TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

BÀI TẬP VÍ DỤ
VI TÍCH PHÂN 1B

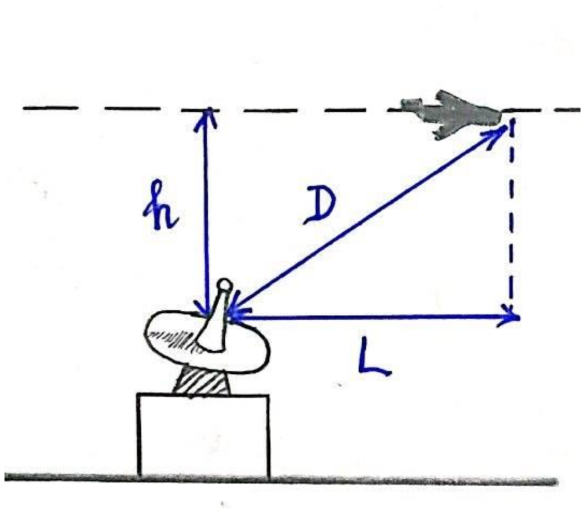
CHƯƠNG: ĐẠO HÀM

PHẦN: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

➢ Lâm Cương Đạt

Cập nhật: 14/02/2017

Bài 1: Một máy bay bay theo chiều ngang ở độ cao 1 dặm, với vận tốc v = 500 dặm/giờ, bay thẳng qua phía trên một trạm radar. Tìm tốc độ tăng cự ly giữa máy bay và trạm khi máy bay các trạm 2 dặm



Ta có h = 1 dặm, D = 2 dặm, D là cự ly của máy bay và trạm radar.

Ở đây ta sẽ đặt ra câu hỏi là tại sao ta biết lúc này ta biết máy bay nằm bên phải radar mà không là bên trái. Vì đề bài đang hỏi độ tăng cự ly, tức là máy bay đang bay ra xa trạm.

Ta có $D=\sqrt{L^2+h^2}$, đạo hàm hai vế theo biến khoảng cách L (dặm).

$\Rightarrow \frac{dD}{dL}=\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}}$ (1), ta lại có $\frac{dL}{dt}=v$ (2) chính là độ tăng khoảng cách theo thời gian (vận tốc)

Lấy $(1)\times(2)\Rightarrow \frac{dD}{dt}=\frac{L\cdot v}{\sqrt{L^2+h^2}}$

Khi D = 2 dặm $\Rightarrow L=\sqrt{D^2-h^2}=\sqrt{3}$

Vậy ta đã có biểu thức của độ tăng cự ly theo khoảng cách L, thay $L=\sqrt{3}$, h = 1 ta có độ tăng cự ly tại thời điểm mà khoảng cách giữa máy bay và trạm là

$\frac{\sqrt{3}\cdot 500}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}}\approx 433.0127$ (dặm/giờ)

Bài 2: Nếu một quả cầu tuyết tan chảy sao cho diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ 1 $\mathrm{cm^2}/\mathrm{min}$, tìm tốc độ giảm của đường kính khi đường kính là 10 cm.

Diện tích bề mặt của quả cầu tuyết là $S = \pi \cdot a^2$ (cm^2) trong đó a (cm) là đường kính của quả cầu.

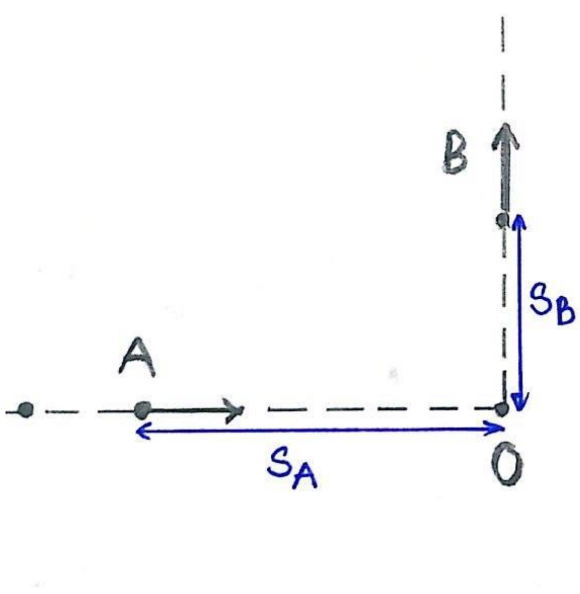
Lấy đạo hàm theo biến đường kính a $\Rightarrow \dfrac{dS}{da} = 2\pi a \quad (1)$

