

Thực hành Vi tích phân 1B

Ngày 12 tháng 9 năm 2017

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Dãy số và ánh xạ</b>	<b>3</b>
1.1	Dãy số . . . . .	3
1.2	Ánh xạ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Hàm số</b>	<b>5</b>
2.1	Giới hạn hàm số . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Đạo hàm và ứng dụng</b>	<b>8</b>
3.1	Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn . . . . .	8
3.2	Phương trình tiếp tuyến . . . . .	9
3.3	Xấp xỉ tuyến tính . . . . .	10
3.4	Các định lý giá trị trung bình . . . . .	11
3.5	Ứng dụng tính giới hạn . . . . .	11
3.6	Khai triển Taylor; Maclaurin . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Tích phân và ứng dụng</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Chuỗi hàm</b>	<b>14</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>14</b>

# Chương 1

## Dãy số và ánh xạ

### 1.1 Dãy số

**Bài tập 1.** Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \right).$$

**Bài tập 2.** Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}.$$

**Bài tập 3.** Tìm giới hạn của dãy số sau:

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}.$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

### 1.2 Ánh xạ

**Bài tập 4.**  $f$  có là đơn ánh, toàn ánh không. Giải thích?

i.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được định nghĩa bởi  $f(x) = 2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$

ii.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  được định nghĩa bởi  $f(n) = n^2 + n, \forall x \in \mathbb{Z}.$

iii.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được định nghĩa bởi  $f(x) = 2x^2 + 3, \forall x \in \mathbb{R}.$

iv.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  được định nghĩa bởi  $f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \frac{n}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

v. Cho  $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}, B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .  $f : A \rightarrow B$  được định nghĩa bởi  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ .

# Chương 2

## Hàm số

### 2.1 Giới hạn hàm số

**Bài tập 5.** Tính các giới hạn sau:

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(10+h)^2 - 100}{h}$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{100+h} - 10}{h}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2017} \frac{\frac{1}{2017} + \frac{1}{x}}{2017+x}$

d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{8x - x^3}$

f)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$

g)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ .

**Bài tập 6.** Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0.$$

**Bài tập 7.** Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

**Bài tập 8.** Nếu  $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$  với  $x \geq 0$ . Tìm  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

**Bài tập 9.** Nếu  $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$  với mọi  $x$ . Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

**Bài tập 10.** Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}[1 + \sin^2(2\pi/x)] = 0.$$

**Bài tập 11.** Tìm giới hạn sau nếu tồn tại:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x^3-x^2|} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{7-|x|}{3x+2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

**Bài tập 12.** Cho

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 5x + 4 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

$$\begin{array}{lll} i. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) & ii. \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) & iii. g(1) \\ iv. \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) & v. \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) & vi. \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \end{array}$$

**Bài tập 13.** Chứng minh các khẳng định sau bằng định nghĩa  $\delta, \varepsilon$ .

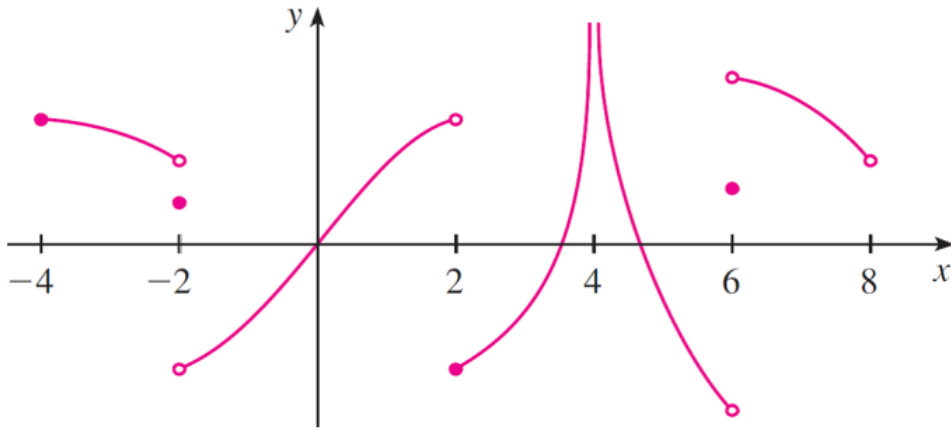
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 7} (20 - 3x) = -1 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3) = -4$$

**Bài tập 14.** Từ đồ thị của hàm số  $g$  cho bên dưới, tìm các khoảng mà hàm số  $g$  liên tục.

**Bài tập 15.** Hãy xác định  $f(2)$  sao cho mỗi hàm số có gián đoạn khử được

$$\text{trở thành liên tục tại 2.} \quad \text{a) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$



Hình 2.1: hình ảnh của bài 14

**Bài tập 16.** Chứng minh rằng  $f$  liên tục trên  $(-\infty, \infty)$  với  $f$  định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

