VI TÍCH PHÂN 1C

Lê Văn Chánh
lvchanh@hcmus.edu.vn

Khoa Toán -Tin học
Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQG-HCM

Ngày 16 tháng 10 năm 2022

Không có gì hủy hoại những khả năng toán học bằng thói quen tiếp nhận những phương pháp giải có sẵn mà không hề tự hỏi vì sao cần giải đúng như thế và làm thế nào để có thể tự nghĩ ra điều đó.

W.W. Sawyer

Start with why

Nội dung chính

Chương I

Suy luận - Phương pháp chứng minh - Ánh xạ

Chương II

Giới hạn và sự liên tục của hàm số

Tính duy nhất của giới hạn hàm số

Định lý 0.1

Giới hạn của hàm số f tại a (nếu có) là duy nhất.

Chú ý

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (?)

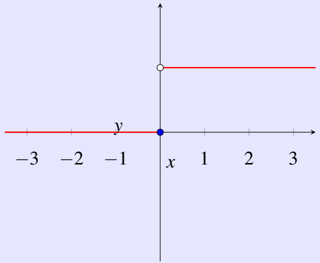
- Oh!No! If $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ exists, then it is unique ; that is, if

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2,$$

then $L_1 = L_2$.

Bài tập 2.0.1. Cho hàm Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0, & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$.



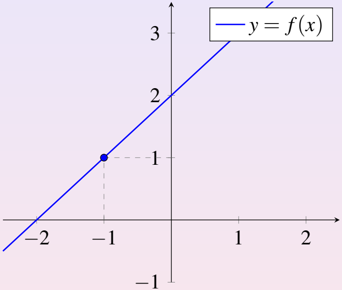
Ví dụ 0.1.

Cho hai hàm $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x) = x+1$.

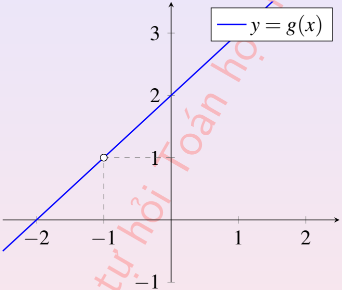
(a) Liệu $f = g$ hay không? Vì sao?

(b) Liệu $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ hay không? Vì sao?

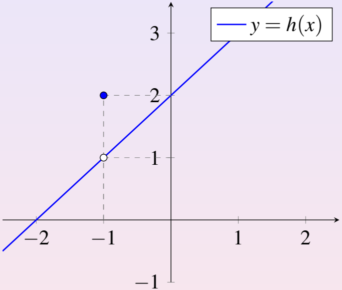
Giới hạn- Đồ thị hàm số



Hình: $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ tồn tại?



Hình: $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ tồn tại?



Hình: $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ tồn tại?

Ví dụ 0.2.
Cho các hàm $f(x) = x^2, g : (0,3) \to \mathbb{R}$ với $g(x) = x^2$ với $x \in (0;3)$ và hàm

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Liệu $f = g$ hay không? Vì sao?

(b) Liệu $h = g$ hay không? Vì sao?

(c) Liệu $h_{|(0;3)} = f_{|(0;3)} = g$ hay không? Vì sao?

(d) Liệu $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} h(x)$ hay không? Vì sao?

Tính chất cục bộ của giới hạn

Ví dụ 0.3.

Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$.

(b) Liệu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-|1-3x|)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-(1-3x))}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ hay không? Vì sao?

Giới hạn cơ bản

Định lý 0.2

Cho các số thực a và C.

(i) $\lim\limits_{x\to a} C = C.$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

Chú ý

Đẳng thức $\lim\limits_{x\to a} C = C$ được viết lại một cách rõ ràng hơn: xét hàm hằng $f(x) := C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức giới hạn chính là $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$.

Ví dụ 0.4.
Cho các số thực a và C.

(i) $\lim\limits_{x \to 8} 3 = 3.$

(ii) $\lim\limits_{x \to \pi} x = \pi.$

Tính chất giới hạn hàm số

Định lý 0.3

Cho $f,g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *là điểm tụ của* D *và hằng số thực* C. *Giả sử các giới hạn* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *đều tồn tại hữu hạn. Khi đó,*

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a} C.f(x) = C.\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ *nếu* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Phương pháp thế trực tiếp

Ví dụ 0.5.

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^3+3x+5\right)=\lim_{x\to 2}2x^3+\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5=2\lim_{x\to 2}x^3+3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$
$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=2\cdot 2^3+3\cdot 2+5=27.$$

Chú ý

Với đa thức P và số thực a, áp dụng giới hạn cơ bản và các qui tắc cơ bản của giới hạn, ta có

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a).$$

Phương pháp thế trực tiếp

Ví dụ 0.6.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x+2}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x+2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)}=\frac{2\cdot 3^2-3+2}{3^2+1}=\frac{17}{10}.$$

Chú ý

Với hai đa thức P, Q, và số thực a sao cho $Q(a)\neq 0$, áp dụng giới hạn cơ bản và các qui tắc cơ bản của giới hạn, ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Tính chất giới hạn hàm số

Bài tập 2.0.2. Giả sử $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, tìm $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Bài tập 2.0.3.

(a) Có số a nào sao cho

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-2ax-a-1}{x^3-3x-2}$$

tồn tại không? Tìm giới hạn đó.

(b) Tìm các số thực a và b sao cho $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$.

Giới hạn hàm hợp

Định lý 0.4 (Giới hạn hàm hợp)

Cho các hàm một biến f và g thỏa $\lim_{x\to a} g(x) = g_0$ và $\lim_{t\to g_0} f(t) = L$. Khi đó, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$.

Định lý 0.4 (Giới hạn hàm hợp) có thể phát biểu đơn giản khi f *liên tục* tại g_0 như sau:

Định lý 0.5 (Giới hạn hàm hợp)

Cho các hàm một biến f và g thỏa $\lim_{x\to a} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$ và f liên tục tại g_0. Khi đó, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.

Giới hạn hàm hợp

Bài tập 2.0.4. Cho hàm f xác định trên một khoảng chứa 0 và thỏa $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Tìm các giới hạn sau.

(a) $\lim_{x\to 0} f(2x)$.

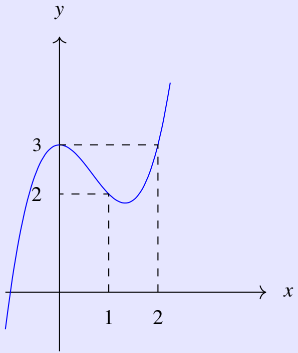
(b) $\lim_{x\to 0} f(x^2)$.

