

Dạng 0.0.1. Định lý giá trị trung gian

Bài toán 1

- 1) Hãy phát biểu định lý giá trị trung gian. Đưa ra một thí dụ áp dụng. Đưa ra một số lưu ý về một số trường hợp không áp dụng được định lý giá trị trung gian.
- 2) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } -1 \leq x < 0, \\ -x - 2 & \text{if } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$
Ta nhận thấy rằng $f(-1) = 2$, $f(2) = -4$ và $-4 < -1 < 2$. Phương trình $f(x) = -1$ có nghiệm hay không? Vì sao? Ta có thể áp dụng định lý giá trị trung gian trong trường hợp này hay không?
- 3) Cho $f(x) = 5^x + 4^x - 3^x - 2^x - 10x^2 + 6x$. Biết rằng tập nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là $S = \{0, 1, 2\}$. Tìm $f(3)$. Hãy cho biết dấu của $f(\sqrt[4]{82})$ (đưa ra cơ sở lý thuyết và chứng minh kết luận đó).

Dạng 0.0.2. Khai triển Taylor

Bài toán 2

- 4) Hãy phát biểu khai triển Taylor đến cấp n quanh a của hàm số f . Hãy đưa ra công thức phần dư dạng Lagrange (chỉ rõ các đại lượng trong công thức).
- 5) Áp dụng để đưa ra ước lượng sai số của xấp xỉ $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.
- 6) Áp dụng để tìm **một** số nguyên dương n sao cho xấp xỉ $f(x) := \frac{1}{x} \approx T_n(x)$ với $x \in (0.5, 1.5)$ có sai số không vượt quá 10^{-10} , trong đó T_n là đa thức Taylor của f quanh 1 đến cấp n .
- 7) ★ Hãy đưa ra một ứng dụng vật lý sử dụng (tham khảo [?], [?]).



Dạng 0.0.3. Chuỗi lũy thừa

Bài toán 3

- 8) Hãy khai triển $f(x) = \frac{1}{x+1}$ thành chuỗi lũy thừa quanh 2 (chỉ rõ điều kiện đảm bảo có khai triển).
- 9) Tìm các hằng số a và b sao cho đồng nhất sau $g(x) := \frac{2x+1}{(x+1)^2} = af(x) + bf'(x)$ với mọi $x \neq -1$. Hãy khai triển g thành chuỗi lũy thừa quanh 2 (chỉ rõ điều kiện đảm bảo có khai triển).
- 10) Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của mỗi chuỗi lũy thừa sau

(i) $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+4}.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n + \frac{1}{n^2}\right) x^n.$



Li Akê tự hỏi Toán học là gì