**Bài tập 17.** Chứng minh các hàm số sau liên tục trên  $\mathbb{R}$

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x/2 + \cos x) & \text{nếu } x < \pi/2 \\ \cos(x/2 + \sin x - 1) & \text{nếu } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

**Bài tập 18.** Tìm giá trị của  $c$  sao cho hàm số sau liên tục trên  $(-\infty, \infty)$ :

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2cx & \text{nếu } x < 1 \\ 4x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

**Bài tập 19.** Tìm giá trị của  $a, b$  sao cho hàm số sau liên tục trên  $(-\infty, \infty)$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ ax^2 - bx + 4 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 3x + a - b & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

## Chương 3

# Đạo hàm và ứng dụng

### 3.1 Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn

**Bài tập 20.** Giả sử  $g$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$  và xét  $f(x) = \sin(xg(e^x))$ . Tính  $f^{(2)}$  theo  $g, g'$  và  $g''$ .

**Bài tập 21.** Tính  $y''$  khi biết  $9x^2 + y^2 = 9$ .

**Bài tập 22.** Tính  $y''$  khi biết  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ .

**Bài tập 23.** Tìm công thức chính xác của  $\frac{dy}{dx}$  (dùng công thức hàm ẩn) biết:

(a)  $x^3 + y^3 = 1$ ,

(e)  $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ ,

(b)  $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ .

(f)  $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$ ,

(c)  $x^2 + xy - y^2 = 4$ ,

(g)  $y \cos x = x^2 + y^2$ ,

(d)  $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$ ,

(h)  $\cos(xy) = 1 + \sin y$ .

**Bài tập 24.** Giả sử  $y = \sqrt{2x+1}$ , trong đó  $x$  và  $y$  là những hàm theo  $t$ .

1. Giả sử  $\frac{dx}{dt} = 3$ , tìm  $\frac{dy}{dt}$  khi  $x = 4$ .

2. Giả sử  $\frac{dy}{dt} = 5$ , tìm  $\frac{dx}{dt}$  khi  $x = 12$ .

**Bài tập 25.** Giả sử  $4x^2 + y^2 = 9$ , trong đó  $x$  và  $y$  là những hàm theo  $t$ .

1. Giả sử  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$ , tìm  $\frac{dx}{dt}$  khi  $x = 2$  và  $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ .

2. Giả sử  $\frac{dx}{dt} = 3$ , tìm  $\frac{dy}{dt}$  khi  $x = -2$  và  $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ .



### CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN



Hình 3.1: Hình bài tập 28

**Bài tập 26.** Biết  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $\frac{dx}{dt} = 5$ ,  $\frac{dy}{dt} = 4$ , tìm  $\frac{dz}{dt}$  khi  $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ .

**Bài tập 27.** Hai chiếc xe bắt đầu di chuyển từ cùng một điểm. Một chiếc đi về phía nam với tốc độ 60 mi/h và chiếc còn lại di chuyển về phía tây với tốc độ 25 mi/h. Khoảng cách giữa hai chiếc xe tăng lên ở mức nào hai giờ sau đó?

**Bài tập 28.** Một chiếc thuyền được kéo vào một bến tàu bằng một sợi dây gắn vào mũi thuyền và đi qua một ròng rọc trên bến tàu, mà nó cao hơn 1 m so với mũi thuyền. Nếu sợi dây được kéo vào với tốc độ 1 m/s, thuyền tiến gần đến bến tàu nhanh như thế nào khi nó cách bến tàu 8 m?

**Bài tập 29.** Vào buổi trưa, tàu A cách 100 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía nam với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi nhanh như thế nào vào lúc 4:00 PM?

## 3.2 Phương trình tiếp tuyến

**Bài tập 30.** Hãy tìm phương trình tiếp tuyến với đồ thị mỗi hàm số tại giá trị  $x_0$  cho trước.

(a)  $f(x) = x^2, x_0 = 3$ .

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}, x_0 = 1$ .

**Bài tập 31.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số  $y$  được cho bởi biểu thức

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

tại điểm  $(3, 3)$ .

**Bài tập 32.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số  $y$  được cho bởi biểu thức

$$x^2 + y^2 = 25$$

tại điểm  $(3, -4)$ .

### 3.3. XẤP XỈ TUYẾN TÍNH CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

**Bài tập 33.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số  $y$  được cho bởi biểu thức

$$y \sin(2x) = x \cos(2y)$$

tại điểm  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ .

**Bài tập 34.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của đồ thị hàm số  $y$  được cho bởi biểu thức

$$\sin(x+y) = 2x - 2y$$

tại điểm  $(\pi, \pi)$ .

**Bài tập 35.** Tìm phương trình của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm có tọa độ cho trước.

1.  $y = 4x - 3x^2, (2, -4)$ .

3.  $y = \sqrt{x}, (1, 1)$ .

2.  $y = x^3 - 3x + 1, (2, 3)$ .