Ta lại có $\dfrac{dS}{dt} = v = 1 \, {cm^2}/{min} \quad (2)$

Lấy $\dfrac{(2)}{(1)} \Rightarrow \dfrac{da}{dt} = \dfrac{v}{2\pi a}$

Ta vừa thiết lập được mối liên hệ của độ giảm đường kính theo thời gian và đường kính. Thay a = 10 cm, ta có độ giảm đường kính của quả cầu tại thời điểm đường kính nó còn 10 cm là $\dfrac{1}{2\pi 10} \approx 0.0159 \, {cm}/{min}$

Bài 3: Vào lúc 12:00 PM, tàu A cách 150 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía đông với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa 2 chiếc xe thay đổi theo thời gian như thế nào vào lúc 4:00PM



Vị trí của A và B so với O (vị trí ban đầu của B) tại thời điểm t bất kì.

Ở đây sẽ phát sinh câu hỏi rằng nếu như thời điểm t đủ lớn thì A có thể sẽ vượt qua O vậy thì có cần chia ra 2 trường hợp. Câu trả lời là không, khi ta thiết lập được biểu thức, ta có thể sẽ thấy rõ điều đó.

$OA = s_A = |v_A t - 150|$ (km) ở mọi thời điểm bất kỳ.

Tại thời điểm t bất kỳ, khoảng cách giữa hai tàu là

$L = \sqrt{s_A^2 + s_B^2} = \sqrt{(150 - v_A t)^2 + (v_B t)^2}$

Vậy biểu thức trên luôn đúng tại mọi thời điểm t.

Lấy đạo hàm theo biến thời gian t (giờ), ta có được biểu thức thay đổi khoảng cách L theo thời gian t là $\frac{dL}{dt}=\frac{-(150-v_A t)\cdot v_A+v_B^2 t}{\sqrt{(150-v_A t)^2+(v_B t)^2}}$

Thay t = 4 giờ ta có tốc độ thay đổi khoảng cách của hai tàu theo thời gian là

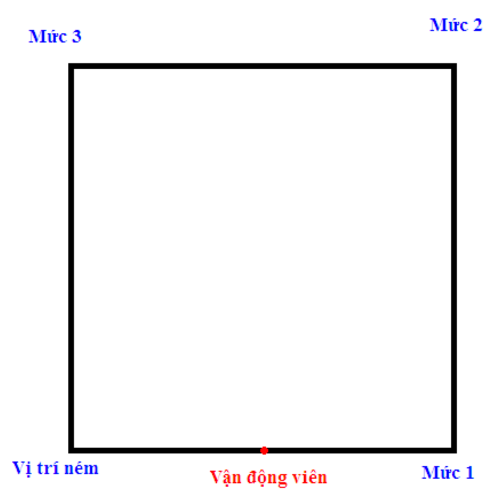
$$\frac{-(150-4v_A)\cdot v_A+4v_B^2}{\sqrt{(150-4v_A)^2+(4v_B)^2}}\approx 21.3933\ \ \text{km/h}$$

Đáp số dương cho thấy khoảng cách này đang tăng.

