CHƯƠNG IV

KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1.1/ KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$:

Cho số nguyên $n \geq 1$ và $\mathbf{R}^n = \{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \}$.

Ta gọi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *vector* X trong $\mathbf{R}^n$. Ta thường " *hình học hóa* " X bằng *một đoạn thẳng có gốc*, *ngọn*, *phương*, *chiều* và *độ dài*.

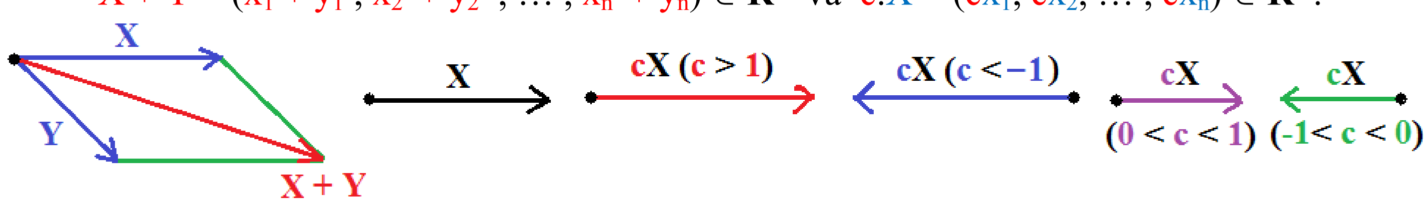
Vector không trong $\mathbf{R}^n$ là *vector* $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ có *gốc và ngọn trùng nhau*.

Vector X (gốc A, ngọn B) Vector X (gốc O, ngọn M) Vector *không* (gốc A, O)

Ta định nghĩa các phép toán *cộng vector* (+) và *nhân số thực với vector* (.) trên $\mathbf{R}^n$ như sau:

$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}$,

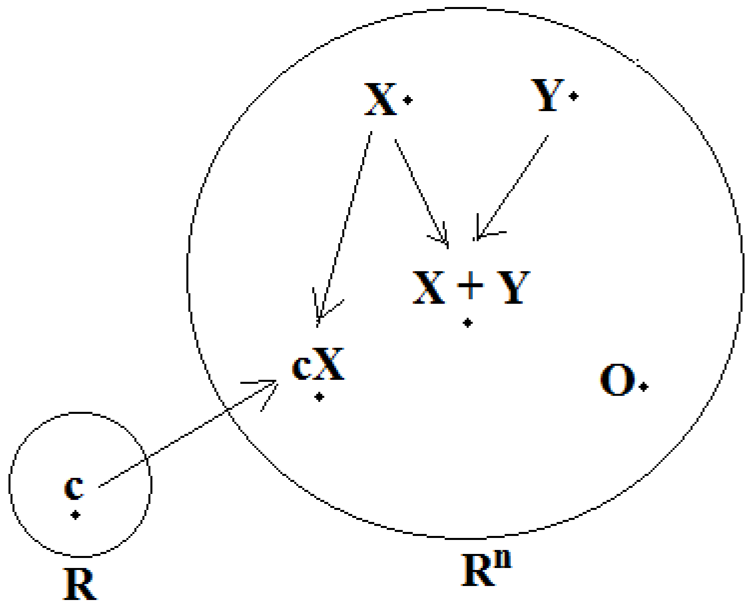
$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$ và $c.X = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \in \mathbf{R}^n$.



Về mặt hình học, phép *nhân số thực với vector* có thể *thay đổi chiều* và *độ dài* nhưng *không thay đổi phương* của vector. Phép *cộng vector* có thể tạo ra *các vector có phương mới* so với *phương* của hai vector ban đầu.

Cấu trúc đại số $(\mathbf{R}^n, +, .)$ gọi là *không gian vector* $\mathbf{R}^n$ (*trên* $\mathbf{R}$).

Ta cũng *có thể đồng nhất* $\mathbf{R}^n$ với $M_{1\times n}(\mathbf{R})$ trong đó *phép nhân số thực với vector* và phép *cộng vector* chính là *phép nhân số thực với ma trận* và *phép cộng ma trận* .



Không gian (*các*) *vector* (*của*) $\mathbf{R}^n$ (*trên* **R**).

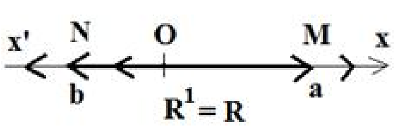
<u>Ví dụ:</u>

Với $X = (-5, 1, -4, 9)$, $Y = (8, 0, -2, -7) \in \mathbf{R}^4$ và $c = \frac{2}{3} \in \mathbf{R}$, ta có

$X + Y = (3, 1, -6, 2) \in \mathbf{R}^4$ và $cX = \frac{2}{3}(8, 0, -2, -7) = (\frac{16}{3}, 0, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}) \in \mathbf{R}^4$.

1.2/ <u>MINH HỌA HÌNH HỌC:</u>

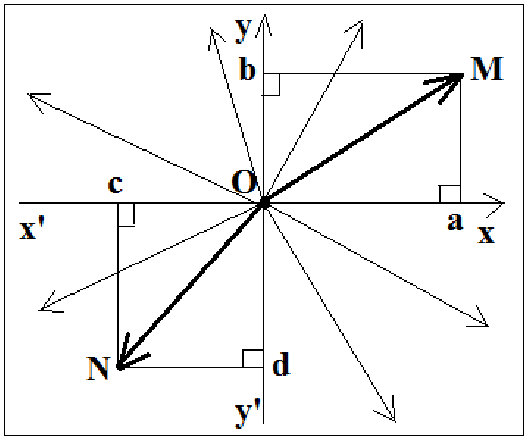
a) $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ *được đồng nhất* với “ *Không gian các vector gốc* O *trên trục* x’Ox ”.



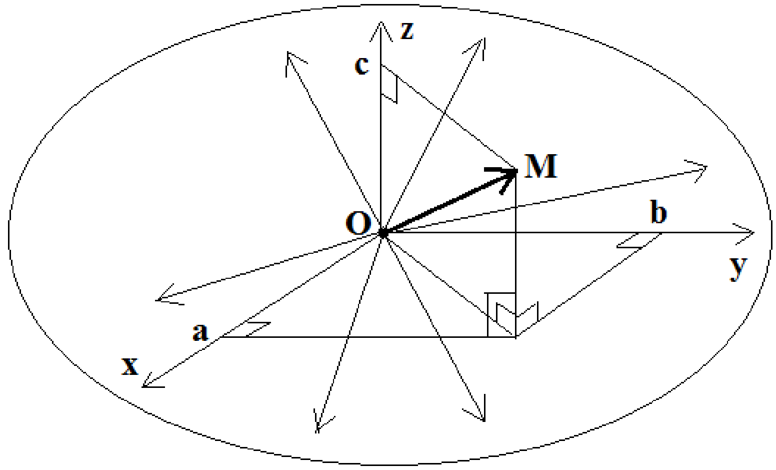
$a \in \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} \longrightarrow \overrightarrow{OM}\ (x_M = a)$ $\qquad$ $b \in \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} \longrightarrow \overrightarrow{ON}\ (x_N = b)$

b) $\mathbf{R}^2 = \{ X = (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ *được đồng nhất* với “ *Không gian các vector gốc* O *trên mặt phẳng* (Oxy) ”.

c) $\mathbf{R}^3 = \{ X = (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$ *được đồng nhất* với “ *Không gian các vector gốc* O *trên trong hệ trục tọa độ* (Oxyz) ”.



$\mathbf{R}^2$



$\mathbf{R}^3$

$(a, b) \in \mathbf{R}^2 \to \overrightarrow{OM}$ ($x_M = a$, $y_M = b$) $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \to \overrightarrow{OM}$ ($x_M = a$, $y_M = b$, $z_M = c$)

$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \to \overrightarrow{ON}$ ($x_N = c$, $y_N = d$).

1.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u>

Không gian vector $(\mathbf{R}^n, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ thỏa 7 *tính chất* sau đây:

(A_1) Phép $(+)$ *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall X, Y, Z \in \mathbf{R}^n$,

$X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.

(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.

Ta nói $\mathbf{O}$ là " *vector không* " và $\mathbf{O}$ là *phần tử trung hòa* của phép $(+)$

(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\exists X' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbf{R}^n$ thỏa

$X' + X = X + X' = \mathbf{O}$. Ký hiệu $X' = -X = (-1)X$ là *vector đối* của X.

(A_1), (A_2) và (A_3) là *các tính chất riêng* của phép $(+)$.

(B_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $1.X = X$.

(B_2) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $c.(d.X) = (c.d).X$

(B_1) và (B_2) là *các tính chất riêng* của phép $(.)$.

(C_1) $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $(c + d).X = c.X + d.X$

(C_2) $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $c.(X + Y) = c.X + c.Y$

(C_1) và (C_2) là *các tính chất liên quan* giữa phép $(+)$ và phép $(.)$.

1.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$,

a) $c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0 \text{ hay } X = \mathbf{O})$.

b) $c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0 \text{ và } X \neq \mathbf{O})$.

II. KHÔNG GIAN VECTOR CON TRONG $\mathbf{R}^n$:

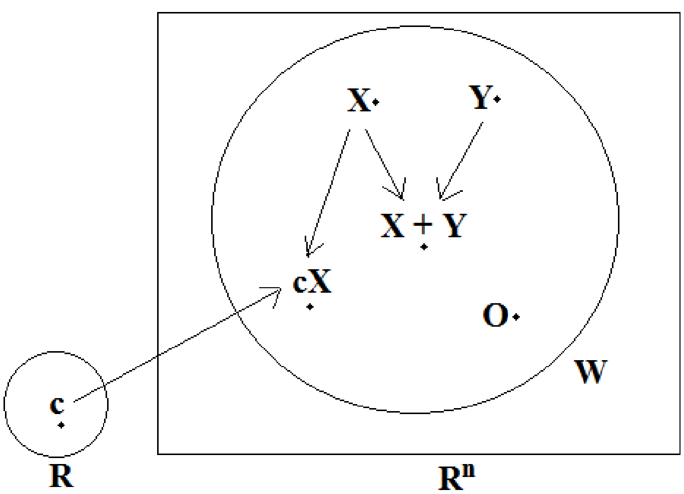
2.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \subset \mathbf{R}^n$.

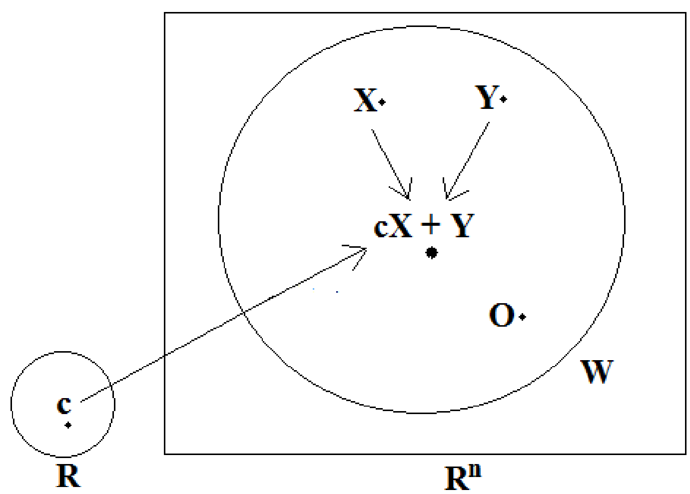
Các phép toán $(+)$ và $(.)$ trên $\mathbf{R}^n$ vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là *một không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$ (ký hiệu $W \leq \mathbf{R}^n$) nếu W thỏa *các điều kiện sau đây*:

* $\mathbf{O} \in W$ (1) * $\forall \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2) * $\forall \alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3).

b) Suy ra $W \leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4).





W là *một không gian con* của *không gian* $\mathbf{R}^n$ ($X \equiv \alpha$, $Y \equiv \beta$).

c) $\mathbf{R}^n$ luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{ \mathbf{O} \}$ và chính $\mathbf{R}^n$.

Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $\{ \mathbf{O} \} \neq W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^n$. Nếu $W \leq \mathbf{R}^n$ và $W \neq \mathbf{R}^n$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của $\mathbf{R}^n$ và ký hiệu $W < \mathbf{R}^n$ [như vậy $W < \mathbf{R}^n \Leftrightarrow (W \leq \mathbf{R}^n$ và $W \neq \mathbf{R}^n)$].

Không gian con không tầm thường của $\mathbf{R}^n$ cũng là *không gian con thực sự* của $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) $\mathbf{R}^1$ chỉ có *hai không gian con* là $\{ \mathbf{O} \}$ và chính $\mathbf{R}^1$.

(ta gọi $\{ \mathbf{O} \}$ và $\mathbf{R}^1$ là *các không gian con tầm thường* của $\mathbf{R}^1$).

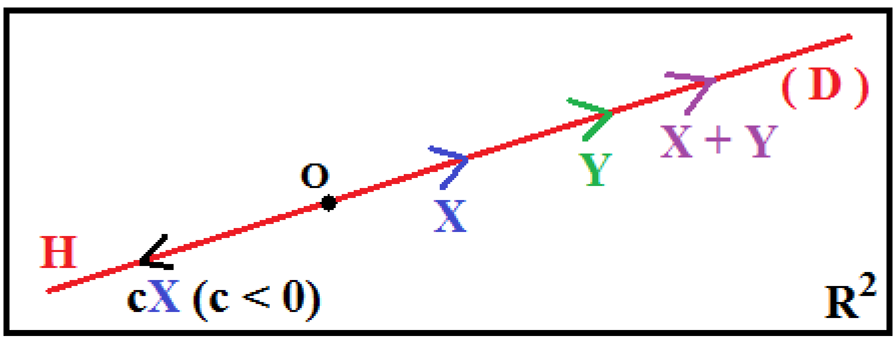
b) $\mathbf{R}^2$ luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{ \mathbf{O} \}$ và chính $\mathbf{R}^2$.

Ta mô tả dưới dạng hình học *các không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^2$.

Xét *đường thẳng tùy ý* (D) trong *mặt phẳng* $\mathbf{R}^2$ sao cho (D) đi qua gốc O.

Đặt $H = \{$ *các vector gốc* O trên *đường thẳng* (D) $\}$. Ta có $H \subset \mathbf{R}^2$ và H thỏa (1), (2) và (3) trong (**2.1**) [$O \in H, \forall X, Y \in H, \forall c \in \mathbf{R} : X + Y \in H$ và $cX \in H$].

Do đó $H \leq \mathbf{R}^2$ và H được gọi là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$.



Suy ra $\mathbf{R}^2$ có vô số *không gian con kiểu đường thẳng* vì có *vô số đường thẳng* trong *mặt phẳng* $\mathbf{R}^2$ đi qua gốc O.

c) $\mathbf{R}^3$ luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{ \mathbf{O} \}$ và chính $\mathbf{R}^3$.

Ta mô tả dưới dạng hình học *các không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^3$.

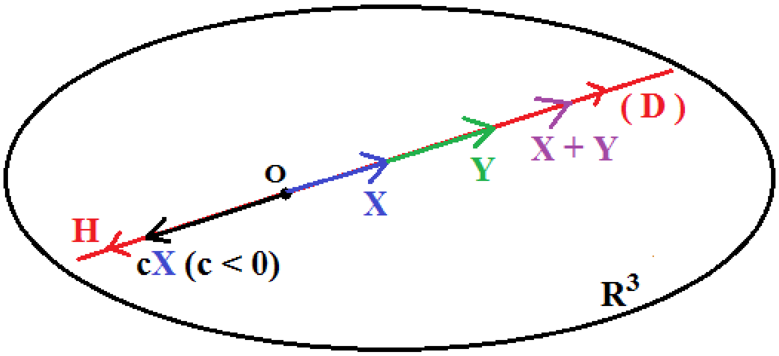
– $\mathbf{R}^3$ có vô số *không gian con kiểu đường thẳng* (*mỗi đường thẳng* thuộc về *không gian* $\mathbf{R}^3$ và đi qua gốc O).

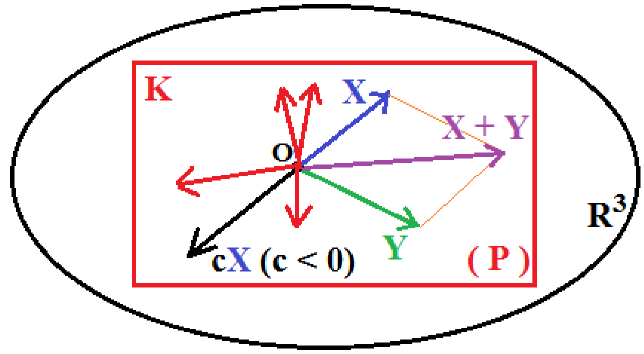
– Xét *mặt phẳng tùy ý* (P) trong $\mathbf{R}^3$ sao cho (P) đi qua gốc O.

Đặt $K = \{$ *các vector gốc* O trên *mặt phẳng* (P) $\}$. Ta có $K \subset \mathbf{R}^3$ và K thỏa (1),

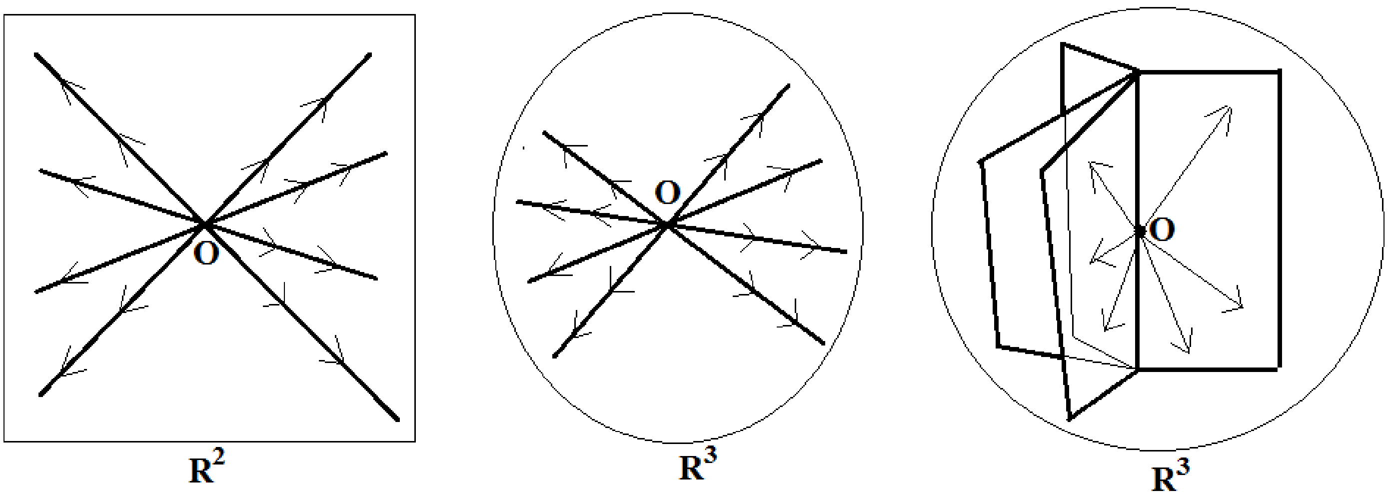
(2) và (3) trong (**2.1**) [O $\in$ K, $\forall$X, Y $\in$ K, $\forall$c $\in$ **R** : X + Y $\in$ K và cX $\in$ K].

Do đó K $\leq$ $\mathbf{R}^3$ và K được gọi là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$.





Suy ra $\mathbf{R}^3$ có vô số *không gian con kiểu mặt phẳng* vì có *vô số mặt phẳng* trong $\mathbf{R}^3$ đi qua gốc O.



Các không gian con kiểu đường thẳng (trong $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$) và *kiểu mặt phẳng* (trong $\mathbf{R}^3$).

d) Tổng quát, $\mathbf{R}^n$ (n $\geq$ 4) có *các không gian con* như sau:

– *Không gian con tầm thường* { **O** } (ta gọi là *không gian con* 0_*phẳng*).

– Vô số *không gian con kiểu đường thẳng* (ta gọi là *không gian con* 1_*phẳng*).

– Vô số *không gian con kiểu mặt phẳng* (ta gọi là *không gian con* 2_*phẳng*).

– Vô số *không gian con* 3_*phẳng*, … , vô số *không gian con* (n – 1)_*phẳng*.

Các không gian con (n – 1)_*phẳng* của $\mathbf{R}^n$ được gọi là *các siêu phẳng* trong $\mathbf{R}^n$.

– *Không gian con tầm thường* $\mathbf{R}^n$ (gọi là *không gian con* n_*phẳng*).

2.2/ MỆNH ĐỀ: Khi $W \le \mathbf{R}^n$ thì W cũng được gọi là *không gian vector* $(W, +, .)$

trên $\mathbf{R}$ và nó cũng thỏa 7 *tính chất sau đây* [tương tự như $(\mathbf{R}^n, +, .)$] :

(A_1) $\forall X, Y, Z \in W$, $X + Y = Y + X$ và $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$.

(A_2) $\exists \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0) \in W$, $\forall X \in W$, $\mathbf{O} + X = X + \mathbf{O} = X$.

(A_3) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, $\exists X' = -X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in W$ thỏa

$X' + X = X + X' = \mathbf{O}$.

(B_1) $\forall X \in W$, $1.X = X$.

(B_2) $\forall X \in W$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $c.(d.X) = (c.d).X$

(C_1) $\forall X \in W$, $\forall c, d \in \mathbf{R}$, $(c + d).X = c.X + d.X$

(C_2) $\forall X, Y \in W$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $c.(X + Y) = c.X + c.Y$

Suy ra $\forall X \in W$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $c.X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0$ hay $X = \mathbf{O})$

$c.X \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0$ và $X \neq \mathbf{O})$.

2.3/ MỆNH ĐỀ: (*nhận diện không gian con* của $\mathbf{R}^n$).

