CHƯƠNG II

CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN
MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

I. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN:

1.1/ PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Đặt $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ sao cho $b_{ij} = a_{ji}$ ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$), nghĩa là *ma trận* B được suy từ *ma trận* A bằng cách viết *các dòng* (hay *các cột*) của A lần lượt thành *các cột* (hay *các dòng*) của B.

Ta nói B là *ma trận chuyển vị* của A và ký hiệu $B = A^t$ (t = *transposition*).

Để ý $(A^t)^t = B^t = A$. Nếu $C \in M_n(\mathbf{R})$ thì $C^t \in M_n(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$ có $B = A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $b_{13} = a_{31} = 5$, $b_{22} = a_{22} = 0$ và $b_{41} = a_{14} = -5$. Để ý $(A^t)^t = B^t = A$.

b) $C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $D = C^t = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $d_{12} = c_{21} = -7$, $d_{33} = c_{33} = -3$ và $d_{23} = c_{32} = 6$. Để ý $(C^t)^t = D^t = C$.

1.2/ PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Đặt $c.A = (ca_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Ta có $1.A = A$, $0.A = \mathbf{O}_{m\times n}$ và $(-1).A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

Đặt $-A = (-1).A$ và gọi $-A$ là *ma trận đối* của A.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}) \quad \text{có} \quad -\frac{4}{3}.A = \begin{pmatrix} 8/3 & -28/3 & -32/3 & 20/3 \\ -4/3 & 0 & 16/3 & -12 \\ -20/3 & 4 & -8/3 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.3/ PHÉP CỘNG MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ và $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Đặt $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ và $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 7 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}).$$

Ta có $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 17 & -5 \\ -2 & 6 & -6 & 16 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ và $A - B = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$.

1.4/ TÍNH CHẤT: Cho $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $c, d \in \mathbf{R}$. Khi đó:

a) $c.(d.A) = (c.d).A$ $\qquad (c.A)^t = c.A^t$ $\qquad (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$.

b) *Phép cộng ma trận giao hoán* và *kết hợp*:

$B + A = A + B$ $\qquad (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

c) $\mathbf{O}_{m\times n} + A = A + \mathbf{O}_{m\times n} = A$ $\qquad (-A) + A = A + (-A) = \mathbf{O}_{m\times n}$.

d) $(c \pm d).A = c.A \pm d.A$ $\qquad c.(A \pm B) = c.A \pm c.B$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$. Ta có

$(-4A)^t = -4A^t$. $\qquad (-7)(6A) = [\,(-7)6\,]A = -42A$.

$(5 + 8)A = 5A + 8A = 13A$. $\qquad (-9)(A + B) = (-9)A + (-9)B$.

1.5/ TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA DÒNG VỚI CỘT:

Cho *dòng* $U = (u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n) \in M_{1\times n}(\mathbf{R})$ và *cột* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbf{R})$.

Đặt $U.V = (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ thì $U.V \in \mathbf{R}$.

Ví dụ:

$U = (-3 \quad 8 \quad -6 \quad 9 \quad 2) \in M_{1\times 5}(\mathbf{R})$ và $V = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{5\times 1}(\mathbf{R})$.

Ta có $U.V = (-3)7 + 8.0 + (-6)(-5) + 9.1 + 2(-4) = 10 \in \mathbf{R}$.

1.6/ PHÉP NHÂN MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} \in M_{n\times p}(\mathbf{R})$ thỏa điều kiện

(*số cột* của A) = n = (*số dòng* của B).

Ta quan tâm m *dòng* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ của A (*mỗi dòng có* n *số hạng*) và quan tâm p *cột* $B_1, B_2, \ldots, B_p$ của B (*mỗi cột có* n *số hạng*).

Ta thực hiện *phép nhân ma trận* $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ với $B \in M_{n\times p}(\mathbf{R})$ bằng cách *nhân vô hướng mỗi dòng của* A với *mỗi cột của* B để được *ma trận tích* $C = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le p}} \in M_{m\times p}(\mathbf{R})$ như sau:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{pmatrix} (B_1 | \quad B_2 | \quad \cdots \quad | B_p) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{pmatrix} = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le p}} \in M_{m\times p}(\mathbf{R})$$

với $c_{ik} = (\textit{dòng } A_i)(\textit{cột } B_k) = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk})$

Như vậy $C = A.B = AB = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le p}}$ với $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ ($1 \le i \le m$, $1 \le k \le p$).

