ÔN THI GIỮA KỲ VI TÍCH PHÂN 2B
HỆ ĐẠI TRÀ
HỌC KỲ 2 NĂM HỌC 2022-2023

DẠNG 1. TÌM ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

Chú ý: *Tìm đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2, 3 theo công thức đạo hàm, áp dụng cho biểu thức hàm sơ cấp*

$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1}\, u'$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}};\ \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$(e^u)' = e^u\, u';\ (a^u)' = a^u\, u' \ln\ a$

$(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u};\ (\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln\ a}$

$(\sin\ u)' = u' \cos u;\ (\cos\ u)' = -u' \sin\ u$

$(\tan\ u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(\cot\ u)' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(\arcsin\ u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\arccos\ u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\arctan\ u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\mathrm{arccot}\ u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

-Khi tính f'_x: xem y là hằng số (và ngược lại)

-Đạo hàm hàm ẩn: Hàm số ẩn $z = z(x;y)$ xác định bởi phương trình $F(x;y;z) = 0$ thì

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z};\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

-Để ý

$$f'_x = f_x = \frac{\partial f}{\partial x};\ f'_y = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bài 1. Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm

$$f(x;y;z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Bài 2. Cho hàm số $z = \ln(x^4 + 5y^4)\,, (x;y) \neq (0;0)$. Tính $A = x \cdot z'_x + y \cdot z'_y$.

Bài 3. Cho $z = xe^{y+x^3}$. Tính $z'_x(1;1);\ z'_y(1;1)$.

Bài 4. Tính $f'_x(1;0)$, biết rằng $f(x;y) = \frac{xe^{x^2y}}{x^2+y^2}$.

Bài 5. Cho hàm ẩn $z = z(x;y)$ xác định bởi phương trình $\cos(xy) + z + e^z = 0$. Chứng minh rằng $xz'_x - yz'_y = 0$.

DẠNG 2. TÌM ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 2

<u>Chú ý:</u>

-Tìm đạo hàm riêng cấp 2 theo công thức đạo hàm, áp dụng cho biểu thức hàm sơ cấp

-Để ý:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

<u>Bài 6.</u> Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ nếu $u = xy \ln(xy)$.

<u>Bài 7.</u> Cho

$$f(x;y;z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Chứng tỏ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

<u>Bài 8.</u> Hãy kiểm hàm $u(x;t) = [2\cos(ct) + 3\sin(ct)]\sin x$, với c là một hằng số thực, thỏa phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

<u>Bài 9.</u> Chứng minh rằng hàm số $u(x;t) = e^{-16t}\cos(2x+3)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

<u>Bài 10.</u> Hàm f thỏa phương trình $f_{xx} + f_{yy} = 0$, phương trình Laplace, được gọi là một hàm điều hòa. Hỏi hàm số sau có phải hàm điều hòa không?

$$f(x;y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

DẠNG 3. TÌM ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 3

Chú ý:

-*Tìm đạo hàm riêng cấp 2 theo công thức đạo hàm, áp dụng cho biểu thức hàm sơ cấp*

-*Để ý*

$$f_{xyy} = \left(f_{xy}\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

Bài 11. Cho $f(x;y) = x^4y^2 - x^3y$. Tìm $f_{xxx}; f_{xyx}$.

Bài 12. Cho $f(x;y) = \sin(2x + 5y)$. Tìm f_{yxy}.

Bài 13. Cho $f(x;y;z) = e^{xyz^2}$. Tìm f_{xyz}.

Bài 14. Cho $g(r;s;t) = e^r \sin(st)$. Tìm g_{rst}.

Bài 15. Cho $u = e^{r\theta}\sin\theta$. Tìm $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$.

DẠNG 4. TÌM ĐẠO HÀM RIÊNG DỰA VÀO ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH

Chú ý: *Định lý cơ bản của giải tích (phép tính vi tích phân)*

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x); \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = f[v(x)]\cdot v'(x) - f[u(x)]\cdot u'(x)$$

Bài 16. Cho

$$f(x;y) = \int_x^y \sqrt{1+t^3}dt.$$

Tìm $\frac{\partial f}{\partial x}(1;2)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(1;2)$.

