TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

BÀI TẬP VÍ DỤ
VI TÍCH PHÂN 1B

CHƯƠNG: ĐẠO HÀM

PHẦN: CÁC BÀI TOÁN LÝ THUYẾT ĐẠO HÀM

- Lâm Cương Đạt

Cập nhật: 02/02/2017

Bài tập về định nghĩa đạo hàm

1. Tìm phương trình của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm có tọa độ cho trước bằng định nghĩa đạo hàm.

a. $y = 4x - 3x^2, (2, -4)$

c. $y = \sqrt{x}, (1,1)$

b. $y = x^3 - 3x + 1, (2,3)$

d. $y = \dfrac{2x+1}{x+2}, (1,1)$

a.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có đạo hàm của f(x) tại a là:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{4x-3x^2-(4a-3a^2)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{4(x-a)-3(x-a)(x+a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\left[4-3(x+a)\right]\\
&= 4-6a
\end{aligned}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm (2,-4) là: $f'(2) = 4 - 2.6 = -8$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (2,-4) của đồ thị hàm số là:

$$y = f'(2)\times(x-2) + f(2) = -8(x-2) + (-4) = -8x + 12$$

b.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có đạo hàm của f(x) tại a là:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^3-3x+1-(a^3-3a+1)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)-3(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\left[x^2+ax+a^2-3\right]\\
&= 3a^2-3
\end{aligned}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm (2,3) là: $f'(2) = 3.2^2 - 3 = 9$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (2,3) của đồ thị hàm số là:

$$y = f'(2)\times(x-2) + f(2) = 9(x-2)+3$$

c.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có đạo hàm của f(x) tại a là:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a).(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm (1,1) là: $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (1,1) của đồ thị hàm số là:

$$y = f'(1)\times(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1)+1 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

d.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có đạo hàm của f(x) tại a là:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{2x+1}{x+2}-\frac{2a+1}{a+2}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{(2x+1)(a+2)-(2a+1)(x+2)}{(a+2)(x+2)}}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{4(x-a)-(x-a)}{(a+2)(x+2)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{3}{(a+2)(x+2)} = \frac{3}{(a+2)^2}
\end{aligned}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm (1,1) là: $f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (1,1) của đồ thị hàm số là:

$$y = f'(1)\times(x-1) + f(1) = \frac{1}{3}(x-1)+1 = \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

2. Nếu một phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm a = 2 là $y = 4x - 5$, tìm $f(2),\ f'(2)$.

Ta viết lại phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại a = 2

$$y = 4(x-2) + 3$$

Ta lại có, phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại một điểm a có dạng

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Vậy $\begin{cases} f'(a) = f'(2) = 4 \\ f(a) = f(2) = 3 \end{cases}$

Bài tập về đạo hàm hàm ẩn

3. Dùng vi phân ẩn để tìm công thức của đường tiếp tuyến của đường cong tại điểm cho trước

a. $y.\sin 2x = \cos 2y, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

b. $\sin(x+y) = 2x - 2y, (\pi, \pi)$

c. $x^2 + xy + y^2 = 3, (1,1)$

(đồ thị elipse)

d. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2, (1,2)$

(đồ thị hyperbola)

e. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2, \left(0, \frac{1}{2}\right)$

(đồ thị cardioid)

a.

Xét một đoạn cong ngắn của đồ thị qua điểm $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, ta xem đó là đồ thị của hàm ẩn $y = f(x)$

Ta có: $f(x).\sin 2x = \cos\left[2.f(x)\right]$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$f'(x).\sin 2x + f(x).2.\cos 2x = -2.\sin\left[2.f(x)\right].f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2f(x)\cos(2x)}{\sin(2x) + 2\sin\left[2f(x)\right]}$$

Hệ số góc cua tiếp tuyến tại $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ là $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-2.\frac{\pi}{4}.\cos(2.\frac{\pi}{2})}{\sin(2.\frac{\pi}{2}) + 2\sin(2.\frac{\pi}{4})} = \dfrac{\pi}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ là:

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}$$

b.

Xét một đường cong ngắn của đồ thị đi qua điểm (π, π), ta xem đó là đồ thị của hàm ẩn $y = f(x)$

Ta có: $\sin(x + f(x)) = 2x - 2f(x)$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$(1 + f'(x)).\cos(x + f(x)) = 2 - 2f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 - \cos(x + f(x))}{2 + \cos(x + f(x))}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại (π, π) là $f'(\pi) = \dfrac{2 - \cos(\pi + \pi)}{2 + \cos(\pi + \pi)} = \dfrac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại (π, π) là: $y = f'(\pi) \times (x - \pi) + f(\pi) = \dfrac{1}{3}(x - \pi) + \pi$

c.

