Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để giải hệ thức đệ quy ta sử dụng hàm rsolve(eqns, fcns), trong đó eqns là các hệ thức đệ quy, điều kiện ban đầu; fcns là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$.

```
> rsolve(a(n)-5*a(n-1)+6*a(n-2)=0, a(n));
```

$$-(-3\,a(0) + a(1))\,2^n - (2\,a(0) - a(1))\,3^n$$

Như vậy chỉ cần biết thêm giá trị của a_0 và a_1 thì ta biết được công thức của a_n.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$

```
> f := rsolve({x(n+1)-6*x(n)+9*x(n-1) = (18*n+12)*3^n, x(0) = 2, x(1) = 0},
x(n));
```

$$8\,3^n + 2(-2n-2)3^n - 8(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)3^n + 6(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)\left(\frac{1}{3}n+1\right)3^n$$

```
> simplify(f);
```

$$3^n(2 - 5n + 2n^2 + n^3)$$

Như vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là $x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n; \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n; \\ a_0 = 2;\ b_0 = 1. \end{cases}$

```
> rsolve({a(n+1) = a(n)-b(n), b(n+1) = 2*a(n)+4*b(n), a(0) = 2, b(0) = 1}, {a(n),
b(n)});
```

$$\{a(n) = 5 * 2^n - 3 * 3^n,\ b(n) = -5 * 2^n + 6 * 3^n\}$$

Như vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là $\begin{cases} a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n; \\ b_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n. \end{cases}$

Phần II. Bài tập

Bài 4.1 Một cầu thang gồm n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2, hoặc 3 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang, hãy tìm hệ thức đệ quy của x_n?

Bài 4.2 Cho n là số nguyên dương. Hãy tìm hệ thức đệ quy của a_n với a_n là số chuỗi bit có độ dài n mà

a) chứa 2 bit 0 liên tiếp

b) không chứa 2 bit 0 liên tiếp

c) chứa 3 bit 0 liên tiếp

d) không chứa 3 bit 0 liên tiếp

e) số lượng bit 0 là số chẵn

f)* chứa 01

Đối với mỗi trường hợp hãy tính a_6.

Bài 4.3 Một chuỗi số chỉ chứa 0, 1 hoặc 2 được gọi là chuỗi tam phân. Hãy tìm hệ thức đệ quy của x_n với x_n là chuỗi tam phân có độ dài n mà

a) không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp

b) chứa 2 chữ số 0 liên tiếp

c) không chứa 012

d)* không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp hoặc 2 chữ số 1 liên tiếp

e)* chứa 2 chữ số liên tiếp giống nhau

Đối với mỗi trường hợp hãy tính x_6.

Bài 4.4 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất sau

a) $a_0 = 2$ và $a_{n+1} = -3a_n, \forall n \geq 0$

b) $a_1 = -5$ và $a_n = 8a_{n-1}, \forall n \geq 2$

c) $a_2 = 28, a_3 = -8$ và $a_n = 4a_{n-2}, \forall n \geq 4$

d) $a_0 = 1, a_1 = 0$ và $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 1$

e) $a_1 = 6, a_2 = 8$ và $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \forall n \geq 1$

Bài 4.5 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau

a) $a_0 = -3$ và $a_n = a_{n-1} + 9, \forall n \geq 1$

b) $a_1 = 13$ và $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 5.3^{n+1}, \forall n \geq 0$

c) $a_2 = 61$ và $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6, \forall n \geq 2$

d) $a_0 = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n-2), \forall n \geq 0$

e) $a_3 = 128$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 12, \forall n \geq 2$

Bài 4.6 Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau

a) $a_0 = 1, a_1 = 2$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4, \forall n \geq 0$

b) $a_1 = -4, a_2 = 19$ và $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$

c) $a_2 = -5, a_3 = -26$ và $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} - 10, \forall n \geq 4$

d) $a_0 = 3, a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}, \forall n \geq 2$

e) $a_1 = -13, a_2 = 50$ và $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1)3^n, \forall n \geq 1$

f) $a_2 = -28, a_3 = -149$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3$

Bài 4.7 Giải các hệ thức đệ quy sau

a) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

Bài 4.8 Tính các tổng số sau theo n nguyên :

a) $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \;\; (n \geq 1)$

b) $S_n = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 \;\; (n \geq 1)$

c) $S_n = -1^4 + 2^4 + \ldots + (-1)^n n^4 \;\; (n \geq 1)$

d) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)2^k \;\; (n \geq 0)$

e) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k-1)(-3)^k \;\; (n \geq 0)$

f) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (k^3 - 2k^2 + 4k)(-1)^k \;\; (n \geq 1)$

Bài 4.9 Cho $n \geq 1$. Vẽ n đường thẳng trong mặt phẳng cắt nhau từng đôi một nhưng trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng qui. Hỏi các đường thẳng này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài 4.10 Giả sử dân số thế giới năm 2000 là 7 tỉ người và tốc độ tăng dân số thế giới là 3% mỗi năm. Cho số nguyên $n \geq 2000$. Tính dân số thế giới vào năm n.

Bài 4.11 Cho số nguyên $n \geq 1$. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự a, b, c) sao cho trong chuỗi ký tự không có 2 ký tự a đứng gần nhau?

Bài 4.12 Cho số nguyên $n \geq 1$. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự 1, 2) sao cho trong chuỗi ký tự ít nhất 2 ký tự 1 đứng gần nhau?

Bài 4.13 Cho $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $a_n = \beta f_n + \alpha f_{n-1}, \forall n \geq 1$ trong đó f_m là số hạng thứ m ($m \geq 0$) của dãy số Fibonacci ($f_0 = 0, f_1 = 1$ và $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 0$).

Bài 4.14 Tính a_n và $b_n, \forall n \geq 0$ biết rằng $a_0 = 1, b_0 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ và $b_{n+1} = a_n + 2b_n, \forall n \geq 0$. (Hướng dẫn: Tìm λ, μ thỏa $a_{n+1} + \lambda b_{n+1} = \mu(a_n + \lambda b_n)$ và tính $u_n = a_n + \lambda b_n, \forall n \geq 0$).