Câu 1:

a. Theo định nghĩa của đạo hàm

$$f_x(0,0) = \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Do vai trò của x, y trong $f(x,y)$ là như nhau nên $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$

b. Khi cho điểm $M(x,y)$ chạy trên đường thẳng $x = y$ thì

$f(M) = f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2} = L_1$ khi $M \to (0,0)$

Khi cho điểm $M(x,y)$ chạy trên đường thẳng $x = -y$ thì

$f(M) = f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} \to -\frac{1}{2} = L_2$ khi $M \to (0,0)$

Vì $L_1 \neq L_2$ nên không tồn tại giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ và vì vậy f không liên tục tại (0,0)

Từ đó suy ra f cũng không khả vi tại (0,0)

Câu 2:

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

a.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1\,(x^2+y^2)-(-y)*2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Vậy $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

b.

Xét đường cong (C_1) là nửa trên đường tròn tâm (0,0) bán kính 1 và (C_2) là nửa đường tròn nằm dưới:

Tham số hóa đường cong (C_1)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$t \in [0,\pi]$$

Xét tích phân đường của (C_1) trên F

$$\int_{C_1} F\,dr = \int_0^{\pi} P\,x' + Q\,y'dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\sin t + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t\ dx = \int_0^{\pi} dt = t|_0^{\pi} = \pi$$

Tham số hóa đường cong (C_2)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}$$

$$t \in [0, \pi]$$

Xét tích phân đường của (C_2) trên F

$$\int_{C_2} F\,dr = \int_0^{\pi} P\,x' + Q\,y'dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) - \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t\ dx = \int_0^{\pi} -1dt$$
$$= -t|_0^{\pi} = -\pi$$

Ta thấy đường cong (C_1) và (C_2) có cùng điểm đầu là $(1,0)$ và cùng điểm cuối là $(-1,0)$ nhưng tích phân đường lại có kết quả khác nhau nên $\int_C F\,dr$ không độc lập với lộ trình

//Chú ý

Mặc dù $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng do miền xác định của F là $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ không phải miền đơn liên nên ta không kết luận được F là trường bảo toàn.

Câu 3:

Cách 1:

Ta biểu diễn R lồi theo Oy

$$R = \{(x,y) | x \in [0,5], 0 \leq\ y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$$

Khi đó

$$\iint_R ye^x\,dA = \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} ye^x\,dy\,dx = \int_0^5 \frac{y^2}{2}e^x\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^5 (25 - x^2)e^x dx$$
$$= \frac{25}{2}\int_0^5 e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^5 x^2 e^x\,dx = \frac{25}{2}e^x\Big|_0^5 - \frac{1}{2}\int_0^5 x^2 e^x\,dx = \frac{25}{2}e^5 - \frac{25}{2} - \frac{1}{2}I$$

Với

$$I = \int_0^5 x^2 e^x\,dx$$

Đặt $u = x^2, dv = e^x dx \Rightarrow du = 2xdx, v = e^x$, tích phân từng phần ta được

$$I = x^2 e^x|_0^5 - 2\int_0^5 xe^x\,dx = 25e^5 - 2\int_0^5 xe^x\,dx$$

Đặt $u = x, dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x$, tích phân từng phần ta đươc

$$I = 25e^5 - 2\left(xe^x|_0^5 - \int_0^5 e^x dx\right) = 25e^5 - 10e^5 + 2e^x|_0^5 = 15e^5 + 2e^5 - 2 = 17e^5 - 2$$

Vậy

$$\iint_R ye^x\, dA = \frac{25}{2}e^5 - \frac{25}{2} - \frac{1}{2}(17e^5 - 2) = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

<u>Cách 2:</u>

Chuyển sang tọa độ cực:

$$R = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\} = \left\{(r,\theta)|0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Có:

$$I = \iint_R ye^x\, dA = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\, e^{r\cos\theta}\, rd\theta dr$$

Đặt $t = r\cos\theta \Rightarrow dt = -r\sin\theta\, d\theta$. Khi $\theta = 0$ thì $t = r$, khi $\theta = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

$$I = \int_0^5 \int_r^0 -re^t dtdr = \int_0^5 re^t \Big|_{t=0}^{t=r} dr = \int_0^5 (re^r - r)dr$$

$$= \int_0^5 re^r dr - \int_0^5 rdr = \int_0^5 rd(e^r) - \int_0^5 rdr$$

$$= \left(re^r \Big|_0^5 - \int_0^5 e^r dr\right) - \int_0^5 rdr = \left(re^r - e^r - \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

Câu 4:

Tạm xét $x \neq 0$:

<u>Cách 1:</u>

$$xy' - y = x^2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'x - y}{x^2} = \sin x$$

Ta thấy $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x-y}{x^2} = \sin x$

Lấy nguyên hàm theo x ở cả 2 vế phương trình

$$\frac{y}{x} = -\cos x + C$$

Với $C \in \mathbb{R}$ là một hằng số

Vậy phương trình vi phân đề cho có nghiệm tổng quát là

$$y = -x\cos x + x\,C$$

Cách 2:

$$xy' - y = x^2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = x\sin x$$

Đặt $p(x) = -\frac{1}{x}$

Chọn một nguyên hàm của $p(x)$ là $q(x) = -\ln|x|$

Nhân cả 2 vế phương trình cho $e^{q(x)} = \frac{1}{|x|}$

Khi đó phương trình trở thành

$$y'e^{q(x)} + q'(x)ye^{q(x)} = \left(y\,e^{q(x)}\right)' = x\sin x\ \ e^{q(x)} = \sin x$$

Lấy nguyên hàm cả 2 vế

$$\frac{y}{x} = \int \sin x\ \ dx = -\cos x + C$$

Với C là một hằng số, $C \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình vi phân đề cho có nghiệm tổng quát là

$$y = -x\cos x + x\,C\ (x \neq 0)$$

Thử lại ta thấy $y(0) = 0$ nên đây cũng là nghiệm tổng quát trên $\mathbb{R}$

Để tìm nghiệm riêng, thay nghiệm tổng quát vào điều kiện đầu $y(\pi) = 0$, ta được

$$-\pi\cos\pi + \pi\,C = 0$$

$$\Leftrightarrow C = \cos\pi = -1$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán giá trị đầu là $y = -x\cos x - x$