Bài 4: Một sân bóng chày hình vuông với chiều dài cạnh a = 90 ft. Một vận động viên bóng chày đánh vào bóng và chạy về mức đầu tiên với tốc độ 24 ft/s.

a) Khoảng cách của anh ta so với mức hai giảm với tốc độ như thế nào khi anh ta ở chính giữa của mức thứ nhất?

b) Khoảng cách của anh ta so với mức thứ ba tăng với tốc độ như thế nào tại cùng một thời điểm?



a) Khoảng cách của vận động viện so với mức 2 tại thời điểm t (s) bất kỳ (khi vận động viên vẫn chưa chưa đến mức 1) là

$$L_2=\sqrt{(a-v\cdot t)^2+a^2}\ (\text{ft})$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến thời gian t

$$\Rightarrow \frac{dL_2}{dt}=\frac{(a-v\cdot t)\cdot(-v)}{\sqrt{(a-v\cdot t)^2+a^2}}\ \ (\text{ft/s})$$

Thay $t=t_2=\frac{\frac{a}{2}}{v}$ là thời gian kể từ lúc ném đến khi người này chạy đến giữa mức 1 và vị trí ném. Tại thời điểm t_2, độ thay đổi khoảng cách của người với mức 2 theo thời gian là

$$\frac{\left(a - v\cdot\frac{a}{2v}\right)\cdot(-v)}{\sqrt{\left(a - v\cdot\frac{a}{2v}\right)^2 + a^2}} = -\frac{24\sqrt{5}}{5} \approx -10.733 \ {}^{ft}\!/_{s}$$, dấu trừ thể hiện khoảng cách đang giảm và giảm với "vận tốc" có độ lớn là $\frac{24\sqrt{5}}{5} \approx 10.733 \ {}^{ft}\!/_{s}$

b) Tương tự ta có khoảng cách của vận động viên so với mức 3 ở thời điểm t bất kỳ (khi vân động viên còn ở trong khoảng từ vị trí ném đến mức 1) là

$L_3 = \sqrt{(v\cdot t)^2 + a^2}$, lấy đạo hàm hai vế theo biến thời gian t $\Rightarrow \frac{dL_3}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{(v\cdot t)^2 + a^2}}$

Thay $t = t_3 = \frac{\frac{a}{2}}{v}$ là thời gian kể từ lúc ném đến khi người này chạy đến giữa mức 1 và vị trí ném. Tại thời điểm t_3, độ thay đổi khoảng cách của người với mức 3 theo thời gian là

$$\frac{v^2\cdot\frac{a}{2v}}{\sqrt{\left(v\cdot\frac{a}{2v}\right)^2 + a^2}} = \frac{24\sqrt{5}}{5} \approx 10.733 \ {}^{ft}\!/_{s}$$, đáp số dương thể hiện khoảng cách đang tăng và tăng với "vận tốc" có độ lớn là $\frac{24\sqrt{5}}{5} \approx 10.733 \ {}^{ft}\!/_{s}$.

Bài 5: Độ cao của một tam giác đang gia tăng với tốc độ 1 cm/min trong khi diện tích của tam giác đang gia tăng với tốc độ $2 \ cm^2/min$. Cạnh ứng với chiều cao (cạnh đay) của tam giác thay đổi với tốc độ bao nhiêu khi độ cao của tam giác là 10 cm và diện tích là $100 \ cm^2$.

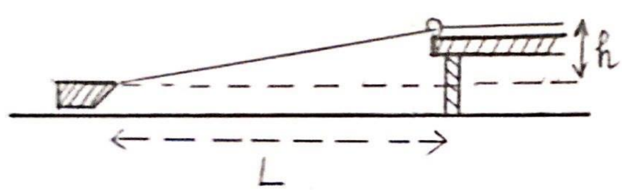
Đặt cạnh đáy là a (cm), chiều cao là h (cm), diện tích là S (cm^2) thay đổi theo thời gian t (min)

Ta có $\frac{dS}{dt} = 2 \ cm^2/min$, $\frac{dh}{dt} = 1 \ cm/min$.

Ta có $S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h \Rightarrow a = \frac{2S}{h}$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến thời gian t.