(c) $\lim_{y\to 0} f(y^3)$.

(d) $\lim_{x\to 0} f(x+x^2)$.

Giới hạn hàm hợp

Bài tập 2.0.5. Tìm $\lim_{x\to 1} f(x^2 - x + 2)$ với hàm f có đồ thị như bên dưới.



Ví dụ 0.7.

Liệu các đẳng thức sau xảy ra hay không? Vì sao?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-1}{x}.$

Hàm sơ cấp

- Hàm hằng, hàm luỹ thừa, hàm mũ, hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng được gọi chung là hàm sơ cấp cơ bản.
- Hàm được xây dựng từ các hàm sơ cấp cơ bản thông qua một số hữu hạn các phép toán tổng, hiệu, tích, thương và phép lấy hàm hợp đều được gọi là hàm sơ cấp.

Ví dụ 0.8.
[Hàm sơ cấp] Các hàm số

$$f_1(x) = (2x+3)^7,\ f_2(x) = e^{\sqrt{x}+3},$$
$$f_3(x) = \ln(x^2+x),\ f_4(x) = \sin(x^2+x), f_5(x) = \arcsin(x^2+x) \quad (0.1)$$

là các hàm số sơ cấp.

Chú ý

Không phải mọi hàm phân nhánh (hàm từng khúc, hàm cho bởi nhiều công thức, hàm từng mảnh) đều là hàm sơ cấp.

Ví dụ 0.9.

- Hàm $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$ là hàm sơ cấp.
- Hàm $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x \geq 0, \\ 2 - x & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$ không là hàm sơ cấp.

Phương pháp thế trực tiếp

Phương pháp thế trực tiếp (Direct Substitution) đối với hàm sơ cấp

- Với f là hàm sơ cấp, $a \in D_f$, ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

⚠ Ở đây, ta giả sử a là điểm tụ của D_f.

- Ẩn đằng sau kết quả trên là khái niệm về sự liên tục của hàm số.
- Phương pháp trên thể hiện sự mạnh mẽ hơn so với việc sử dụng hai giới hạn cơ bản cùng các phép toán cơ bản cơ bản của giới hạn hàm số (từ đó nhận được phương pháp thế trực tiếp cho hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ).
- Phương pháp này thường dùng trong giải tích một biến để tính giới hạn sau khi thực hiện quá trình khử dạng vô định.

Phương pháp thế trực tiếp

Ví dụ 0.10.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x} == \sqrt{1^2+2\cdot 1}\sqrt{3},$$

$$\lim_{x\to 2} e^{x^3-x} = e^{2^3-2} = e^6.$$

Phương pháp thế trực tiếp

Bài tập 2.0.6. Xác định các giới hạn sau (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4x+5\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+x-4\right)$.

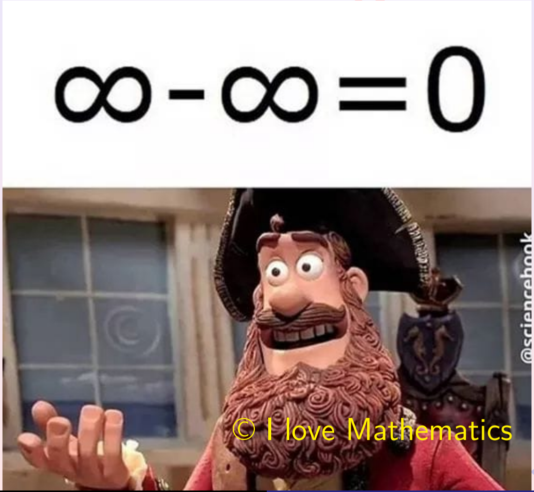
(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2+3x+x^2}$.

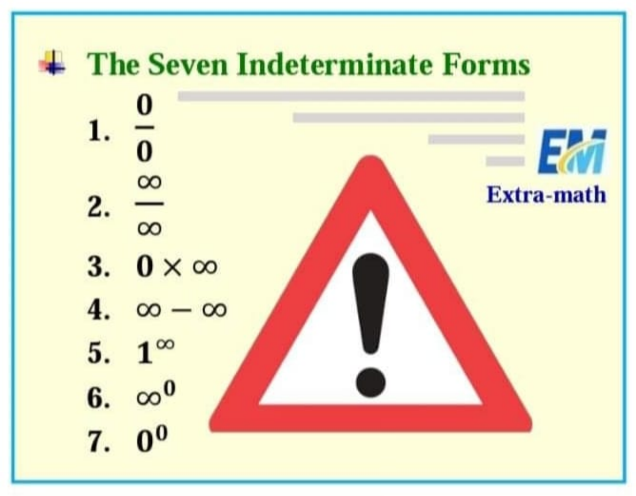
(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{x+1}$.

Các dạng vô định của giới hạn



Các dạng vô định của giới hạn



Các dạng vô định của giới hạn

Các dạng vô định điển hình

- Bảy dạng vô định điển hình: $0/0$, ∞/∞, $0\times\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty$ and ∞^0.
- 0^∞ không phải là dạng vô định.

Bài tập 2.0.7. Hãy cho nhận xét về nhận định

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ không tồn tại.}$$

Các phương pháp khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Các kỹ thuật cơ bản cho dạng vô định $\dfrac{0}{0}$:

1. Khử "nhân tử" vô định bằng cách phân tích thành nhân tử.

   Phân tích nhân tử

   - Sơ đồ Horner
   - Chia đa thức
   - Khi tam thức bậc hai ax^2+bx+c nhận x_1 và x_2 làm "nghiệm" (không điểm), tam thức này có thể viết lại $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Kết quả này cũng được tổng quát hóa cho đa thức bậc cao hơn.
   - (Định lý Bezout (Bơ du)) Nếu đa thức P có một không điểm a thì có một đa thức Q sao cho $P(x)=(x-a)Q(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2. Kỹ thuật nhân lượng liên hiệp (hợp).

Các phương pháp khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Các kỹ thuật cơ bản cho dạng vô định $\dfrac{0}{0}$:

1. Khử "nhân tử" vô định.
2. Kỹ thuật nhân lượng liên hiệp (hợp): với một số điều kiện, ta có các đẳng thức sau

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}, \tag{0.2}$$

$$\sqrt{f(x)} - g(x) = \frac{f(x) - [g(x)]^2}{\sqrt{f(x)} + g(x)}. \tag{0.3}$$

Chú ý

Quy tắc l'Hospital giúp cho việc tính giới hạn dễ dàng hơn!