4.  $y = \frac{2x+1}{x+2}, (1, 1)$ .

**Bài tập 36.** (a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tới đường cong  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  tại điểm  $x = a$

(b) Tìm phương trình của tiếp tuyến tại các điểm  $(1, 1)$  và  $(4, 1/2)$ .

(c) Vẽ đồ thị của đường cong và cả hai tiếp tuyến trên một màn hình chung.

    Tìm độ dốc hệ số

## 3.3 Xấp xỉ tuyến tính

**Bài tập 37.** Hãy tính gần đúng các giá trị sau bằng xấp xỉ tuyến tính.

(a)  $(1.999)^4$ .

(d)  $\frac{1}{4.002}$ .

(b)  $(\sin 1^\circ)$ .

(e)  $\tan(44^\circ)$ .

(c)  $\sqrt[3]{1001}$ .

(f)  $\sqrt{99,8}$ .

**Bài tập 38.** (i) Xấp xỉ  $f$  bằng đa thức Taylor bậc  $n$  tại  $a$ .

(ii) Sử dụng Bất đẳng thức Taylor để ước lượng độ chính xác của xấp xỉ  $f(x) \approx T_n(x)$  khi  $x$  nằm trong đoạn cho trước.

### CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

(iii) Kiểm tra kết quả phần (b) bằng đồ thị của  $|R_n(x)|$ .

Thực hiện các công việc trên cho mỗi hàm số sau ứng với  $a, n$  và đoạn cho trước.

(a)  $f(x) = \sqrt{x}, a = 4, n = 2, 4 \leq x \leq 4.2$ .

(b)  $f(x) = x^{-2}, a = 1, n = 2, 0.9 \leq x \leq 1.1$ .

(c)  $f(x) = x^{2/3}, a = 1, n = 3, 0.8 \leq x \leq 1.2$ .

(d)  $f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{6}, n = 4, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .

## 3.4 Các định lý giá trị trung bình

**Bài tập 39.** Hãy kiểm tra hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý Rolle trên đoạn cho trước. Sau đó, tìm tất cả các số  $c$  thỏa mãn kết luận của định lý Rolle.

(a)  $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, [1, 3]$ .      (c)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, [0, 9]$ .

(b)  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, [0, 3]$ .      (d)  $f(x) = \cos(2x), [\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$ .

**Bài tập 40.** Cho  $f(x) = (x-3)^{-2}$ . Chứng tỏ rằng không tồn tại  $c \in (1, 4)$  sao cho  $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$ . Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

**Bài tập 41.** Hãy kiểm tra rằng hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định lý giá trị trung bình trên khoảng cho trước. Sau đó tìm tất cả các số  $c$  thỏa mãn kết luận của Định lý giá trị trung bình.

(a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}, [0, 1]$ .

(b)  $f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3]$ .

**Bài tập 42.** Chứng tỏ rằng phương trình  $x^3 - 15x + c = 0 = 0$  có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn  $[-2, 2]$  với mọi số thực  $c$ .

## 3.5 Ứng dụng đạo hàm tính giới hạn (quy tắc l'Hospital)

**Bài tập 43.** Tính

### 3.6. KHAI TRIỂN TAYLOR; MACLAURIN

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x},$

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x},$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right),$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}},$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - e^x - 1}{1 - e^{x^2}}.$

## 3.6 Khai triển Taylor; Maclaurin

**Bài tập 44.** Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau.

(a)  $f(x) = (1-x)^{-2},$

(d)  $f(x) = e^{-2x},$

(b)  $f(x) = \ln(1+x),$

(c)  $f(x) = \sin(\pi x),$

(e)  $f(x) = x \cos x.$

**Bài tập 45.** Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau quanh điểm  $a$  tương ứng.

(a)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, a = 1.$

(e)  $f(x) = e^{2x}, a = 3.$

(b)  $f(x) = x - x^3, a = -2.$

(f)  $f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{2}.$

(c)  $f(x) = \ln x, a = 2.$

(g)  $f(x) = \cos x, a = \pi.$

(d)  $f(x) = \frac{1}{x}, a = -3.$

(h)  $f(x) = \sqrt{x}, a = 16.$

**Bài tập 46.** (a) Tìm các đa thức Taylor đến bậc 6 của  $f(x) = \cos x$  quanh  $a = 0$ . Vẽ đồ thị  $f$  và các đa thức này trên cùng đồ thị.

(b) Đánh giá  $f$  và những đa thức này tại  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi.$

(c) Bình luận sự hội tụ của các đa thức này về  $f$ .

**Bài tập 47.** Tìm đa thức Taylor  $T_3(x)$  cho hàm  $f(x) = \frac{1}{x}$  quanh  $a = 2$ . Vẽ  $f$  và  $T_3(x)$  trên cùng đồ thị.

## Chương 4

# Tích phân và ứng dụng

Bài tập 48.

# Chương 5

## Chuỗi hàm

Bài tập 49.