Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hiện việc tính toán các bài toán liên quan tới tổ hợp chúng ta sử dụng gói lệnh combinat. Để gọi gói lệnh này ta dùng

```
> with(combinat);
```

Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition, conjpart, decodepart, encodepart, fibonacci, firstpart, graycode, inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbcomb, numbcomp, numbpart, numbperm, partition, permute, powerset, prevpart, randcomb, randpart, randperm, setpartition, stirling1, stirling2, subsets, vectoint

3.1 Tính toán các công thức tổ hợp.

- n! hay factorial(n): Tính $n!$
- numbperm(n, k): Số chỉnh hợp chập k của n.
- binomial(n, k): Số tổ hợp chập k của n.
- multinomial(n, k1, k2, . . . , km): Số hoán vị lặp của n vật từ k_1 vật loại 1, . . . , k_m vật loại m. (hay $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$)

```
> 6!;
```

$$720$$

```
> numbperm(6, 4);
```

$$360$$

```
> binomial(20, 6);
```

$$38760$$

```
>multinomial(10, 2, 3, 5);
```

$$2520$$

```
> expand(binomial(n, 3));          #expand(exp) : Khai triển biểu thức exp
```

$$\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

3.2 Liệt kê hoán vị, chỉnh hợp

- permute(n): Danh sách các hoán vị của $[1, 2, \dots, n]$.
- permute(S): Danh sách các hoán vị của S, trong đó S là danh sách hay tập hợp.
- permute(n, k): Danh sách các chỉnh hợp chập k của $[1, 2, \dots, n]$.

- permute(S, k): Danh sách các chỉnh hợp chập k của S, trong đó S là danh sách hay tập hợp.
- randperm(n): Một hoán vị ngẫu nhiên của $[1, 2, \ldots, n]$.
- randperm(S): Một hoán vị ngẫu nhiên của S.

```
> permute(3);
```
$$[[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]$$
```
> permute([1, 1, 2]);
```
$$[[1,1,2],[1,2,1],[2,1,1]]$$
```
> permute({a, b, c});
```
$$[[a,b,c],[a,c,b],[b,a,c],[b,c,a],[c,a,b],[c,b,a]]$$
```
> permute(3, 2);
```
$$[[1,2],[1,3],[2,1],[2,3],[3,1],[3,2]]$$
```
> permute([1, 1, 2], 2);
```
$$[[1,1],[1,2],[2,1]]$$
```
> permute({a, b, c},2);
```
$$[[a,b],[a,c],[b,a],[b,c],[c,a],[c,b]]$$

Ta có thể dùng hàm permute để giải quyết các bài toán liên quan tới liệt kê hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp.

Ví dụ 1. Có hai chữ số 1, một chữ số 5 và ba chữ số 8, hãy

a) Liệt kê tất cả các số có 3 chữ số được tạo từ các chữ số trên;

b) Liệt kê tất cả các hoán vị của các chữ số trên.

```
> S:=[1, 1, 5, 8, 8, 8]:
> permute(S, 2);
```
$$[[1,1],[1,5],[1,8],[5,1],[5,8],[8,1],[8,5],[8,8]]$$
```
> L:=permute(S);
```
$$[1,1,5,8,8,8],[1,1,8,5,8,8],[1,1,8,8,5,8],[1,1,8,8,8,5],[1,5,1,8,8,8],\ldots,$$
```
> nops(L);
```
$$60$$

Ví dụ 2. Liệt kê tất cả các số có ba chữ số được tạo từ các chữ số 1, 2, 3, 4 (có thể lặp lại).

```
> S:=[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4]:
> L:=permute(S, 3);
```
$$[1,1,1],[1,1,2],[1,1,3],[1,1,4],[1,2,1],[1,2,2],[1,2,3],[1,2,4],[1,3,1],\ldots$$

```
> nops(L);
```