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$ và $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $C = AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 0 & -13 \\ 67 & 7 & -15 \\ -11 & 1 & 13 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và

$D = BA = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -7 & -23 \\ 0 & 31 & 45 & -38 \\ -5 & 1 & 11 & 5 \\ -12 & 34 & 70 & -32 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Như vậy $C = AB \neq D = BA$ vì $C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$.

1.7/ MA TRẬN ĐƠN VỊ:

Ma trận đơn vị cấp n là *ma trận vuông cấp* n có dạng như sau:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \text{ với } a_{ii} = 1 \text{ và } a_{ij} = 0 \; (1 \le i \neq j \le n).$$

(*các hệ số trên đường chéo chính* đều bằng 1 và *các hệ số bên ngoài* đều bằng 0).

Ví dụ:

$I_1 = (1)$ $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.8/ TÍNH CHẤT:

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B, C \in M_{n\times p}(\mathbf{R})$, $D \in M_{p\times q}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó:

a) $(AB)D = A(BD) = ABD$ (*phép nhân ma trận* có *tính kết hợp*).

b) $(AB)^t = B^tA^t$ (*thứ tự bị đảo ngược*). $\qquad (cA)B = A(cB) = c(AB)$.

c) $A(B \pm C) = AB \pm AC$. $(B \pm C)D = BD \pm CD$.

(*phép nhân ma trận phân phối trái và phải* với *các phép cộng trừ ma trận*).

d) $\mathbf{O}_{k \times m} A = \mathbf{O}_{k \times n}$ và $A\mathbf{O}_{n \times k} = \mathbf{O}_{m \times k}$. $\mathbf{I}_m A = A$ và $A\mathbf{I}_n = A$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $$\mathbf{O}_{4 \times 2} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{4 \times 3},$$

$$A\mathbf{O}_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{2 \times 6},$$

$$\mathbf{I}_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} = A$$

và $$A\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} = A.$$

1.9/ GHI CHÚ:

a) *Phép nhân ma trận không giao hoán*.

Nếu AB và BA *cùng xác định* thì *không nhất thiết* $BA = AB$.

Nếu $AB = BA$ thì A và B là *hai ma trận vuông có cùng kích thước*.

b) Có thể *nhân liên tiếp nhiều ma trận* nếu *số cột của ma trận đi trước* bằng *số dòng của ma trận đi ngay liền sau*.

c) Có thể xảy ra khả năng

$A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$, $A \neq \mathbf{O} \neq B$ nhưng $AB = \mathbf{O}_{m \times p}$.

Ví dụ:

a) Trong Ví dụ của (**1.7**), $C = AB \neq D = BA$ vì $C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$.

b) Cho $A \in M_{3\times 7}(\mathbf{R})$, $B \in M_{7\times 4}(\mathbf{R})$, $C \in M_{4\times 1}(\mathbf{R})$ và $D \in M_{1\times 8}(\mathbf{R})$.

Đặt $E = ABCD$ thì $E \in M_{3\times 8}(\mathbf{R})$.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{3\times 2}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{2\times 3}$ có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_3 .$$

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ PHÉP NHÂN VÀ LŨY THỪA: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có $AB \in M_n(\mathbf{R})$, $BA \in M_n(\mathbf{R})$ và *không nhất thiết* $AB = BA$.

b) Đặt $A^o = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, … , $A^{k+1} = AA^k = A^kA$, $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ta có $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k \in M_n(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

a) Cho $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Ta có $HK = \begin{pmatrix} -17 & 25 \\ -30 & 44 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $KH = \begin{pmatrix} 18 & -8 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và $HK \neq KH$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Tính A^k , $\forall k \in \mathbf{N}$. Ta có $A^o = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dự đoán $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và kiểm chứng bằng *phép qui nạp* theo k.