Xét một đường cong ngắn của đồ thị đi qua điểm $(1,1)$, ta xem đó là đồ thị của hàm ẩn $y = f(x)$

Ta có: $x^2 + x.f(x) + [f(x)]^2 = 3$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$2x + f(x) + x.f'(x) + 2.f(x).f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2x + f(x)}{2.f(x) + x}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại (π,π) là $f'(\pi) = -\dfrac{2.1+1}{2.1+1} = -1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại (π,π) là: $y = f'(1)\times(x-1) + f(1) = -(x-1)+1$

d.

Xét một đường cong ngắn của đồ thị đi qua điểm $(1,2)$, ta xem đó là đồ thị của hàm ẩn $y = f(x)$

Ta có: $x^2 + 2x.f(x) - [f(x)]^2 + x = 2$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$2x + 2.f(x) + 2x.f'(x) + 1 - 2.f(x).f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2x + 2.f(x) + 1}{2x - 2.f(x)}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $(1,2)$ là $f'(1) = -\dfrac{2.1 + 2.2 + 1}{2.1 - 2.2} = \dfrac{7}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $(1,2)$ là: $y = f'(1)\times(x-1) + f(1) = \dfrac{7}{2}(x-1) + 2$

e.

Xét một đường cong ngắn của đồ thị đi qua điểm $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, ta xem đó là đồ thị của hàm ẩn

$y = f(x)$

Ta có: $x^2 + [f(x)]^2 = \left(2x^2 + 2[f(x)]^2 - x\right)^2$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$2x+2f\left(x\right).f'\left(x\right)=2\left(2x^2+2\left[f\left(x\right)\right]^2-x\right).\left(4x+4.f\left(x\right).f'\left(x\right)-1\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(4x-1)\left\{2x^2+2\left[f\left(x\right)\right]^2-x\right\}-2x}{2.f\left(x\right)-2.4.f\left(x\right).\left\{2x^2+2\left[f\left(x\right)\right]^2-x\right\}}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ là $f'\left(0\right)=\dfrac{2(4.0-1)\left\{2.0^2+2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-x\right\}-2x}{2.\frac{1}{2}-2.4.\frac{1}{2}.\left\{2x^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-x\right\}}=1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ là: $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)=x+\frac{1}{2}$

Bài tập về đạo hàm hàm ngược

4. Tính đạo hàm $f\left(x\right)=\arcsin x$

Ta có $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $g\left(x\right)=\sin x$ song ánh

Đặt y = sinx thì

$$y'=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-y^2}$$

Theo công thức đạo hàm hàm ngược ta có

$$\frac{d}{dy}\left(\arcsin y\right)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

hay $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Tính đạo hàm f(x)=arctanx

Ta có $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ thì y= tanx song ánh.

$$y'=1+\tan^2 x=1+y^2$$

Theo công thức tính đạo hàm hàm ngược thì

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\text{hay } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Bài tập về dùng quy tắc Lopital để tính giới hạn

Chú ý cách trình bày

Đối với các bài toán sử dụng quy tắc Lopital để tính giới hạn, các bạn nên xét xem đã thỏa các điều kiện để sử dụng quy tắc hay chưa.

B1: Đặt $f_1(x) =$ "đa thức tử số", $g_1(x) =$ "đa thức mẫu số".

B2: Nếu $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} g_1(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} g_1(x) = \pm\infty \end{array}\right.$ tức là lim ở dạng vô định $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, hay $\frac{\infty}{\infty}$

B3: Tìm $f_1'(x), g_1'(x)$

B4: Áp dụng Lopital $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$

Nếu lim vẫn ở dạng vô định

B5: Lặp lại B1 và B2 sau khi đã biến đổi

B6: Áp dụng Lopital (liên tiếp) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} \left(= \ldots = \lim\limits_{x\to a} \frac{f_n'(x)}{g_n'(x)} \right)$

Ở các bài tập dưới, sử dụng ký hiệu "$\overset{(L)}{=}$" tức là sử dụng biến đổi Lopital và đã xét đến các điều kiện. Khi trình bày vào bài thi, các bạn nên trình bày đầy đủ các bước để tránh mất điểm