$\Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{2}{h}\frac{dS}{dt} - \frac{2S}{h^2}\frac{dh}{dt}$, thay h = 10 cm và S = 100 cm^2 vào ta tìm được tốc độ thay đổi độ dài của cạnh đáy là $\frac{2}{10}\cdot 2 - \frac{2\cdot 100}{10^2}\cdot 1 = -\frac{8}{5}$ cm/min, đáp số âm cho thấy độ dài đáy đang giảm nhưng do chiều cao tăng nên diện tích vẫn có thể tăng, không có điều nghịch lý ở đây.

Bài 6: Một chiếc thuyền được kéo vào một bến tàu bằng một sợi dây gắn vào mũi thuyền và đi qua một ròng rọc trên bến tàu, mà nó cao hơn 1m so với mũi thuyền. Nếu sợi dây được kéo vào với tốc độ 1 m/s thuyền tiến đền gần đến bến tàu nhanh như thế nào khi nó cách bến tàu 8m.



Gọi D (m) là chiều dài dây từ ròng rọc đến mũi thuyền, D thay đổi theo thời gian t (s).

Xét một thời điểm t bất kỳ, lúc thuyền chưa cập bến.

Ta có $L = \sqrt{D^2 - h^2}$

Ta có $\frac{dD}{dt} = v = 1\ m/s$ là vận tốc kéo thuyền.

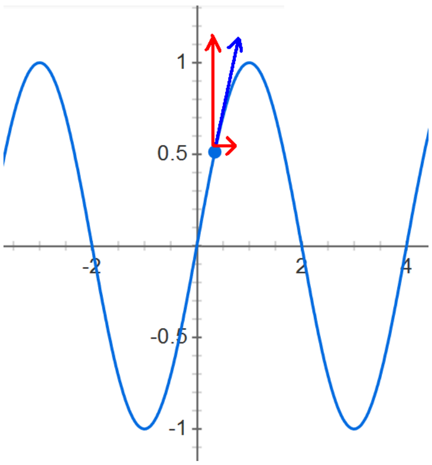
$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dD}\cdot\frac{dD}{dt} = \frac{D}{\sqrt{D^2 - h^2}}\cdot\frac{dD}{dt} = \frac{D\cdot v}{\sqrt{D^2 - h^2}}$$

Tại thời điểm L = 8 m thì $D = \sqrt{L^2 + h^2} = \sqrt{65}$

Thay D ta có vận tốc thuyền tại thời điểm L = 8 m là

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{65}\cdot 1}{\sqrt{\sqrt{65}^2 - 1^2}} = \frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$$

Bài 7: Một hạt di chuyển dọc theo đường cong $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Khi hạt đi qua điểm $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ tọa độ x tăng với tốc độ $\sqrt{10}$ cm/s. Khoảng cách từ hạt tới gốc tọa độ thay đổi nhanh như thế nào



Vector vận tốc của hạt này (vector màu xanh) được phân tích thành 2 vetor thành phần màu đỏ trên hai phương Ox và Oy. Vì đề bài nói vận tốc của hoành độ đang tăng nên vector vận tốc theo phương Ox (vector màu đỏ ngắn hơn) phải hướng theo trục Ox. Vì vậy ta xác định được chiều mà hạt đang chuyển động.

Ta đã có $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{10}\ \text{cm/s}$, vận tốc trên phương Ox

Tìm vận tốc trên phương Oy. Ta có

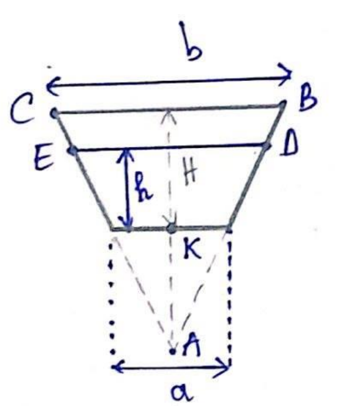
$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot v_x$, đạo hàm hai vế theo biến thời gian t.