2.2/ TÍNH CHẤT: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) $\forall k$ nguyên ≥ 1, $O_n^k = O_n$ và $I_n^k = I_n$.

b) $\forall r, s \in \mathbf{N}$, $A^r A^s = A^{r+s}$ và $(A^r)^s = A^{rs}$.

c) $\mathbf{O_n}A = A\mathbf{O_n} = \mathbf{O_n}$ và $\mathbf{I_n}A = A\mathbf{I_n} = A$.

d) Có thể xảy ra khả năng ($A \neq \mathbf{O_n}$ nhưng $\exists r$ nguyên ≥ 2 thỏa $A^r = \mathbf{O_n}$).

Ví dụ:

a) $O_n^{2000} = O_n$ và $I_n^{3000} = I_n$.

b) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, $A^9A^{16} = A^{9+16} = A^{25}$ và $(A^9)^{16} = A^{9\times 16} = A^{144}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và $A \neq \mathbf{O_3}$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O_3} = A^3$.

2.3/ CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT:

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$.

Đường chéo (chính) của A bao gồm *các hệ số* a_{ii} ($1 \leq i \leq n$).

a) A là *ma trận (đường) chéo* nếu *các hệ số ở ngoài đường chéo đều là* 0

(nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) và *các hệ số trên đường chéo* thì *tùy ý* .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

b) A là *ma trận tam giác trên* nếu *các hệ số ở phía dưới đường chéo đều là* 0

(nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq j < i \leq n$) và *các hệ số khác* thì *tùy ý* .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c) A là *ma trận tam giác dưới* nếu *các hệ số ở phía trên đường chéo đều là* 0

(nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i < j \leq n$) và *các hệ số khác* thì *tùy ý* .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d) A là *ma trận tam giác trên ngặt* nếu A là *ma trận tam giác trên* có *đường chéo* gồm *toàn các hệ số* 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \le j \le i \le n$).

$$A = \begin{pmatrix} 0^* & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & 0^* & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0^* & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0^* & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0^* \end{pmatrix}$$

e) A là *ma trận tam giác dưới ngặt* nếu A là *ma trận tam giác dưới* có *đường chéo* gồm *toàn các hệ số* 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \le i \le j \le n$).

$$A = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0^* & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0^* & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & 0^* & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0^* \end{pmatrix}$$

<u>Ví dụ:</u> Các ma trận *dạng đặc biệt* :

$$A = \begin{pmatrix} 3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7^* \end{pmatrix}$$

ma trận *đường chéo*

$$B = \begin{pmatrix} -4^* & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 9^* & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* \end{pmatrix}$$

ma trận *tam giác trên*

$$C = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0^* & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -8^* & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

ma trận *tam giác dưới*

$$D = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 9 & -5 \\ 0 & 0^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* \end{pmatrix}$$

ma trận *tam giác trên ngặt*

$$E = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0^* & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0^* & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0^* \end{pmatrix}.$$

ma trận *tam giác dưới ngặt*

2.4/ MỆNH ĐỀ:

a) *Tổng*, *hiệu*, *tích* và *lũy thừa nguyên dương các ma trận đường chéo* cũng là *ma trận đường chéo*. Các phép toán *được thực hiện tự nhiên trên đường chéo*.

b) *Tổng*, *hiệu*, *tích* và *lũy thừa nguyên dương các ma trận tam giác cùng loại* cũng là *ma trận tam giác cùng loại*.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix} \qquad C + D = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C - D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -2 & -30 & -11 \\ 0 & 72 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & -219 & -84 \\ 0 & 512 & 208 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.5/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$ (A và B *giao hoán với nhau*)

Ta có *các hằng đẳng thức trong* **R** *vẫn có hiệu lực* đối với A và B.

$$\forall k \geq 2,\ (AB)^k = A^k B^k, \quad (A + B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^i B^{k-i} \quad \text{và}$$
$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1}).$$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$. Khi đó

$(AB)^4 = (AB)(AB)(AB)(AB) = ABABABAB = AAAABBBB = A^4B^4$.