Bài 17. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số

$$a)\ F(x;y) = \int_x^y \cos(e^t)dt \qquad b)\ F(\alpha;\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3+1}\,dt.$$

Bài 18. Tính $z'_x; z'_y$ của hàm số

$$z = \int_{xy}^{\frac{x}{y}} t^2 \sin 2t\,dt.$$

DẠNG 5. TÍNH ĐẠO HÀM HÀM HỢP THEO QUY TẮC MẮC XÍCH TẠI 1 ĐIỂM

+Quy tắc mắc xích

-Nếu $z = z(x; y)$ *và* $y = y(x)$ *thì*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

-Nếu $z = z(x; y)$ *và* $x = x(t); y = y(t)$ *thì*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

-Nếu $z = z(x; y)$ *và* $x = x(s; t); y = y(s; t)$ *thì*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Bài 19. Cho biết $z = x \ln(x^2 + y^4)\,; x = 2s + 3t; y = 5s - 3t$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial s}; \frac{\partial z}{\partial t}$.

Bài 20. Cho $z = f(x; y); x = u - v; y = v - u$. Chứng tỏ $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

Bài 21. Hàm số $z = z(u; v)$ khả vi trên $\mathbb{R}^2$, có $z'_u(1; -1) = 2;\ z'_v(1; -1) = 3$. Đặt $f(x) = z(x^2; x^3)$, tính $f'(-1)$.

Bài 22. Cho hàm số $z = z(x; y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục, ở đó $\begin{cases} x = r\cos\,\varphi \\ y = r\sin\,\varphi \end{cases}$.

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

DẠNG 6. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

<u>Chú ý:</u>

-Tìm đạo hàm theo hướng cụ thể tại một điểm cụ thể.

-Xác định hướng mà đạo hàm đạt trị và tìm giá trị đạo hàm này.

-Giá trị lớn nhất của $D_{\vec{u}}f(x)$ là $|\nabla f(x)|$, xảy ra khi $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}(x)}{|\overrightarrow{\nabla f}(x)|}$. Vậy giá trị của hàm tăng nhanh nhất theo hướng của véc tơ gradient.

-Giá trị nhỏ nhất của $D_{\vec{u}}f(x)$ là $-|\nabla f(x)|$, xảy ra khi $\vec{u} = -\frac{\overrightarrow{\nabla f}(x)}{|\overrightarrow{\nabla f}(x)|}$. Vậy giá trị của hàmgiảm nhanh nhất theo hướng đối với hướng của véc tơ gradient.

<u>Bài 23.</u> Tìm đạo hàm của hàm $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $(1;2)$ theo hướng của véc tơ $(3;4)$.

<u>Bài 24.</u> Xét hàm Xét hàm $f(x;y;z) = 2x^3y - 3y^2z$ tại điểm $P(1;2;-1)$. Tìm đạo theo hướng của hàm f theo hướng từ P tới điểm $Q(3;-1;5)$. Theo hướng này thì giá trị của hàm f là tăng hay giảm? Theo hướng nào thì hàm tăng, giảm nhanh nhất?

<u>Bài 25.</u> Cho hàm số $u = \ln(3x + 2y^2 - z^3)$ và hai điểm $A(1;-1;1)$; $B(0;1;3)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}(A)$ theo hướng $\overrightarrow{AB}$.

DẠNG 7. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN

Chú ý:

-Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến, sử dụng véc tơ gradien;

-Phương trình tiếp diện của mặt mức $f(x;y;z)=c$ *tại một điểm* $(x_0;y_0;z_0)$ *là*

$$\nabla f(x_0;y_0;z_0)\cdot(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=0$$

Hay $f_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+f_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+f_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0;$

-Phương trình pháp tuyến của mặt mức $f(x;y;z)=c$ *tại một điểm* $(x_0;y_0;z_0)$ *là*

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{f'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

Bài 26. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $x^2+y^2+z^2=14$ tại điểm $(3;1;2)$.

Bài 27. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $(S): x^2+2y^3+yz=0$ tại điểm $M(1;1;-3)$.

Bài 28. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $z=x^3y+2x^4y^5$ tại $(x;y)=(1;1)$.