Bài tập giới hạn hàm số

Bài tập 2.0.8. Tính các giới hạn sau.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^3+8}$.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{t^4-1}{t^3-1}$.

(c) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(10+h)^2-100}{h}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-3x^2-4}$.

(e) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$, $x\in\mathbb{R}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-2017}\frac{\frac{1}{2017}+\frac{1}{x}}{2017+x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$.

(h) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$.

(i) $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$.

(j) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$, $x\neq0$.

Bài tập giới hạn hàm số

Bài tập 2.0.9. Tính các giới hạn sau.

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{100+h}-10}{h}$.

(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$.

(c) $\displaystyle\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$.

(d) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{8x-x^3}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$.

Các giới hạn phức tạp hơn có thể sử dụng công cụ mạnh (Vô cùng bé, vô cùng lớn, quy tắc l'Hospital) để tìm giới hạn (Quy tắc này được đề cập trong phần đạo hàm hàm hàm một biến).

Sự bảo toàn thứ tự

Sự bảo toàn thứ tự

Cho hai hàm f, g và a là điểm tụ của $D_f \cap D_g$. Giả sử

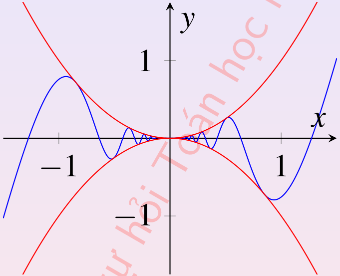
- $f(x) \leqslant g(x)$, với mọi x thuộc khoảng chứa a và $x \neq a$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Khi đó

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Định lý kẹp

Định lý kẹp



Định lý kẹp

Định lý 0.6 (Định lý kẹp (Squeeze Th.) hay còn gọi là Sandwich/ Pinching theorem)

Giả sử $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *và* $a \in D$ *là điểm tụ của* D *thỏa các điều kiện*

(i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *với mọi* x *trong khoảng mở chứa* a *(có thể ngoại trừ* a*).*

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L.$

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ *tồn tại và* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L.$

Lưu ý

Mỗi khoảng mở chứa a được gọi là một lân cận của điểm a.

Định lý kẹp

Định lý kẹp có thể phát biểu ở một dạng khác:

Định lý 0.7

Giả sử $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a *là điểm tụ của* D, *và* $L \in \mathbb{R}$ *thỏa các điều kiện*

(i) $|f(x) - L| \leq g(x)$ *với mọi* x *trong một lân cận của* a, *có thể ngoại trừ* a.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *tồn tại và* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Định lý kẹp

Để chứng minh $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, ta có thể dùng định lý sau.

Định lý 0.8

Giả sử $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a *là điểm tụ của* D *thỏa các điều kiện*

(i) $|f(x)| \le g(x)$ *với mọi* x *trong một lân cận của* a, *có thể ngoại trừ* a.

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Khi đó $\lim_{x \to a} f(x)$ *tồn tại và* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Định lý kẹp

Một số đánh giá thông dụng

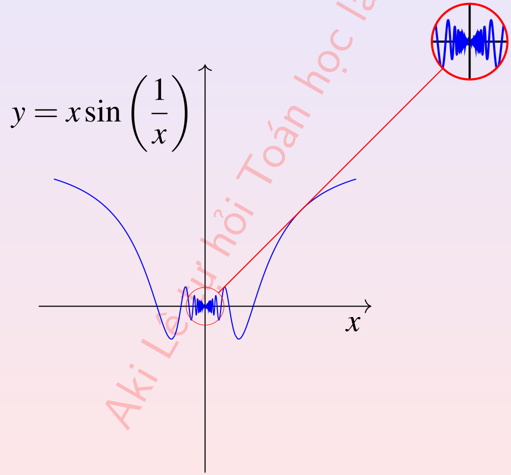
Chiến thuật đánh giá không hướng đi tổng quát. Một số kỹ thuật đánh giá thông dụng (Một số BĐT thu được từ khai triển Maclaurin):

$$|\sin u(x)| \leq 1, |\cos u(x)| \leq 1, \ \forall x \in D_u. \tag{0.4}$$

♣

$$|\sin u(x)| \leq |u(x)|, \ \forall x \in D_u. \tag{0.5}$$

Liệu x càng gần 0 thì $f(x)$ càng gần 0?

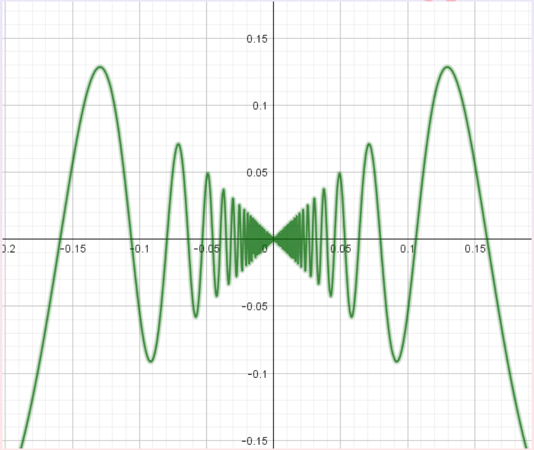


Liệu x càng gần 0 thì $f(x)$ càng gần 0?

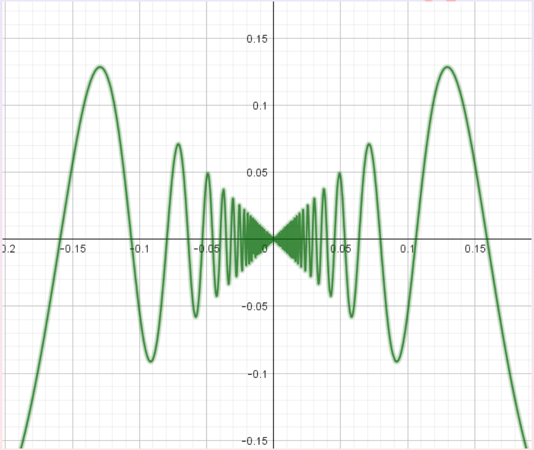
Chú ý

Lưu ý. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ được diễn giải: khi x ***đủ gần*** a thì $f(x)$ ***đủ gần*** L.

Liệu x càng gần 0 thì $f(x)$ càng gần 0?