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

$$W \le \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) : W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \ (AX^t = \mathbf{O}) \}.$$

Như vậy *mỗi không gian con* của $\mathbf{R}^n$ đều là *không gian nghiệm* của *một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* nào đó.

Ví dụ:

a) Giải thích *tập hợp sau* là *một không gian con* của $\mathbf{R}^4$:

$$W = \{ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 4u - v + 5w - 8t = -7u + 2w + t = 6u + 9v - 3w$$
$$= -9u - 4v + 7w + 3t \}$$

Ta có thể sử dụng [(1), (2), (3)] hoặc (4) của (**2.1**) để giải thích $W \le \mathbf{R}^4$.

Tuy nhiên ta sẽ sử dụng (**2.3**) để giải thích $W \leq \mathbf{R}^4$ *một cách đơn giản hơn*.

Ta viết lại (bằng cách lấy *vế đầu tiên* trừ lần lượt *mỗi vế ở phía sau*):

$W = \{\ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 11u - v + 3w - 9t = -2u - 10v + 8w - 8t$

$= 13u + 3v - 2w - 11t = 0\ \}$, nghĩa là

$$W = \{\ X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4 \mid AX = \mathbf{O}\ \} \text{ với } A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -4 & 4 \\ 13 & 3 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}).$$

Do đó $W \leq \mathbf{R}^4$.

b) Trong $\mathbf{R}^2$, *đường thẳng* (D) $=\{X = (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by = 0\} = \{\ X \in \mathbf{R}^2 \mid AX = \mathbf{O}\}$ có

$A = (a \quad b) \in M_{1\times 2}(\mathbf{R})$ [để ý $a^2 + b^2 > 0$ vì (D) có *vector chỉ phương* $\vec{e} = (b, -a) \neq \mathbf{O}$]

c) Trong $\mathbf{R}^3$, *đường thẳng* (D) đi qua O và có *vector chỉ phương* $\vec{a} = (p, q, r)$ được mô tả

$(D) = \{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid qx - py = rx - pz = ry - qz = 0\} = \{\ X \in \mathbf{R}^3 \mid AX = \mathbf{O}\ \}$ với

$$A = \begin{pmatrix} q & -p & 0 \\ r & 0 & -p \\ 0 & r & -q \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \ [\text{ để ý } p^2 + q^2 + r^2 > 0 \text{ vì } \vec{a} = (p, q, r) \neq \mathbf{O}\ ].$$

d) Trong $\mathbf{R}^3$, *mặt phẳng* $(P) = \{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid AX = \mathbf{O}\}$

với $A = (a \quad b \quad c) \in M_{1\times 3}(\mathbf{R})$ [để ý $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ vì (P) có vector $\vec{n} = (a, b, c) \neq \mathbf{O}$]

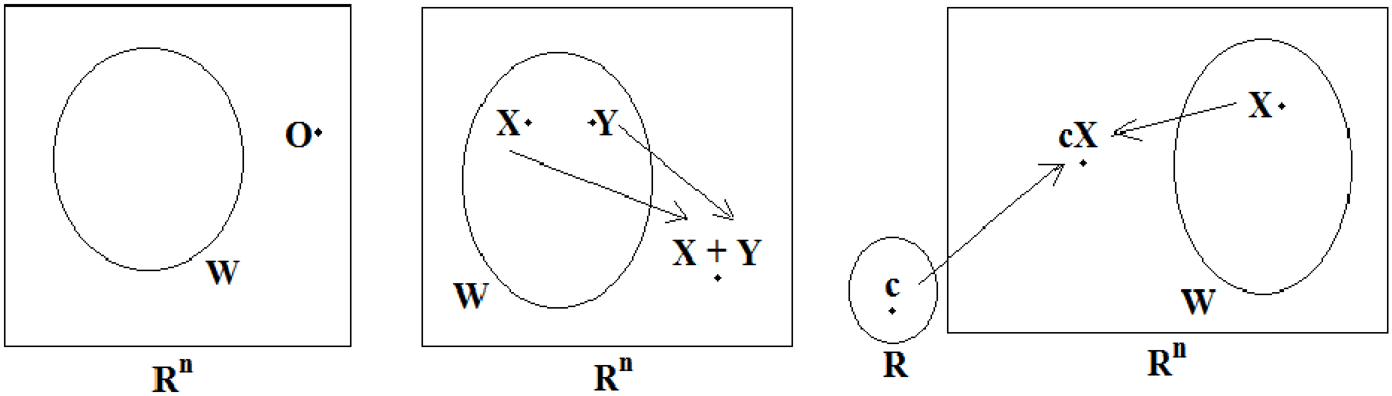
2.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (*phủ nhận không gian con* của $\mathbf{R}^n$).

Cho $W \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó

a) $W \not\leq \mathbf{R}^n$ (W *không là không gian con* của $\mathbf{R}^n$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W\ (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W\ (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W\ (7) \end{array}\right.$.

b) $W \not\leq \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$ (8).

Khi giải thích $W \not\leq \mathbf{R}^n$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.



W $\not\leq \mathbf{R}^n$ (vì **O** $\notin$ W)

W $\not\leq \mathbf{R}^n$ (vì $\exists$X, Y $\in$ W, X + Y $\notin$ **W**) [X $\equiv \alpha$, Y $\equiv \beta$]

W $\not\leq \mathbf{R}^n$ (vì $\exists$c $\in$ **R**, $\exists$X $\in$ W, cX $\notin$ **W**) [X $\equiv \alpha$]

<u>Ví dụ:</u> Giải thích *các tập hợp sau đây không là không gian con* của $\mathbf{R}^3$:

a) H = { X = (u, v, w) $\in \mathbf{R}^3$ | uvw = 0 }. Để ý H không thỏa (5) và (7). H thỏa (6) vì $\exists\alpha$ = (1, 0, 0), β = (0, 1, 1) $\in$ H, $\alpha + \beta$ = (1, 1, 1) $\notin$ H. Vậy H $\not\leq \mathbf{R}^3$.

b) K = { X = (u, v, w) $\in \mathbf{R}^3$ | 2u – 5v + 8w $\geq$ 1 }. K thỏa (5) vì **O** = (0, 0, 0) $\notin$ K. Vậy K $\not\leq \mathbf{R}^3$. Để ý K cũng thỏa (7) nhưng không thỏa (6).

c) L = { X = (u, v, w) $\in \mathbf{R}^3$ | $u^2 + 3v - 4w^3 = -3$ }. L thỏa (7) vì $\exists\alpha$ = (0, – 1, 0) $\in$ L, $\exists$c = – 1 $\in$ **R**, cα = (0, 1, 0) $\notin$ L. Vậy L $\not\leq \mathbf{R}^3$. Để ý L cũng thỏa (5) và (6).

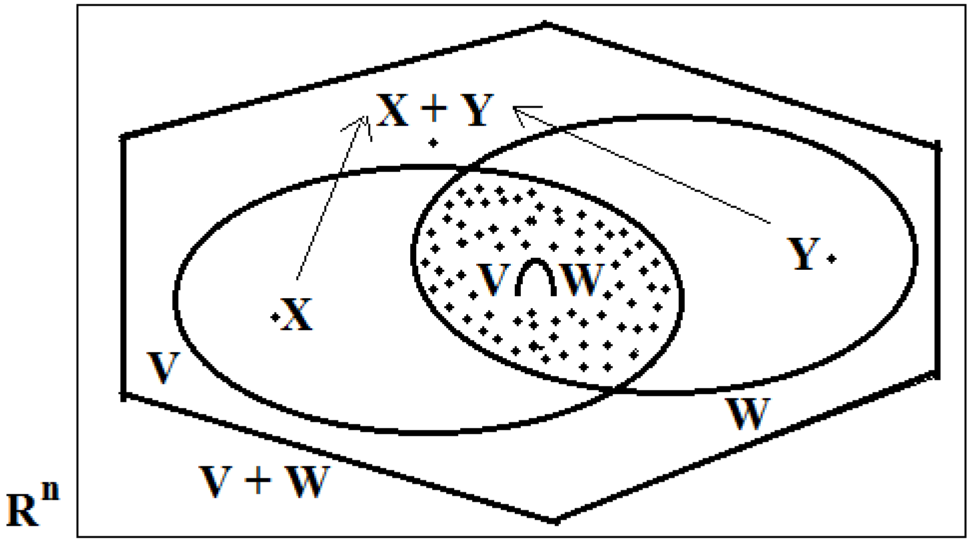
2.5/ <u>KHÔNG GIAN GIAO VÀ KHÔNG GIAN TỔNG:</u>

Cho V, W, $V_1, V_2, \ldots, V_k$ là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$ (k $\geq$ 2).

a) Đặt V $\cap$ W = { α | $\alpha \in$ V và $\alpha \in$ W } và

V + W = { $\alpha = \beta + \gamma$ | $\beta \in$ V và $\gamma \in$ W }.

Dùng (4) của **(2.1)**, ta kiểm chứng được (V $\cap$ W) và (V + W) đều là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$. Ta nói (V $\cap$ W) và (V + W) lần lượt là *không gian giao* và *không gian tổng* của V và W.

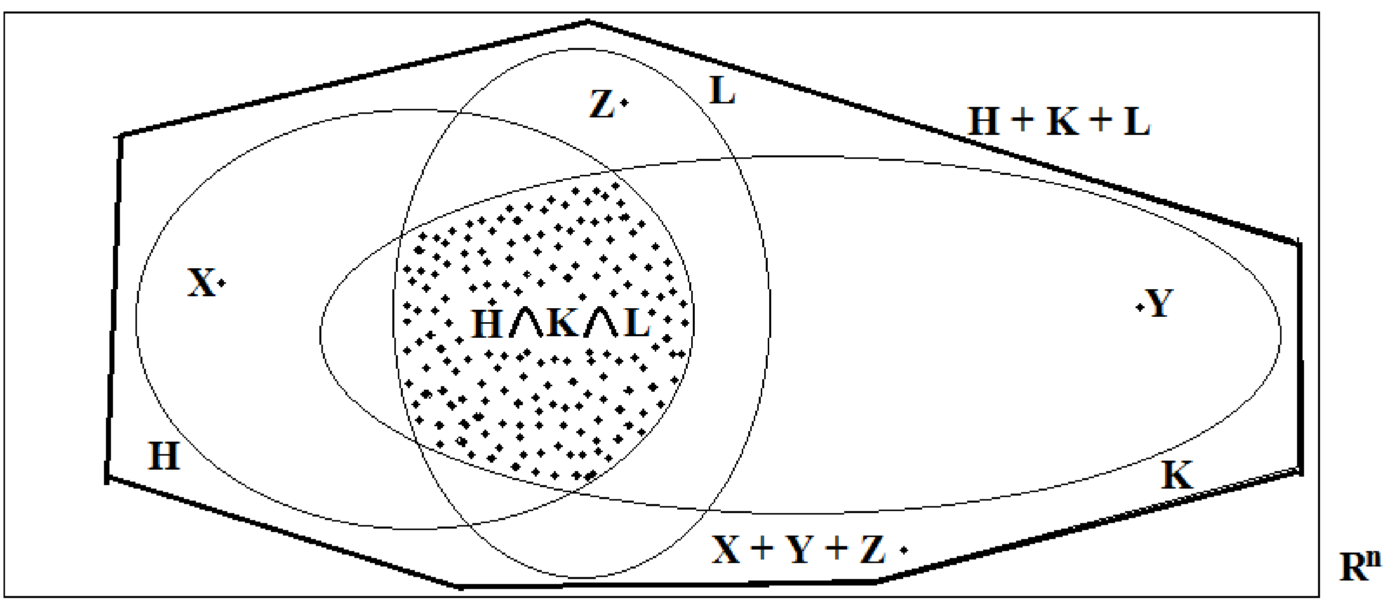


$V, W \leq \mathbf{R^n} \Rightarrow [\,(V \cap W) \leq \mathbf{R^n}$ và $(V + W) \leq \mathbf{R^n}\,]\,(X \equiv \beta,\ Y \equiv \gamma)$.

b) Đặt $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k = \bigcap_{j=1}^{k} V_j = \{\,\alpha \mid \alpha \in V_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, k\,\}$ và

$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \sum_{j=1}^{k} V_j = \{\,\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \mid \alpha_j \in V_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots, k\,\}$.

Dùng (4) của **(2.1)**, ta kiểm chứng được $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ đều là *các không gian vector con* của $\mathbf{R^n}$. Ta nói $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ và $\sum_{j=1}^{k} V_j$ lần lượt là *không gian giao* và *không gian tổng* của $V_1, V_2, \ldots$ và V_k.



$H, K, L \leq \mathbf{R^n} \Rightarrow [\,(H \cap K \cap L) \leq \mathbf{R^n}$ và $(H + K + L) \leq \mathbf{R^n}\,]\,(X \equiv \alpha,\ Y \equiv \beta,\ Z \equiv \gamma)$

c) Đặt $V \cup W = \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ hay } \alpha \in W \}$ và

$$V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = \bigcup_{j=1}^{k} V_j = \{ \alpha \mid \exists j = 1, 2, \ldots, k \text{ thỏa } \alpha \in V_j \}.$$

d) Ta có $V \cup W$ và $\bigcup_{j=1}^{k} V_j$ *không nhất thiết* là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$.

<u>Ví dụ:</u>

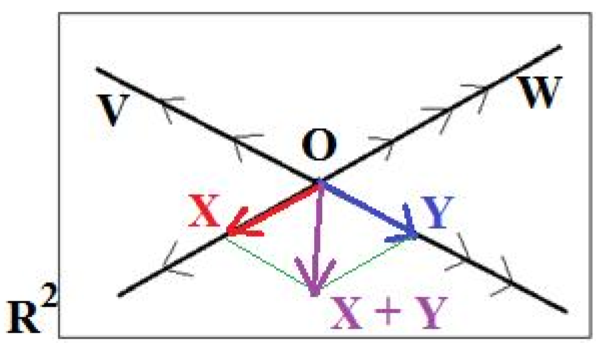
a) V và W là *các không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$ sao cho *hai đường thẳng tương ứng giao nhau* tại O. Ta có $V \cap W = \{ \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^2$ và $V + W = \mathbf{R}^2 \leq \mathbf{R}^2$.

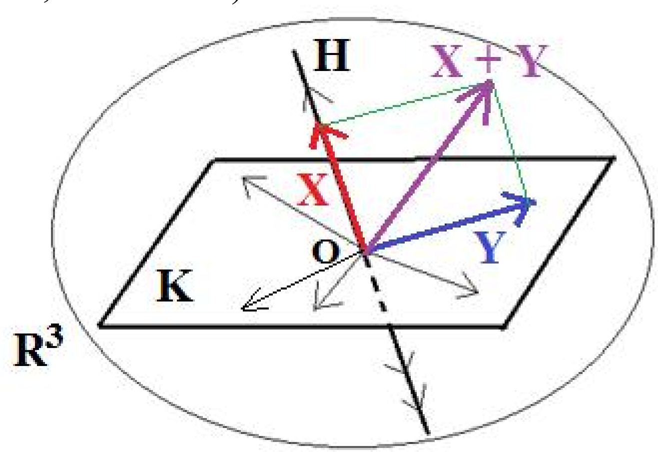
Để ý $Z = (V \cup W) \not\leq \mathbf{R}^2$ (vì $\exists X, Y \in Z, X + Y \notin Z$).

b) H và K lần lượt là *các không gian con kiểu đường thẳng* và *mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$ sao cho *đường thẳng* và *mặt phẳng tương ứng giao nhau* tại O.

Ta có $H \cap K = \{ \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^3$ và $H + K = \mathbf{R}^3 \leq \mathbf{R}^3$.

Để ý $L = (H \cup K) \not\leq \mathbf{R}^2$ (vì $\exists X, Y \in L, X + Y \notin L$).

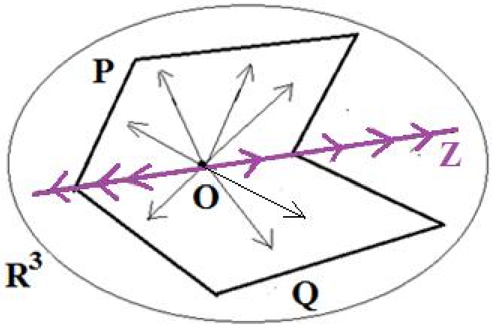


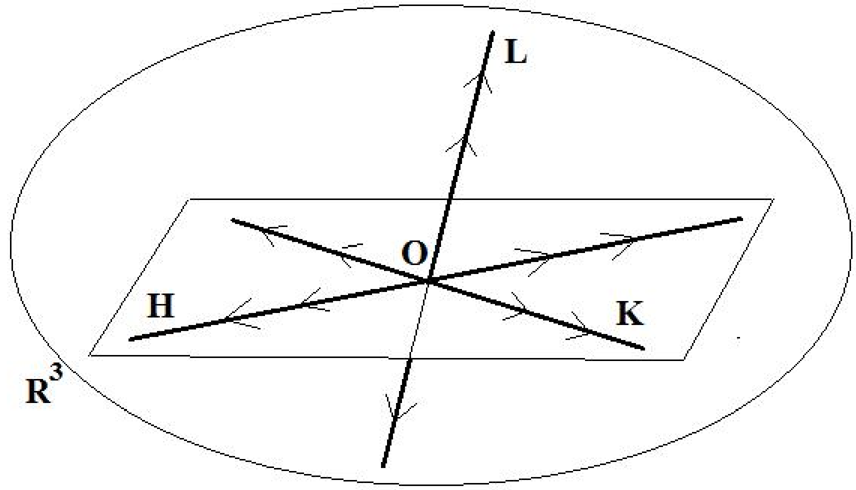


c) P và Q là *các không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$ sao cho *hai mặt phẳng tương ứng giao nhau* theo *giao tuyến* (D) qua O. Ta có $P \cap Q = Z \leq \mathbf{R}^3$ (Z là *không gian con kiểu đường thẳng* tương ứng với (D) của $\mathbf{R}^2$) và $P + Q = \mathbf{R}^3 \leq \mathbf{R}^3$.

d) H, K và L là *các không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^3$ sao cho *ba đường thẳng tương ứng không đồng phẳng* và *giao nhau* tại O.

Ta có $H \cap K \cap L = \{ \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^3$ và $H + K + L = \mathbf{R}^3 \leq \mathbf{R}^3$.





2.6/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho V và W là *các không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \subset V$ thì ta cũng nói W là *một không gian vector con* (trên **R**) của V và ký hiệu $W \leq V$.

b) *Không gian* { **O** } *có duy nhất một không gian con* là chính { **O** }.

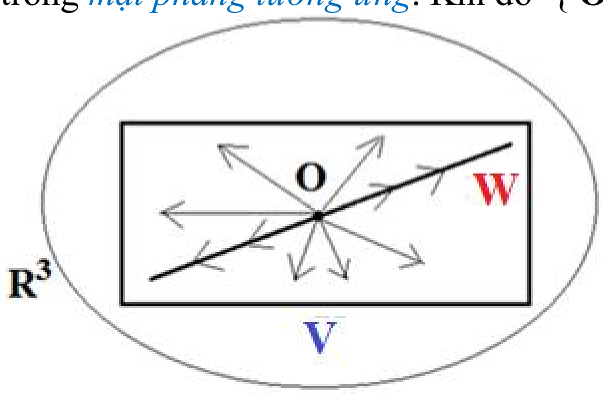
Nếu $V \neq$ { **O** } thì V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là { **O** } và V.

Nếu $W \leq V$ và { **O** } $\neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V. Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu là $W < V$ [như vậy $W < V \Leftrightarrow (W \leq V$ và $W \neq V)$].

Không gian con không tầm thường của W cũng là *không gian con thực sự* của W.

<u>Ví dụ:</u>

W và V lần lượt là *không gian con kiểu đường thẳng* và *mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$ sao cho *đường thẳng* chứa trong *mặt phẳng tương ứng*. Khi đó { **O** } < W < V < $\mathbf{R}^3$.



III. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Chọn tùy ý $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ và đặt $\alpha = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k) \in \mathbf{R}^n$.

Ta nói α là *một tổ hợp tuyến tính* của S (hay của $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ và α_k).

Như vậy từ *một số hữu hạn các vector cho trước*, ta có thể tạo ra được *nhiều tổ hợp tuyến tính khác nhau* của *các vector đó*.

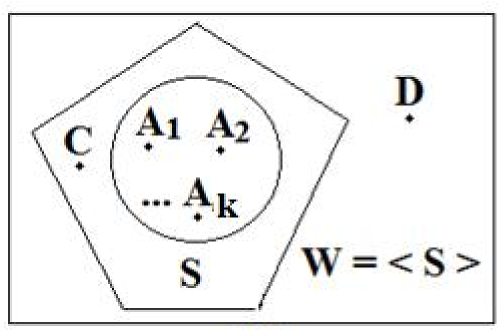
b) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

* γ là *một tổ hợp tuyến tính* của $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *có nghiệm* trên $\mathbf{R}$.

* δ *không là tổ hợp tuyến tính* của $S \Leftrightarrow \forall c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}, \delta \neq c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \delta$ (ẩn số $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *vô nghiệm* trên $\mathbf{R}$.



$\mathbf{R}^n$

$C \in W = < S = \{A_1, \ldots, A_m\} > \leq \mathbf{R}^n$, $D \notin W$ [$C \equiv \gamma, D \equiv \delta, A_j \equiv \alpha_j \ (1 \leq j \leq k)$].