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\tan^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x)-x\right)'}{\left(\tan^2 x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2\frac{\sin x}{\cos^3 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x.\cos^3 x}{2\sin x(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-x.\cos^3 x\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[2\sin x(x+1)\right]=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\tan^2 x}=\frac{-1}{2}$$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\cos 2x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos 2x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left[\ln(\tan x)\right]'}{\left(\cos 2x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos x.\sin x}}{-2\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(4\sin^2 x.\cos^2 x\right)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos 2x}=-1$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\arcsin\left(x^2\right)}{x.\cos x-\sin x}$

**dựa vào kết quả bài tập 4 để tính đạo hàm hàm arcsin*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x.\arcsin\left(x^2\right)}{x.\cos x-\sin x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[x.\arcsin\left(x^2\right)\right]'}{\left(x.\cos x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x.\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)\sqrt{1-x^4}+2x^2}{-x.\sin x.\sqrt{1-x^4}}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\arcsin(x^2)\sqrt{1-x^4}+2x^2\right]'}{\left(-x.\sin x.\sqrt{1-x^4}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\dfrac{2x^3\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}}{\dfrac{2x^4\sin(x)}{\sqrt{1-x^4}}-\sqrt{1-x^4}.\sin x-\sqrt{1-x^4}.x.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\sqrt{1-x^4}-2x^3\arcsin(x^2)}{2x^4\sin x-(1-x^4)(\sin x+x\cos x)}$$

$$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[6x\sqrt{1-x^4}-2x^3\arcsin(x^2)\right]'}{\left[2x^4\sin x-(1-x^4)(\sin x+x\cos x)\right]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-16x^4}{\sqrt{1-x^4}}+6\sqrt{1-x^4}-6x^2\arcsin(x^2)}{2x^4\cos x-(1-x^4)(2\cos x-x\sin x)+8x^3\sin x+4x^3\left(\sin x+x\cos x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-16x^4}{\sqrt{1-x^4}}+6\sqrt{1-x^4}-6x^2\arcsin(x^2)\right]=6$$

$$\lim_{x\to 0}\left[2x^4\cos x-(1-x^4)(2\cos x-x\sin x)+8x^3\sin x+4x^3\left(\sin x+x\cos x\right)\right]=-2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x.\arcsin\left(x^2\right)}{x.\cos x-\sin x}=\frac{6}{-2}=-3$$

9. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan(x\text{-}1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$

**dựa vào kết quả bài tập 5 để tính đạo hàm hàm arctan*

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{[\arctan(x-1)]'}{\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x^2-2x+2}}{\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x+1)\left(x^2-2x+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(2\sqrt{x^2+x-2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(2x+1)\left(x^2-2x+2\right)\right]=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{0}{3}=0$$

10. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}$

**dựa vào kết quả bài tập 4 để tính đạo hàm hàm arcsin*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)'}{\left[\arcsin x-\ln(1+x)\right]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x.\sqrt{1-x^2}.(x+1)}{x+1-\sqrt{1-x^2}}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x.\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x(x+1)\tan^2 x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2(x+1)\tan x.\sqrt{1-x^2}}{\cos^2 x}}{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\tan^2 x.\sqrt{1-x^2}-\frac{x(x+1)\tan^2 x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2(x+1)\tan x.\sqrt{1-x^2}}{\cos^2 x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\arcsin x-\ln(1+x)}=\frac{0}{1}=0$$

11. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{ar}\tan x)^{\tan x}$

**dựa vào kết quả bài tập 5 để tính đạo hàm hàm arctan*

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x.\ln(\arctan x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x.\ln(\arctan x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}[\tan x.\ln(\arctan x)] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\tan x.\arctan x.\ln(\arctan x)}{\arctan x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\arctan x}\times\left[-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{\arctan x}\right)}{\frac{1}{\arctan x}}\right]$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+x^2}}\times\left[-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{\arctan x(x^2+1)}}{\frac{-1}{(x^2+1)\arctan^2 x}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{\cos^2 x}\times\left[-\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{\cos^2 x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[\tan x.\ln(\arctan x)] = 0.1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x.\ln(\arctan x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x.\ln(\arctan x)} = e^0 = 1$$

12. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x}\right]}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} \ln(1+x) - \frac{1}{x} \right]} = e^{-\frac{1}{2}}$$