$A^5 + B^5 = A^5 - (-B)^5 = (A + B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4)$.

$$(4A - 5I_n)^3 = (4A)^3 - 3(4A)^2(5I_n) + 3(4A)(5I_n)^2 - (5I_n)^3$$
$$= 64A^3 - 240A^2 + 300A - 125I_n.$$

2.6/ <u>GHI CHÚ:</u> Nếu $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$ thì *các hằng đẳng thức* trong $\mathbf{R}$ *không thể áp dụng* cho A và B. *Các phép tính* phải dùng *định nghĩa*, *các tính chất phân phối* và *kết hợp*.

<u>Ví dụ:</u> Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$. Ta có

$(AB)^4 = (AB)(AB)(AB)(AB) = ABABABAB \neq AAAABBBB = A^4B^4$.

$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$ vì $(-AB + BA) \neq \mathbf{O}_n$.

$(A \pm B)^2 = (A \pm B)(A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ vì

$(\pm AB \pm BA) \neq \pm 2AB$.

III. <u>SỰ KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG:</u>

3.1/ <u>VẤN ĐỀ:</u>

a) Trong $(\mathbf{R}, .)$:

* $\forall a \in \mathbf{R}$, ta có $1.a = a.1 = a$.

* Cho trước $a \in \mathbf{R}$. *Có hay không* $a' \in \mathbf{R}$ thỏa $a'.a = a.a' = 1$?

Nếu có thì a' *được tính ra sao* ?

Trả lời : Nếu $a = 0 \in \mathbf{R}$ thì *không có* $a' \in \mathbf{R}$ thỏa $a'.a = a.a' = 1$ và ta nói $a = 0$ là *số không khả nghịch*. Nếu $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ thì có $a' = \frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ thỏa $a'.a = a.a' = 1$ và ta nói a là *số khả nghịch* cũng như ký hiệu $a' = a^{-1}$ là *số nghịch đảo của số* a. Để ý $\mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$.

b) Trong $(M_n(\mathbf{R}), .)$ với $n \geq 2$:

* $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, ta có $I_n.A = A.I_n = A$.

* Cho trước $A \in M_n(\mathbf{R})$. *Có hay không* $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'.A = A.A' = I_n$? Nếu có thì A' *được xác định ra sao* ?

Ta sẽ *trả lời câu hỏi trên* trong phần **III** này.

3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta nói A là *ma trận khả nghịch* nếu có $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'A = AA' = I_n$.

b) A' (nếu có) thì *duy nhất* và lúc đó ta ký hiệu $A' = A^{-1}$ là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A.

c) Nếu A *khả nghịch* (có A^{-1}) thì ta *định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm* cho A như sau: $A^{-2} = (A^{-1})^2$, $A^{-3} = (A^{-1})^3$, … , $A^{-k} = (A^{-1})^k$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.

Ta có $A^m \in M_n(\mathbf{R})$, $\forall m \in \mathbf{Z}$. Hơn nữa $\forall r, s \in \mathbf{Z}$, $A^rA^s = A^{r+s}$, $(A^r)^s = A^{rs}$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

và $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Do $AB = BA = I_3$ nên A *khả nghịch* và $A^{-1} = B$. Tương tự, do vai trò của A và B là *đối xứng* nên ta cũng nói B *khả nghịch* và $B^{-1} = A$.

Hơn nữa $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $A^{-k} = (A^{-1})^k = B^k$ và $\forall m \in \mathbf{Z}$, $A^m \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có $A^7A^{-12} = A^{7+(-12)} = A^{-5} = (A^{-1})^5$ và $(A^7)^{-12} = A^{7(-12)} = A^{-84} = (A^{-1})^{84}$.

3.3/ ĐỊNH LÝ: (*nhận diện ma trận khả nghịch*).

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta đã có S_A, R_A và $r(A) \le n$ từ (**4.1**) và (**4.2**), Chương **I**.

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

a) A *khả nghịch*.

b) S_A *có các hệ số trên đường chéo đều* $\neq 0$.

c) $R_A = I_n$.

d) $r(A) = n$.

3.4/ HỆ QUẢ: (*nhận diện ma trận không khả nghịch*).

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta đã có S_A, R_A và $r(A) \leq n$ từ (**4.1**) và (**4.2**), Chương **I** .