64

3.3 Liệt kê tổ hợp

- choose(n): Danh sách các tổ hợp của $[1, 2, \ldots, n]$.
- choose(S): Danh sách (tập hợp) các tổ hợp của S, trong đó S là danh sách (tập hợp).
- choose(n, k): Danh sách các tổ hợp chập k của $[1, 2, \ldots, n]$.
- choose(S, k): Danh sách (tập hợp) các tổ hợp chập k của S, trong đó S là danh sách (tập hợp).
- randcomb(n, k): Một tổ hợp ngẫu nhiên chập k của $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- randcomb(S, k): Một tổ hợp ngẫu nhiên chập k của S.

```
> choose(3);
```

$$[[], [1], [2], [3], [1, 2], [1, 3], [2, 3], [1, 2, 3]]$$

```
> choose([a, a, b]);
```

$$[[], [a], [b], [a, b], [a, a], [a, a, b]]$$

```
> choose({1, 2, 3});
```

$$\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

```
> choose(4, 2);
```

$$[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]$$

```
> choose([a, a, b], 2);
```

$$[[a, a], [a, b]]$$

```
> choose({1, 2, 3}, 2);
```

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Ta có thể dùng hàm choose để giải quyết các bài toán liên quan tới liệt kê tổ hợp lặp.

Ví dụ 3. An mua 2 cái nón từ cửa hàng có 3 loại nón A, B, C. Hãy liệt kê tất cả khả năng mua của An.

```
> S:=[A, A, B, B, C, C]:
> choose(S, 2);
```

$$[[A, A], [A, B], [A, C], [B, B], [B, C], [C, C]]$$

3.4 Tìm hệ số của một đơn thức trong khai triển lũy thừa của đa thức

- coeff(f, x^k): Tính hệ số của x^k trong đa thức f
- coeff(coeff(f, x^k), y^t): Tính hệ số của $x^k y^t$ trong đa thức f

- coeffs(f): Dãy các hệ số trong đa thức f (chỉ áp dụng khi f đã được khai triển)

```
> f := (2*x^3-2*y+3*z^2+4*t)^10;
```

$$f := \left(2\,x^3 - 2\,y + 3\,z^2 + 4\,t\right)^{10}$$

```
> coeff(f, y^9);      #Tính hệ số y^9
```

$$-10240\,x^3 - 15360\,z^2 - 20480\,t$$

```
> coeff(coeff(coeff(coeff(f, x^6), y^4), z^2), t^3);      #Tính hệ số x^6y^4z^2t^3
```

$$154828800$$

```
> h:=expand(f):      #h là dạng khai triển của f
> L := coeffs(h);      #L là dãy các hệ số của đa thức h.
```

$$L := -46448640, 65318400, -82575360, -25194240, 737280, -30965760, \ldots$$

```
> nops([L]);
```

$$286$$

Như vậy đa thức $f := (2\,x^3 - 2\,y + 3\,z^2 + 4\,t)^{10}$ có

- hệ số của đơn thức $x^6y^4z^2t^3$ là 154828800;
- số đơn thức của f là 286.

Phần II. Bài tập

Bài 3.1 Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau mà trong đó có chữ số 0?

Bài 3.2 Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 12 mà có

a) chính xác 3 bit 1?

b) tối đa 3 bit 1?

c) tối thiểu 3 bit 0?

d) ít nhất 3 bit 0 và 3 bit 1?

Bài 3.3 Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi ký tự ABCDEFGH chứa

a) ED?

b) CDE?

c) BA và FGH?

d) AB, DE, và GH?

e) CAB và BED?

f) BCA và ABF?

Bài 3.4 Từ 15 nam và 10 nữ, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đội gồm 12 người nếu

a) chọn tùy ý

b) có 6 nam

c) có ít nhất 8 nam

d) có nam ít hơn nữ

e) có cả nam và nữ

f) có số nam là chẵn

Bài 3.5 Cho $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp A con của S có 5 phần tử mà

a) chứa phần tử 3;

b) $\min A = 3$;

c) $\min A \leq 3$;

d) $\min A \geq 4$;

e) $\max A = 8$;

f) $\min A = 2$ và $\max A = 8$.