Liệu x càng gần 0 thì $f(x)$ càng gần 0?



Ví dụ 0.11.
Tìm giới hạn (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^4 + x^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Định lý kẹp

Bài tập 2.0.10. Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Xem xét các lập luận trong mỗi lời giải bên dưới có đúng hay không? Hãy đưa ra cơ sở lập luận hoặc sửa lại lời giải sau để nhận được lời giải đúng.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\lim_{x\to 0} x\right)\cdot \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= 0\cdot \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.\end{aligned}$$

Định lý kẹp

Bài tập 2.0.10.

(b) Vì $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ nên $-x \leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$.

Mặc khác $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$. Áp dụng định lý kẹp, ta nhận được

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Bài tập định lý kẹp

Bài tập 2.0.11. Tính các giới hạn sau (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 100} (x-100)^4 e^{-\frac{1}{(x-100)^2}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\cos\left(\ln(x^2)\right)$.

Bài tập định lý kẹp

Bài tập 2.0.12.

1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.
2. Cho các hàm $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $a \in D$ thỏa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ và tồn tại số thực M sao cho $|g(x)| \leq M, \forall x \in D$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
3. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Bài tập định lý kẹp

Khi nào dùng định lý kẹp

Một số điều kiện thô giúp chúng ta phát hiện rằng 'có lẽ', chúng ta nên dùng định lý kẹp.

1. Hàm số cần tính giới hạn là tích của hai hàm, một hàm 'có giới hạn bằng 0' và một hàm 'bị chặn'.
2. Hàm số cần tính giới hạn rất cồng kềnh.

Bài tập định lý kẹp

Bài tập 2.0.13.

(a) Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{20\pi}{x}\right) = 0.$$

(b) Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

(c) Giả sử $4x-9 \le f(x) \le x^2-4x+7$ với $x \ge 0$. Tìm $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

(d) Giả sử $2x \le g(x) \le x^4-x^2+2$ với mọi x. Tìm $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

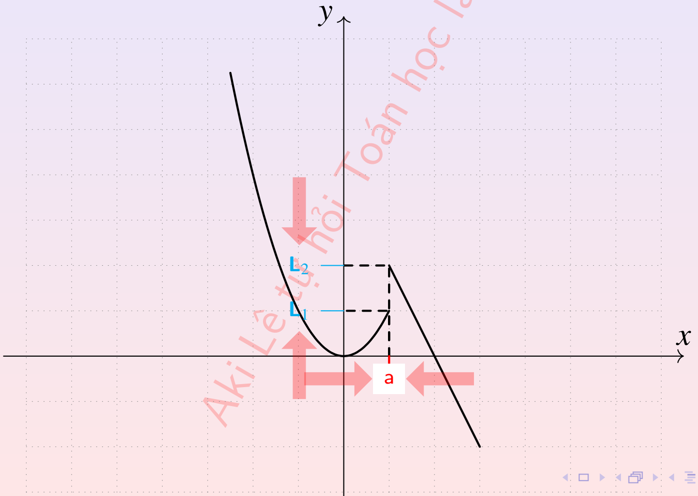
Bài tập định lý kẹp

Bài tập 2.0.14. Cho các hàm số sau $g(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, với $x \neq 0$, và

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{nếu} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (nếu tồn tại).

Giới hạn một phía



Giới hạn một phía

Giới hạn trái

Số L gọi giới hạn trái của f tại điểm a, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Lúc đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Giới hạn một phía

Giới hạn phải

Số L gọi giới hạn phải của f tại điểm a, nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Lúc đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L.$

Giới hạn một phía [TBB08]

- Với a là điểm tụ của $D_f \cap (a, \infty)$, ta định nghĩa

$$\lim_{x \to a^+} f(x) := \lim_{x \to a} f|_{D_f \cap (a,\infty)}(x)$$

(nếu giới hạn $\lim_{x \to a} f|_{D_f \cap (a;\infty)}(x)$ tồn tại).

- Với a là điểm tụ của $D_f \cap (-\infty; a)$, ta định nghĩa

$$\lim_{x \to a^-} f(x) := \lim_{x \to a} f|_{D_f \cap (-\infty;a)}(x)$$

(nếu giới hạn $\lim_{x \to a} f|_{D_f \cap (-\infty;a)}(x)$ tồn tại).

Giới hạn- Đồ thị hàm số

Ví dụ 0.12.

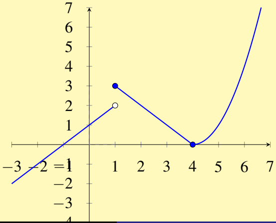
Xét hàm $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$, hàm dấu $\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ -1 & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$

Tìm các giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sign}(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sign}(x)$.

Ví dụ 0.13.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \leq 1 \\ 4-x & \text{if } 1 < x \leq 4 \\ (x-4)^2 & \text{if } x > 4 \end{cases}$. Tìm giới hạn (nếu tồn tại)

(i) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. (ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. (iii) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$. (iv) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.



Bài tập 2.0.15. Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x^3-x^2|}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{7-|x|}{3x+2}$.

Định lý 0.9

Cho $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *và* $a \in \mathbb{R}$ *là một điểm tụ của* D*. Khi đó,* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *khi và chỉ khi mọi* $\{x_n\} \subset D \cap (-\infty, a)$*:* $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ *thì* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Định lý 0.10 ([BS00])

Cho hàm số f *và số thực* c *là điểm tụ của cả hai tập hợp* $D_f \cap (c, \infty)$ *và* $D_f \cap (-\infty, c)$*. Khi đó,*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = L.$$

Giới hạn một phía

Định lý 0.11

Cho $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *và* $a \in \mathbb{R}$ *là một điểm tụ của* D. *Khi đó,* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ *khi và chỉ khi mọi* $\{x_n\} \subset D \cap (a, \infty)$: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ *thì* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Định lý 0.12

Cho $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D$ *và* $L \in \mathbb{R}$. *Giả sử các giới hạn* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *tồn tại. Khi đó,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Giới hạn một phía

Hệ quả 1

- Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ không tồn tại.
- Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại.

Giới hạn một phía

Bài tập 2.0.16. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giới hạn

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x}$.