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 3, -1, 0), \alpha_3 = (-1, -1, 1, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

a) $\alpha = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = -2(1,1,1,1) + 3(2,3,-1,0) - 5(-1,-1,1,1) = (9,12,-10,-7) \in \mathbf{R}^4$

$\beta = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4(1, 1, 1, 1) - 3(2, 3, -1, 0) + 2(-1, -1, 1, 1) = (-4, -7, 9, 6) \in \mathbf{R}^4$

b) Cho $\gamma = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

γ là *một tổ hợp tuyến tính* của $S \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}, \gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma$ (*ẩn số* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) *có nghiệm* trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \gamma$

$\Leftrightarrow$ $c_1(1, 1, 1, 1) + c_2(2, 3, -1, 0) + c_3(-1, -1, 1, 1) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = u \\ c_1 + 3c_2 - c_3 = v \\ c_1 - c_2 + c_3 = w \\ c_1 + c_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & -1 & v \\ 1 & 2 & -1 & u \\ 1 & -1 & 1 & w \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 & v-u \\ 0 & 2 & -2 & u-t \\ 0 & -1 & 0 & w-t \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & t \\ 0 & 1^* & 0 & v-u \\ 0 & 0 & -2^* & u+2w-3t \\ 0 & 0 & 0 & v+w-u-t \end{array}\right) \end{array}$$

Như vậy : $\gamma = (u, v, w, t)$ là *một tổ hợp tuyến tính* của S $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên *có nghiệm* trên $\mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $v + w - u - t = 0$ (*).

Lúc đó ta có *biểu diễn duy nhất*

$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ với $c_3 = 2^{-1}(3t - u - 2w)$, $c_2 = v - u$ và $c_1 = 2^{-1}(u + 2w - t)$ ($\square$)

Suy ra $\gamma = (u, v, w, t)$ *không là tổ hợp tuyến tính* của S $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên *vô nghiệm* trên $\mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $v + w - u - t \neq 0$ (**).

Xét cụ thể $\varepsilon = (9, 10, -2, -1)$ và $\theta = (-7, 1, 4, -8) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên ε là *một tổ hợp tuyến tính* của S với

$\varepsilon = (3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3)$ do ($\square$) và θ *không là một tổ hợp tuyến tính* của S.

3.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

a) Đặt W là *tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính* có từ S (ký hiệu $W = \langle S \rangle$),

nghĩa là $W = \langle S \rangle = \{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R} \} \subset \mathbf{R}^n$.

Ta kiểm tra được $W = \langle S \rangle$ là *một không gian vector con* của $\mathbf{R}^n$ [dùng (**2.1**)].

Ta nói $W = \langle S \rangle$ là *không gian vector con* (của $\mathbf{R}^n$) *sinh bởi tập hợp* S.

b) Nếu $S = \varnothing$ thì ta *qui ước* $\langle S \rangle = \{\mathbf{O}\}$ ($\varnothing$ sinh ra *không gian con* $\{\mathbf{O}\}$ của $\mathbf{R}^n$).

c) $\langle S \rangle$ là *không gian vector con nhỏ nhất* chứa được S của $\mathbf{R}^n$, nghĩa là

$\forall V \le \mathbf{R}^n$, $S \subset V \Rightarrow <S> \subset V$.

d) Cho $\gamma \in \mathbf{R}^n$. Khi đó

$\gamma \in W = <S> \Leftrightarrow \gamma$ là *một tổ hợp tuyến tính* của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \gamma$ (*ẩn số* $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *có nghiệm* trên $\mathbf{R}$

Suy ra : $\delta \notin W = <S> \Leftrightarrow \delta$ *không là tổ hợp tuyến tính* của $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \delta$ (*ẩn số* $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$) *vô nghiệm* trên $\mathbf{R}$

Ví dụ:

$S = \{ \alpha_1 = (-3,2,1,5), \alpha_2 = (4,-3,-1,-7), \alpha_3 = (1,-3,2,-4), \alpha_4 = (-2,5,-3,7) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta *mô tả* $W = <S>$ và *tìm điều kiện* để vector $\gamma = (u, v, w, t) \in W$.

a) $W = <S> = \{ \alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$

$= \{\alpha = a(-3,2,1,5) + b(4,-3,-1,-7) + c(1,-3,2,-4) + d(-2,5,-3,7) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$

$= \{ \alpha = (-3a + 4b + c - 2d, 2a - 3b - 3c + 5d, a - b + 2c - 3d, 5a - 7b - 4c + 7d)$

$\mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.

b) Cho $\gamma = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

$\gamma \in W = <S> \Leftrightarrow \gamma$ là *một tổ hợp tuyến tính* của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) *có nghiệm* trên $\mathbf{R}$

Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \gamma$

$\Leftrightarrow c_1(-3, 2, 1, 5) + c_2(4,-3,-1,-7) + c_3(1,-3, 2,-4) + c_4(-2, 5,-3, 7) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & w \\ -3 & 4 & 1 & -2 & u \\ 2 & -3 & -3 & 5 & v \\ 5 & -7 & -4 & 7 & t \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -1 & 2 & -3 & w \\ 0 & 1 & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & -1 & -7 & 11 & v-2w \\ 0 & -2 & -14 & 22 & t-5w \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 9 & -14 & u+4w \\ 0 & 1^* & 7 & -11 & u+3w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+v+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2u+w+t \end{array}\right) \end{array}$$

$\gamma = (u,v,w,t) \in W = <S> \Leftrightarrow$ Hệ trên *có nghiệm* trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w = 0 = 2u + w + t)$ (*)

Lúc đó ta có *vô số biểu diễn* $\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4$ với $c_3 = a$, $c_4 = b$ $(a, b \in \mathbf{R})$

$c_1 = 14b - 9a + u + 4w$ và $c_2 = 11b - 7a + u + 3w$ (□).

$\gamma = (u,v,w,t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên *vô nghiệm* trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow (u + v + w \neq 0$ hay $2u + w + t \neq 0)$ (**)

Xét cụ thể $\varepsilon = (5, -6, 1, -11)$ và $\theta = (-3, 2, 7, -4) \in \mathbf{R}^4$.

Ta có ε thỏa (*) và θ thỏa (**) nên $\theta \notin W = < S >$ và $\varepsilon \in W = < S >$ với *vô số biểu diễn* $\varepsilon = (14b - 9a + 9)\alpha_1 + (11b - 7a + 8)\alpha_2 + a\alpha_3 + b\alpha_4$ $(a, b \in \mathbf{R})$ do (□)

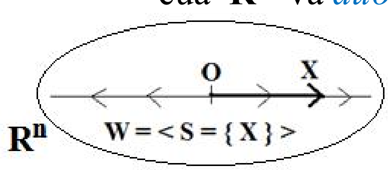
3.3/ <u>MINH HỌA:</u> Các vector β, γ, δ trong $\mathbf{R}^n$ dưới đây đều có gốc là O.

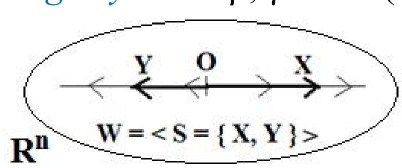
a) Nếu $S = \{ \mathbf{O} \} \subset \mathbf{R}^n$ thì $< S > = \{ \alpha = c\mathbf{O} = \mathbf{O} \mid c \in \mathbf{R} \} = \{ \mathbf{O} \} = S$.

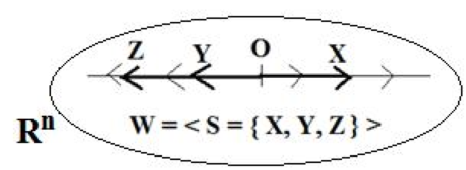
b) Nếu $S = \{ \beta \} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{ \mathbf{O} \}$ thì $< S > = \{ \alpha = c\beta \mid c \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và *đường thẳng này* chứa β.

c) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{O}\}$ (β, γ *cùng phương*) thì $< S > = \{\alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R}\}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và *đường thẳng này* chứa β và γ.

d) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{O}\}$ (β, γ, δ *cùng phương với nhau*) thì $< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^n$ và *đường thẳng này* chứa β, γ và δ ($\beta \equiv X, \gamma \equiv Y, \delta \equiv Z$).

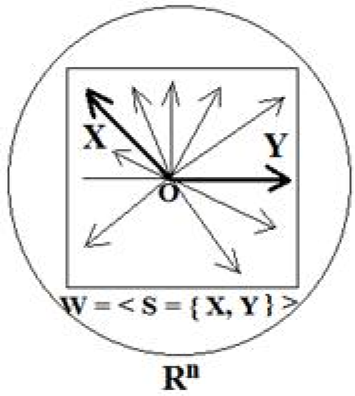




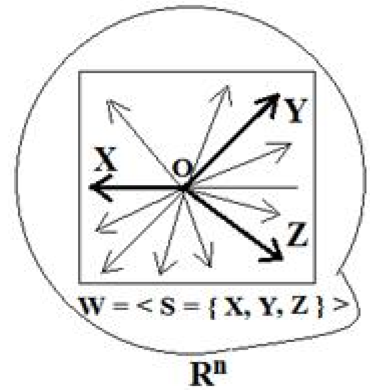


e) Nếu $S = \{ \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ *khác phương*) thì $< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma \mid c, d \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và *mặt phẳng này* chứa β, γ.

f) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^n$ (β, γ, δ *khác phương đôi một nhưng đồng phẳng*) thì $< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^n$ và *mặt phẳng này* chứa β, γ và δ ($\beta \equiv X, \gamma \equiv Y, \delta \equiv Z$).



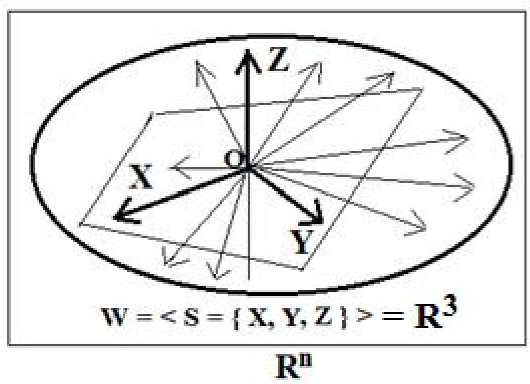
X và Y *khác phương nhau*



X, Y và Z *khác phương, đồng phẳng*

g) Nếu $S = \{ \beta, \gamma, \delta \} \subset \mathbf{R}^3$ (β, γ, δ *không đồng phẳng*) thì

$< S > = \{ \alpha = c\beta + d\gamma + e\delta \mid c, d, e \in \mathbf{R} \}$ và $< S > = \mathbf{R}^3$.



X, Y và Z *không đồng phẳng* ($X \equiv \beta, Y \equiv \gamma, Z \equiv \delta$).

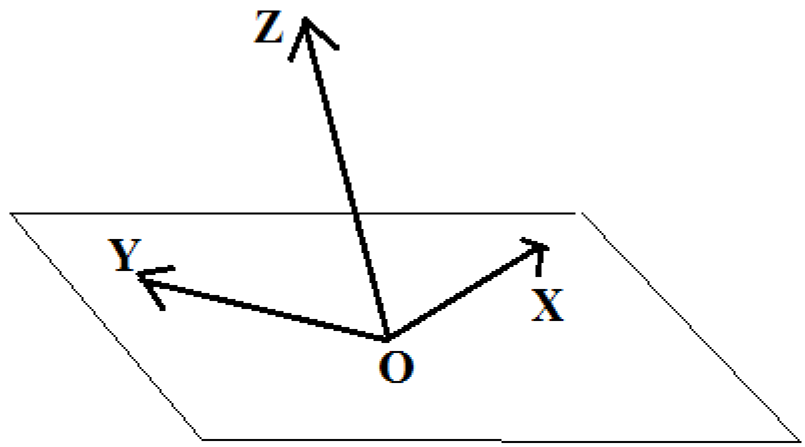
3.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

Cho *các tập hợp hữu hạn* $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset \mathbf{R}^n$ $(k \geq 2)$ và $< S_j > = W_j \leq \mathbf{R}^n$ $(1 \leq j \leq k)$.

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

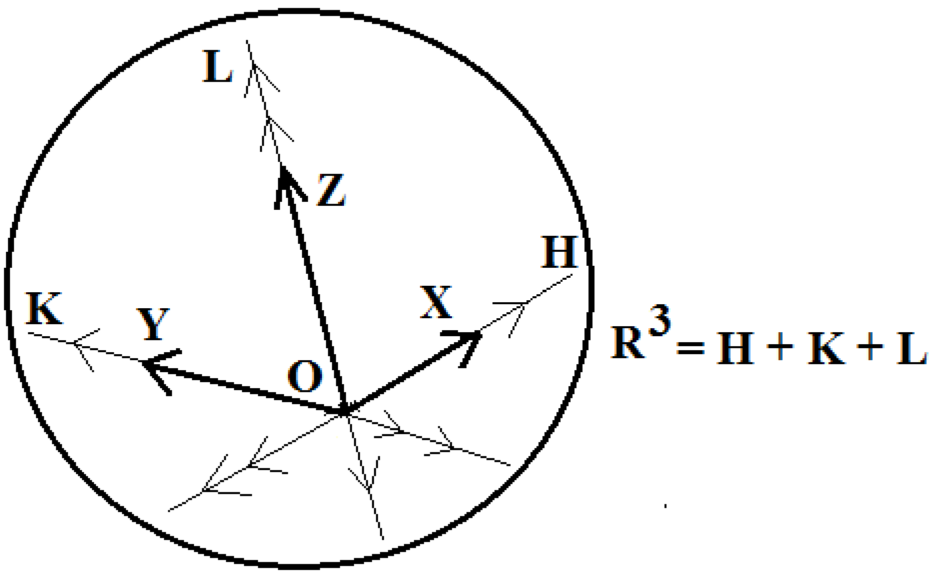
<u>Ví dụ:</u>

a) $T_1 = \{ X \}, T_2 = \{ Y \}$ và $T_3 = \{ Z \} \subset \mathbf{R}^3$ (X, Y và Z *không đồng phẳng*).



$H = < T_1 >$, $K = < T_2 >$ và $L = < T_3 >$ là *các không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^3$.

$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{ X, Y, Z \}$ và $< T > = < \{ X, Y, Z \} > = H + K + L = \mathbf{R}^3$.



b) Cho $S_1 = \{ \alpha \}$, $S_2 = \{ \beta, \gamma \}$, $S_3 = \{ \delta, \varepsilon, \theta \} \subset \mathbf{R}^n$ và $< S_j > = W_j \leq \mathbf{R}^n$ $(1 \leq j \leq 3)$.

Đặt $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta \}$. Ta có $< S > = W_1 + W_2 + W_3$.

IV. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $k \geq 1$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \} \subset \mathbf{R}^n$.

Xét phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = \mathbf{O}$ (*) với *các ẩn số thực* $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

(*) có *ít nhất một nghiệm* là $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ (*nghiệm tầm thường*).

a) Nếu (*) có *nghiệm duy nhất* (*nghiệm tầm thường*) thì ta nói S *độc lập tuyến tính*

[trên $\mathbf{R}$] (nghĩa là *không có vector nào* của S *được tính theo các vector khác* trong S dưới dạng *tổ hợp tuyến tính*).

b) Nếu (*) có *vô số nghiệm* (có *nghiệm tầm thường* và *vô số nghiệm không tầm thường*) thì ta nói S *phụ thuộc tuyến tính* [trên $\mathbf{R}$] (nghĩa là *có ít nhất một vector* của S *được tính theo các vector khác* trong S dưới dạng *tổ hợp tuyến tính*).

c) Nếu $S = \varnothing$ thì ta qui ước S *độc lập tuyến tính*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $S = \{\ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7),\ \alpha_2 = (1, -2, 5, -4),\ \alpha_3 = (2, 4, 1, 6)\ \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow c_1(-3,1,2,7) + c_2(1,-2,5,-4) + c_3(2,4,1,6) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \overset{\begin{matrix}c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 14 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -22 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 182 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \overset{\begin{matrix}c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}.$$

Phương trình *có nghiệm duy nhất* ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) nên S *độc lập tuyến tính*.

b) Cho $T = \{\ \beta_1 = (3, -4, 1, 7),\ \beta_2 = (-2, 6, 8, -1),\ \beta_3 = (-13, 24, 13, -23)\ \} \subset \mathbf{R}^4$.

Phương trình $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = \mathbf{O} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_1(3, -4, 1, 7) + c_2(-2, 6, 8, -1) + c_3(-13, 24, 13, -23) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \overset{\begin{matrix}c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 13 & 0 \\ 3 & -2 & -13 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 0 \\ 7 & -1 & -23 & 0 \end{array}\right)} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 8 & 13 & 0 \\ 0 & -26 & -52 & 0 \\ 0 & 19 & 38 & 0 \\ 0 & -57 & -114 & 0 \end{array}\right) \to \overset{\begin{matrix}c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}.$$

Phương trình có *vô số nghiệm* là [$c_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $c_1 = 3a$, $c_2 = -2a$] nên T *phụ thuộc tuyến tính*. Trích ra *một nghiệm không tầm thường* (bằng cách chọn $a = 1$), ta có ($c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$) và được *hệ thức* $3\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 = \mathbf{O}$. Suy ra $\beta_3 = 2\beta_2 - 3\beta_1$, nghĩa là β_3 *được tính theo* β_1 và β_2 dưới dạng *tổ hợp tuyến tính*.

4.2/ <u>NHẬN XÉT:</u>

a) $S = \{ \alpha \} \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu $\alpha = \mathbf{O}$ thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

(phương trình $c.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ có *vô số nghiệm* c *thực tùy ý*).

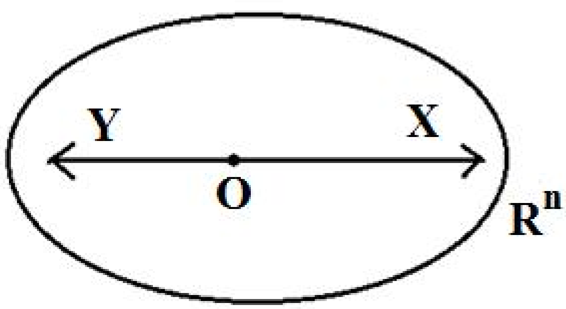
Nếu $\alpha \neq \mathbf{O}$ thì S *độc lập tuyến tính*.

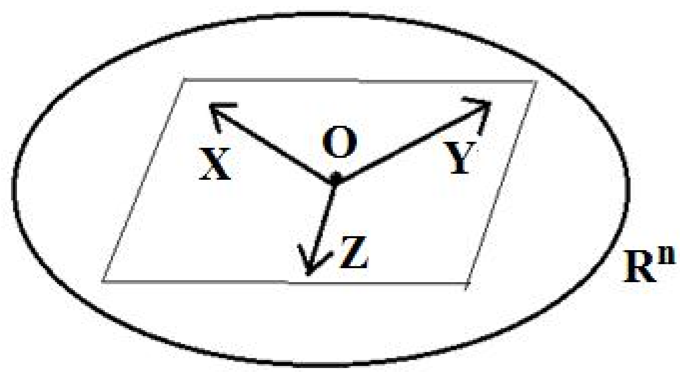
(phương trình $c.\alpha = \mathbf{O}$ có *nghiệm thực duy nhất* $c = 0$).

b) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^n$ ($\alpha \equiv X, \beta \equiv Y$).

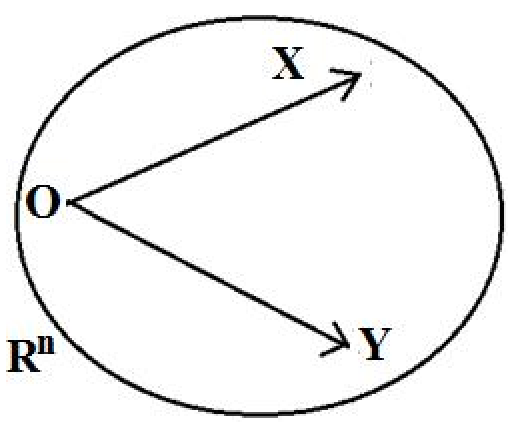
Nếu α *cùng phương* với β (α và β có *các thành phần tỉ lệ với nhau*) thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

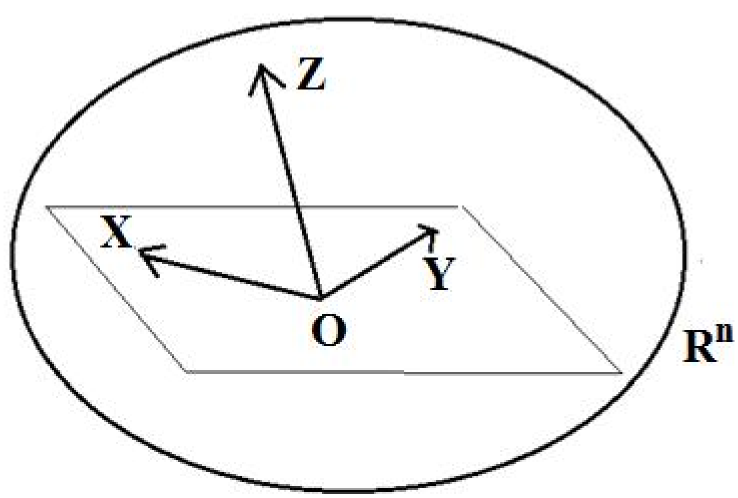
Nếu α *khác phương* với β (α và β có *các thành phần không tỉ lệ với nhau*) thì S *độc lập tuyến tính*.





c) $S = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^n$ ($\alpha \equiv X, \beta \equiv Y, \gamma \equiv Z$).





Nếu α, β, γ *đồng phẳng* thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu α, β, γ *không đồng phẳng* thì S *độc lập tuyến tính*.

d) Cho $S \subset T \subset \mathbf{R}^n$.

Nếu S *phụ thuộc tuyến tính* thì T cũng *phụ thuộc tuyến tính*.

Nếu T *độc lập tuyến tính* thì S cũng *độc lập tuyến tính*.

Nếu $\mathbf{O} \in S$ thì S *phụ thuộc tuyến tính* (vì $\{ \mathbf{O} \}$ *phụ thuộc tuyến tính*).

Nếu S *độc lập tuyến tính* thì $\mathbf{O} \notin S$.