Bài 3.6 Cho $S = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp $A \subset S$ mà

a) A chỉ có toàn số lẻ

b) A có 3 số lẻ

c) $|A| = 8$ và A có 3 số lẻ

d) A có 3 số lẻ và ít nhất 5 số chẵn

Bài 3.7 Cho n là số nguyên dương và $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập $A \subset S$ sao cho A có ít nhất một số chẵn? (xét n chẵn, lẻ)

Bài 3.8 Tìm số tự nhiên $n \geq 7$ biết rằng chỉ có một phần tư số tập con gồm 5 phần tử của $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ có chứa số 7.

Bài 3.9 Cho số nguyên $n \geq 2$. Có bao nhiêu cách chia n sinh viên thành 2 đội mà trong đó

a) một đội học tiếng Anh và một đội học tiếng Pháp?

b) cả hai đội cùng đi làm công tác xã hội như nhau? (xét trường hợp n chẵn và lẻ)

Bài 3.10 Có bao nhiêu cách chia 12 cây bút khác nhau cho 4 đứa trẻ nếu

a) mỗi đứa được 3 cây;

b) hai đứa lớn mỗi đứa 4 cây và hai đứa nhỏ mỗi đứa 2 cây.

Bài 3.11 Cho số nguyên $n \geq 4$. Xét tất cả các tam giác tạo từ 3 đỉnh khác nhau của một đa giác đều có n cạnh. Hỏi

a) có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy?

b) có bao nhiêu tam giác có chung 2 cạnh với đa giác trên?

c) có bao nhiêu tam giác có chung đúng 1 cạnh với đa giác trên?

d) có bao nhiêu tam giác không có chung cạnh nào với đa giác trên?

Bài 3.12 Có bao nhiêu cách sắp xếp

a) 5 nam và 5 nữ xen kẽ nhau thành một hàng dọc? Câu hỏi tương tự cho trường hợp 6 nam và 5 nữ.

b) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau?

c) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 4 nữ đứng gần nhau?

d) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau và 4 nữ đứng gần nhau?

e) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau hay 4 nữ đứng gần nhau?

f) 6 bác sĩ 7 kỹ sư và 8 luật sư thành một hàng ngang sao cho các đồng nghiệp đứng gần nhau?

Bài 3.13 Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 cặp vợ chồng ngồi vào bàn tròn có 10 ghế (các ghế được đánh số thứ tự) nếu

a) xếp tùy ý?

b) những người chồng ngồi gần nhau?

c) vợ chồng ngồi gần nhau?

Bài 3.14 Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần.

Bài 3.15 Tìm hệ số của đơn thức

a) xy^2z^3t khi khai triển $(x + 2y - z + 4t - 5u)^7$

b) $x^3y^9z^4t^3$ khi khai triển $(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9$

Bài 3.16 Có bao nhiêu cách treo 3 áo đỏ, 4 áo trắng và 5 áo xanh thành một hàng dọc (các áo đều khác nhau) nếu

a) treo tùy ý

b) các áo cùng màu treo gần nhau

c) các áo màu trắng treo gần nhau

d) các áo màu đỏ treo gần nhau và các áo màu xanh treo gần nhau

e) áo đầu hàng có màu xanh

f) áo đầu hàng có màu đỏ và áo cuối hàng có màu trắng.

Bài 3.17 Làm lại Bài 3.15 nhưng với giả thiết là các áo cùng màu được xem là giống nhau.

Bài 3.18 Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 32$ (hay bất phương trình $x + y + z + t \leq 32$) nếu

a) x, y, z, $t \geq 0$

b) $x \geq 2$, $y \geq 3$, $z \geq 1$, $t > 5$

c) $x > -1$, $y \geq -4$, $z > 4$, $t \geq 3$

d) x, y, $z > 0$ và $1 \leq t < 25$

Bài 3.19 Có bao nhiêu cách chọn 20 tờ giấy bạc từ các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng? Nếu yêu cầu thêm có ít nhất 7 tờ 5 đồng và không quá 8 tờ 20 đồng thì có bao nhiêu cách chọn?