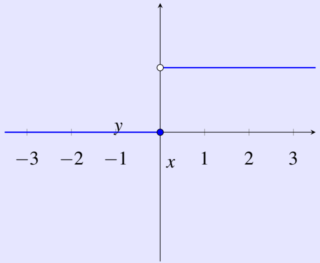
(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

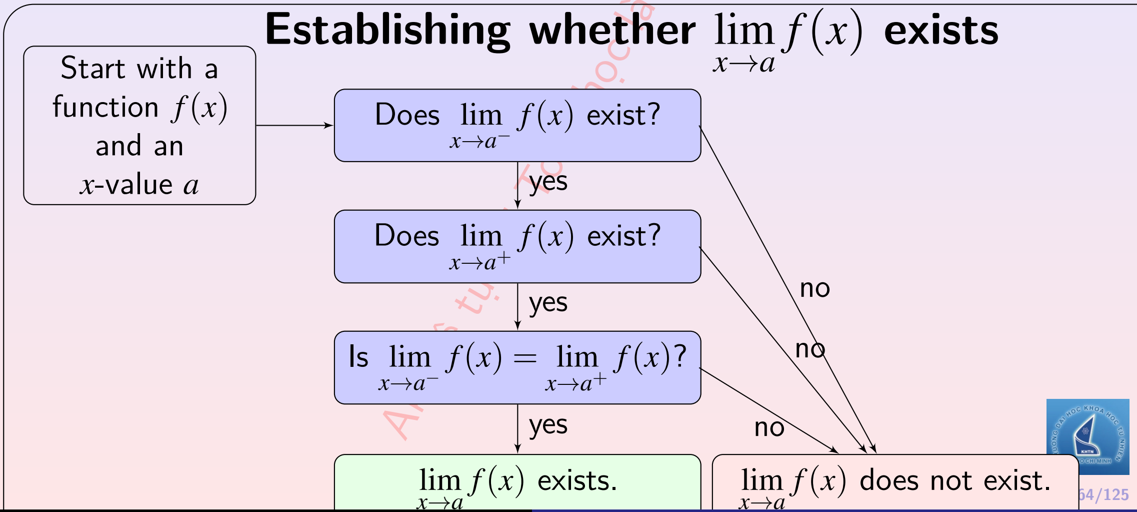
(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

Bài tập 2.0.17. Cho hàm Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0, & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$.



One Limit Flowchart



Thí dụ 0.1

Tính các giới hạn sau (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+|x|}{x^2-1}$.

Giới hạn một phía

Ví dụ 0.14.
Cho $f(x) = [x]$ (hàm phần nguyên).

(a) $[3]$.
(b) $[-3]$.
(c) $[0.24]$.
(d) $[2.9]$.
(e) $[-2.45]$.
(f) $[\sqrt{5}]$.
(g) $[e]$.
(h) $[\pi]$.

(i) Giải phương trình $[x] = n$ với n là số nguyên không âm.
(j) Giải phương trình $[x] = n$ với n là số nguyên âm.
(k) Hãy vẽ đồ thị hàm số f.

Ví dụ 0.15.
Cho $f(x) = [x]$. Dựa vào đồ thị hàm số f hoặc bằng cách khác, tính các giới hạn sau (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0.5^-} f(x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0.5^+} f(x)$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0.5} f(x)$.

Giới hạn một phía

Bài tập 2.0.18. Mỗi giới hạn sau có tồn tại không? Vì sao?

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$.

Bài tập 2.0.19. [Mac] Why is it impossible to investigate $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$ by means of the Epsilon-Delta Definition of a Limit.

Bài tập 2.0.20. [TBB08] According to our definitions, is there any distinction between the assertions

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \text{ and } \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0?$$

What is the meaning of $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{x} = 0$?

Bài tập 2.0.21. Cho $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x-2|}$.

(a) Tính $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$,

(b) Tính $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$,

(c) Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ có tồn tại không? Vì sao?

(d) Vẽ đồ thị hàm số g và lý giải cho các kết quả trên thông qua đồ thị.

Bài tập 2.0.22. Tìm $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ trong trường hợp:

(a) $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{if } x \neq 1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases} \quad (a = 1).$

(b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \leq 0 \\ -1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (a = 0)$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 3 \\ -2x+8 & \text{if } x > 3 \end{cases} \quad (a = 3,\ a = 1).$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \\ -x+2 & \text{if } x > 1 \end{cases} \quad (a = 1).$

Giới hạn một phía

Bài tập 2.0.23. Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

Bài tập giới hạn một phía

Bài tập 2.0.24. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x < 1, \\ 3 & \text{nếu} \quad x = 1, \\ 2 - x^2 & \text{nếu} \quad 1 < x \leq 2, \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{nếu} \quad x > 2. \end{cases}$$

(a) Tính $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$,

(b) Tính $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$,

(c) Tính $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$,

(d) Tính $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$,

(e) Tính $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$,

(f) Tính $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$,

(g) Vẽ đồ thị hàm số g và lý giải cho các kết quả trên thông qua đồ thị.

Bài tập 2.0.25. Cho $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu} \quad x < 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 1, \\ 2x - x^2 & \text{nếu} \quad 1 < x \leq 2, \\ x^3 - 5x + 2 & \text{nếu} \quad x > 2. \end{cases}$

(a) Tính $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$,

(b) Tính $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$,

(c) Tính $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$,

(d) Tính $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$,

(e) Tính $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$,

(f) Tính $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$.

Để chứng minh $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại, ta có thể tiếp cận:

1. Dùng hàm sơ cấp, hàm hợp và quy tắc cơ bản của giới hạn hàm số.
2. Giới hạn một phía: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.
3. Định lý kẹp.

Các phương pháp chứng minh giới hạn tồn tại

Các kỹ thuật xác chứng minh và tính giới hạn

1. Kỹ thuật thế trực tiếp cho một số giới hạn "xác định" của hàm đa thức, phân thức, căn thức, và hàm hợp thông qua các hàm một biến, ...
2. Định lý kẹp.
3. Quy tắc l'Hospital (đề cập sau)

Giới hạn hàm số

Giới hạn tại a (Ngôn ngữ dãy)

Giả sử a là điểm tụ của miền xác định của hàm f. Khi đó, hai điều sau là tương đương

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.)
- $\forall (x_n) \subset D_f \backslash \{a\}$, nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ thì $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} L$

Hệ quả

Nếu một trong hai điều sau xảy ra

(i) Có hai dãy (x_n) và (x'_n) trong $D_f \backslash \{a\}$, cùng hội tụ về a mà hai dãy $(f(x_n))$ và $(f(x'_n))$ hội tụ về hai số khác nhau

(ii) Có một dãy (x_n) trong $D_f \backslash \{a\}$, hội tụ về a, nhưng dãy $(f(x_n))$ phân kỳ

thì hàm f không có giới hạn tại a.

