BÀI TẬP ÔN THI MÔN TOÁN RỜI RẠC

<u>Bài 1:</u> *Có bao nhiêu cách chọn 20 tờ giấy bạc từ các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng? Nếu yêu cầu thêm có ít nhất 7 tờ 5 đồng và không quá 8 tờ 20 đồng thì có bao nhiêu cách chọn?*

Gọi số tờ tiền của các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng lần lượt là:

$x_1,\ x_2,\ x_5,\ x_{10},\ x_{20}$. Theo đề bài, ta có phương trình sau:

$x_1 + x_2 + x_5 + x_{10} +\ x_{20} = 20\ với\ x_1,\ x_2,\ x_{10}\ \geq 0;\ x_5\ \geq 7;\ 0\ \leq\ x_{20}\ \leq 8\ (1)$

Số cách chọn thỏa yêu cầu của đề bài cũng là số nghiệm nguyên của phương trình (1).

Đổi biến:

$x'_5 = x_5 - 7\ \geq 0$

Xét phương trình:

$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} +\ x_{20} = 20 - 7 = 13\ với\ x_1,\ x_2,\ x_{10},\ x'_5,\ x_{20} \geq 0\ (I)$

Số nghiệm phương trình (I) là $K_5^{13} = C_{13+5-1}^{5-1} = C_{17}^4$

Xét phương trình:

$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} +\ x_{20} = 13\ với\ x_1,\ x_2,\ x_{10},\ x'_5 \geq 0; x_{20}\ \geq 9\ (II)$

Đổi biến:

$x'_{20} = x_{20} - 9\ \geq 0$

Phương trình (II) tương đương

$x_1 + x_2 + x'_5 + x_{10} +\ x'_{20} = 13 - 9 = 4\ với\ x_1,\ x_2,\ x_{10},\ x'_5,\ x'_{20} \geq 0$

Số nghiệm phương trình (II) là $K_5^4 = C_{4+5-1}^{5-1} = C_8^4$

Ta có: Số nghiệm phương trình (1) = Số nghiệm phương trình (I) – Số nghiệm phương trình (II)

$$=C_{17}^{4} - C_{8}^{4} = 2380 - 70 = 2310$$

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là 2310 cách.

<u>Bài 2:</u> *Tìm hệ số của đơn thức*

a) *xy^2z^3t khi khai triển $(x + 2y – z +4t – 5u)^7$*
b) *$x^3y^9z^4t^3$ khi khai triển $(2x – y^3 – 3z^2 + 4t^3)^9$*

a) Đặt:
   a = x;
   b = 2y;
   c = -z;
   d = 4t;
   e = -5u;
   Ta có:

$$(x + 2y - z + 4t - 5u)^7 = (a + b + c + d + e)^7 = P_7^*(1,2,3,1,0)\ a^1b^2c^3d^1e^0 + \cdots = \frac{7!}{1!2!3!1!0!}\ x^1(2y)^2(-z)^3(4t)^1(-5u)^0 + \cdots = -6720(xy^2z^3t) + \cdots$$

Vậy hệ số cần tìm là: -6720

b) Đặt:
   a = 2x;
   b = $-y^3$
   c = $-3z^2$
   d = $4t^3$
   Ta có:
   $$(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9 = (a + b + c + d)^9 = P_9^*(3,3,2,1)a^3b^3c^2d^1 + \cdots = \frac{9!}{3!3!2!1!}(2x)^3(-y^3)^3(-3z^2)^2(4t^3)^1 + \cdots = -1451520(x^3y^9z^4t^3)$$
   Vậy hệ số cần tìm là: -1451520

<u>Bài 3:</u> *Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình: x + y +z ≤ 19*

Đặt $t = 19 - (x + y + z) \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương:

$x + y + z + t = 19 \text{ với } x, y, z, t \geq 0$

Số nghiệm của phương trình là $K_4^{19} = C_{22}^{3} = 1540$ nghiệm

Bài 4: *Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình: x + y + z + t > -20 trong đó x < 1, y ≤ 4, z ≤ -3 và t < 6*

Đặt $x' = -x \geq 0 \Rightarrow x = -x'$

Đặt $y' = -(y-4) = -y+4 \geq 0 \Rightarrow y = 4 - y'$

Đặt $z' = -(z+3) = -z-3 \geq 0 \Rightarrow z = -3 - z'$

Đặt $t' = -(t-5) = -t+5 \geq 0 \Rightarrow t = 5 - t'$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$-x' + 4 - y' - 3 - z' + 5 - t' \geq -19$$

$$\Leftrightarrow x' + y' + z' + t' \leq 19 + 4 - 3 + 5 = 25 \ (1)$$

Đặt $k = 25 - (x' + y' + z' + t') \geq 0 \in \mathbb{Z}$, Bất phương trình (1) sẽ có cùng số nghiệm với phương trình

$$x' + y' + z' + t' + k = 25$$

Phương trình trên có số nghiệm tương ứng là $K_5^{25} = C_{25+5-1}^{5-1} = C_{29}^{4} = 23751$