Ví dụ:

Xét $S = \{\alpha = (-2,4,-8,6), \beta = (3,-6,12,-9)\}$ và $T = \{ \gamma = (5,1,-4,7), \delta = (-1,8,2,-3)\} \subset \mathbf{R}^4$

Ta có S *phụ thuộc tuyến tính* ($\beta = -\frac{3}{2}\alpha$) và T *độc lập tuyến tính* (γ *không tỉ lệ* với δ).

4.3/ MỆNH ĐỀ: (xác định *tính độc lập tuyến tính* hoặc *phụ thuộc tuyến tính*)

Cho $m \geq 3$ và $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và ta có thể *hoán đổi các dòng* của A.

Ta tìm S_A (*dạng bậc thang* của A) để xác định $r(A)$ với $r(A) \leq m$.

a) Nếu $m > n$ thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

b) Xét trường hợp $m \leq n$.

S *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow r(A) < m$.

S *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow r(A) = m$.

c) Xét trường hợp *đặc biệt* $m = n$ và $A \in M_n(\mathbf{R})$.

S *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow$ A *không khả nghịch* ($|A| = 0$).

S *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow$ A *khả nghịch* ($|A| \neq 0$).

Ví dụ:

a) $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \} \subset \mathbf{R}^3$. Do $m = |Z| = 5 > n = 3$ nên Z *phụ thuộc tuyến tính*.

b) Cho $S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & 8 & -1 \\ -13 & 24 & 13 & -23 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & 17 & -5 \\ 0 & 8 & -9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -5^* & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 91^* & 30 \end{pmatrix} = S_A \text{ có } r(A) = 3 = m = 3 < n = 4.$$

$$B \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10 & 26 & 11 \\ 0 & 50 & 130 & 55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 10^* & 26 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B \text{ có } r(B) = 2 < m = 3 < n = 4.$$

Do đó S *độc lập tuyến tính* và T *phụ thuộc tuyến tính*.

c) Cho $H = \{ \gamma_1 = (a, 1, 1), \gamma_2 = (1, a, 1), \gamma_3 = (1, 1, a) \} \subset \mathbf{R}^3$ ($m = n = 3$ và a là *tham số thực*). Đặt $C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và

$$|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1^* & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2).$$

Như vậy H *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow$ C *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|C| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $-2 \neq a \neq 1$.

H *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow$ C *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|C| = 0 \Leftrightarrow$ ($a = -2$ hoặc $a = 1$).

V. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

5.1/ VẤN ĐỀ: Cho $W \leq \mathbf{R}^n$. Có *nhiều tập hợp hữu hạn* của $\mathbf{R}^n$ sinh ra W. Ta muốn tìm *một tập sinh* S nào đó của W sao cho S *có số lượng vector là ít nhất*. Khi đó ta nói S là *một tập sinh tối ưu* của W.

5.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và $W = < S >$ với S là *một tập hợp hữu hạn* của $\mathbf{R}^n$.

a) Nếu S *độc lập tuyến tính* thì S chính là *một tập sinh tối ưu* của W.

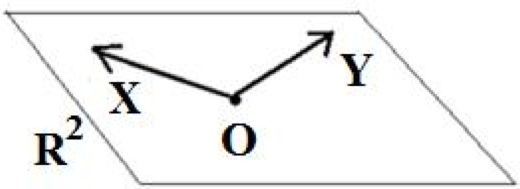
(nghĩa là $\forall T \subset S, T \ne S \Rightarrow < T > \ne W$).

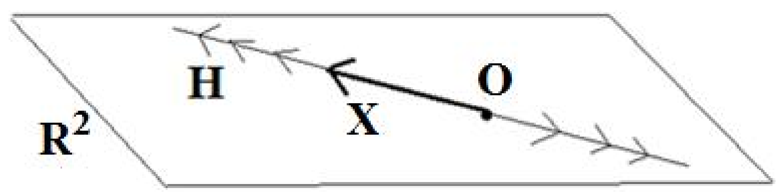
b) Nếu S *phụ thuộc tuyến tính* thì S là *một tập sinh chưa tối ưu* của W.

(nghĩa là $\exists T \subset S, T \ne S$ và $< T > = W$).

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^2$.

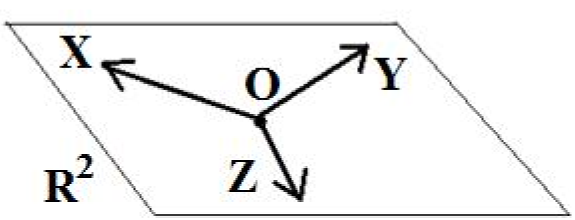
a) $S = \{ \alpha, \beta \} \subset \mathbf{R}^2$ ($\alpha \equiv X$ *khác phương* với $\beta \equiv Y$). Ta có $< S > = \mathbf{R}^2$ và S *độc lập tuyến tính* nên S chính là *một tập sinh tối ưu* của $\mathbf{R}^2$. Chẳng hạn xét $T = \{ \alpha \} \subset S$ và $T \ne S$. Ta có $H = < T > \ne \mathbf{R}^2$ vì H là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$.

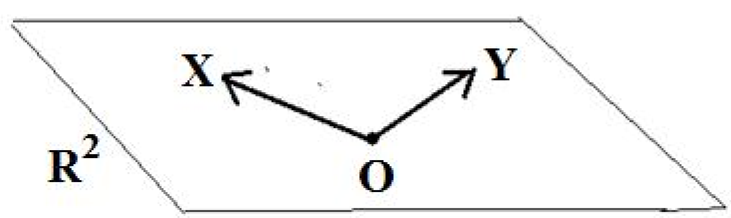




b) $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subset \mathbf{R}^2$ ($\alpha \equiv X, \beta \equiv Y, \gamma \equiv Z$ *khác phương nhau từng đôi một*).

Ta có $< Z > = \mathbf{R}^2$ và Z *phụ thuộc tuyến tính* nên Z là *một tập sinh chưa tối ưu* của $\mathbf{R}^2$. Chẳng hạn xét $U = \{ \alpha, \beta \} \subset S$ thì $U \ne S$ và $< U > = \mathbf{R}^2$.





5.3/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$.

Một cơ sở của W là *một tập sinh độc lập tuyến tính* (*một tập sinh tối ưu*) của W.

5.4/ MỆNH ĐỀ: Cho $W \le \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \neq \{ \mathbf{O} \}$ thì W có *vô số cơ sở khác nhau*.

b) Nếu $W \neq \{ \mathbf{O} \}$ và W có *cơ sở* B gồm m *vector* thì *mọi cơ sở khác* của W cũng có m *vector*. Ta gọi m là *số chiều của không gian vector* W và ký hiệu $m = \dim W$ (dim = dimension). Như vậy *số chiều của một không gian vector* là *số lượng các vector* hiện diện trong *mỗi cơ sở* của nó.

Ví dụ:

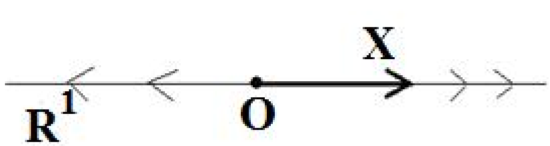
a) $< \varnothing > = \{ \mathbf{O} \}$ và $\varnothing$ *độc lập tuyến tính* (theo qui ước) nên *không gian* $\{ \mathbf{O} \}$ có *cơ sở duy nhất* là $\varnothing$ và $\dim\{ \mathbf{O} \} = | \varnothing | = 0$. Ta nói $\{ \mathbf{O} \}$ là *không gian 0 chiều*.

b) $\mathbf{R}^1$ có *vô số cơ sở khác nhau*. Mỗi *cơ sở* B của $\mathbf{R}^1$ gồm một vector $\alpha \neq \mathbf{O}$ tùy ý vì $B = \{ \alpha \equiv X \}$ *độc lập tuyến tính* và $< B > = \mathbf{R}^1$.

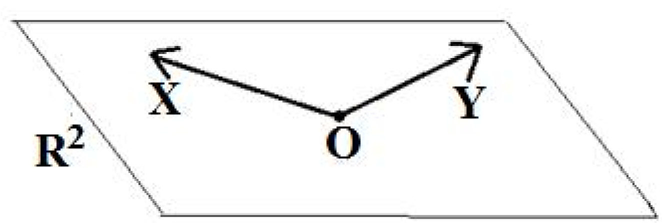
Suy ra $\dim\mathbf{R}^1 = | B | = 1$ và ta nói $\mathbf{R}^1$ là *không gian 1 chiều*.

c) $\mathbf{R}^2$ có *vô số cơ sở khác nhau.* Mỗi *cơ sở* B của $\mathbf{R}^2$ gồm hai vector α, β *khác phương nhau tùy ý* vì $B = \{ \alpha \equiv X, \beta \equiv Y \}$ *độc lập tuyến tính* và $< B > = \mathbf{R}^2$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^2 = | B | = 2$ và ta nói $\mathbf{R}^2$ là *không gian 2 chiều*.



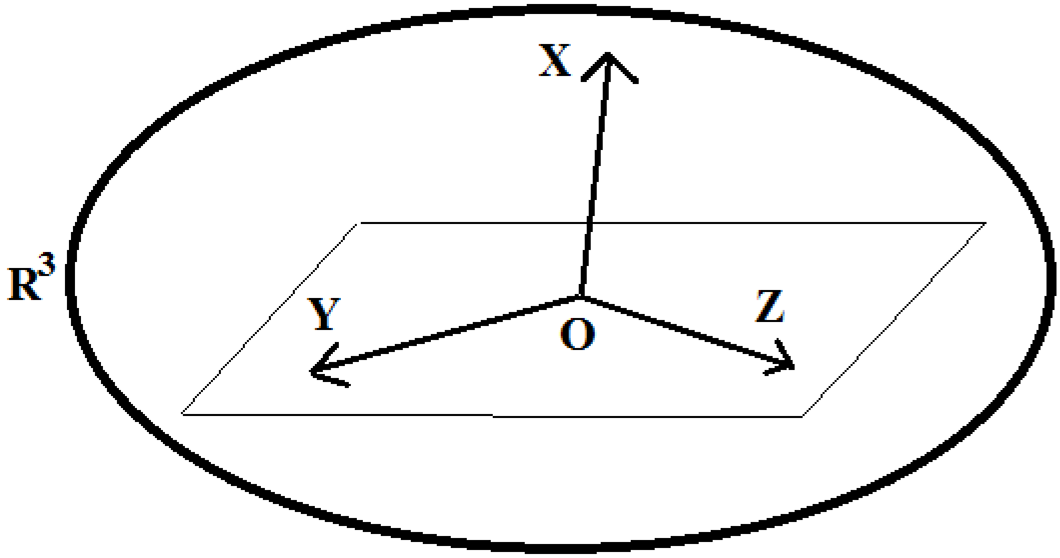
$B = \{ X \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ (B là *một tập sinh độc lập tuyến tính* của $\mathbf{R}$) và $\dim\mathbf{R} = | B | = 1$.



$C = \{ X, Y \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^2$ (C là *một tập sinh độc lập tuyến tính* của $\mathbf{R}^2$) $\dim\mathbf{R}^2 = | C | = 2$.

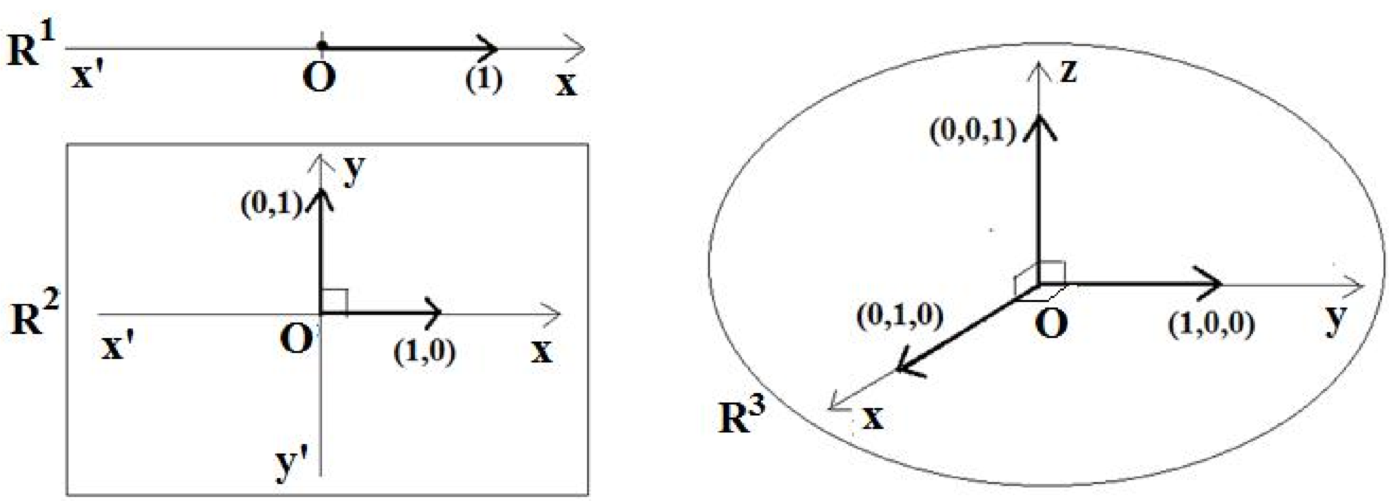
d) $\mathbf{R}^3$ có *vô số cơ sở khác nhau*. Mỗi *cơ sở* B của $\mathbf{R}^3$ gồm 3 *vector* α, β, γ *không* *đồng phẳng* tùy ý vì $B = \{ \alpha \equiv X, \beta \equiv Y, \gamma \equiv Z \}$ *độc lập tuyến tính* và $< B > = \mathbf{R}^3$.

Suy ra $\dim\mathbf{R}^3 = | B | = 3$ và ta nói $\mathbf{R}^3$ là *không gian* 3 *chiều*.



e) $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ có *vô số cơ sở khác nhau*. Trong đó có *một cơ sở đơn giản* và *thông dụng* gọi là *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1,0, \dots ,0), \varepsilon_2 = (0,1,0, \dots ,0), \dots , \varepsilon_n = (0, \dots ,0,1) \}$.

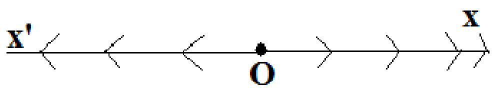
Suy ra $\dim\mathbf{R}^n = | B_o | = n$ và ta nói $\mathbf{R}^n$ là *không gian* n *chiều*.



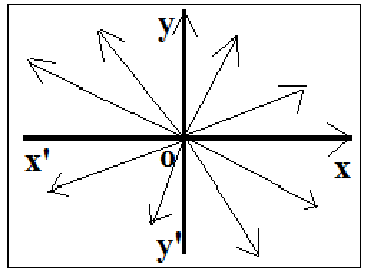
$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ có *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1) \}$.

$\mathbf{R}^2$ có *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1) \}$.

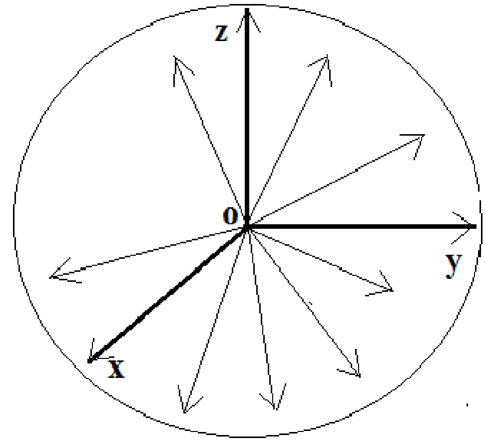
$\mathbf{R}^3$ có *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$.



$\mathbf{R}^1$ (1 chiều)



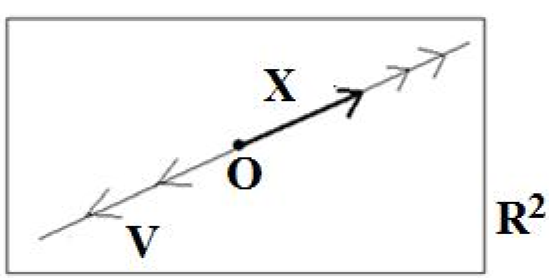
$\mathbf{R}^2$ (2 chiều)

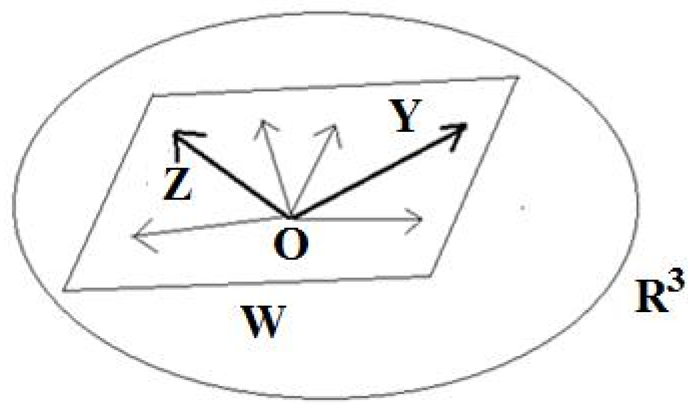


$\mathbf{R}^3$ (3 chiều)

f) $S = \{ X \equiv \alpha = (8, 7) \} \subset \mathbf{R}^2$ và $V = < S > = \{ \delta = a\alpha \mid a \in \mathbf{R} \} \leq \mathbf{R}^2$. Do $\alpha \neq \mathbf{O}$ nên S *độc lập tuyến tính* và cũng là *một cơ sở* của V. Ta có V là *một không gian con kiểu đường thẳng* của $\mathbf{R}^2$ có $\dim V = | S | = 1 < \dim\mathbf{R}^2 = 2$. Như vậy $\{\mathbf{O}\} < V < \mathbf{R}^2$ và V là *một không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^2$.

g) $T = \{\beta = (5,-2,4), \gamma = (-3,1,8)\} \subset \mathbf{R}^3$ và $W = < T > = \{\delta = b\beta + c\gamma \mid b, c \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^3$. Do $\beta \equiv Y$ *không tỉ lệ* với $\gamma \equiv Z$ nên T *độc lập tuyến tính* và là *một cơ sở* của W. W là *một không gian con kiểu mặt phẳng* của $\mathbf{R}^3$ có $\dim W = | T | = 2 < \dim\mathbf{R}^3 = 3$. Như vậy $\{ \mathbf{O} \} < W < \mathbf{R}^3$ và W là *một không gian con không tầm thường* của $\mathbf{R}^3$.





5.5/ NHẬN DIỆN CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:

Cho $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \} \subset \mathbf{R}^n$ với $| S | = n$. Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) S là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ A *khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

b) S *không là cơ sở* của $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Ví dụ:

a) Cho $Z = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ và $T = \{ \delta, \varepsilon, \theta, \eta, \lambda \}$ trong $\mathbf{R}^4$. Ta có $|Z| = 3$ và $|T| = 5$

nên Z và T *không* là *cơ sở* của $\mathbf{R}^4$ do *mỗi cơ sở* của $\mathbf{R}^4$ có 4 vector.

b) Cho $S = \{ \alpha = (1, -2, a), \beta = (2, a-2, 1), \gamma = (2, a-5, a+1) \} \subset \mathbf{R}^3$ có $|S| = 3$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & a-2 & 1 \\ 2 & a-5 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -2 & a \\ 0 & 3 & -a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3).$$

S là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow$ A *khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

S *không là cơ sở* của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow$ A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = 1$ hoặc $a = 3)$.

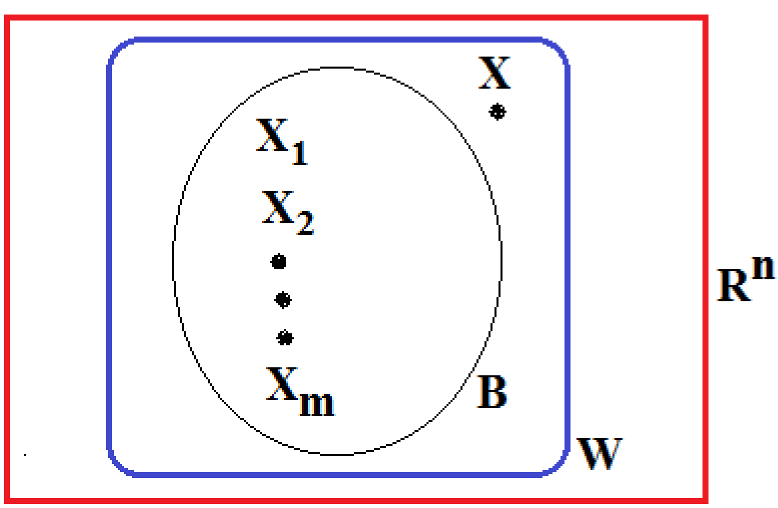
5.6/ Ý NGHĨA CỦA CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU:

Cho $W \leq \mathbf{R}^n$ và W có *cơ sở* $B = \{ \alpha_1 \equiv X_1, \alpha_2 \equiv X_2, \ldots, \alpha_m \equiv X_m \} \subset \mathbf{R}^n$

($\dim W = |B| = m$).

a) $\forall \alpha \equiv X \in W, \exists!\ c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m$ (*).

Muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ta phải *giải phương trình vector* (*).