Giới hạn không tồn tại

Từ định nghĩa theo ngôn ngữ dãy, ta có một kết quả dùng để chứng minh sự không tồn tại của giới hạn như hệ quả sau.

Hệ quả 2

Cho $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và a là điểm tụ của D. Giả sử $\{u_n\}, \{v_n\} \subset D \setminus \{a\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ không tồn tại nếu một trong hai điều sau xảy ra

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$ không tồn tại.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(v_n)$.

Giới hạn không tồn tại

Ví dụ

Chứng tỏ không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ với $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Chọn hai dãy (x_n) và (x_n') định bởi

$$\forall n,\ x_n=\frac{1}{2n\pi},\ x_n'=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}.$$

Khi đó,

- $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $f(x_n)=\sin 2n\pi=0 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$
- $x_n' \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $f(x_n')=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \xrightarrow{n\to\infty} 1.$

Suy ra không tồn tại giới hạn tại 0.

Giới hạn không tồn tại

Để chứng minh $\lim_{x\to a} f(x)$ không tồn tại, ta có thể chỉ ra một trong những điều sau xảy ra:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$.
2. Tồn tại $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ thỏa $x_n \to a, y_n \to a$ khi $n \to \infty$ nhưng $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.
3. Tồn tại $\{x_n\}$ thỏa $x_n \to a$ khi $n \to \infty$ và $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ không tồn tại.
4. $f(x) = g(x)h(x)$ trong đó $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}, L \neq 0$ và $\lim_{x\to a} h(x)$ không tồn tại.
5. Phản chứng.

Giới hạn không tồn tại

(Loading Limit)

Tài liệu tham khảo

- Infinite limits [Ste16, p. 89-91, 94]
- 2.6 limits at Infinity; Horizontal Asymptotes [Ste16, p. 126-140]

[Ste16] Jame Stewart, Calculus: Early Transcendentals, 2015, Cengage Learning

Giới hạn mở rộng

Xét $\lim_{x\to a} f(x) = L$, trong đó $a \in R, a = \pm\infty, L \in \mathbb{R}$ hoặc $a = \pm\infty$.

Các giới hạn 'mở rộng':

1. Với $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
2. Với $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
3. Với $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
6. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
7. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
8. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.
9. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

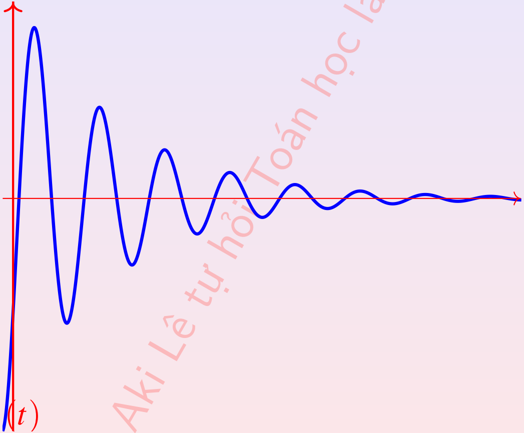
Bài tập 2.0.26. [Bài toán mở đầu]

(a) Giả sử miền A là miền thỏa $x \geq 1$, nằm dưới đường cong $y = \dfrac{1}{x}$ và nằm phía trên trục hoành. Miền A hữu hạn hay vô hạn?

(b) Giả sử một sợi dây mỏng được mô hình thành tia Ox. Tại mỗi $x \geq 0$, mật độ khối tại đó là $\rho(x)$. Tìm trọng lượng sợi dây.

Giới thiệu- Nồng độ muối

Dao động tắt dần

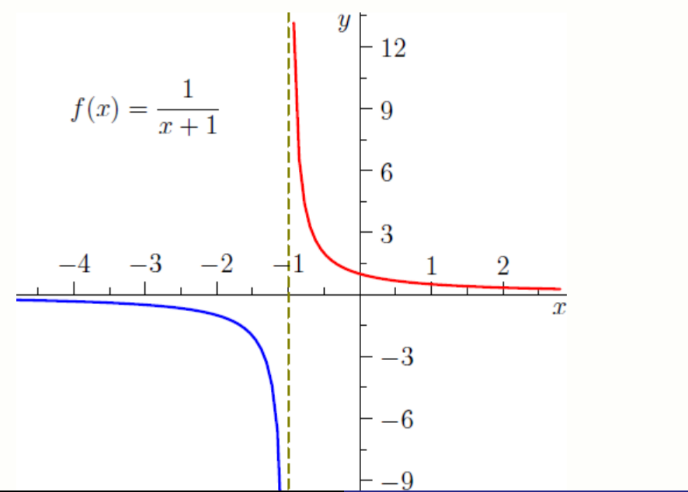


Hình: Dao động tắt dần

Giới hạn

- Trong hóa học, lượng chất phóng xạ còn lại khi thời gian phân rã 'cực lớn' sẽ liên quan giới hạn mở rộng.
- Trong toán học, khái niệm tiệm cận với đồ thị hàm số sẽ liên quan giới hạn mở rộng.

Giới hạn hàm số mở rộng



Giới hạn hàm số mở rộng

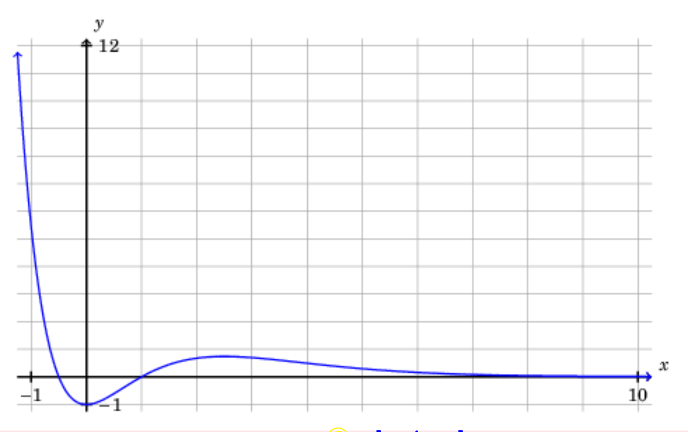
Giới hạn tại ∞

Ta viết $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ có nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in D_f : x > N \to |f(x) - L| < \varepsilon. \qquad (0.6)$$

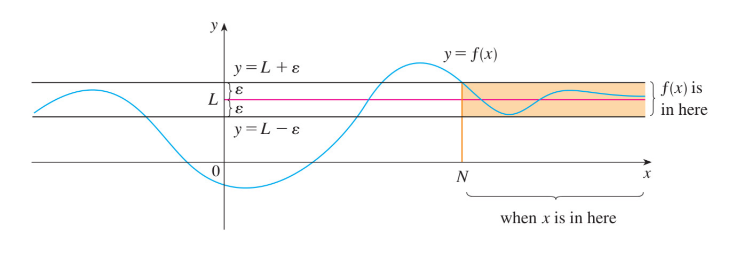
Lúc đó, ta nói đồ thị của f có đường $y = L$ là tiệm cận ngang.