Bài 3.20 Có bao nhiêu cách chia 18 viên kẹo giống nhau cho 5 đứa trẻ nếu

a) chia tùy ý

b) đứa nào cũng có kẹo

c) đứa lớn nhất có 6 viên

d) đứa nhỏ nhất được ít nhất 4 viên

e) đứa lớn nhất nhận không quá 7 viên

Bài 3.21 Khi khai triển $(x + y + z + t)^{10}$ ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau? Trong số đó có bao nhiêu đơn thức $x^m y^n z^u t^v$ (không kể hệ số phía trước) thỏa $m \geq 2$, $n \leq 3$ và $v \geq 1$?

Bài 3.22 Có bao nhiêu cách chia 15 viên kẹo chanh (giống nhau) và 10 viên kẹo dừa (giống nhau) cho 6 đứa trẻ sao cho đứa nào cũng có cả hai thứ kẹo?

Bài 3.23 Có bao nhiêu cách mua 20 hộp sơn với đúng 7 màu trong số 10 màu mà cửa hàng có?

Bài 3.24 Xét chuỗi ký tự bao gồm phần chữ cái đứng trước và phần chữ số đứng sau. Phần chữ cái có 9 chữ cái α, α, β, β, β, γ, γ, γ, γ xếp tùy ý (α, β, γ là 3 chữ cái khác nhau lấy tùy ý từ A, E, H, P, Y). Phần chữ số là 6 chữ số $xyzuvw$ (x, y, z, u, v, w được lấy tùy ý từ 0, 1, 2, ..., 8, 9) thỏa $7 \leq x + y + z + u + v + w \leq 9$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi ký tự như vậy?

Bài 3.25 Cần chọn bao nhiêu số từ tập $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ để đảm bảo rằng trong đó có ít nhất hai số có tổng bằng 16?

Bài 3.26 Cho A là tập hợp con của $S = \{1, 2, \ldots, 25\}$ thỏa $|A| \geq 14$. Chứng minh rằng tồn tại hai phần tử $a, b \in A$ thỏa $a \neq b$ và $a + b = 26$.

Bài 3.27 Cho $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ và $A \subset S$ thỏa $|A| \geq 11$. Chứng minh rằng tồn tại hai phần tử $x, y \in A$ sao cho $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$. Tổng quát hóa kết quả trên theo 2 hướng khác nhau: theo $|S|$ hoặc theo ($\sqrt[n]{x}$ và $\sqrt[n]{y}$).

Bài 3.28 Lấy 10 điểm khác nhau tùy ý trên một tam giác đều có cạnh bằng 3cm. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 điểm có khoảng cách không quá 1cm.

Bài 3.29 Từ thứ hai đến thứ bảy của mỗi tuần có 12 buổi (sáng và chiều). Có 782 sinh viên đăng ký học đàn theo các buổi nói trên trong tuần: mỗi sinh viên có thể chọn từ 2 đến 4 buổi. Chứng minh rằng có ít nhất 2 sinh viên có lịch học trong tuần hoàn toàn giống nhau.

Bài 3.30 Xếp các con số $1, 2, \ldots, 25$ một cách tùy ý trên một đường tròn. Chứng minh rằng có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng ≥ 41 và có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng ≤ 37.

Bài 3.31 Cho $S = \{1, 2, \ldots, 14\}$ và $A \subset S$ thỏa $|A| \geq 6$. Chứng minh có $H, K \subset A$ (mà $\emptyset \neq H \neq K \neq \emptyset$) thỏa $|H| \leq 5$, $|K| \leq 5$ và $\sum\limits_{h \in H} h = \sum\limits_{k \in K} k$.