CHƯƠNG III

ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

I. ĐỊNH THỨC:

1.1/ KHÁI NIỆM: Với mỗi $A \in M_n(\mathbf{R})$, người ta *xác định duy nhất một giá trị thực* c_A gắn liền với A và gọi c_A là *định thức* (*determinant*) của A.

Ta ký hiệu $c_A = \det(A)$ hay $c_A = |A|$.

Giá trị $\det(A) = |A|$ thể hiện *tính khả nghịch* hoặc *không khả nghịch* của A.

Nếu $|A| \neq 0$ thì A *khả nghịch*. Nếu $|A| = 0$ thì A *không khả nghịch*.

1.2/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP 1, 2, 3:

a) Nếu $A = (\,a\,) \in M_1(\mathbf{R})$ thì $|A| = a$.

b) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ thì A có *đường chéo xuôi* (\ ) là $\begin{matrix} a & \\ & d \end{matrix}$ và *đường chéo ngược* (/) là $\begin{matrix} & b \\ c & \end{matrix}$. Ta đặt $|A| = ad - bc$.

c) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta *viết lại* cột (1) và cột (2) kế cận A như

sau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ để hình thành 6 *đường chéo* [3 *đường chéo xuôi* (\ )

$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$ $\begin{matrix} b & & \\ & f & \\ & & g \end{matrix}$ $\begin{matrix} c & & \\ & d & \\ & & h \end{matrix}$ và 3 *đường chéo ngược* (/) $\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$ $\begin{matrix} & & a \\ & f & \\ h & & \end{matrix}$ $\begin{matrix} & & b \\ & d & \\ i & & \end{matrix}$].

Ta có *qui tắc* SARRUS *tính định thức* của A theo 6 *đường chéo* như sau:

$$|A| = (\,aei + bfg + cdh\,) - (\,ceg + afh + bdi\,).$$

Ví dụ:

a) $A = (-\sqrt{6}) \in M_1(\mathbf{R})$ có $|A| = -\sqrt{6}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|A| = (-8)2 - 7(-5) = -16 - (-35) = 19$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta *viết lại* $\left(\begin{matrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{matrix}$ và có

$|A| = [\,4.3(-6) + (-1).1.(-5) + 2(-2).2\,] - [\,2.3(-5) + 4.1.2 + (-1)(-2)(-6)\,]$

$= (-72 + 5 - 8) - (-30 + 8 - 12) = (-75) - (-34) = -75 + 34 = -41.$

1.3/ KÝ HIỆU:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ với $n \geq 2$ và $1 \leq i, j \leq n$.

Đặt $A(i, j)$ là ma trận A *xóa dòng* (i) và *cột* (j), nghĩa là $A(i, j) \in M_{n-1}(\mathbf{R})$.

Ta nói $A(i, j)$ là *ma trận đồng thừa của* A tại *vị trí* (i, j).

Đặt $C_{ij}^A = (-1)^{i+j}\,|A(i, j)|$. Nếu *không có sự ngộ nhận*, ta viết gọn $C_{ij}^A = C_{ij}$.

Ta nói C_{ij}^A là *hệ số đồng thừa của* A tại *vị trí* (i, j).

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Xét $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Ta có $A(2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ và $C_{23}^A = C_{23} = (-1)^{2+3}\,|A(2, 3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3.$

Ta có $A(3, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $C_{31}^A = C_{31} = (-1)^{3+1}\,|A(3, 1)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7.$

1.4/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP n (n ≥ 2):

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ với $n \geq 2$. Xét $1 \leq i, j \leq n$.

$|A|$ được tính theo *định thức* của *các ma trận đồng thừa* [*cấp* $(n-1)$] của A

[*hình thức đệ qui* : *định thức cấp* n được tính theo *các định thức cấp* (n – 1)].

Ta *có thể tính* | A | theo *bất kỳ một dòng* hay *một cột nào* của A.

| A | *được tính theo dòng* (i) như sau :

$$|A| = a_{i1}C_{i1}^{A} + a_{i2}C_{i2}^{A} + \cdots + a_{in}C_{in}^{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}^{A}.$$

| A | *được tính theo cột* (j) như sau :

$$|A| = a_{1j}C_{1j}^{A} + a_{2j}C_{2j}^{A} + \cdots + a_{nj}C_{nj}^{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}^{A}.$$

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Xét $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

| A | *được tính theo* dòng (1) như sau : $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

$= 4(-1)^{1+1}|A(1,1)| - (-1)^{1+2}|A(1,2)| + 2(-1)^{1+3}|A(1,3)|$

$= 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4(-20) + 17 + 2(11) = -80 + 17 + 22 = -41.$

| A | *được tính theo* cột (2) như sau : $|A| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$

$= -(-1)^{1+2}|A(1,2)| + 3(-1)^{2+2}|A(2,2)| + 2(-1)^{3+2}|A(3,2)|$

$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 17 + 3(-14) - 2(8) = 17 - 42 - 16 = -41.$

1.5/ <u>NHẬN XÉT:</u>

Cho $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le r, s \le n$.

Nếu $a_{rs} = 0$ thì $a_{rs}C_{rs}^{A} = 0$ mà *không cần tính* C_{rs}^{A}.