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

a) A *không khả nghịch*. b) S_A *có ít nhất một hệ số* 0 *trên đường chéo*.

c) $R_A \neq I_n$. d) $r(A) < n$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1^* & 2 \\ 0 & 0 & -13^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 5 \\ 0 & 1^* & -2 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \to R_A = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \end{pmatrix} = I_3$$

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + (1)\,]$, $(1) \to [\,(1) - (3)\,]$, $(3) \to [\,(3) - 2(1)\,]$.

Bảng 2: $(3) \to [\,(3) - 4(2)\,]$. Bảng 3: $(1) \to [\,(1) + (2)\,]$, $(2) \to -(2)$.

Bảng 4: $(3) \to -13^{-1}(3)$, $(1) \to [\,(1) - 5(3)\,]$, $(2) \to [\,(2) + 2(3)\,]$.

$$B \to \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17 & 51 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \to S_B = \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17^* & 51 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to R_B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Bảng 1: $(1) \to [\,(1) - (3)\,]$, $(2) \to [\,(2) + 5(1)\,]$, $(3) \to [\,(3) - 2(1)\,]$.

Bảng 2: $(3) \to [\,(3) + 17^{-1}.5(2)\,]$, Bảng 3: $(2) \to 17^{-1}(2)$, $(1) \to [\,(1) - 3(2)\,]$.

Ta thấy A *khả nghịch* [để ý *các hệ số trên đường chéo* của S_A đều $\neq 0$, $R_A = I_3$ và $r(A) = 3$] và B *không khả nghịch* [để ý có *hệ số* 0 *trên đường chéo* của S_B, $R_B \neq I_3$ và $r(B) = 2 < 3$].

3.5/ ĐỊNH LÝ: (tìm *ma trận nghịch đảo* của *ma trận khả nghịch*)

Cho A *khả nghịch* $\in M_n(\mathbf{R})$ [nghĩa là $R_A = I_n$].

Nếu *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ biến A thành $R_A = I_n$

thì *chính các phép biến đổi đó*, *theo đúng thứ tự đã có*, sẽ biến I_n thành A^{-1}.

Cụ thể như sau:

Nếu $A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k = R_A = I_n$ (dùng *các phép biến đổi* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$)

thì $I_n \to B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_k = A^{-1}$ (cũng dùng *các phép biến đổi* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$).

3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta thường kiểm tra A *khả nghịch* và tìm A^{-1} *cùng một lúc*

theo sơ đồ sau (*phương pháp Gauss – Jordan*):

$(A \mid I_n) \to (A_1 \mid B_1) \to (A_2 \mid B_2) \to \ldots \to (A_k \mid B_k)$ trong đó $A_k = R_A$.

(dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ biến A thành R_A).

Nếu $R_A \neq I_n$ thì A *không khả nghịch*.

Nếu $R_A = I_n$ thì A *khả nghịch* và $A^{-1} = B_k$.

Ví dụ:

Xét *tính khả nghịch* và tìm *ma trận nghịch đảo* (*nếu có*) của các ma trận sau:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -11 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

$$(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 10 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $\quad (3) \to [\,(3) - 3(1)\,]$.

Bảng 2: $(1) \to [\,(1) - 2(2)\,]$, $\quad (3) \to [\,(3) + (2)\,]$.

Ta thấy $R_B \neq I_3$ nên B *không khả nghịch* ($\forall B' \in M_3(\mathbf{R})$, $B'B \neq I_3 \neq BB'$)

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1^* & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1^* & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1^* \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array}\right).$$

Bảng 1: (1) → [(1) – (2)], (2) → [(2) – 2(1)], (3) → [(3) + 7(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) + 4(2)], (2) → [(2) + 3(3)].

Bảng 3: (1) → [(1) – 3(2)], (3) → [(3) – 2(2)].

Bảng 4: (1) → [(1) – 2(3)], (2) → [(2) + 3(3)], (3) → – (3).

Do $R_A = I_3$ nên A *khả nghịch* và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Kiểm chứng lại, ta thấy $A^{-1}A = I_3$ (hay kiểm chứng $AA^{-1} = I_3$).

3.7/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho A, B, $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) Nếu A *khả nghịch* thì

* A^{-1} cũng *khả nghịch* và $(A^{-1})^{-1} = A$.