Vậy ta có vận tốc của hạt so với gốc tọa độ là

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot v_x\right]^2 + v_x^2} = v_x\cdot\sqrt{\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]^2 + 1}$$

Thay $x = \frac{1}{3}$, ta có $v = \sqrt{10}\cdot\sqrt{\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\right]^2 + 1} \approx 9.166\ \text{cm/s}$

Bài 8: Một máng nước dài 10 m, mặt cắt ngang có hình dạng của một hình thang cân đáy dưới rộng a = 30 cm, đáy trên rộng b = 80 cm, và có chiều cao H = 50 cm. Nếu máng được bơm đầy nước với tốc độ $0.2\ \text{m}^3/\text{min}$. Mực nước tăng lên nhanh như thế nào khi nước sâu 30 cm.

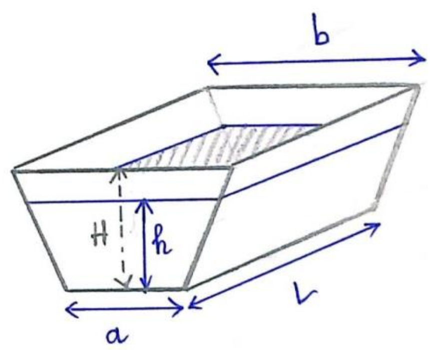


Ta có $\frac{AK}{AK+H} = \frac{a}{b} \Rightarrow AK = 30\ \text{cm}$ (tam giác đồng dạng)

Ta có :

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AK+h}{AK+H} \Rightarrow ED = BC\cdot\frac{AK+h}{AK+H} = b\cdot\frac{AK+h}{AK+H}$$

Thể tích của phần nước ở trong máng khi ở một thời điểm t mà mực nước có độ cao là h (h < H)



$$V = \frac{1}{2}\cdot(a+ED)\cdot h\cdot L = \frac{1}{2}\cdot\left(a+b\cdot\frac{AK+h}{AK+H}\right)\cdot h\cdot L$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{b\cdot AK}{AK+H}\right)\cdot h\cdot L + \frac{1}{2}\cdot b\cdot L\cdot\frac{h^2}{AK+H}$$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến độ sâu h

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{b\cdot AK}{AK+H}\right)\cdot L + b\cdot L\cdot\frac{h}{AK+H} \quad (1)$$

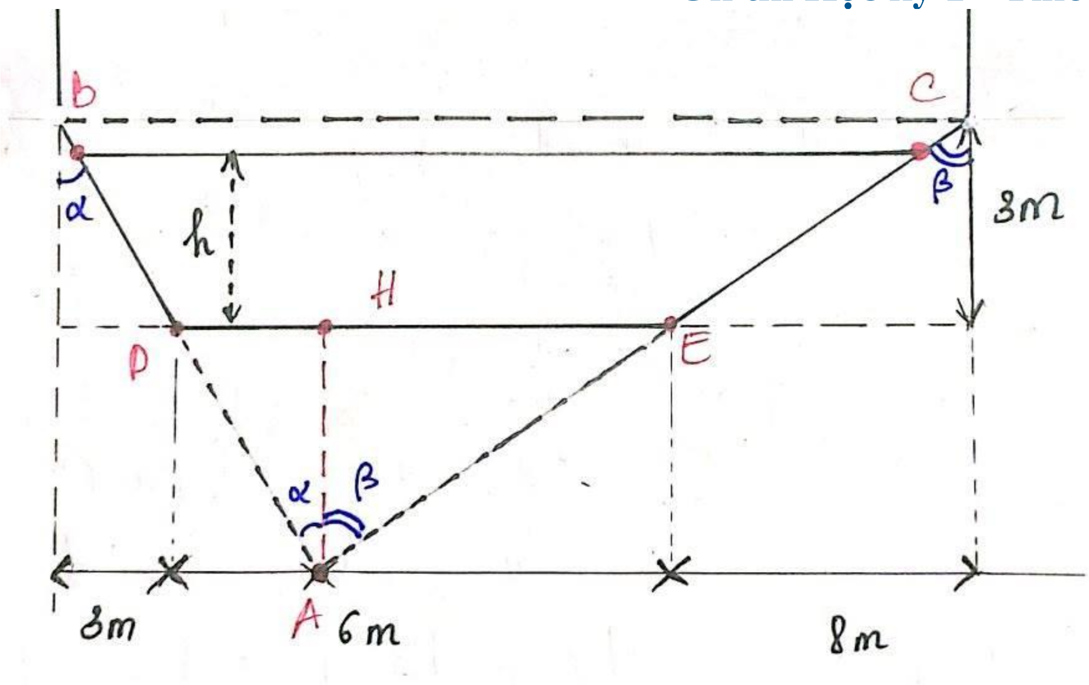
Ta lại có độ biến thay đổi thể tích theo thời gian

