $100 \leq a \leq 140$.
b) $a \equiv 24 \pmod{31}$ và $-85 \leq a \leq -55$. d) $a \equiv 16 \pmod{42}$ và $201 \leq a \leq 242$.

Bài 5.5 Cho a, b là những số nguyên và $a \equiv 11 \pmod{19}$, $b \equiv 3 \pmod{19}$. Tìm số nguyên c với $0 \leq c \leq 18$ sao cho

a) $c \equiv 13a \pmod{19}$. c) $c \equiv a - b \pmod{19}$. e) $c \equiv 2a^2 + 3b^2 \pmod{19}$.
b) $c \equiv 8b \pmod{19}$. d) $c \equiv 7a + 3b \pmod{19}$. f) $c \equiv a^3 + 4b^3 \pmod{19}$.

Bài 5.6 Tìm $d = (m, n)$, $e = [m, n]$ theo 2 cách khác nhau (bằng thuật chia Eulide và phân tích ra thừa số nguyên tố), chỉ ra dạng tối giản của $\frac{m}{n}$ rồi chọn $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $d = am + bn$ và $\frac{1}{e} = \frac{u}{m} + \frac{v}{n}$ nếu m và n có các giá trị sau đây:

a) 43 và 16 e) 936 và 715 i) 12096 và 17640
b) 128 và -352 f) 6234 và -3312 j) 87657 và -44441
c) -442 và 276 g) -35298 và 6768 k) -654321 và 123456
d) -675 và -459 h) -8820 và -36288 l) -148500 và -7114800

Bài 5.7 Chứng minh $\forall k \in \mathbb{Z}$,

a) $(14k + 3, 21k + 4) = 1$ c) $(18k - 12, 21 - 30k) = 3$
b) $(24k + 2, -60k - 4) = 2$ d) $(20 - 75k, 25 - 100k) = 5$.

Bài 5.8 Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của n .

- a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?
- b) Giả sử n có $2m$ ước số dương. Chứng minh $\forall j \in 1, 2, \dots, k, \exists s_j \in \mathbb{N}^*, r_j = 2^{s_j} - 1$.

Bài 5.9 Cho $n = 2^{14}3^95^87^{10}11^313^837^{10}$.

- a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?
- b) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $2^33^45^711^237^2$?
- c) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho 1 166 400 000?

Bài 5.10 Phân tích $15!$, $20!$ và $25!$ thành tích của các thừa số nguyên tố.

Bài 5.11 Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm một $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho n có đúng k ước số dương.

Bài 5.12 Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$.

- a) Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$.
- b) Giả sử $m = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của m và có $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ thỏa r_j lẻ. Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$.

Bài 5.13 Hãy biểu diễn các số sau theo hệ nhị phân, bát phân và thập lục phân

- | | | |
|--------|-------------|----------------|
| a) 15 | c) 3453 | e) 45324523 |
| b) 234 | d) 24234535 | f) 65646434234 |

Bài 5.14 Hãy biểu diễn các số sau theo hệ thập phân

- | | | |
|--------------------------------|---------------|---------------------|
| a) $(1\ 1011)_2$ | e) $(572)_8$ | i) $(80E)_{16}$ |
| b) $(10\ 1011\ 0101)_2$ | f) $(1604)_8$ | j) $(135AB)_{16}$ |
| c) $(11\ 1011\ 1110)_2$ | g) $(423)_8$ | k) $(ABBA)_{16}$ |
| d) $(111\ 1100\ 0001\ 1111)_2$ | h) $(2417)_8$ | l) $(DEFACED)_{16}$ |

Bài 5.15 Hãy tính tổng và tích của các cặp số sau và biểu diễn chúng theo cơ số tương ứng.

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) $(100\ 0111)_2, (111\ 0111)_2$ | i) $(763)_8, (147)_8$ |
| b) $(1110\ 1111)_2, (1011\ 1101)_2$ | j) $(6001)_8, (272)_8$ |
| c) $(10\ 1010\ 1010)_2, (1\ 1111\ 0000)_2$ | k) $(1111)_8, (777)_8$ |
| d) $(10\ 0000\ 0001)_2, (11\ 1111\ 1111)_2$ | l) $(54321)_8, (3456)_8$ |
| e) $(112)_3, (210)_3$ | m) $(1AE)_{16}, (BBC)_{16}$ |
| f) $(2112)_3, (12021)_3$ | n) $(20CBA)_{16}, (A01)_{16}$ |
| g) $(20001)_3, (1111)_3$ | o) $(ABCDE)_{16}, (1111)_{16}$ |
| h) $(120021)_3, (2002)_3$ | p) $(E0000E)_{16}, (BAAA)_{16}$ |