Như vậy *không gian* W hoàn toàn *được xác định* bởi *một cơ sở bất kỳ của nó* (vì *mỗi vector* trong W được *biểu diễn một cách duy nhất* dưới dạng *tổ hợp tuyến tính* theo *các vector trong cơ sở*). Do đó muốn *xác định một không gian vector con trong* $\mathbf{R^n}$, ta chỉ cần xác định *một cơ sở của nó* là đủ. Điều này rất thuận lợi vì các không *gian vector* $\neq \{\mathbf{O}\}$ *có vô hạn vector* trong khi *mỗi cơ sở của nó* có *hữu hạn vector*.

b) *Các không gian vector* $\neq \{\mathbf{O}\}$ có *vô hạn vector* nên ta không thể so sánh " *tầm vóc* (*độ lớn*) " của *các không gian đó* dựa trên *số lượng vector của chúng* được. Chúng ta dùng đại lượng " *số chiều* " để thấy được " *tầm vóc* (*độ lớn*) " của *các không gian*. *Không gian có số chiều càng cao* thì " *tầm vóc* " của nó *càng lớn*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho B = $\{X_1 = (7,-2), X_2 = (-4,1)\}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^2$ (vì $\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$)

$\forall X = (u, v) \in \mathbf{R}^2$, ta có *biểu diễn tổ hợp tuyến tính duy nhất*

$X = (-u-4v)X_1 + (-2u-7v)X_2$ bằng cách giải hệ $X = c_1X_1 + c_2X_2$ với các ẩn số thực c_1 và c_2:

$$(X_1^t \ \ X_2^t \mid X^t) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -4 & u \\ -2 & 1 & v \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & -1 & u+3v \\ 0 & -1 & 2u+7v \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 0 & -u-4v \\ 0 & 1^* & -2u-7v \end{array}\right) \end{array}$$

b) Cho $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 3, -1, 0), \alpha_3 = (-1, -1, 1, 1)\} \subset \mathbf{R}^4$.

Xét $W = \langle S \rangle = \{\alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \mid a, b, c \in \mathbf{R}\} \leq \mathbf{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1^* & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2^* & 2 \end{pmatrix} = S_A$$

thì r(A) = 3 nên S *độc lập tuyến tính* và cũng là *một cơ sở* của W với $\dim W = |S| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$. Suy ra $W < \mathbf{R}^4$.

Theo **Ví dụ** của (**3.1**), $\forall \gamma = (u, v, w, t) \in W$ (γ thỏa $v + w - u - t = 0$), ta có *biểu diễn duy nhất* dưới dạng *tổ hợp tuyến tính* $\gamma = \frac{u+2w-t}{2}\alpha_1 + (v-u)\alpha_2 + \frac{3t-u-2w}{2}\alpha_3$.

Ghi chú : *Mỗi không gian con* W của $\mathbf{R}^n$ đều có dạng là *không gian nghiệm* của *một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $\mathbf{A}X = \mathbf{O}$ với $\mathbf{A} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Các không gian con của $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ có *cấu trúc hình học* như sau :

* *Không gian* $\{\mathbf{O}\}$ có 0 *chiều* [ta gọi nó là *không gian con* 0_ *phẳng*].

* Vô số *không gian con* 1 *chiều dạng đường thẳng* đi qua gốc O và có 1 *vector chỉ phương* $\neq \mathbf{O}$ (độc lập tuyến tính) [ta gọi chúng là các không gian con 1_ *phẳng*].

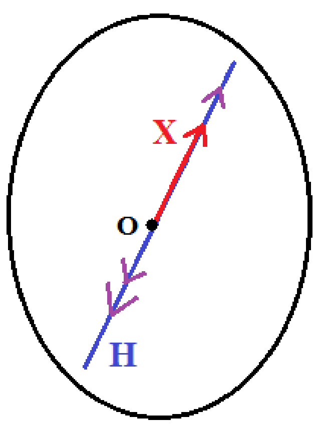
* Vô số *không gian con* 2 *chiều dạng mặt phẳng* đi qua gốc O và có 2 *vector chỉ phương khác phương nhau* (*độc lập tuyến tính*) [ta gọi chúng là *các không gian con* 2_ *phẳng*].

* Vô số *không gian con* 3 *chiều* đi qua gốc O và có 3 *vector chỉ phương không đồng phẳng* (*độc lập tuyến tính*) [ta gọi chúng là *các không gian con* 3_ *phẳng*].

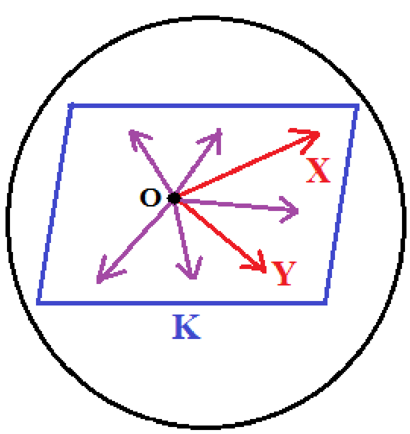
⋮ ⋮ ⋮

* Vô số *không gian con* $(n-1)$ *chiều* đi qua gốc O và có $(n-1)$ *vector chỉ phương độc lập tuyến tính* [ta gọi chúng là *các không gian con* $(n-1)$_ *phẳng* hay *các siêu phẳng* của $\mathbf{R}^n$].

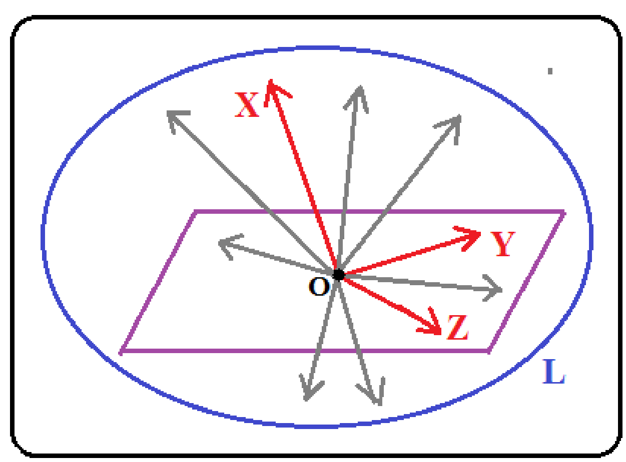
* *Không gian* $\mathbf{R}^n$ có n *chiều* đi qua gốc O và có n *vector chỉ phương độc lập tuyến tính* [ta gọi nó là *không gian con* n_ *phẳng*].



$\mathbf{R}^n$ (n > 1)



$\mathbf{R}^n$ (n > 2)



$\mathbf{R}^n$ (n > 3)

$H \leq \mathbf{R}^n$ và $\dim H = 1$ $\quad$ $K \leq \mathbf{R}^n$ và $\dim K = 2$ $\quad$ $L \leq \mathbf{R}^n$ và $\dim L = 3$

H, K và L lần lượt là *các không gian con* 1_*phẳng*, 2_*phẳng* và 3_*phẳng* của $\mathbf{R}^n$.

5.7/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN SINH BỞI MỘT TẬP HỢP HỮU HẠN:

a) *Vấn đề*: Cho $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \} \subset \mathbf{R}^n$.

Tìm *một cơ sở* cho W và chỉ ra $\dim W$.

b) *Giải quyết*:

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm *ma trận dạng bậc thang* S_A của A.

S_A có k dòng *không tầm thường* tạo thành *các vector* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

$C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \}$ là *một cơ sở* của $W = \langle S \rangle$ và $\dim W = |C| = k = r(A)$.

Ta cũng nói W là *không gian dòng* của ma trận A.

Ví dụ: Trong $\mathbf{R}^4$, cho *tập hợp* (được mô tả theo *các tham số thực* a, b, c, d)

$$W = \{ X = (a + 4b - 2c + 3d, 2a + 7b - 3c + 7d, 2a + b + 4c + 15d, - a - 2b - 5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}.$$

Hãy tìm *một tập hợp hữu hạn* S của $\mathbf{R}^4$ thỏa $W = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và tìm *một cơ sở* cho W.

Dùng cách *tách riêng các tham số* và đặt *mỗi tham số* làm *thừa số chung*, ta có

$$W = \{X = (a,2a,2a,-a) + (4b,7b,b,-2b) + (-2c,-3c,4c,0) + (3d,7d,15d,-5d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$$

$$= \{ X = a(1, 2, 2,- 1) + b(4, 7, 1,- 2) + c(- 2,- 3, 4, 0) + d(3, 7, 15,- 5) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$$

Vậy $W = \langle S \rangle$ với $S = \{\alpha_1 = (1,2,2,-1), \alpha_2 = (4,7,1,-2), \alpha_3 = (-2,-3,4,0), \alpha_4 = (3,7,15,-5)\}$

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}.$$

W có *cơ sở* là $C = \{\gamma_1 = (1,2,2,-1), \gamma_2 = (0,1,9,-2), \gamma_3 = (0,0,-1,0)\}$ và $\dim W = |C| = 3$.

5.8/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT:

a) *Vấn đề*: Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $W = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \mathbf{O} \} \le \mathbf{R}^n$.

Tìm *một cơ sở* cho W và chỉ ra $\dim W$.

b) *Giải quyết*: Giải hệ $AX = \mathbf{O}$ để mô tả *không gian nghiệm* W.

- Nếu $W = \{ \mathbf{O} \}$ thì W có *cơ sở* (*duy nhất*) là $\varnothing$ và $\dim W = |\varnothing| = 0$.
- Nếu hệ có *vô số nghiệm* với k *ẩn tự do* thì ta mô tả W theo k *ẩn tự do đó*.

Dùng cách *tách riêng các ẩn tự do* và đặt *mỗi ẩn tự do* làm *thừa số chung*, ta có được *một tập sinh* D (gồm k *vector*) cho W. *Tập sinh* D *độc lập tuyến tính* (kết quả này *đã được chứng minh* trong lý thuyết) nên D là *một cơ sở* của W.

Ta có $\dim W = |D| = k =$ (số ẩn tự do của hệ $AX = \mathbf{O}$).

Ví dụ:

a) Cho $V = \{ X \in \mathbf{R}^4 \mid HX = \mathbf{O} \} \le \mathbf{R}^4$ với $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Ta tìm *một cơ sở* cho V. Trước hết ta giải hệ $HX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5^* & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6^* & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28^* \end{vmatrix} = 840 \ne 0.$$

Vậy H *khả nghịch* và hệ $HX = \mathbf{O}$ chỉ có *nghiệm tầm thường* $X = \mathbf{O} = (0, 0, 0, 0)$.

Do đó $V = \{ \mathbf{O} \}$ và V có *cơ sở* là $\varnothing$ với $\dim V = |\varnothing| = 0$.

b) $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \mid AX = \mathbf{O} \} \le \mathbf{R}^5$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$.

Ta tìm *một cơ sở* cho W. Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$.

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 & 0 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 & 0 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & -1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -5 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có *vô số nghiệm* với 3 *ẩn tự do* $y, t, u \in \mathbf{R}$, $x = 5y + 3t - 2u$, $z = u - 4t$.

$W = \{ X = (5y + 3t - 2u, y, u - 4t, t, u) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = (5y, y, 0, 0, 0) + (3t, 0, -4t, t, 0) + (-2u, 0, u, 0, u) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = y(5, 1, 0, 0, 0) + t(3, 0, -4, 1, 0) + u(-2, 0, 1, 0, 1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$.

$W = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (5,1,0,0,0), \delta_2 = (3,0,-4,1,0), \delta_3 = (-2,0,1,0,1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D *độc lập tuyến tính* nên D là *một cơ sở* của W và $\dim W = |D| = 3$.

(số *ẩn tự do* của hệ $AX = \mathbf{O}$ là 3).

5.9/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN TỔNG:

a) *Vấn đề*: Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với S, T là *các tập hợp con hữu hạn* của $\mathbf{R}^n$. Ta có $(V + W) \leq \mathbf{R}^n$. Ta tìm *một cơ sở* cho $(V + W)$.

b) *Giải quyết*: Đặt $Z = S \cup T$ thì $(V + W) = \langle Z \rangle$. Sử dụng (**5.7**) , ta tìm được *một cơ sở* cho $(V + W)$ từ *tập sinh* Z của nó.

Ví dụ: Cho $S = \{ \alpha = (5, -2, -5, 4), \beta = (2, 0, -5, 3), \gamma = (-4, 4, -5, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$,

$V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$, $T = \{ \delta = (4, -6, 4, 1), \varepsilon = (1, 6, -8, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm *một cơ sở* cho $(V + W)$.

Đặt $Z = S \cup T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ thì $(V + W) = \langle Z \rangle$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -12 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & -15 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -32 & 35 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & -17 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 51 & -33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 2^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 17^* & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(V + W)$ có *cơ sở* $E = \{ \lambda = (1, 6, -8, 1), \mu = (0, 2, 1, -2), \nu = (0, 0, 17, -11) \}$ và $\dim(V + W) = |E| = 3$.

5.10/ TÌM CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN GIAO:

a) *Vấn đề*: Cho $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^n$ và $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^n$ với $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \} \subset \mathbf{R}^n$ và $T = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q \} \subset \mathbf{R}^n$ ($p \geq q$). Tìm *một cơ sở* cho $(V \cap W)$.

b) *Giải quyết*: Xét $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Ta có

$\alpha \in (V \cap W) \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbf{R}, \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_p\alpha_p$ và phương trình

$d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \cdots + d_q\beta_q = \alpha$ (ẩn số $d_1, d_2, \ldots$ và d_q) *có nghiệm thực*.

Ta sẽ thấy $c_1, c_2, \ldots, c_p$ bị ràng buộc bởi *một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*. *Giải hệ này* để chỉ ra *các ẩn tự do* và mô tả $\alpha \in (V \cap W)$ theo *các ẩn tự do này*. Từ đó ta tìm được *một tập sinh độc lập tuyến tính* (*một cơ sở*) cho $(V \cap W)$.

Ví dụ: $S = \{ \alpha = (-2,4,3,0), \beta = (4,-1,-2,2), \gamma = (-1,4,1,1) \} \subset \mathbf{R}^4$, $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$,

$T = \{ \delta = (0, 5, 1,-1), \varepsilon = (1, 5,-1, 0), \theta = (3, 4, 1, 0) \} \subset \mathbf{R}^4$, $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm *một cơ sở* cho $(V \cap W)$. Ta có $\alpha \in (V \cap W) \Leftrightarrow (\alpha \in V$ và $\alpha \in W) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R}, \alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma$ và phương trình $r\delta + s\varepsilon + t\theta = \alpha$ (ẩn số r, s, t) *có nghiệm thực*.

Phương trình $r(0, 5, 1, -1) + s(1, 5, -1, 0) + t(3, 4, 1, 0) =$

$= a(-2, 4, 3, 0) + b(4, -1, -2, 2) + c(-1, 4, 1, 1)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ -1 & 0 & 0 & 2b+c \\ 5 & 5 & 4 & 4a-b+4c \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1 & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & -1 & 1 & 3a+2c \\ 0 & 5 & 4 & 4a+9b+9c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4 & a+4b+c \\ 0 & 0 & 9 & 19a+9b+19c \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 1 & 3a-2b+c \\ 0 & 1^* & 3 & 4b-2a-c \\ 0 & 0 & 4^* & a+4b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 67a+67c \end{array}\right) \end{array}$$. Phương trình *có nghiệm* $\Leftrightarrow$ $a + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = -a$.

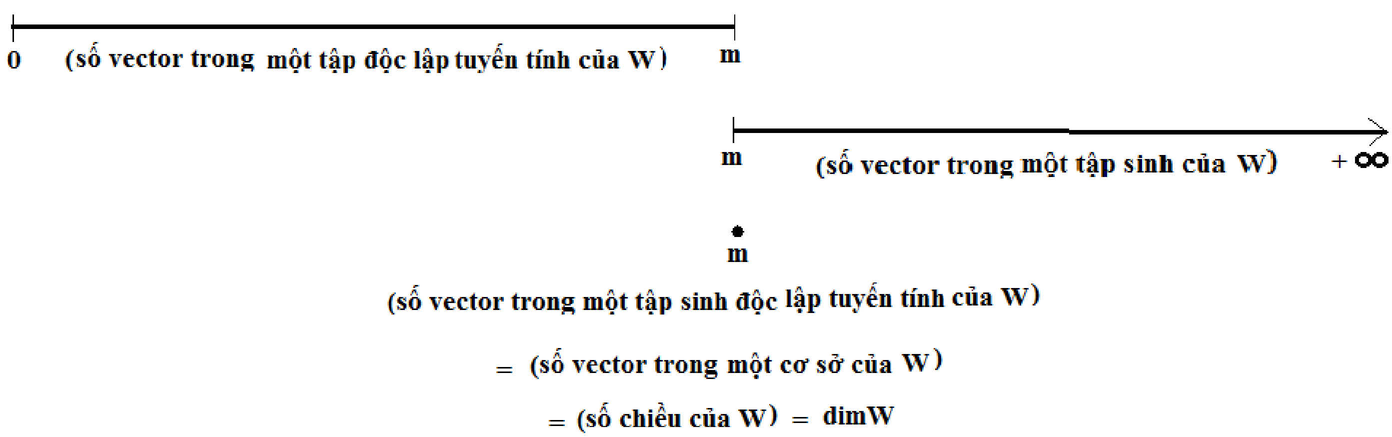
Vậy $(V \cap W) = \{ \alpha = a\alpha + b\beta - a\gamma = a(\alpha - \gamma) + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} = < Z >$ với

$Z = \{\lambda = (\alpha - \gamma) = (-1,0,2,-1), \beta = (4,-1,-2,2)\}$ *độc lập tuyến tính* vì λ *không tỉ lệ*

với β. Do đó $(V \cap W)$ có *một cơ sở* là $Z = \{ \lambda, \beta \}$ và $\dim(V \cap W) = |Z| = 2$.

5.11/ SO SÁNH SỐ VECTOR TRONG MỘT TẬP HỢP ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ TRONG MỘT TẬP SINH VỚI SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR:

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có $\dim W = m$ (*mỗi cơ sở* của W có *đúng* m *vector*).



a) Nếu S *độc lập tuyến tính* $\subset W$ thì $|S| \le m$.

Nếu (S *độc lập tuyến tính* $\subset W$ và $|S| = m$) thì S là *một cơ sở* của W.

Một cơ sở của W là *một tập hợp độc lập tuyến tính* của W *có nhiều vector nhất*.

b) Nếu $< S > = W$ thì $|S| \ge m$.

Nếu ($< S > = W$ và $|S| = m$) thì S là *một cơ sở* của W.

Một cơ sở của W là *một tập hợp sinh* của W *có ít vector nhất*.

c) Nếu ($S \subset W$ và $|S| > m$) thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

d) Nếu ($S \subset W$ và $|S| < m$) thì $< S > \ne W$.

Ví dụ:

a) Nếu S *độc lập tuyến tính* $\subset \mathbf{R}^4$ thì $|S| \le \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu (S *độc lập tuyến tính* $\subset \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim\mathbf{R}^4 = 4$) thì S là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^4$.

b) Nếu $< S > = \mathbf{R}^4$ thì $|S| \ge \dim\mathbf{R}^4 = 4$.

Nếu ($< S > = \mathbf{R}^4$ và $|S| = \dim\mathbf{R}^4 = 4$) thì S là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^4$.

c) Nếu ($S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| > \dim\mathbf{R}^5 = 5$) thì S *phụ thuộc tuyến tính*.

d) Nếu ($S \subset \mathbf{R}^5$ và $|S| < \dim\mathbf{R}^5 = 5$) thì $< S > \ne \mathbf{R}^5$.

5.12/ NHẬN DIỆN CƠ SỞ CHO KHÔNG GIAN VECTOR:

Trong (**5.5**), ta đã nêu ra *cách nhận diện một cơ sở* cho không gian $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ được gọi là *không gian đầy*). Bây giờ ta giới thiệu *cách nhận diện cơ sở* cho *không gian* W mà $W < \mathbf{R}^n$ (W được gọi là *một không gian vơi* trong $\mathbf{R}^n$).

a) Khi *chưa biết* $\dim W$: Ta dùng *định nghĩa* (**5.3**) nói về *cơ sở*.

B là *một cơ sở* của $W \Leftrightarrow$ ($< B > = W$ và B *độc lập tuyến tính*).

b) Khi *đã biết* $\dim W = m$: Ta dùng phần a) của (**5.11**).

B là *một cơ sở* của $W \Leftrightarrow$ ($B \subset W$, B *độc lập tuyến tính* và $|B| = \dim W = m$).

Ví dụ: $S = \{\alpha = (-2,1,3,0),\ \beta = (3,4,-1,5)\}$, $U = \{\gamma = (4,9,1,10),\ \delta = (9,1,-10,5)\} \subset \mathbf{R}^4$.

$\alpha \equiv X, \beta \equiv Y, \gamma \equiv Z$ và $\delta \equiv T$.

Đặt $W = < S > = \{ \varepsilon = a\alpha + b\beta \mid a, b \in \mathbf{R} \} \le \mathbf{R}^4$. Theo (**5.11**), $\dim W \le |S| = 2$ nên $W \ne \mathbf{R}^4$, nghĩa là $W < \mathbf{R}^4$. Ta giải thích S và U đều là *các cơ sở* của W.

Giải thích S là *một cơ sở* của W (*chưa biết* $\dim W$) : Do $< S > = W$ và S *độc lập tuyến tính* (α *không tỉ lệ* với β) nên S là *một cơ sở* của W và $\dim W = |S| = 2$.