Vậy bất phương trình đề bài cho có 23751 nghiệm

Bài 5: *Tính tổng số sau theo n nguyên:*

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)2^k \ (n \geq 0)$

Ta thấy $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)2^k$

$$= (n+1)(n+2)2^n + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)2^k$$

$= S_{n-1} + (n+1)(n+2) \cdot 2^n$

Ta có $S_0 = 1 * 2 * 1 = 2$

Ta sẽ giải hệ thức đệ quy

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + (n+1)(n+2)2^n \text{ (với } n \geq 1) \ (*) \\ S_0 = 2 \ (**) \end{cases}$$

Ta thấy (1) là hệ thức đệ quy không thuần nhất có dạng

$$S_n = \lambda S_{n-1} + \varphi_2(n)\alpha^n \text{ (với } n \geq 1)$$

Với $\lambda = 1$, $\varphi_2(n) = (n+1)(n+2)$ có $\deg(\varphi_2) = 2$ và $\alpha = 2$

Xét hệ thức đệ quy thuần nhất của $(*)$

$$S_n = S_{n-1} \text{ với } n \geq 1 \ (\square)$$

Ta có $(\square)$ là hệ thức đệ quy cấp 1 có dạng $S_n = \lambda S_{n-1}$ với $\lambda = 1$, có nghiệm tổng quát $s_n' = p \cdot \lambda^n = p$ với $p \in \mathbb{R}$ và $n \geq 0$

Do $\lambda \neq \alpha$ nên $(*)$ có một nghiệm cụ thể dạng:

$$s_n'' = \psi_2(n)2^n \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $\deg(\psi_2) = 2$. Giả sử $\psi_2(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Thay s'' vào $(*)$ ta có

$$(a\,n^2 + b\,n + c) * 2^n$$
$$= (a(n-1)^2 + b(n-1) + c) * 2^{n-1} + (n+1) * (n+2) * 2^n$$

$$\Leftrightarrow 2a\,n^2 + 2b\,n + 2c$$
$$= a(n^2 - 2n + 1) + b\,n - b + c + 2 * (n^2 + 3n + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2a\,n^2 + 2b\,n + 2c = (a+2)n^2 + (-2a + b + 6) * n + a - b + c + 4$$

Đồng nhất phương trình trên ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a = a + 2 \\ 2b = -2a + b + 6 \\ 2c = a - b + c + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy $s''(n) = (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Khi đó ta có nghiệm tổng quát của $S_n = s'_n + s''_n = p + (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Thay vào $(**)$ ta có $p + 4 = 2 \Rightarrow p = -2$. Vậy $S_n = -2 + (2n^2 + 2n + 4)2^n$ (với $n \geq 0$)

Bài 6: *Giải hệ thức đệ quy sau:*

$$\begin{cases} x_n + \ 4x_{n-1} - \ 5x_{n-2} = 12n + 8 \text{ (với } n \geq 2) \ (*) \\ \qquad\qquad x_0 = 0, \ x_1 = \ -5 \ \ (**) \end{cases}$$

Ta thấy hệ thức đề bài cho là một hệ thức đệ quy bậc 2 không đồng nhất có dạng

$$\begin{cases} x_n + \lambda x_{n-1} + \mu x_{n-2} = \varphi_1(n) \text{ (với } n \geq 2)\alpha^n \\ \qquad\qquad x_0 = 0, \ x_1 = \ -5 \end{cases}$$

Với $\lambda = 4$, $\mu = -5$, $\varphi_1(n) = 12n + 8$ có $\deg(\varphi_1) = 1$, $\alpha = 1$

Xét hệ thức đệ quy đồng nhất tương ứng của $(*)$

$$x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 0 \text{ (với } n \geq 2) \ (\square)$$

Khi đó $(\square)$ có tam thức tương ứng là $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Vì $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = -5$

Nên $(\square)$ sẽ có nghiệm tổng quát là

$$x'_n = p * 1^n + q(-5)^n = p + q(-5)^n \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $p, q \in \mathbb{R}$

Ta lại có $f(\alpha) = f(1) = 0$ và $f'(\alpha) = 2 * 1 + 4 = 6 \neq 0$ nên $(*)$ có một nghiệm cụ thể dạng:

$$x''_n = n\,\psi_1(n) \text{ (với } n \geq 0)$$

Với $\deg(\psi_1) = 1$, giả sử $\psi_1(n) = a\,n + b$ với $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Thay x'' vào $(*)$, ta có $n(a\,n + b) + 4(n-1)[a\,(n-1) + b] - 5(n-2)[a\,(n-2) + b] = 12\,n + 8$

$$\Leftrightarrow a\,n^2 + b\,n + 4a(n^2 - 2n + 1) + 4b(n-1) - 5a(n^2 - 4n + 4) - 5b(n-2) - 12n - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 4a - 5a)n^2 + (b - 8a + 4b + 20a - 5b - 12)n + 4a - 4b - 20a + 10b - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (12a - 12)n - 16a + 6b - 8 = 0$$

Đồng nhất hệ số phương trình trên ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12a - 12 = 0 \\ -16a + 6b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $x_n'' = n * (n + 4)$ (với $n \geq 0$)

Khi đó $x_n = x_n' + x_n'' = p + q(-5)^n + n * (n + 4)$ (với $n \geq 0$)

Thay x_n vào $(**)$ ta được hệ $\begin{cases} p+q=0 \\ p-5q+1*5=-5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 0 \\ p - 5q = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{5}{3} \\ q = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Khi đó $x_n = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}(-5)^n + n * (n + 4)$ với $n \geq 0$