* A^t cũng *khả nghịch* và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

* cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng *khả nghịch* và $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

* A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng *khả nghịch* và $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

b) AB *khả nghịch* ⇔ (A và B *đều khả nghịch*). Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

AB *không khả nghịch* ⇔ (A hay B *không khả nghịch*).

c) ($A_1A_2 \ldots A_k$) *khả nghịch* ⇔ ($A_1, A_2, \ldots, A_k$ *đều khả nghịch*).

Lúc đó $(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$ (*thứ tự bị đảo ngược*).

$(A_1A_2 \ldots A_k)$ *không khả nghịch* ⇔ $\exists j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_j *không khả nghịch*.

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *khả nghịch* và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Suy ra

* A^{-1} *cũng khả nghịch* và $(A^{-1})^{-1} = A$.

* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ *cũng khả nghịch* và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

* $-\frac{5}{2}A$ *cũng khả nghịch* và $(-\frac{5}{2}A)^{-1} = -\frac{2}{5}A^{-1}$.

* A^{-4} *cũng khả nghịch* và $(A^{-4})^{-1} = A^4$.

b) $H = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *khả nghịch* có $H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ và $K^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ *không khả nghịch* [để ý $R_H = R_K = I_2$ và $R_L = \begin{pmatrix} 1^* & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$]

Ta có $HK = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -19 & -15 \end{pmatrix}$ *khả nghịch* và $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -19 & -14 \end{pmatrix}$.

Ta có $KH = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *khả nghịch* và $(KH)^{-1} = H^{-1}K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Các ma trận HKL, KHL, HLK, KLH, LHK và LKH đều *không khả nghịch*.

3.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (*nhận diện* 2 ma trận *đều khả nghịch* và là *nghịch đảo của nhau*)

Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a) A *khả nghịch* và $A^{-1} = B$.

b) B *khả nghịch* và $B^{-1} = A$.

c) $AB = I_n$.

d) $BA = I_n$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $P \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^5 = \mathbf{O_n}$.

Đặt $A = (I_n - P)$ và $B = (I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$. Chứng minh

A *khả nghịch* và $A^{-1} = B$ (lúc đó B *cũng khả nghịch* và $B^{-1} = A$).

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $AB = I_n$ là xong. Ta có

$AB = (I_n - P)(I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$

$= I_n + P + P^2 + P^3 + P^4 - (P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5) = I_n - P^5 = I_n - \mathbf{O_n} = I_n$.

b) Cho $H, K \in M_n(\mathbf{R})$ sao cho $C = (I_n + HK)$ *khả nghịch*. Chứng minh

$D = (I_n + KH)$ *cũng khả nghịch* và $D^{-1} = E$ trong đó $E = (I_n - KC^{-1}H)$.

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $DE = I_n$ là xong. Ta có

$$DE = (I_n + KH)(I_n - KC^{-1}H) = I_n + KH - KC^{-1}H - KHKC^{-1}H$$

$$= I_n + KH - K(I_n + HK)C^{-1}H = I_n + KH - KCC^{-1}H = I_n + KH - KH = I_n.$$

3.9/ <u>LIÊN HỆ GIỮA TÍNH KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG VÀ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:</u>

Cho *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ với $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $B \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$

[hệ có *số phương trình bằng với số ẩn* là n].

a) Nếu A *khả nghịch* thì hệ trên có *nghiệm duy nhất*.

Nếu A *không khả nghịch* thì hệ trên *vô nghiệm* hoặc có *vô số nghiệm*.

b) Suy ra: Nếu A *khả nghịch* thì hệ $AX = \mathbf{O}$ có *nghiệm duy nhất* là $X = \mathbf{O}$.

Nếu A *không khả nghịch* thì hệ $AX = \mathbf{O}$ có *vô số nghiệm*.

<u>Ví dụ:</u> Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbf{R}).$$

$$AX = B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & u \\ -2 & 0 & -3 & v \\ 2 & 1 & 3 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & u \\ 0 & 1 & 0 & v+w \\ 0 & -3 & -1 & w-2u \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & u-2v-2w \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & -1 & 3v+4w-2u \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 4v+6w-3u \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & 1^* & 2u-3v-4w \end{array}\right).$$

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + (3)\,]$, $(3) \to [\,(3) - 2(1)\,]$.