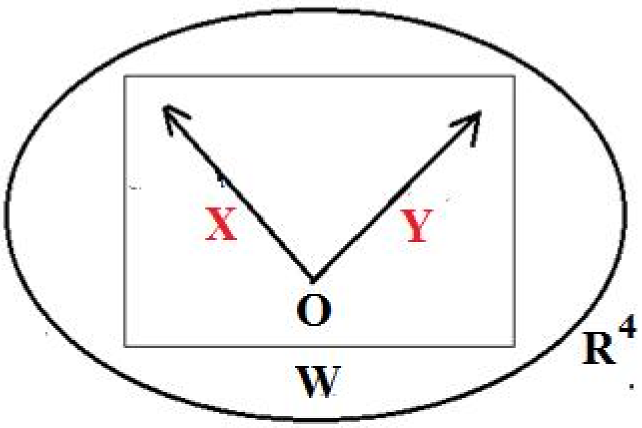
Giải thích U là *một cơ sở* của W (*đã biết* $\dim W = 2$):

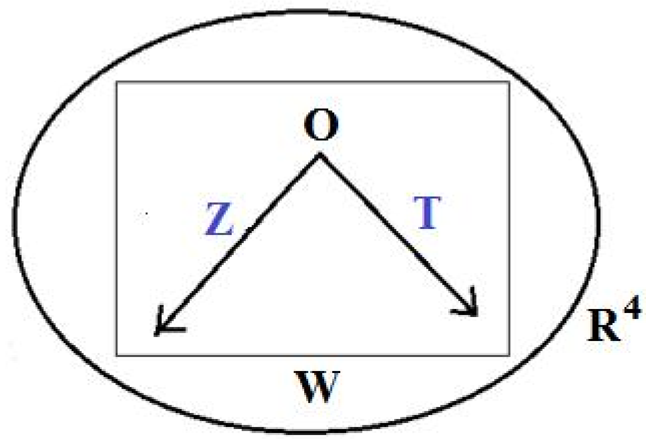
* $U = \{\gamma, \delta\} \subset W = \langle S = \{\alpha, \beta\} \rangle$ vì các phương trình $c_1\alpha + c_2\beta = \gamma$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha + d_2\beta = \delta$ (ẩn là d_1 và d_2) *đều có nghiệm thực* $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $d_1 = -3$, $d_2 = 1$.

Các phương trình trên *có vế trái như nhau* nên có thể *giải chung trong một bảng* :

$$(\alpha^t\ \beta^t \mid \gamma^t \mid \delta^t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & & \end{array} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1^* & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & & \end{array} \end{array}.$$

* $U = \{\gamma, \delta\}$ *độc lập tuyến tính* (γ *không tỉ lệ* với δ) và $|U| = 2 = \dim W$.

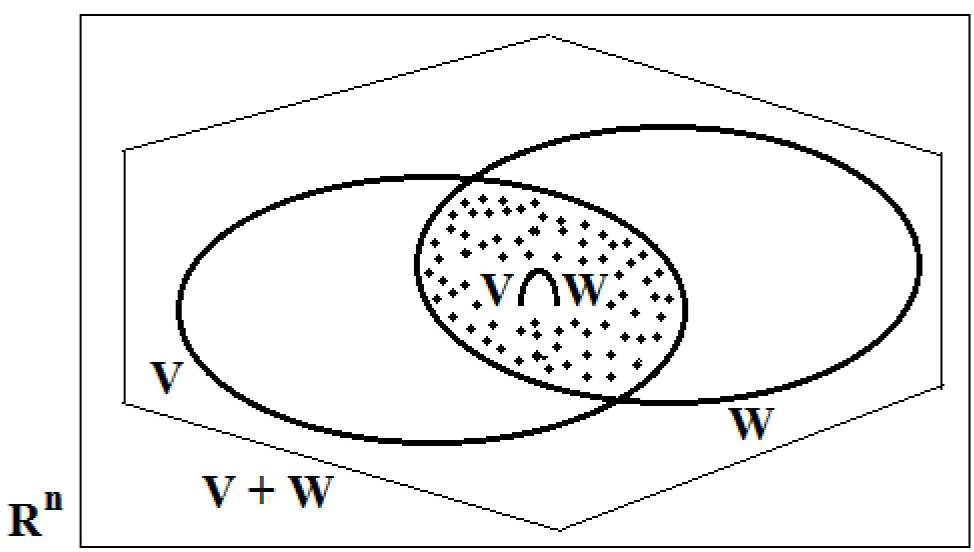




5.13/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $V, W \leq \mathbf{R}^n$.

a) Nếu $W \leq V$ thì $\dim W \leq \dim V$. Nếu $W < V$ thì $\dim W < \dim V$.

b) Nếu ($W \leq V$ và $\dim W = \dim V$) thì $W = V$.



c) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ nên $\dim(V + W) \le \dim V + \dim W$.

d) Suy ra: $\dim(V + W) = \dim V + \dim W \Leftrightarrow \dim(V \cap W) = 0 \Leftrightarrow V \cap W = \{\, \mathbf{O} \,\}$.

$\dim(V + W) < \dim V + \dim W \Leftrightarrow \dim(V \cap W) \ge 1 \Leftrightarrow V \cap W \ne \{\, \mathbf{O} \,\}$.

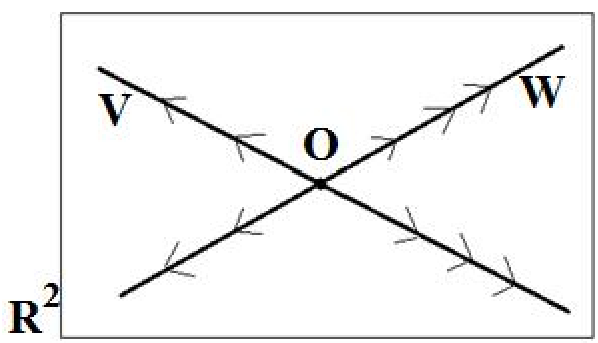
Ví dụ:

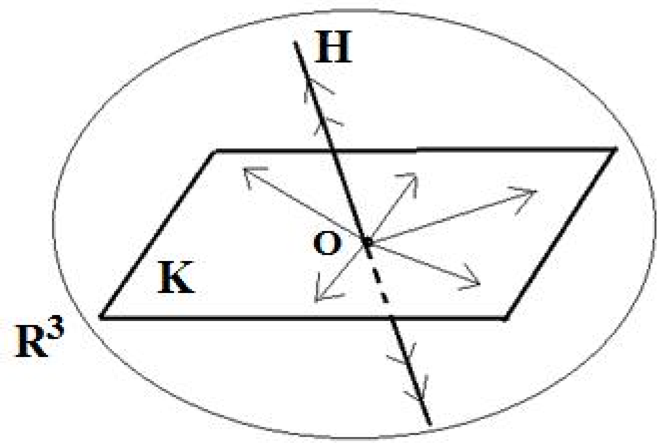
a) Xét lại **Ví dụ** của (**2.5**) mục a), b), c) về *các không gian giao* và *không gian tổng*.

$V + W = \mathbf{R}^2$, $V \cap W = \{\, \mathbf{O} \,\}$, $H + K = P + Q = \mathbf{R}^3$ và $H \cap K = \{\, \mathbf{O} \,\}$, $P \cap Q = L$.

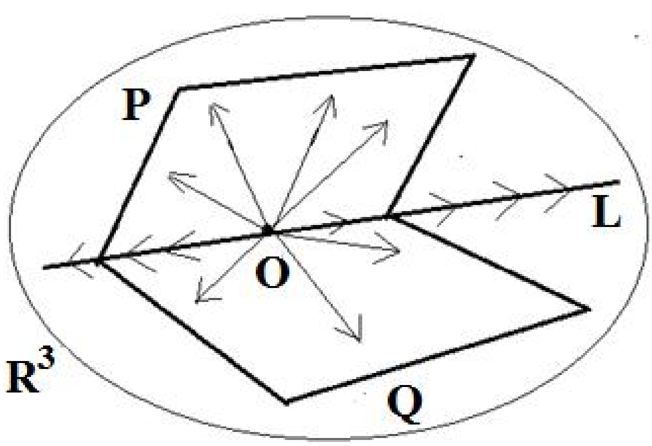
Thử lại, $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$, ta thấy $2 = 1 + 1 - 0$.

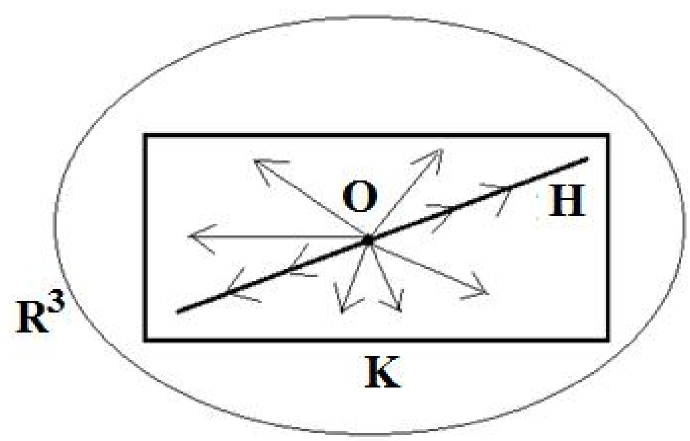
Thử lại, $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K)$, ta thấy $3 = 1 + 2 - 0$.





Thử lại, $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$, ta thấy $3 = 2 + 2 - 1$.





b) Xét lại **Ví dụ** của (**2.6**). Do $\{\, \mathbf{O} \,\} < H < K < \mathbf{R}^3$ nên

$\dim\{\, \mathbf{O} \,\} = 0 < \dim H = 1 < \dim K = 2 < \dim \mathbf{R}^3 = 3$.

c) Nếu ($W \le \mathbf{R}^4$ và $\dim W = \dim \mathbf{R}^4 = 4$) thì $W = \mathbf{R}^4$.

5.14/ HỆ QUẢ: Cho $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ *độc lập tuyến tính* $\subset \mathbf{R}^n$ với $m < n$.

Đặt $W = \langle S \rangle$ thì S là *một cơ sở* của W và $\dim W = |S| = m$ và $W < \mathbf{R}^n$.

Ta có thể chọn $(n - m)$ vector (từ *cơ sở chính tắc* $B_o = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$) thêm vào S để được *một cơ sở* B của $\mathbf{R}^n$ và $S \subset B$. Cách chọn như sau:

Đặt $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và tìm dạng bậc thang S_A của A. S_A có $(n - m)$ cột không *bán chuẩn hóa được* là các cột thứ $i_1, i_2, \ldots, i_{n-m}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m} \le n)$.

Ta thêm $\{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}}\}$ vào S để có $B = S \cup \{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n-m}}\}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ: $S = \{\alpha_1 = (3,1,-2,5), \alpha_2 = (-2,0,4,-3)\}$ *độc lập tuyến tính* $\subset \mathbf{R}^4$ $(m = 2 < n = 4)$.

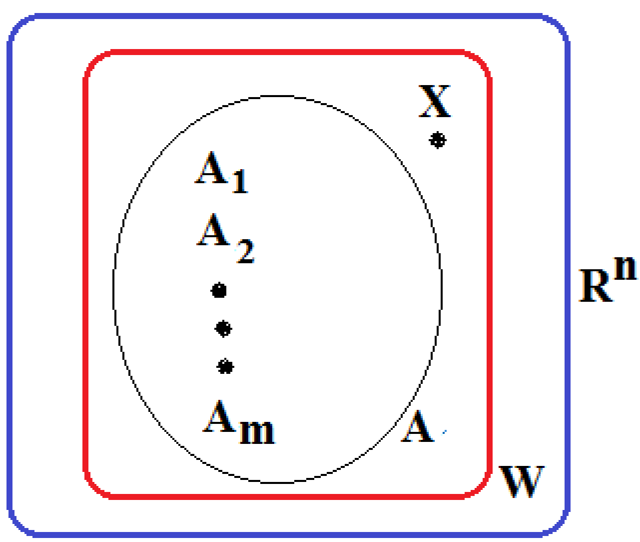
$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2^* & 8 & 1 \end{pmatrix}$ có cột 3 và 4 *không bán chuẩn hóa được*

Đặt $B = S \cup \{\varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1)\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ thì B là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^4$

VI. TỌA ĐỘ CỦA VECTOR THEO CƠ SỞ CÓ THỨ TỰ:

Trong mục **VI** này, ta qui định tất cả *các cơ sở được sử dụng* đều *có thứ tự*.

6.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có *cơ sở* $A = \{\alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_2, \ldots, \alpha_m \equiv A_m\}$ ($\dim W = m$).



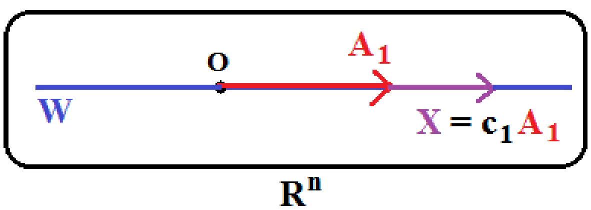
a) $\forall \alpha \equiv X \in W, \exists!\ c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ thỏa $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m$ (*).

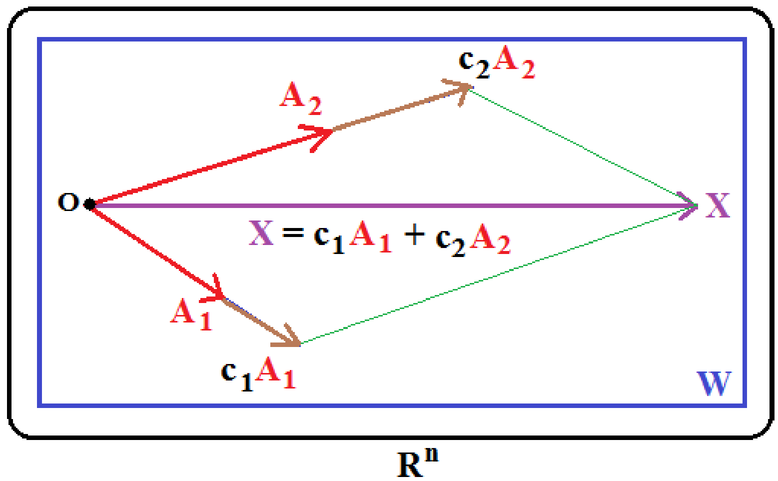
Muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ta phải giải *phương trình vector* (*) [theo (**5.6**)].

Ta ký hiệu $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ (**) và $[\,\alpha\,]_A$ gọi là *tọa độ của vector* α *theo cơ sở* A.

Ta có (*) và (**) có *ý nghĩa như nhau* và có thể *dùng thay thế cho nhau*.

b) $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}$, $[\,c\alpha\,]_A = c[\,\alpha\,]_A$ và $[\,\alpha \pm \beta\,]_A = [\,\alpha\,]_A \pm [\,\beta\,]_A$.



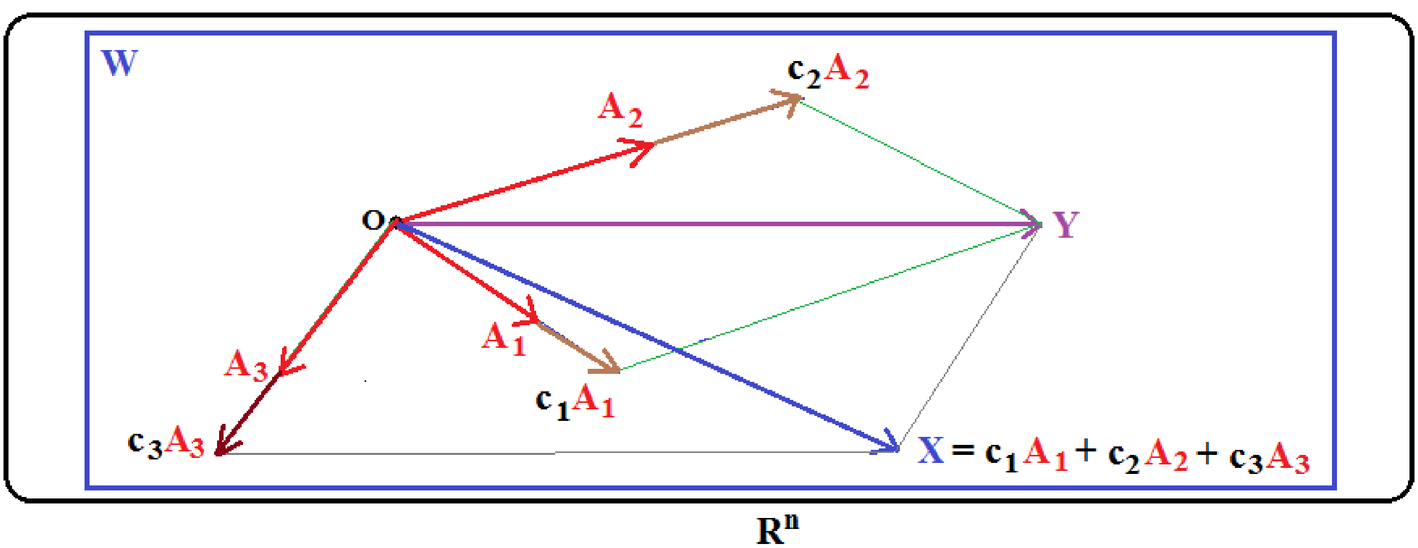


$W \le \mathbf{R}^n$, W có cơ sở $A = \{A_1\}$ ($\dim W = 1$).

$\forall X \in W, \exists!\, c_1 \in \mathbf{R}, X = c_1A_1$.

$W \le \mathbf{R}^n$, W có cơ sở $A = \{A_1, A_2\}$ ($\dim W = 2$).

$\forall X \in W, \exists!\, c_1, c_2 \in \mathbf{R}, X = c_1A_1 + c_2A_2$.



$W \le \mathbf{R}^n$, W có cơ sở $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ ($\dim W = 3$).

$\forall X \in W, \exists!\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}, X = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$.

<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có *cơ sở* $A = \{ \alpha_1 = (1,-2, 2), \alpha_2 = (2,-3, 6), \alpha_3 = (1,1,7) \}$ (*có thứ tự*).

a) Xét $\alpha \in \mathbf{R}^3$ có $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $\alpha = 4\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4(1, -2, 2) - (2, -3, 6) + 3(1, 1, 7) = (5, -2, 23)$.

b) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (3, 11, 35) \in \mathbf{R}^3$. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$,

nghĩa là $c_1(1,-2,2) + c_2(2,-3,6) + c_3(1,1,7) = (3,11,35)$. *Ma trận hóa phương trình trên*

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 7 & 35 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 8 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -5 & -31 \\ 0 & 1^* & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 5 \end{array}\right) \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Ta có $[\,-\sqrt{3}\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\,[\,\alpha\,]_A = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ và

$$[\,\alpha \pm \beta\,]_A = [\,\alpha\,]_A \pm [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

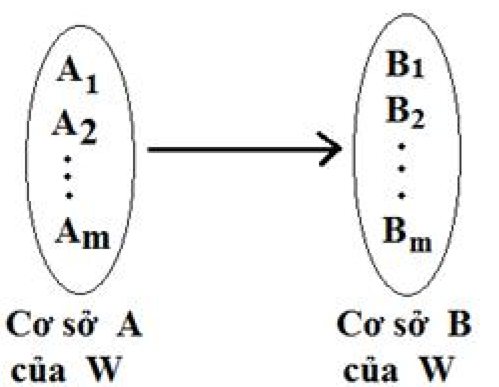
6.2/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ:</u>

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ và W có *các cơ sở* $A = \{ \alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_2, \ldots, \alpha_m \equiv A_m \}$ và

$B = \{ \beta_1 \equiv B_1, \beta_2 \equiv B_2, \ldots, \beta_m \equiv B_m \}$ với $\dim W = m$.

Lập *ma trận* $P = ([\,\beta_1\,]_A \;\; [\,\beta_2\,]_A \ldots [\,\beta_m\,]_A) \in M_m(\mathbf{R})$.

Ta nói P là *ma trận đổi cơ sở* từ A qua B và ký hiệu $P = (A \to B)$.



Ma trận P đổi cơ sở từ A qua B là

$P = (A \to B) = ([\,B_1\,]_A \;\; [\,B_2\,]_A \ldots [\,B_m\,]_A)$

Các vector thuộc cơ sở B (đi sau) được lấy tọa độ theo cơ sở A (đi trước)

[*mỗi vector* của *cơ sở* B (*đi sau*) được *lấy tọa độ* theo *cơ sở* A (*đi trước*)].

<u>Ví dụ:</u>

a) *Không gian* W có *các cơ sở* $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ và $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ thỏa các hệ thức $\beta_1 = \pi\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{3}\,\alpha_3$, $\beta_2 = -\,2\alpha_1 - (\ln 5)\alpha_3$ và $\beta_3 = 4\alpha_1 + e\alpha_2 - (9/7)\alpha_3$.

Ta có $P = (A \to B) = ([\beta_1]_A \;\; [\beta_2]_A \;\; [\beta_3]_A) = \begin{pmatrix} \pi & -2 & 4 \\ -1 & 0 & e \\ \sqrt{3} & -\ln 5 & -9/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

b) $\mathbf{R}^2$ có *các cơ sở* $A = \{\alpha_1 = (-2,5), \alpha_2 = (1,-3)\}$ và $B = \{\beta_1 = (-1, 1), \beta_2 = (6, -17)\}$.

Ta có $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ và $\beta_2 = -\,\alpha_1 + 4\alpha_2$ bằng cách giải *hai phương trình vector* $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta_1$ (ẩn là c_1 và c_2) và $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 = \beta_2$ (ẩn là d_1 và d_2) mà khi *ma trận hóa* sẽ chúng có *vế trái y hệt nhau* trong *cùng một bảng* :

$$(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \,|\, \beta_1^t \;|\, \beta_2^t) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -17 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} d_1 & d_2 \end{matrix} \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1^* & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1^* & 3 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} d_1 & d_2 \end{matrix} \end{array}.$$

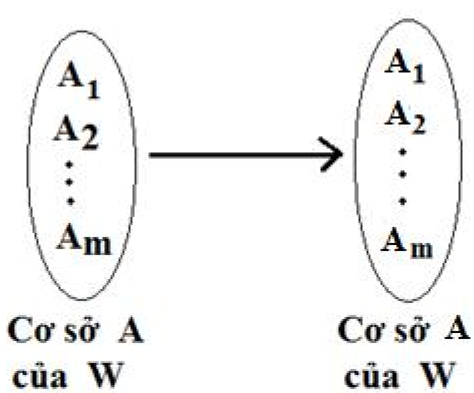
Như vậy $P = (A \to B) = ([\beta_1]_A \;\; [\beta_2]_A) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

6.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^n$ với $\dim W = m$ và W có *các cơ sở* A, B, C. Khi đó

a) $P = (A \to B)$ là ma trận vuông cấp m *khả nghịch* và $(A \to B)^{-1} = (B \to A)$.

