TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BTC ÔN THI HỌC KỲ 1 KHÓA 2016

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VI TÍCH PHÂN 1B

CHƯƠNG: ĐẠO HÀM & TÍCH PHÂN

➢ Lâm Cương Đạt

Cập nhật: 02/02/2017

Chương: ĐẠO HÀM

Định nghĩa đạo hàm

Xét hàm số f xác định trong lân cận của điểm a (khoảng mở chứa a). Ta ký hiệu

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$,(Nếu tồn tại hạn)

Và f'(a) được gọi là đạo hàm của f tại điểm a. Ta cũng nói rằng f có đạo hàm tại a.

Nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói f không có đạo hàm tại a.

Công thức đạo hàm cơ bản cần nhớ

$$(\alpha u)' = \alpha u'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u.v)' = u'v + v'u$$

$$(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Đạo hàm hàm ngược

Giả sử hàm f là song ánh*, có hàm ngược là g. Nếu f có đạo hàm hữu hạn khác 0 tại x thì hàm g sẽ có đạo hàm tại y=f(x) và

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ hay là } g'(y) = \frac{1}{y'}$$

**Hàm song ánh:*

Cho ánh xạ $f : X \to Y$

f là song ánh nếu $\forall y \in Y$ phương trình f(x)=y có một nghiệm duy nhất trên X

Quy tắc Lô-pi-tal

Cho hàm số f và g thỏa

1) Khả vi trong khoảng (a,b)
2) $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$
3) Xảy ra một trong hai trường hợp:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

4) Tồn tại $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hay vô hạn

$\Rightarrow$ Khi đó $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Nếu giới hạn của f(x)g(x) có dạng $0.\infty$ thì ta viết

$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$, đưa về dạng $\frac{0}{0}$

Nếu giới hạn của $f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định $1^{\infty}, \infty^{0}$ hoặc 0^{0} thì ta đều đưa về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách sử dụng

$a^{b} = e^{b\ln a}$

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi có dạng sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

Được gọi là chuỗi lũy thừa theo (x - a), hoặc là chuỗi lũy thừa xung quanh điểm a

Các số c_n được gọi là hệ số của chuỗi lũy thừa

Chú ý: Ta qui ước rằng $(x-a)^0 = 1$, ngay cả trường hợp x=a. Nghĩa là qui ước $0^0 = 1$, và qui ước này chỉ trong phạm vi chuỗi lũy thừa

Định lý

Với mọi chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, chỉ xảy ra một trong ba khả năng sau:

1) Chuỗi chỉ hội tụ tại x=a
2) Chuỗi hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$
3) Chuỗi có số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < R$ và phân kì khi $|x-a| > R$

Bán kính hội tụ

Số R trong trường hợp 3 được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa. Theo qui ước thì R=0 trong trường hợp 1, và $R=\infty$ trong trường hợp 2.

Định lý

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L \text{ (hữu hạn hoặc vô hạn)}$$

Khi đó

1) Nếu $L = \infty$ thì bán kính hội tụ $R = 0$
2) Nếu $L = 0$ thì bán kính hội tụ $R = \infty$
3) Nếu $L > 0$ là số dương hữu hạn thì bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{L}$

Chú ý: Khi tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ngoài việc tìm bán kính hội tụ R, ta phải xét hai điểm biên $x = a \pm R$ (nếu $R > 0$ hữu hạn)

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Nếu một hàm số f được khai triển thành tổng của một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ với bán kính hội tụ R>0, thì f có đạo hàm mọi cấp trong khoảng (a - R, a + R) và

$$\forall n,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ (với qui ước rằng } 0! = 1,\ f^0 = f \text{)}$$

Như vậy khai triển thành chuỗi lũy thừa xung quanh điểm a của một hàm số là duy nhất (không có khai triển thứ hai).

Nếu f là một hàm số có đạo hàm mọi cấp trong khoảng (a - R, a + R), thì chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của f xung quanh điểm a, viết là

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Và chuỗi Taylor trên hội tụ về f(x).

Trường hợp a=0, chuỗi nói trên được gọi là chuỗi Maclaurin của f

Đa thức Taylor

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp n tại điểm a. Khi đó, đa thức Taylor bậc n xung quanh điểm a của f được định nghĩa là

$$T_n(x) = \sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Tức là tổng riêng phần bậc n của chuỗi Taylor

Lượng chênh lệch $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ được gọi là phần dư của chuỗi Taylor của f.

Bất đẳng thức Taylor

Nếu có hàng số M > 0 (chỉ phụ thuộc n) sao cho: $\forall x \in (a-R, a+R), \left|f^{(n+1)}x\right| \le M$, thì

$$\forall x \in (a-R, a+R), \left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}$$

Nếu hằng số M trong trường hợp trên không phụ thuộc vào n thì

$$\forall x \in (a-R, a+R), \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Và chuỗi Taylor của f xung quanh điểm a sẽ hội tụ về f trong khoảng (a-R, a+R)

Chương: TÍCH PHÂN

Tích phân suy rộng loại 1

Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn trên không tồn tại ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ

Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

Nếu giới hạn trên không tồn tại ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ phân kỳ

Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Nếu chỉ cần 1 trong 2 tích phân $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân suy rộng loại 2

Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in [a,b)$ (f không xác định tại b hoặc có giới hạn vô cực tại b) và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx$ như là một số hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại ta nói tích phân suy rộng phân kỳ

Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in (a,b]$ (f không xác định tại a hoặc có giới hạn vô cực tại a) và tồn

tại giới hạn $\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx$ như là một số hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx$$ Nếu giới hạn nói trên không tồn tại ta nói tích phân suy rộng phân kỳ
Giả sử f xác định trên (a,b). Với $c\in(a,b)$ bất kỳ, nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ Nếu một trong hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.
Giả sử f xác định trên $[a,c)\cup(c,b]$ (thường thì f có giới hạn vô cực tại c). Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cũng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