Bảng 2: $(1) \to [\,(1) - 2(2)\,]$, $(3) \to [\,(3) + 3(2)\,]$.

Bảng 3: $(1) \to [\,(1) + 2(3)\,]$, $(3) \to -\,(3)$.

Do $R_A = I_3$ nên A *khả nghịch* và hệ $AX = B$ có *nghiệm duy nhất*

($x_1 = 4v + 6w - 3u,\ x_2 = v + w,\ x_3 = 2u - 3v - 4w$), $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$.

Suy ra hệ $AX = \mathbf{O}$ ($u = v = w = 0$) có *nghiệm duy nhất* ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

$$CX = B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & u \\ 2 & 2 & 2 & v \\ -1 & -3 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 3 & u \\ 0 & 4 & -4 & v-2u \\ 0 & -4 & 4 & u+w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & \dfrac{v+2u}{4} \\ 0 & 1^* & -1 & \dfrac{v-2u}{4} \\ 0 & 0 & 0 & v+w-u \end{array}\right).$$

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) - 2(1)\,]$, $\quad (3) \to [\,(3) + (1)\,]$.

Bảng 2: $(3) \to [\,(3) + (2)\,]$, $\quad (2) \to 4^{-1}(2)$, $\quad (1) \to [\,(1) + (2)\,]$.

Do $R_C \neq I_3$ nên C *không khả nghịch*.

Nếu $v + w - u \neq 0$ thì hệ $CX = B$ *vô nghiệm*.

Nếu $v + w - u = 0$ thì hệ $CX = B$ có *vô số nghiệm* với *một ẩn tự do*

$[\, x_3 = a\ (a \in \mathbf{R}),\ x_1 = -2a + \dfrac{v+2u}{4},\ x_2 = a + \dfrac{v-2u}{4}\,]$, $\forall u, v, w \in \mathbf{R}$.

Suy ra hệ $CX = \mathbf{O}$ ($u = v = w = 0$) có vô số nghiệm với *một ẩn tự do*

$[\, x_3 = a\ (a \in \mathbf{R}),\ x_1 = -2a,\ x_2 = a\,]$.

IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN:

4.1/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$, $P, Q \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ và $S, T \in M_{p \times n}(\mathbf{R})$. Khi đó:

a) $[\, P = Q \Rightarrow AP = AQ\,]$ và $[\, S = T \Rightarrow SA = TA\,]$ (*không có chiều đảo*).

b) Nếu A *khả nghịch* thì

* ($P = Q \Leftrightarrow AP = AQ$) và ($S = T \Leftrightarrow SA = TA$).

* ($AP = Q \Leftrightarrow P = A^{-1}Q$) và ($SA = T \Leftrightarrow S = \underline{TA^{-1}}$).

Thật vậy,

$AP = AQ \Leftrightarrow (A^{-1}A)P = (A^{-1}A)Q \Leftrightarrow I_nP = I_nQ \Leftrightarrow P = Q$.

$SA = TA \Leftrightarrow S(AA^{-1}) = T(AA^{-1}) \Leftrightarrow SI_n = TI_n \Leftrightarrow S = T.$

$AP = Q \Leftrightarrow (A^{-1}A)P = A^{-1}Q \Leftrightarrow I_nP = A^{-1}Q \Leftrightarrow P = A^{-1}Q.$

$SA = T \Leftrightarrow S(AA^{-1}) = TA^{-1} \Leftrightarrow SI_n = TA^{-1} \Leftrightarrow S = TA^{-1}.$

4.2/ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG DỤNG MA TRẬN KHẢ NGHỊCH:

Cho *các ma trận khả nghịch* $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $C \in M_m(\mathbf{R})$.

a) *Phương trình* $AX = B$ [$B \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$].

Ta có $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (*nghiệm duy nhất*).

Đặc biệt $AX = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

b) *Phương trình* $XA = B$ [$B \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$].

Ta có $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*).

Đặc biệt $XA = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = \mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

c) *Phương trình* $AXC = B$ [$B \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$].

