TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

BÀI TẬP VÍ DỤ
VI TÍCH PHÂN 1B

CHƯƠNG: TÍCH PHÂN

- Lâm Cương Đạt

Cập nhật: 02/02/2017

Bài tập tích phân suy rộng

Bài 1: Tính tích phân suy rộng sau $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx$

Đây là tích phân suy rộng loại 1.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^{t} \frac{1}{\sqrt{x-2}^3}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x-2}}\right)\Bigg|_3^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}} - \frac{-2}{\sqrt{3-2}}\right)$$

$$\text{khi } t \to \infty \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{t-2}} \to 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}} - \frac{-2}{\sqrt{3-2}}\right) = 2$$

Vậy tích phân hội tụ về 2

Bài 2: Tính tích phân suy rộng sau $\int_0^{\infty} \frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$

Dễ thấy đây là tích phân suy rộng loại 1

$$\int_0^{\infty} \frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} \frac{x.\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$$

Ta tìm (arctan x)’, đặt $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$

Theo cách tìm đạo hàm hàm ngược (arctan x là hàm ngược của tanx $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$$\arctan(\tan x)' = \arctan(y)' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+y^2}$$

Hay $\arctan(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Đặt $u = \arctan x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ và $x = \tan u$

Tích phân trở thành

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\arctan 0}^{\arctan t}\frac{u.\tan u}{1+\tan^2 u}du = \lim_{t\to\infty}\int_{\arctan 0}^{\arctan t}u.\sin(u).\cos(u)du = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_{\arctan 0}^{\arctan t}u.\sin(2u)du$$

Ta có cách tìm $\int_a^b x.\sin(2x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ \text{chon } v = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$

Ta có $\int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$

$$\Rightarrow \int_a^b x.\sin(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x).x\Big|_a^b - \int_a^b\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x).x\Big|_a^b + \frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_a^b = \frac{1}{4}\left[\sin(2x) - 2\cos(2x)\right]\Big|_a^b$$

Vậy $\dfrac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_{\arctan 0}^{\arctan t}u.\sin(2u)du$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{8}[\sin(2u) - 2x\cos(2u)]\right]\Bigg|_{\arctan 0}^{\arctan t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}[\sin(2\arctan t) - 2.\arctan t.\cos(2\arctan t) - \sin 0 + 2.0.\cos 0]$$

Do khi $t \to \infty \Rightarrow \arctan t \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{8}[\sin(2\arctan t) - 2.\arctan t.\cos(2\arctan t) - \sin 0 + 2.0.\cos 0] = \frac{\pi}{8}$$

Vậy tích phân hội tụ về $\dfrac{\pi}{8}$

Bài 3: Tính tích phân suy rộng sau $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

Ta thấy đây là tích phân suy rộng loại 2

$$\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}} = \lim_{t\to -2+} \int_{t}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$$

$$= \lim_{t\to -2+} \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{x+2}^{3} \right)\Bigg|_{t}^{14} = \lim_{t\to -2+} \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{14+2}^{3} - \sqrt[4]{t+2}^{3} \right) = \frac{32}{3}$$

Bài 4: Xác định tích phân suy rộng sau hội tụ hay phân kỳ $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{x-2}$

Ta thấy hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ không xác định tại x=2

Vậy đây là tích phân suy rộng loại 2

Ta có đặt $t = x-2 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t+2 \end{cases}$

$$\int_{a}^{b} \frac{x.dx}{x-2} = \int_{a-2}^{b-2} \frac{(t+2)}{t} dt = \int_{a-2}^{b-2} \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt = \left[t + 2\ln\left(|t|\right) \right]\Big|_{a-2}^{b-2}$$

$$= \left[x - 2 + 2.\ln\left(|x-2|\right) \right]\Big|_{a}^{b}$$

$$\int_{0}^{5} \frac{xdx}{x-2} = \int_{0}^{2} \frac{xdx}{x-2} + \int_{2}^{5} \frac{xdx}{x-2} = \lim_{t\to 2-} \int_{0}^{t} \frac{xdx}{x-2} + \lim_{t\to 2+} \int_{t}^{5} \frac{xdx}{x-2}$$

$$= \lim_{t\to 2-} \left(x - 2 + 2\ln|(x-2)| \right)\Big|_{0}^{t} + \lim_{t\to 2+} \left(x - 2 + 2|\ln(x-2)| \right)\Big|_{t}^{5}$$

$$= \lim_{t\to 2-} \left(t + 2\ln|t-2| - 2\ln 2 \right) + \lim_{t\to 2+} \left(5 + 2\ln 3 - t - 2\ln|t-2| \right)$$

Ta có khi $\left[\begin{array}{l} t \to 2- \\ t \to 2+ \end{array} \right. \Rightarrow |t-2| \to 0+ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 2-} |t-2| = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 2+} |t-2| = -\infty \end{cases}$ **xem thêm đồ thị hàm số y = lnx*

Vậy tích phân suy rộng phân kỳ

Bài 5: Tính tích phân suy rộng sau $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

Ta thấy tích phân vừa có cận từ $-\infty$ vừa có cận tại 0 mà tại đó hàm số $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ không xác định, vậy đây là sự kết hợp của tích phân loại 1 và tích phân loại 2

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x^2}$

Vậy $\int_a^b \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} e^t dt = \left(e^t\right)\Big|_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}$

Tích phân trở thành

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0}\int_t^k \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0^-}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_t^k\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\lim_{k\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{t}} - e^{\frac{1}{k}}\right)\right)$$

Khi $t \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{t} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{t}} \to e^0 = 1$

Khi $k \to 0- \Rightarrow \frac{1}{k} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{k}} \to e^{-\infty} = 0$ **xem thêm đồ thị* $y = e^x$

Vậy tích phân hội tụ về 1