Giới hạn hàm số mở rộng



Giới hạn hàm số mở rộng

Nói đại khái, (0.6) có nghĩa là ta xấp xỉ $f(x) = L$ với sai số bé hơn ε cho trước tùy ý, miễn là lấy x **dương** đủ lớn.



Giới hạn hàm số mở rộng

Giới hạn tại $-\infty$

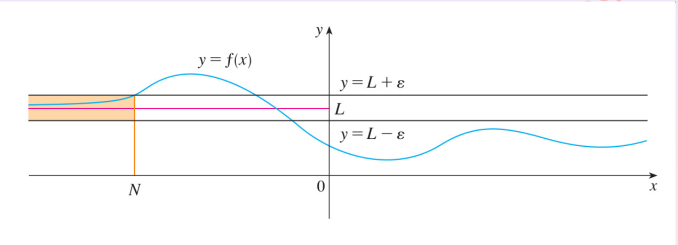
Ta viết $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ có nghĩa là

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N < 0, \forall x \in D_f, x < N \to |f(x) - L| < \varepsilon \quad (0.7)$$

Lúc đó, ta nói đồ thị của f có đường $y = L$ là tiệm cận ngang.

Giới hạn hàm số mở rộng

Nói đại khái, (0.7) có nghĩa là ta xấp xỉ $f(x) = L$ với sai số bé hơn ε cho trước tùy ý, miễn là lấy x **âm** đủ bé.



Giới hạn hàm số mở rộng

Hàm tiến ra ∞

Ta viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ có nghĩa là

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < |x-a| < \delta \text{ thì } f(x) > M. \tag{0.8}$$

Khi đó, ta nói đồ thị của f có đường $x = a$ là tiệm cận đứng.

Giới hạn hàm số mở rộng

Hàm tiến ra $-\infty$

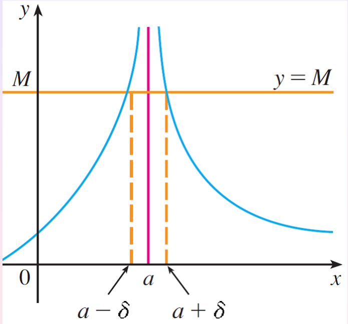
Ta viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ có nghĩa là

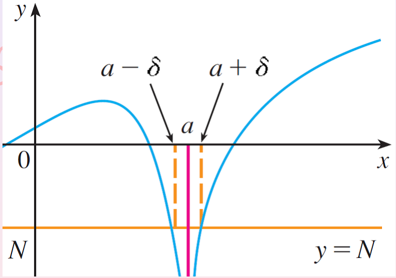
$$\forall N < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \text{ nếu } 0 < |x-a| < \delta \text{ thì } f(x) < N \tag{0.9}$$

Khi đó, ta nói đồ thị của f có đường $x = a$ là tiệm cận đứng.

Giới hạn hàm số mở rộng

Hai hình vẽ sau minh họa cho phát biểu (0.8) và (0.9)





Giới hạn mở rộng

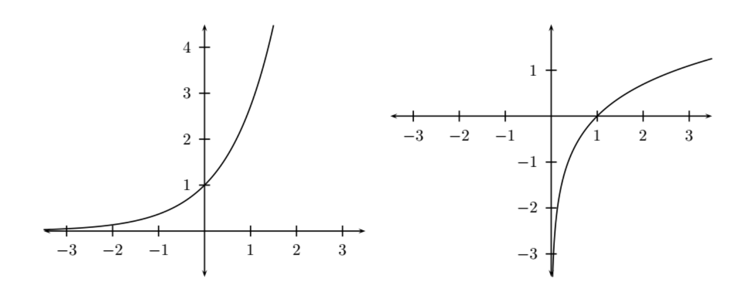
Ta hiểu một cách tương tự cho các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Một số giới hạn mở rộng

Ta hiểu một cách tương tự cho các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Chỉ cần một định nghĩa tổng quát (nhưng khó hiểu) cho tất cả các trường hợp trên được trình bày trong [PTTT02]. Một số minh họa cho các giới hạn này được đưa ra bên dưới (dẫn từ [Ste11]).

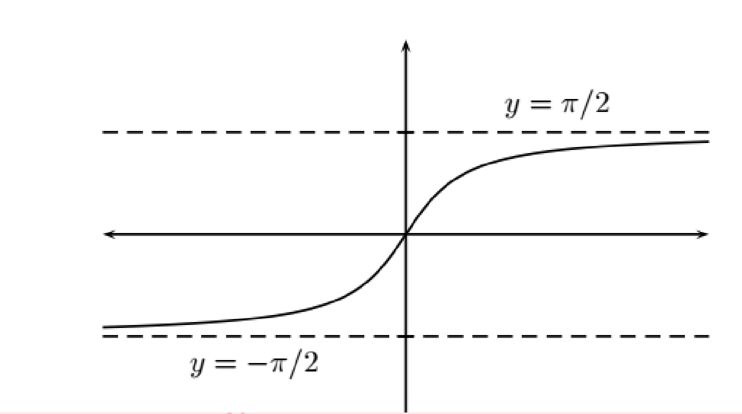
Thay cái bị định nghĩa bởi định nghĩa

Giới hạn mở rộng



Hình: Đồ thị hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ [DG12]

Giới hạn mở rộng



Hình: Đồ thị hàm số $y = \arctan x$ [DG12]

© Meme đã bị đánh cắp

Giới hạn mở rộng

Giới hạn 'mở rộng' cho các hàm sơ cấp:

1. $x^\alpha, \alpha \neq 0:$
   (a) Với $\alpha < 0$,

   (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = \infty$,

   (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = 0$.

   (b) Với $\alpha > 0$,

   (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$,

   (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$.