Ta có $AXC = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$(*nghiệm duy nhất*).

Đặc biệt $AXC = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

Ví dụ:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ *khả nghịch* và ta có $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ *khả nghịch* và ta có $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Phương trình $AX = B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất* $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Phương trình $AX = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất* $X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Phương trình $XC = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất* $X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 23 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Phương trình $XC = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất* $X = \mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Phương trình $CXA = E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất*

$X = C^{-1}EA^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 7 \\ -35 & 17 & 16 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -21 & -31 \\ -37 & -54 & -73 \end{pmatrix}$.

Phương trình $CXA = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có *nghiệm duy nhất*

$X = C^{-1}\mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3/ <u>PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT:</u>

Xét *phương trình ma trận tổng quát* $f(X) = \mathbf{O}$ với X là *ma trận ẩn* và f là *một hàm* theo X.

Ta xác định *kích thước* $(m \times n)$ của X và đặt

$X = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ bao gồm mn *ẩn số thực* x_{ij} ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$).

Viết $f(X) = \mathbf{O}$ thành *một hệ phương trình thực* theo mn *ẩn số thực* x_{ij} ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$). Nếu hệ này *giải được* (chẳng hạn nó là *một hệ phương trình tuyến tính*) thì ta tìm được *các ma trận* X thỏa *phương trình ma trận* đã cho.

<u>Ví dụ:</u> Giải *các phương trình ma trận* sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (X^t là *ma trận chuyển vị* của X).

b) $Y^2 = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải:

a) $X^t \in M_{3\times 2}(\mathbf{R})$ nên $X \in M_{2\times 3}(\mathbf{R})$. Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ và $X^t = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}$,

ta có $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+5z=6 \\ 3x+y-4z=-1 \\ 2u-3v+5w=-5 \\ 3u+v-4w=2 \end{cases}$.

Ta có *hai hệ phương trình tuyến tính* [hệ (I) theo *các ẩn* x, y, z và hệ (II) theo *các ẩn* u, v, w] và *có thể giải chúng* trong *cùng một bảng ma trận* như sau (vì *các ma trận hệ số ở vế trái của hai hệ trùng nhau*) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 3 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 6 & -5 \\ u & v & w & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 4 & -9 & -7 & 7 \\ 0 & -11 & 23 & 20 & -19 \\ u & v & w & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 0 & -7/11 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1^* & -23/11 & -20/11 & 19/11 \\ u & v & w & & \end{array}\right).$$

Bảng 1 : (1) $\to$ [(1) – (2)], (2) $\to$ [(2) – 2(1)].

Bảng 2 : (2) $\to$ – 11^{-1}(2), (1) $\to$ [(1) – 4(2)].

Hệ (I) : $z \in \mathbf{R}$, $x = (7z + 3) / 11$, $y = (23z - 20) / 11$.

Hệ (II) : $w \in \mathbf{R}$, $u = (7w + 1) / 11$, $v = (23w + 19) / 11$.

Vậy phương trình ma trận có *vô số nghiệm*

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7z+3 & 23z-20 & 11z \\ 7w+1 & 23w+19 & 11w \end{pmatrix} \text{ với } z, w \in \mathbf{R}.$$

b)

$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và $Y^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+yz=0 (PT1) \\ y(x+t)=0 (PT2) \\ z(x+t)=0 (PT3) \\ t^2+yz=0 (PT4) \end{cases}$

Từ (PT 2), ta xét

* Nếu $y = 0$: từ (PT1) và (PT4), ta có $x = t = 0$. Lúc này (PT 3) *cũng*

thỏa với mọi $z \in \mathbf{R}$.

* Nếu y *thực tùy ý* $\neq 0$: $t = -x$ (PT 2), $z = -\dfrac{x^2}{y}$ (PT 1) với x *thực tùy ý*.

Lúc này (PT 3) và (PT 4) *cũng thỏa*.

Vậy *phương trình ma trận* có *vô số nghiệm* như sau :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \text{ và } Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -\dfrac{x^2}{y} & -x \end{pmatrix} \text{ với } x, y, z \in \mathbf{R} \text{ và } y \neq 0.$$