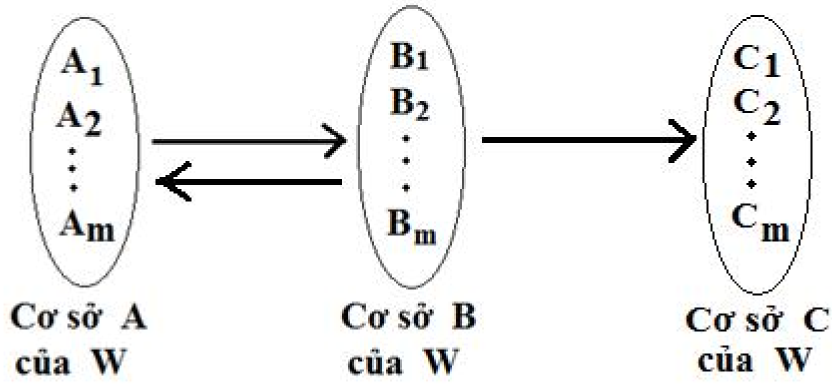
b) $(A \to A) = I_m$.

c) $(A \to C) = (A \to B).(B \to C)$.



Ma trận P đổi cơ sở từ A qua A là

$$P = (A \to A) = ([A_1]_A \;\; [A_2]_A \;\ldots\; [A_m]_A) = I_m$$



Ví dụ:

a) Cho *không gian* W có *cơ sở* $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ và $\dim W = |A| = 3$. Hiển nhiên

$$\alpha_1 = \mathbf{1}.\alpha_1 + \mathbf{0}.\alpha_2 + \mathbf{0}.\alpha_3,\ \ \alpha_2 = \mathbf{0}.\alpha_1 + \mathbf{1}.\alpha_2 + \mathbf{0}.\alpha_3 \ \text{ và } \ \alpha_3 = \mathbf{0}.\alpha_1 + \mathbf{0}.\alpha_2 + \mathbf{1}.\alpha_3$$

$$\text{nên } (A \to A) = ([\alpha_1]_A \ [\alpha_2]_A \ [\alpha_3]_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in M_3(\mathbf{R}).$$

b) Không gian V có *các cơ sở* A, B, C và $(A \to B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $(B \to C) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Ta có $(B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ và

$$(A \to C) = (A \to B).(B \to C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 23 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}.$$

6.4/ CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ THEO CƠ SỞ:

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có *các cơ sở* A và B.

Khi đó ta có *công thức đổi tọa độ theo cơ sở*

$$\forall \alpha \in W,\ [\alpha]_A = (A \to B).[\alpha]_B$$

Ví dụ: Không gian W có *các cơ sở* $A = \{ \alpha, \beta \}$ và $B = \{ \gamma, \delta \}$ thỏa

$$(A \to B) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } (B \to A) = (A \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cho $\varepsilon, \theta \in W$ thỏa $[\varepsilon]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $[\theta]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tính $[\varepsilon]_A$ và $[\theta]_B$.

Ta có $[\,\varepsilon\,]_A = (A \to B).[\,\varepsilon\,]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 57 \end{pmatrix}$ (nghĩa là $\varepsilon = -6\gamma + 5\delta = 40\alpha + 57\beta$)

và $[\,\theta\,]_B = (B \to A).[\,\theta\,]_A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -61 \end{pmatrix}$ (nghĩa là $\theta = 3\alpha - 8\beta = -25\gamma - 61\delta$).

6.5/ <u>MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$:</u>

a) $\mathbf{R}^n$ có *cơ sở chính tắc* $B_o = \{\varepsilon_1 = (1,0,\ldots,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \varepsilon_n = (0,\ldots,0,1)\}$.

$\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n \Leftrightarrow [\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha^t$.

Chẳng hạn $\alpha = (7, -\sqrt{2}, e, -\pi) \in \mathbf{R}^4$ có $[\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\sqrt{2} \\ e \\ -\pi \end{pmatrix} = \alpha^t$.

b) Giả sử $\mathbf{R}^n$ có *các cơ sở* $A = \{\alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_2, \ldots, \alpha_n \equiv A_n\}$ và

$B = \{\beta_1 \equiv B_1, \beta_2 \equiv B_2, \ldots, \beta_n \equiv B_n\}$. Ta muốn viết $P = (A \to B)$.

<u>*Cách 1*:</u> (*tìm gián tiếp* thông qua *cơ sở chính tắc* $B_o = \{\varepsilon_1 \equiv e_1, \ldots, \varepsilon_n \equiv e_n\}$).

Viết $H = (B_o \to A) = ([\alpha_1]_{B_o}\ [\alpha_2]_{B_o} \ldots [\alpha_n]_{B_o}) = (\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t) \in M_n(\mathbf{R})$.

$K = (B_o \to B) = ([\beta_1]_{B_o}\ [\beta_2]_{B_o} \ldots [\beta_n]_{B_o}) = (\beta_1^t\ \beta_2^t\ \ldots\ \beta_n^t) \in M_n(\mathbf{R})$.

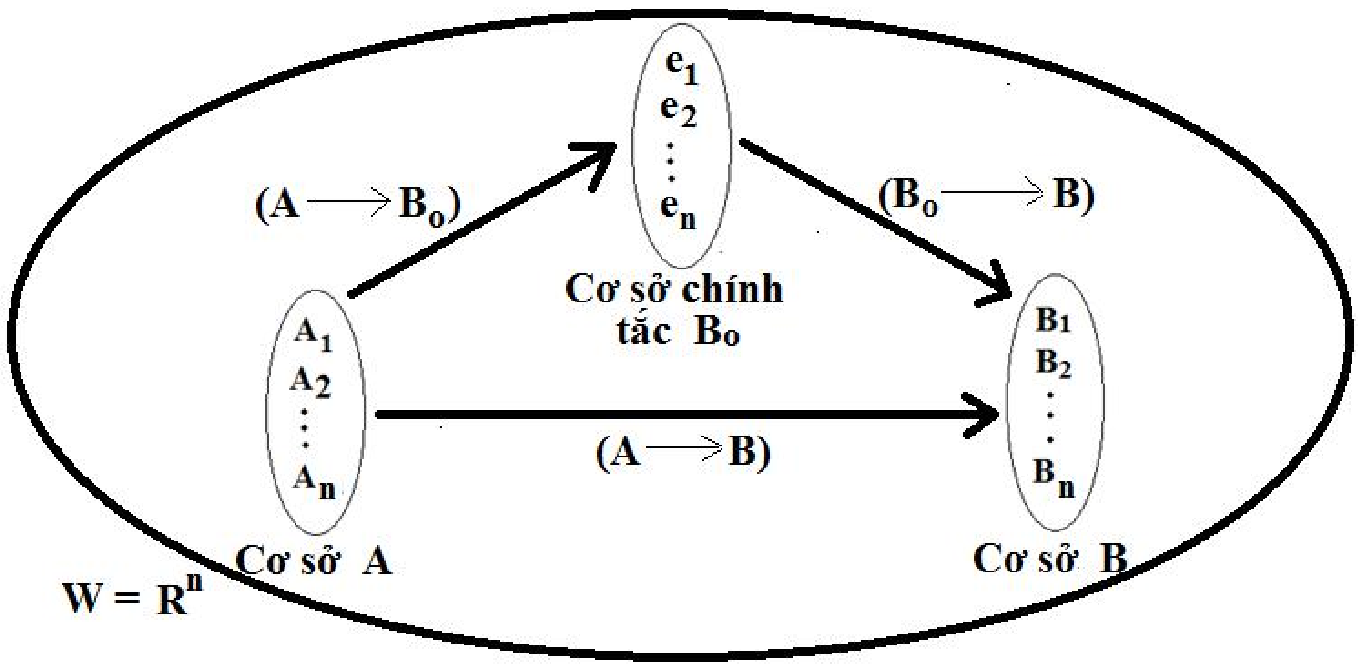
Ta có $P = (A \to B) = (A \to B_o)(B_o \to B) = H^{-1}K$. Ở đây ta tìm P dựa vào H^{-1}.

<u>*Cách 2*:</u> (tìm trực tiếp theo *định nghĩa* của *ma trận đổi cơ sở*).

Ta có $P = (A \to B) = ([\beta_1]_A\ [\beta_2]_A \ldots [\beta_n]_A)$. Muốn tìm *tọa độ* của *các vector* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ theo *cơ sở* A, ta phải giải n *hệ phương trình tuyến tính*, mỗi hệ có n *phương trình* và n *ẩn số*. Các hệ này *cùng có vế trái* là $(\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t)$ và *các vế phải của chúng* lần lượt là *các cột* $\beta_1^t, \beta_2^t, \ldots, \beta_n^t$. Do đó ta có thể *giải đồng thời* n hệ trên trong *cùng một bảng ma trận* là $\left(\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t \,\middle|\, \beta_1^t \,\middle|\, \beta_2^t \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \beta_n^t\right)$. Sau khi giải xong n hệ trên bằng *phương pháp Gauss – Jordan*, ta có được $(I_n \mid P)$ với

$P = ([\beta_1]_A \ [\beta_2]_A \ldots [\beta_n]_A) = (A \to B)$.

Ở đây ta cũng tìm được $P = H^{-1}K$ mà *không cần đề cập đến* H, K và H^{-1}.



<u>Ví dụ:</u> $W = \mathbf{R}^3$ có *các cơ sở* $A = \{ \alpha_1 = (-3, 4, 6), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -3, -4) \}$,

$B = \{\beta_1 = (3, 4, 9), \beta_2 = (2, 1, 2), \beta_3 = (-7, 1, 4)\}$ và *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

a) Viết $P = (A \to B)$.

<u>Cách 1</u>: sử dụng *cơ sở chính tắc* $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$.

Đặt $H = (B_o \to A) = (\alpha_1^t \ \alpha_2^t \ \alpha_3^t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Ta *tìm trực tiếp* H^{-1} theo *sơ đồ sau*:

$$(H \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -6 & -6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1^* & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) = (I_3 \mid H^{-1}) \text{. Vậy } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Đặt $K = (\,B_o \to B\,) = (\,\beta_1^t \;\; \beta_2^t \;\; \beta_3^t\,) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có $P = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Cách 2: Tìm trực tiếp $P = (\,A \to B\,) = ([\,\beta_1\,]_A \;\; [\,\beta_2\,]_A \;\; [\,\beta_3\,]_A)$ bằng cách giải 3 *hệ phương trình tuyến tính* được *ma trận hóa* như sau (không đề cập đến H, K và H^{-1})

$$\left(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\; \alpha_3^t \,\middle|\, \beta_1^t \,\middle|\, \beta_2^t \,\middle|\, \beta_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -3 & 0 & 2 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 9 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 1 & -1 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -24 & -11 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & -1 & -8 & -3 & 4 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 7 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 13 & 4 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 15 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1^* & 21 & 7 & -5 \end{array}\right) = (\,I_3 \mid [\,\beta_1\,]_A \;\; [\,\beta_2\,]_A \;\; [\,\beta_3\,]_A\,).$$

Vậy $P = (\,A \to B\,) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

b) Tìm $\alpha \in \mathbf{R}^3$ nếu $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ta có

$\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 2(-3, 4, 6) + (0, 1, 1) - 5(2, -3, -4) = (-16, 24, 33)$.

c) Tìm $[\,\beta\,]_A$ nếu $\beta = (4, -3, -2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng *định nghĩa của tọa độ*. Đặt $[\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $\left(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\; \alpha_3^t \,\middle|\, \beta^t\right) =$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1^* & 11 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow [\,\beta\,]_A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Cách 2: dùng *công thức đổi tọa độ* theo *cơ sở*.

Ta có $[\beta]_{B_o} = \beta^t = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ và $[\,\beta\,]_A = (A \to B_o)\,[\beta]_{B_o} = H^{-1}\beta^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) Xét $\gamma \in \mathbf{R}^3$ có $[\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tính $[\,\gamma\,]_A$.

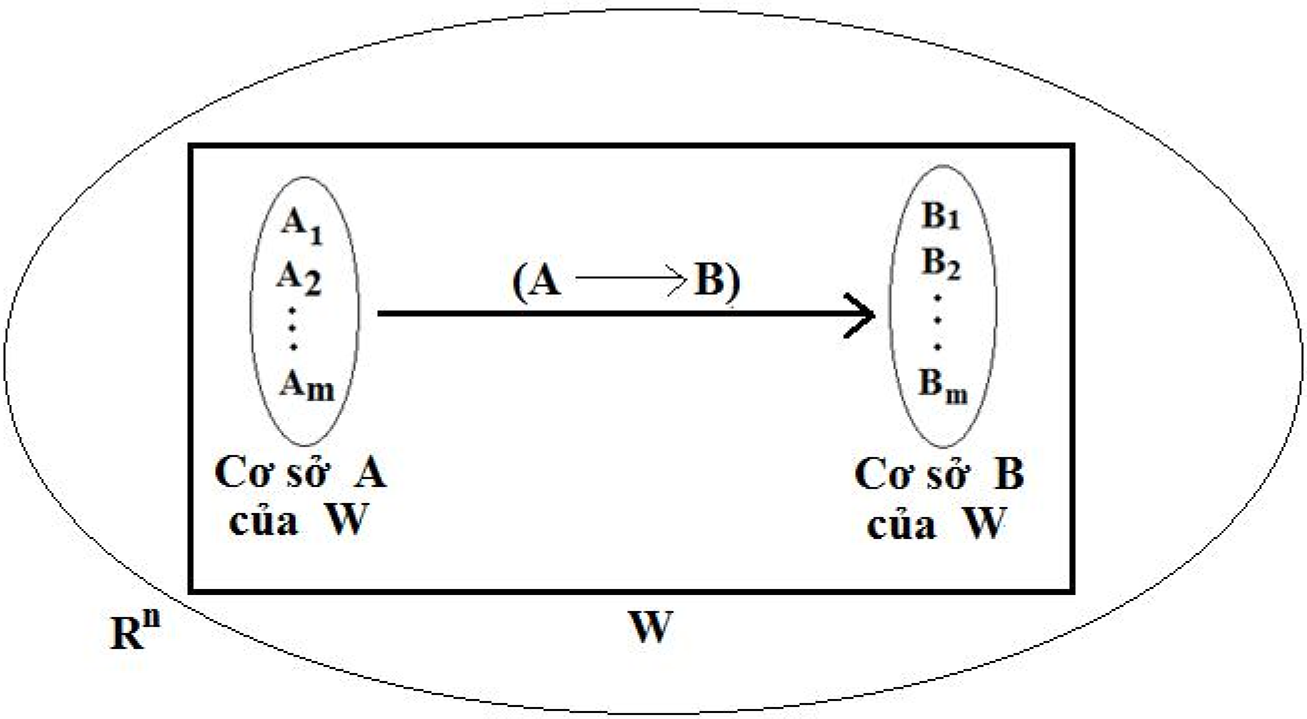
Ta có $[\,\gamma\,]_A = (A \to B)\,[\,\gamma\,]_B = P.[\,\gamma\,]_B = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 \\ 100 \\ 131 \end{pmatrix}$

(nghĩa là $\gamma = 6\beta_1 - \beta_3 = 79\alpha_1 + 100\alpha_2 + 131\alpha_3$).

6.6/ MA TRẬN ĐỔI CƠ SỞ TRONG KHÔNG GIAN $W < \mathbf{R}^n$:

Cho $W < \mathbf{R}^n$ (nghĩa là $W \le \mathbf{R}^n$ và $\dim W = m < n$). Ta có $B_o = \{\,\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\,\} \not\subset W$.

Giả sử W có *các cơ sở* $A = \{\,\alpha_1 \equiv A_1, \ldots, \alpha_m \equiv A_m\,\}$ và $B = \{\,\beta_1 \equiv B_1, \ldots, \beta_m \equiv B_m\}$.



Ta có $P = (A \to B) = (\,[\,\beta_1\,]_A \;\; [\,\beta_2\,]_A \ldots [\,\beta_m\,]_A\,)$. Muốn tìm $[\,\beta_j\,]_A$ $(1 \le j \le m)$, ta phải giải m *hệ phương trình tuyến tính*, mỗi hệ có n *phương trình* và m *ẩn số*. Các hệ này *có cùng vế trái* là $(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\ldots\; \alpha_m^t)$ và *các vế phải của chúng* lần lượt là các cột β_1^t, β_2^t, ... và β_m^t. Do đó ta có thể *giải đồng thời* m *hệ phương trình tuyến tính* trên trong *cùng một bảng* là $\left(\alpha_1^t \;\; \alpha_2^t \;\ldots\; \alpha_m^t \middle| \;\beta_1^t\; \middle| \;\beta_2^t\; \middle| \ldots \middle| \;\beta_m^t\right)$.

Khi *giải xong* hệ trên bằng *phương pháp Gauss - Jordan*, ta *xóa bỏ* $(n-m)$ *dòng tầm thường ở phía dưới* và thu được $P = (A \to B)$ từ *các vế ở bên phải*.

Ví dụ: Cho $W \le \mathbf{R}^4$ nhận $A = \{\ \alpha_1 = (-1,1,5,0),\ \alpha_2 = (2,-5,-4,1),\ \alpha_3 = (-3,0,-2,4)\ \}$ và $B = \{\beta_1 = (-1,7,16,-5),\ \beta_2 = (11,-17,3,-4),\ \beta_3 = (-19,13,15,14)\}$ là *các cơ sở*.

Ta có $\dim W = |A| = 3 < \dim \mathbf{R}^4 = 4$ nên $W < \mathbf{R}^4$ và $B_o = \{\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\ \} \not\subset W$.

Do đó $P = (A \to B) = ([\ \beta_1\ ]_A\ [\ \beta_2\ ]_A\ [\ \beta_3\ ]_A)$. Để tìm $[\ \beta_1\ ]_A$, $[\ \beta_2\ ]_A$ và $[\ \beta_3\ ]_A$, ta giải *đồng thời* 3 *hệ phương trình tuyến tính dưới đây* (mỗi hệ có 4 *phương trình* và 3 *ẩn số*)

$$\left(\alpha_1^t\ \ \alpha_2^t\ \ \alpha_3^t \middle|\ \beta_1^t \middle|\ \beta_2^t \middle|\ \beta_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & -3 & -1 & 11 & -19 \\ 1 & -5 & 0 & 7 & -17 & 13 \\ 5 & -4 & -2 & 16 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & 3 & 1 & -11 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & -17 & 11 & 58 & -80 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -4 & 14 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 5 & -3 & -7 & 23 \\ 0 & 1^* & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 23 & 46 & -92 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} & I_3 & & [\beta_1]_A & [\beta_2]_A & [\beta_3]_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Xóa *dòng cuối tầm thường* từ *các cột ở vế bên phải*, ta có

$$P = (A \to B) = (\ [\ \beta_1\ ]_A\ \ [\ \beta_2\ ]_A\ \ [\ \beta_3\ ]_A\ ) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

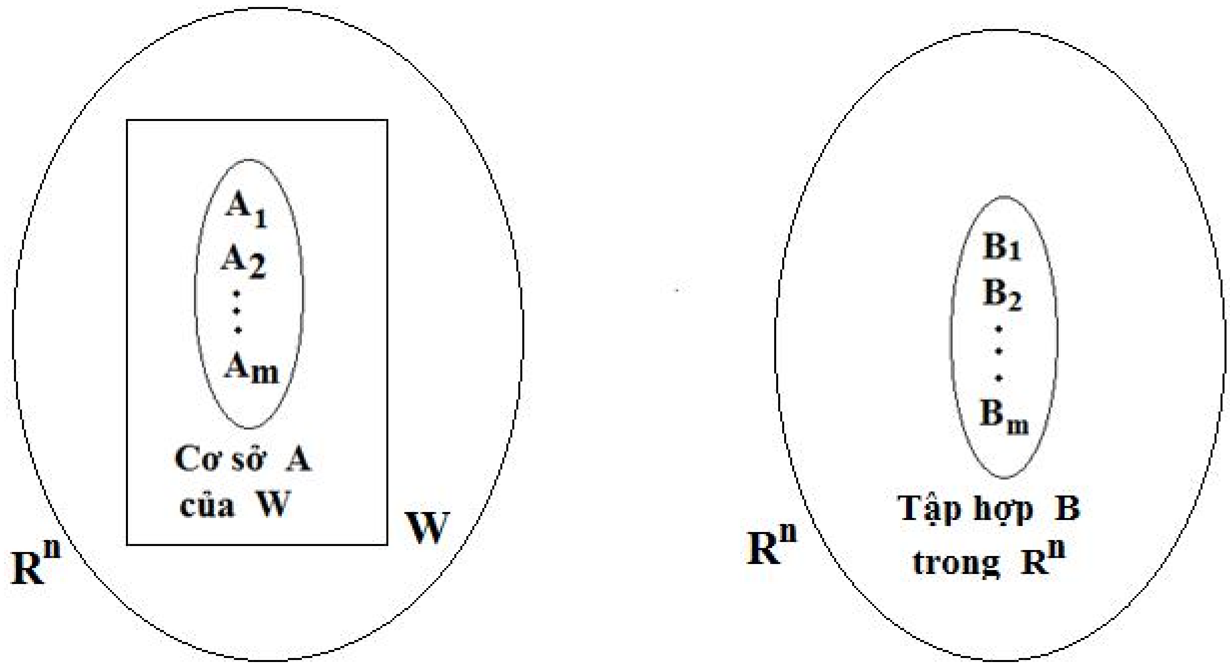
6.7/ NHẬN DIỆN MỘT CƠ SỞ DỰA THEO MỘT CƠ SỞ KHÁC:

Cho $W \le \mathbf{R}^n$ có *cơ sở* $A = \{\ \alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_1, \ldots, \alpha_m \equiv A_m\ \}$ ($\dim W = m$).