$$\frac{dV}{dt} = v = 0.2\ m^3/min = 200\ 000\ cm^3/min \ (2)$$

Lấy $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \dfrac{v}{\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{b\cdot AK}{AK+H}\right)\cdot L + b\cdot L\cdot\frac{h}{AK+H}}$

Thay h = 30 cm và các số liệu khác, ta có độ tăng mực nước theo thời gian tại thời điểm t mà mực nước cao h = 30 cm là $\dfrac{200000}{\frac{1}{2}\cdot\left(30+\frac{80\cdot 30}{30+50}\right)\cdot 1000 + 80\cdot 1000\cdot\frac{30}{30+50}} = \frac{10}{3}\ cm/min$

Bài 9: Một hồ chứa nước có hình mặt cắt ngang là hình thang BCED trong hình vẽ, dài 20 m, rộng 6 m, chỗ sâu nhất có độ sâu là 3 m. Nước được bơm vào hồ với lưu lượng $v = 0.025\left(m^3/min\right)$. Mức nước dâng cao nhanh như thế nào nếu lúc đó mực nước trong hồ là 1.6 m.



Ta có $\tan\alpha = \frac{3}{3} = 1,\ \tan\beta = \frac{8}{3}$

Ta lại có $AH.(\tan\alpha + \tan\beta) = 6 \Rightarrow AH = \frac{18}{11}(m)$

Diện tích tam giác ADE là $S_{ADE} = \frac{1}{2}AH \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{11} \cdot 6 = \frac{54}{11}(m^2)$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH+h) \cdot BC = \frac{1}{2}(AH+h) \cdot \left[(AH+h) \cdot (\tan\alpha + \tan\beta)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(AH+h)^2(\tan\alpha + \tan\beta)$$

Vậy thể tích của bể chứa theo chiều cao h là

$$V = (S_{ABC} - S_{ADE}) \cdot r$$
$$= \frac{1}{2}(AH+h)^2(\tan\alpha + \tan\beta) \cdot r - \frac{54}{11}$$

với r là chiều rộng của bể r = 6 m

Đạo hàm hai vế theo biến h

$$\frac{dV}{dh} = (AH + h)(\tan\alpha + \tan\beta)\cdot r \qquad (1)$$

Mà ta lại có tốc độ biến thiên thể tích theo thời gian chính là lưu lượng nước được bơm vào hồ

$$\frac{dV}{dt} = v = 0.025\left({}^{m^3}\!/\!_{\min}\right) \qquad (2)$$

Lấy $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{v}{(AH + h)(\tan\alpha + \tan\beta)\cdot r} = \frac{0.025}{\left(\frac{18}{11} + h\right)\left(1 + \frac{8}{3}\right)6}$

Thay h = 1.6

Vậy tại thời điểm mà mực nước là h=1.6 m thì độ thay đổi mực nước là

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.025}{\left(\frac{18}{11} + 1.6\right)\left(1 + \frac{8}{3}\right)6} = \frac{1}{2848} \approx 0.00035\left({}^{m}\!/\!_{\min}\right)$$