Giới hạn mở rộng

2) $a^x, 0 < a \neq 1$:

(a) Với $a \in (0,1)$,

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$.

(b) Với $a > 1$,

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Giới hạn mở rộng

3) $\log_a x, 0 < a \neq 1:$

   (a) Với $a \in (0,1)$,

      (i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$,

      (ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$.

   (b) Với $a > 1$,

      (i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$,

      (ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$.

4) $\arctan x:$

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$,

   (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

Các phép toán trên tập số thực mở rộng

Giới hạn mở rộng

Nhận xét 0.1

Quy tắc so sánh tốc độ phát triển khi $x \to \infty$

Với $\alpha, \beta > 0, a > 1$ và x khá lớn, ta có

$$1 \ll \ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x} \ll x^{x},$$

trong đó $f(x) \ll g(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Giới hạn mở rộng

Bài tập 2.0.27. Dựa vào các kết quả giới hạn cơ bản trên, hãy cho biết các giới hạn sau.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\sqrt{x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(1-2^x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$.

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}$.

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Giới hạn mở rộng

Bài tập 2.0.28. Tìm giới hạn.

(a) $\lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{1}{x-8}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x-8}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$.

Giới hạn mở rộng

Thí dụ 0.2

Khảo sát sự tồn tại của mỗi giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

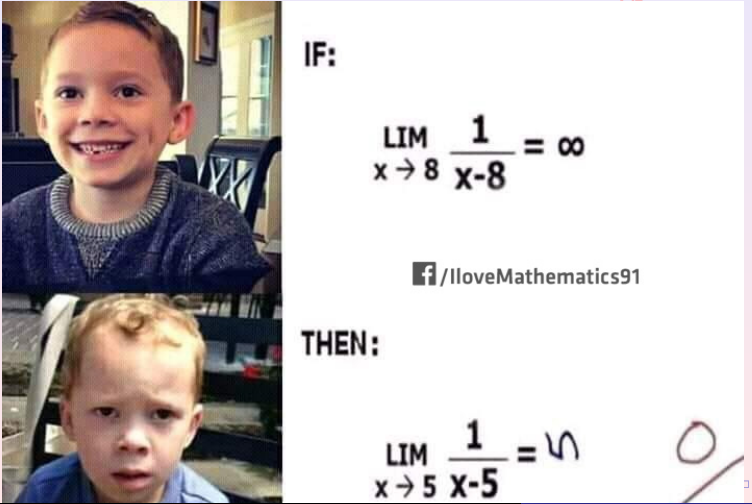
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos x$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Giới hạn mở rộng



Bài tập 2.0.29. Xét các giới hạn sau tồn tại hay không và tìm giới hạn (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{|x-8|}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \sin\left(\dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Bài tập giới hạn mở rộng

Bài tập 2.0.30. Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn sau và tìm giới (nếu tồn tại).

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{1}{x-8}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{|x|}$,

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$.

Bài tập giới hạn mở rộng

Bài tập 2.0.31. Tìm các giới hạn.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \ln\left(x^2-9\right)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}}{(x-3)^5}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x+1}{x-5}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x+1}{x-5}$.

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.

Bài tập giới hạn mở rộng

Bài tập 2.0.32. Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4$.

(b) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4$.

(c) $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x^2}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 9}{2x^4 + 3x^3}$.

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{4x^3 - 5x + 7}$.

(f) $f(x) = \dfrac{4x^2 + x^6}{1 - 5x^3}$.

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6}}{5 - 2x}$.

(h) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

(i) $f(x) = \arctan(x)$.

Bài tập 2.0.33. [[Ste12]] Trong thuyết tương đối, khối lượng chất điểm tại vận tốc v cho bởi

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

trong đó m_0 là khối lượng chất điểm khi đứng yên và c là vận tốc ánh sáng. Điều gì xảy ra khi $v \to c^-$.

Bài tập 2.0.34. [[Ste12]]

(a) A tank contains 5000 l of pure water. Brine that contains 30 g of salt per liter of water is pumped into the tank at a rate of 25 l/min. Show that the concentration of salt after t minutes (in grams per liter) is

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

(b) What happens to the concentration as $t \to \infty$?

Bài tập 2.0.35. Cường độ dòng điện tại thời điểm t là $I(t) = I_0(1 - e^{-t})$ (A). Chứng minh I là hàm tăng. Tìm cường độ dòng điện tới hạn.

Bài tập 2.0.36. [[Ste08]] In Chapter 9 [Ste08] we will be able to show, under certain assumptions, that the velocity $v(t)$ of a falling raindrop at time t is

$$v(t) = v^* \left(1 - e^{-gt/v^*}\right)$$

where g is the acceleration due to gravity and v^* is the terminal velocity of the raindrop.

(a) Find $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Graph $v(t)$ if $v^* = 1\mathrm{m/s}$ and $g = 9.8\mathrm{m/s}^2$. How long does it take for the velocity of the raindrop to reach 99% of its terminal velocity?

Chương III

Đạo hàm và ứng dụng

Chương IV

Tích phân và ứng dụng

Chương V

Chuỗi số

[Alc14] Lara Alcock.
How to think about analysis.
Oxford University Press, USA, 2014.

[BS00] Robert G Bartle and Donald R Sherbert.
Introduction to real analysis, volume 2.
Wiley New York, 2000.

[DG12] M Dougherty and J Gieringer.
First year calculus: For students of mathematics and related disciplines, 2012.

Tài liệu tham khảo II

[Lar08] Ron Larson.
Applied Calculus for the Life and Social Sciences.
Cengage Learning, 2008.

[Mac] Andrzej Mackiewicz.
Math 1: Analysis problems, solutions and hints for the electronics and telecommuication students.

[PTTT02] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, and Đặng Đức Trọng.
Giáo trình giải tích hàm một biến.
NXB ĐHQG, Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.

Tài liệu tham khảo III

[Ste08] James Stewart.
Vector Calculus, volume 6.
Thomson Brooks/Cole, 2008.

[Ste11] James Stewart.
Calculus: early transcendentals.
Cengage Learning, 7^{th} edition, 2011.

[Ste12] James Stewart.
Essential calculus: Early transcendentals.
Cengage Learning, 2012.

Tài liệu tham khảo IV

[Ste16] James Stewart.
Calculus: Early Transcendentals.
Brooks / Cole, 2016.

[TBB08] Brian S Thomson, Judith B Bruckner, and Andrew M Bruckner.
Elementary real analysis.
2008.