Xét *tập hợp* $B = \{\ \beta_1 \equiv B_1, \beta_2 \equiv B_2, \ldots, \beta_m \equiv B_m\ \} \subset \mathbf{R}^n$ có $|B| = m$.

a) Nếu có *ma trận khả nghịch* $P \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là *một cơ sở* của W. Lúc đó $(A \to B) = P^t$.

b) Nếu có *ma trận khả nghịch* $Q \in M_m(\mathbf{R})$ thỏa $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ thì B cũng là *một cơ sở* của W. Lúc đó $(B \to A) = Q^t$.



<u>Ví dụ:</u> Cho $W \le \mathbf{R}^5$ có *cơ sở* $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ ($\dim W = 3$).

Giả sử có các tập hợp $B = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$ và $C = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}$ trong $\mathbf{R}^5$ thỏa

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3$ và $\beta_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3$,

$\alpha_1 = 2\gamma_1 + 3\gamma_2 + 3\gamma_3$, $\alpha_2 = -\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2\gamma_3$ và $\alpha_3 = -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 4\gamma_3$. Như vậy

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ với } Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có $|Q| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -1 \\ -1^{*} & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 60 \ne 0$ nên Q *khả nghịch*.

Do đó B và C đều là *các cơ sở* của W với

$$(A \to B) = (C \to A) = Q^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

VII. KHÔNG GIAN VECTOR THỰC TỔNG QUÁT:

Từ *cấu trúc không gian vector* $\mathbf{R}^n$ trên $\mathbf{R}$, ta có thể xây dựng *một cấu trúc không gian vector tổng quát* trên $\mathbf{R}$.

7.1. ĐỊNH NGHĨA: Cho tập hợp $V \neq \varnothing$ và mỗi phần tử của V được gọi là " *một vector* ". Giả sử rằng

– Trên V có một phép toán ký hiệu hình thức là $+$ (*được gọi là phép cộng vector*), nghĩa là $\forall \alpha, \beta \in V$, ta có duy nhất $(\alpha + \beta) \in V$.

– Có một qui tắc liên kết từ $\mathbf{R}$ vào V ký hiệu hình thức là $.$ (*được gọi là phép nhân số thực với vector*), nghĩa là $\forall c \in \mathbf{R}$, $\forall \alpha \in V$, ta có duy nhất $c.\alpha \equiv c\alpha \in V$.

Ta nói *cấu trúc đại số* $(V, +, .)$ là *một không gian vector* trên $\mathbf{R}$ (*không gian vector thực*) nếu nó thỏa 7 tính chất sau đây:

(A_1) Phép $(+)$ *giao hoán* và *kết hợp*, nghĩa là $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{và} \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.$$

(A_2) $\exists \boldsymbol{\theta} \in V, \forall \alpha \in V, \boldsymbol{\theta} + \alpha = \alpha + \boldsymbol{\theta} = \alpha$. Ta nói $\boldsymbol{\theta}$ là " *vector không* " và ký hiệu $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{O}$. Ta có $\boldsymbol{\theta}$ là *phần tử trung hòa* của phép $(+)$.

(A_3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V$ thỏa $\alpha' + \alpha = \alpha + \alpha' = \mathbf{O}$.

Ký hiệu $\alpha' = -\alpha = (-1).\alpha$. Ta nói $-\alpha$ là " *vector đối* " của vector α.

(A_1), (A_2) và (A_3) là *các tính chất riêng* của phép $(+)$.

(B_1) $\forall \alpha \in V, 1.\alpha = \alpha$.

(B_2) $\forall \alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, c.(d.\alpha) = (c.d).\alpha$

(B_1) và (B_2) là *các tính chất riêng* của phép $(.)$.

(C_1) $\forall \alpha \in V, \forall c, d \in \mathbf{R}, (c + d).\alpha = c.\alpha + d.\alpha$

(C_2) $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbf{R}, c.(\alpha + \beta) = c.\alpha + c.\beta$

(C_1) và (C_2) là *các tính chất liên quan* giữa phép (+) và phép (.).

Ví dụ:

a) $\mathbf{R}[x] = \{ f(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbf{N}, a_o, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \}$ là tập hợp các đa thức thực. Ta có phép cộng (+) tự nhiên các đa thức thực và phép nhân (.) tự nhiên số thực với đa thức thực. Khi đó $(\mathbf{R}[x], +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $\mathbf{R}[x]$ là đa thức $\mathbf{O}$. $\forall f(x) \in \mathbf{R}[x]$, $f(x)$ có vector đối là $-f(x)$.

b) Với phép cộng (+) tự nhiên các ma trận thực kích thước $m \times n$ và phép nhân (.) tự nhiên số thực với ma trận thực $m \times n$, ta có $(M_{m \times n}(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ là ma trận $\mathbf{O}_{\mathbf{m \times n}}$.

$\forall A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, A có vector đối là $-A$.

c) $F(\mathbf{R}) = \{ f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \}$ là tập hợp các hàm số từ $\mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}$. Với phép cộng (+) tự nhiên các hàm số thực và phép nhân (.) tự nhiên số thực với hàm số thực, ta có $(F(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $F(\mathbf{R})$ là hàm hằng 0. $\forall f(x) \in F(\mathbf{R})$, $f(x)$ có vector đối là $-f(x)$.

d) $S(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \mid a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \}$ là tập hợp các dãy số thực. Với phép cộng (+) tự nhiên các dãy số thực và phép nhân (.) tự nhiên số thực với dãy số thực, ta có $(S(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $S(\mathbf{R})$ là dãy số hằng 0. $\forall (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R})$, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ có vector đối là $(-a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

e) $\Sigma(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mid a_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \}$ là tập hợp các chuỗi số thực. Với phép cộng (+) tự nhiên các chuỗi số thực và phép nhân (.) tự nhiên số thực với chuỗi số thực, ta có $(\Sigma(\mathbf{R}), +, .)$ là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Phần tử $\mathbf{O}$ của $\Sigma(\mathbf{R})$ là chuỗi số hằng 0. $\forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ có vector đối là $\sum_{n=0}^{+\infty}(-a_n)$.

7.2. <u>HỆ QUẢ:</u> $\forall\alpha \in V, \forall c \in \mathbf{R}$, ta có

a) $c.\alpha = \mathbf{O} \Leftrightarrow (c = 0$ hay $\alpha = \mathbf{O})$. b) $c.\alpha \neq \mathbf{O} \Leftrightarrow (c \neq 0$ và $\alpha \neq \mathbf{O})$.

c) Vector $\mathbf{O}$ là duy nhất. $\forall\alpha \in V$, vector đối $-\alpha$ là duy nhất.

7.3. <u>KHÔNG GIAN VECTOR CON:</u>

Cho không gian vector $(V, +, .)$ trên $\mathbf{R}$ và $W \subset V$.

Các phép toán $(+)$ và $(.)$ trên V vẫn được sử dụng trên W.

a) Ta nói W là *một không gian vector con* của V (ký hiệu $W \leq V$) nếu W thỏa các điều kiện sau đây:

* $\mathbf{O} \in W$ (1)

* $\forall\alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \in W$ (2)

* $\forall\alpha \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha \in W$ (3).

b) Suy ra $W \leq V \Leftrightarrow \forall\alpha, \beta \in W, \forall c \in \mathbf{R}, c.\alpha + \beta \in W$ (4).

c) V luôn luôn có *hai không gian con tầm thường* là $\{\mathbf{O}\}$ và chính V.

Nếu $W \leq V$ và $\{\mathbf{O}\} \neq W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con không tầm thường* của V.

Nếu $W \leq V$ và $W \neq V$ thì ta nói W là *một không gian con thực sự* của V và ký hiệu $W < V$.

Một không gian con không tầm thường của V đương nhiên là một không gian con thực sự của V (nhưng đảo lại không đúng).

Ví dụ:

a) Trong $(\mathbf{R}[x], +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$\mathbf{R_n}[x] = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f$ có bậc $\leq n$ [ký hiệu $\deg(f) \leq n$] $\}$ $(n \in \mathbf{N})$,

$P = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = 0 \}$, $Q = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$ và

$T = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = f(2) \}$. Khi $m, n \in \mathbf{N}$ và $m < n$ thì $\mathbf{R_m}[x] < \mathbf{R_n}[x]$.

Hơn nữa $Q < P$ và $Q < T$.

b) Trong $(M_{m \times n}(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$H = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = 0 \}$, $K = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = a_{mn} = 0\}$ và

$L = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} = a_{mn}\}$. Hơn nữa $K < H$ và $K < L$.

c) Trong $(M_n(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$H = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^t = A \}$, $K = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A$ là ma trận đường chéo$\}$ và

$L = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A$ là ma trận tam giác trên $\}$. Hơn nữa $K < H$ và $K < L$.

d) Trong $(F(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự như

$\mathbf{R}[x]$, $C(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f$ liên tục trên $\mathbf{R} \}$ và

$C^{(n)}(\mathbf{R}) = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f$ có đạo hàm cấp n trên $\mathbf{R} \}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Khi $m, n \in \mathbf{N}^*$ và $m < n$ thì $\mathbf{R}[x] < C^{(n)}(\mathbf{R}) < C^{(m)}(\mathbf{R}) < C(\mathbf{R})$.

e) Trong $(S(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự

$S_1(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ $\}$ và

$S_2(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ $\}$ với $S_1(\mathbf{R}) < S_2(\mathbf{R})$.

f) Trong $(\Sigma(\mathbf{R}), +, .)$, ta có các không gian con thực sự

$\Sigma_1(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ hội tụ $\}$ và $\Sigma_2(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ hội tụ $\}$.

7.4/ MỆNH ĐỀ: (phủ nhận không gian con của V).

Cho không gian vector (V, +, .) trên **R** và $W \subset V$.

Các phép toán (+) và (.) trên V vẫn được sử dụng trên W. Khi đó

a) $W \not\leq V$ (W *không phải là không gian con của* V) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} O \notin W (5) \\ hay \\ \exists \alpha, \beta \in W, \alpha + \beta \notin W (6) \\ hay \\ \exists \alpha \in W, \exists c \in R, c\alpha \notin W (7) \end{array}\right.$.

b) $W \not\leq V \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in W, \exists c \in \mathbf{R}, c\alpha + \beta \notin W$.

Khi giải thích $W \not\leq V$, ta thường sử dụng a), nghĩa là chỉ ra W thỏa (5) hay thỏa (6) hay thỏa (7) là đủ.

Ví dụ:

a) $\forall n \in \mathbf{N}$, $W_n = \{ f \in \mathbf{R}[x] \mid \deg(f) = n \} \not\leq \mathbf{R}[x]$ ($\deg(\mathbf{O}) = -\infty$ nên $\mathbf{O} \notin W_n$).

b) $Z = \{ A \in M_{m \times n}(\mathbf{R}) \mid a_{11} > 0 \} \not\leq M_{m \times n}(\mathbf{R})$ [$I_n \in Z$ và $-I_n \notin Z$].

c) $G = \{ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid |A| \neq 0 \} \not\leq M_n(\mathbf{R})$ [$I_n, -I_n \in G$ và $I_n + (-I_n) = \mathbf{O_n} \notin G$].

d) $T = \{ f \in F(\mathbf{R}) \mid f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \} \not\leq F(\mathbf{R})$ [$g(x) = x^2 \in T$ và $-g(x) = -x^2 \notin T$].

e) $S_d(\mathbf{R}) = \{ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S(\mathbf{R}) \mid (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ phân kỳ $\} \not\leq S(\mathbf{R})$ [$\mathbf{O} = (a_n = 0)_{n \in \mathbf{N}} \notin S_d(\mathbf{R})$].

f) $\Sigma_d(\mathbf{R}) = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \in \Sigma(\mathbf{R}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ phân kỳ $\} \not\leq \Sigma(\mathbf{R})$ [$\mathbf{O} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n = 0) \notin \Sigma_d(\mathbf{R})$].

7.5. GHI CHÚ:

Các khái niệm *không gian giao* của các không gian con, *không gian tổng* của các không gian con, *tổ hợp tuyến tính* của hữu hạn vector, *không gian con sinh bởi* một tập hợp hữu hạn, tập hợp hữu hạn *độc lập tuyến tính* (hoặc *phụ thuộc tuyến tính*), *cơ sở* và *số chiều hữu hạn* trong không gian vector thực tổng quát được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong không gian vector $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) Cho $S = \{ \mathbf{1}, x, e^x, \sin x, \ln(x^2+1), \arctan x, 1/\sqrt{x^2+1} \} \subset F(\mathbf{R})$.

Ta giải thích S độc lập tuyến tính trên **R** như sau : Xét $a, b, c, d, u, v, w \in \mathbf{R}$ sao

cho $a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2+1) + v.\arctan x + w/\sqrt{x^2+1} = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (*).

Ta sẽ chỉ ra $a = b = c = d = u = v = w = 0$.

Chia hai vế của (*) cho e^x và cho $x \to +\infty$, ta có $c = 0$ và xóa ce^x trong (*).

Chia hai vế của (*) cho x và cho $x \to +\infty$, ta có $b = 0$ và xóa bx trong (*).

Chia hai vế của (*) cho $\ln(x^2+1)$ và cho $x \to +\infty$, ta có $u = 0$ và xóa $u\ln(x^2+1)$ trong (*). Thế $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) vào (*) và lần lượt cho $k \to +\infty$, $k \to -\infty$, ta có $a + (v\pi/2) = a - (v\pi/2) = 0$, nghĩa là $a = v = 0$ và xóa a cùng $v.\mathrm{acrtan}x$ trong (*). Cho $x = 0$, ta có $w = 0$ và xóa $w/\sqrt{x^2+1}$ trong (*).

Cho $x = (\pi/2)$, ta có $d = 0$. Vậy S độc lập tuyến tính.

Xét $W = < S > \le F(\mathbf{R})$ thì ta có

$$W = \{f(x) = a + bx + ce^x + d\sin x + u\ln(x^2+1) + v.\arctan x + w/\sqrt{x^2+1} \mid a,b,c,d,u,v,w \in \mathbf{R}\}$$

S là một cơ sở của W vì S là môt tập sinh độc lập tuyến tính của W và $\dim W = | S | = 7$.

b) Cho $T = \{ \sin 2x, \sin^2 x, \cos^2 x \} \subset U = \{ \sin 2x, \cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x \} \subset F(\mathbf{R})$.

Ta giải thích T độc lập tuyến tính và U phụ thuộc tuyến tính trên **R** như sau :

Xét $u, v, w \in \mathbf{R}$ sao cho $u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (*). Ta sẽ chỉ ra

$u = v = w = 0$. Cho $x = 0$, ta được $w = 0$. Cho $x = \pi/2$, ta được $v = 0$.

Cho $x = \pi/4$, ta được $u = 0$. Ta có $0, 1, 1, -1 \in \mathbf{R}$ sao cho

$0.\sin 2x + 1.\cos 2x + 1.\sin^2 x + (-1)\cos^2 x = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Xét $H = \langle U \rangle = \langle T \rangle = \{ f(x) = u\sin 2x + v\sin^2 x + w\cos^2 x \mid u, v, w \in \mathbf{R}\} \leq F(\mathbf{R})$.

($\langle U \rangle = \langle T \rangle$ vì $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ là một tổ hợp tuyến tính của $\cos^2 x$ và $\sin^2 x$). T là một cơ sở của H vì T là một tập sinh độc lập tuyến tính của H và $\dim H = |T| = 3$. U không phải là một cơ sở của H vì U là một tập sinh phụ tuyến tính của H.

7.6. CÁC KHÔNG GIAN VECTOR THỰC HỮU HẠN CHIỀU:

a) $\mathbf{R}_n[x]$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ \mathbf{1}, x, x^2, \dots, x^n \}$ và $\dim\mathbf{R}_n[x] = |B| = n + 1$.

$\mathbf{R}_n[x]$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{n+1}$ về cấu trúc không gian vector.

$f(x) = (a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n) \in \mathbf{R}_n[x]$ được đồng nhất với $\alpha = (a_o, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$

b) $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \}$

(E_{ij} là ma trận có hệ số = 1 tại vị trí dòng i và cột j, còn các hệ số khác đều = 0).

Ta có $\dim M_{m\times n}(\mathbf{R}) = |B| = mn$.

$M_{m\times n}(\mathbf{R})$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{mn}$ về cấu trúc không gian vector.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ được đồng nhất với

$\alpha = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{mn}$.

c) $M_n(\mathbf{R})$ có một cơ sở chính tắc là $B = \{ E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$

(E_{ij} là ma trận có hệ số = 1 tại vị trí dòng i và cột j, còn các hệ số khác đều = 0).

Ta có $\dim M_n(\mathbf{R}) = |B| = n^2$.

$M_n(\mathbf{R})$ có thể đồng nhất với $\mathbf{R}^{n^2}$ về cấu trúc không gian vector.

$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ được đồng nhất với

$\alpha = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2}$.

d) Khi giải quyết các vấn đề trong các không gian hữu hạn chiều $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$, ta chuyển đổi các vector có liên quan trong $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$ thành các vector tương ứng trong $\mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$. Dùng các kỹ năng tính toán quen thuộc trong $\mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$ để giải quyết các vấn đề được yêu cầu. Sau khi thu được kết quả trong $\mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{mn}}$ và $\mathbf{R}^{n^2}$, ta lại chuyển đổi chúng về các vector tương ứng trong $\mathbf{R_n}[x]$, $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $M_n(\mathbf{R})$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét tính độc lập hoặc phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp sau trong $\mathbf{R_3}[x]$ và $M_2(\mathbf{R})$:

$H = \{f_1(x) = -3 + x + 2x^2 + 7x^3,\ f_2(x) = 1 - 2x + 5x^2 - 4x^3,\ f_3(x) = 2 + 4x + x^2 + 6x^3\}$

và $K = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -13 & 24 \\ 13 & -23 \end{pmatrix} \right\}$.

Ta có $\mathbf{R_3}[x] \equiv \mathbf{R}^4$ và $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$H \equiv S = \{ \alpha_1 = (-3, 1, 2, 7), \alpha_2 = (1, -2, 5, -4), \alpha_3 = (2, 4, 1, 6) \} \subset \mathbf{R}^4$ và

$K \equiv T = \{ \beta_1 = (3, -4, 1, 7), \beta_2 = (-2, 6, 8, -1), \beta_3 = (-13, 24, 13, -23) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Trong **Ví dụ (4.3)**, ta đã thấy S độc lập tuyến tính và T phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbf{R}$. Suy ra H độc lập tuyến tính và K phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbf{R}$.

b) $G = \{g_1(x) = 1 - 2x + ax^2,\ g_2(x) = 2 + (a-2)x + x^2,\ g_3(x) = 2 + (a-5)x + (a+1)x^2\}$

(a là tham số thực) có phải là một cơ sở của $\mathbf{R_2}[x]$ không ?

Ta có $\mathbf{R_2}[x] \equiv \mathbf{R}^3$ và $G \equiv S = \{\alpha = (1,-2, a), \beta = (2, a-2, 1), \gamma = (2, a-5, a+1)\} \subset \mathbf{R}^3$.

Trong **Ví dụ (5.5)**, ta đã thấy S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

Suy ra G là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow 1 \neq a \neq 3$.

c) $Z = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}\} \subset M_2(\mathbf{R})$ và

$U = \langle Z \rangle \le M_2(\mathbf{R})$. Tìm một cơ sở của U và chỉ ra $\dim U$.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$,

$Z \equiv S = \{\alpha_1 = (1, 2, 2, -1), \alpha_2 = (4, 7, 1, -2), \alpha_3 = (-2, -3, 4, 0), \alpha_4 = (3, 7, 15, -5)\} \subset \mathbf{R}^4$

và $U \equiv W = \langle S \rangle \le \mathbf{R}^4$. Trong **Ví dụ (5.7)**, ta đã thấy W có một cơ sở là

$C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 2, -1), \gamma_2 = (0, 1, 9, -2), \gamma_3 = (0, 0, -1, 0) \}$. Suy ra U có một cơ sở

là $T = \{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$ và $\dim U = |T| = 3$.

d) $\mathbf{R}_2[x]$ có các cơ sở là

$G = \{ g_1(x) = -3 + 4x + 6x^2, g_2(x) = x + x^2, g_3(x) = 2 - 3x - 4x^2 \}$ và

$H = \{ h_1(x) = 3 + 4x + 9x^2, h_2(x) = 2 + x + 2x^2, h_3(x) = -7 + x + 4x^2 \}$.

Viết $P = (G \to H)$.

Ta có $\mathbf{R}_2[x] \equiv \mathbf{R}^3$, $G \equiv A = \{ \alpha_1 = (-3, 4, 6), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -3, -4) \}$ và

$H \equiv B = \{\beta_1 = (3, 4, 9), \beta_2 = (2, 1, 2), \beta_3 = (-7, 1, 4)\} \subset \mathbf{R}^3$. Trong **Ví dụ (6.5)**, ta đã

thấy $L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Suy ra $P = (G \to H) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 15 & 6 & -10 \\ 21 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

e) $V \le M_2(\mathbf{R})$, $\dim V = 3$ và V có các cơ sở

$Z = \{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\}$ và

$T = \{ B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 11 & -17 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -19 & 13 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}\}$. Viết $Q = (Z \to T)$.

Ta có $M_2(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^4$, $Z \equiv A = \{\alpha_1 = (-1, 1, 5, 0), \alpha_2 = (2, -5, -4, 1), \alpha_3 = (-3, 0, -2, 4) \}$

và $T \equiv B = \{\beta_1 = (-1, 7, 16, -5), \beta_2 = (11, -17, 3, -4), \beta_3 = (-19, 13, 15, 14) \} \subset \mathbf{R}^4$.

Ta có $V \equiv W$ trong đó W có các cơ sở A và B. Trong **Ví dụ (6.6)**, ta đã thấy

$L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $Q = (Z \to T) \equiv L = (A \to B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