Như vậy ta sẽ tính | A | theo *một dòng* hay *một cột nào đó có số lượng hệ số bằng 0 là nhiều nhất.*

Ví dụ:

Cho $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$ [dòng (2) có *nhiều hệ số* 0 nhất]

$B = A(2, 2) = (b_{ij})_{1 \le i, j \le 3} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ [cột (3) có *nhiều hệ số* 0 *nhất*]

$D = B(1, 3) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = a_{22} C_{22}^{A}$ (vì $a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0$) $= -2(-1)^{2+2} |B|$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2 b_{13} C_{13}^{B}$ (vì $b_{23} = b_{33} = 0$) $= -2(-3)(-1)^{1+3} |D| =$

$= 6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 6[-28 - (-16)] = 6[-28 + 16] = -72.$

[| A | *được tính theo* dòng (2) và | B | *được tính theo* cột (3)].

1.6/ MỆNH ĐỀ:

Cho $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Nếu A có *một dòng* (hay *một cột*) *nào đó toàn hệ số* 0 thì $|A| = 0$.

b) Nếu A có *hai dòng* (hay *hai cột*) *nào đó tỉ lệ với nhau* (đặc biệt *bằng nhau*)

thì $|A| = 0$.

c) Nếu A là *ma trận tam giác trên* hoặc *dưới* (đặc biệt là *ma trận đường chéo*)

thì $|A| = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ [*tích các hệ số trên đường chéo chính* (\ )].

d) $|A^t| = |A|$.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & 0 & y \\ c & 0 & z \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4(-3)(-2) = 24. \qquad \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 9.0.(-6) = 0.$$

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ và $A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $|A^t| = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi) = |A|$.

II. ĐỊNH THỨC VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG VÀ CỘT CỦA MA TRẬN:

2.1/ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN CỘT CHO MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i \neq j \leq n$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên cột* cho *ma trận*:

a) *Hoán vị* cột (i) với cột (j). Ta ghi (i)’ $\leftrightarrow$ (j)’.

b) *Nhân* cột (i) với *số* $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ta ghi (i)’ $\rightarrow$ c(i)’.

c) *Thế* cột (i) bằng [cột (i) + c.cột (j)] với $c \in \mathbf{R}$.

Ta ghi (i)’ $\rightarrow$ [(i)’ + c(j)’].

Các phép biến đổi đảo ngược của *các phép biến đổi sơ cấp trên cột nói trên* lần lượt là (i)’ $\leftrightarrow$ (j)’, (i)’ $\rightarrow c^{-1}$(i)’ và (i)’$\rightarrow$ [(i)’ − c(j)’].

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 4^* & 2 & -3^* & 5 \\ -1^* & 0 & 7^* & 8 \\ -6^* & 9 & -2^* & -4 \end{pmatrix}$$ qua *phép biến đổi* (1)’ $\leftrightarrow$ (3)’

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6^* & 4 & 5 \\ 7 & 0^* & -1 & 8 \\ -2 & -27^* & -6 & -4 \end{pmatrix}$$ qua *phép biến đổi* (2)’ → – 3(2)’

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 14^* & 5 \\ 7 & 0 & 15^* & 8 \\ -2 & 9 & -14^* & -4 \end{pmatrix}$$ qua *phép biến đổi*

(3)’ → [(3)’ + 2(4)’].

Các phép biến đổi đảo ngược của *các phép biến đổi sơ cấp trên cột nói trên* lần lượt là (1)’ ↔ (3)’, (2)’ → $-\frac{1}{3}$(2)’ và (3)’ → [(3)’ – 2(4)’].

2.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$.

Giả sử A → A’ bằng *phép biến đổi sơ cấp* (i) ↔ (j) [hoặc (i)’ ↔ (j)’].

Khi đó | A’ | = – | A | (*đổi dấu*).

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có | A | = – 41(**Ví dụ 1.2**).

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5^* & 2^* & -6^* \\ -2^* & 3^* & 1^* \end{pmatrix}$ [(2) ↔ (3)] và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 2^* & -1 & 4^* \\ 1^* & 3 & -2^* \\ -6^* & 2 & -5 \end{pmatrix}$ [(1)’ ↔ (3)’]

Ta có | A_1 | = – | A | = 41 và | A_2 | = – | A | = 41.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} a & c^* & b^* \\ d & f^* & e^* \\ g & i^* & h^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix} \to C = \begin{pmatrix} g^* & i^* & h^* \\ d & f & e \\ a^* & c^* & b^* \end{pmatrix}$

do [(2)’ ↔ (3)’] và [(1) ↔ (3)]. Ta có | C | = – | B | = – (– | A |) = | A |.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \le n$ và $c \in \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$.

Giả sử A → A’ bằng *phép biến đổi sơ cấp* (i) → c(i) [hoặc (i)’ → c(i)’].

Khi đó | A’ | = c.| A | (*bội* c).

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -6^* & 9^* & 3^* \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} [(2) \to 3(2)]$ và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4^* \\ -2 & 3 & -2^* \\ -5 & 2 & 12^* \end{pmatrix} [\,(3)' \to -2(3)']$

Ta có $|A_1| = 3|A| = -123$ và $|A_2| = -2|A| = 82$.

2.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó

a) $|cA| = c^n|A|$ (vì $A \to cA$ bằng cách *nhân* n *dòng* của A với c).

b) Có thể *rút thừa số chung ở mỗi dòng* (hay *mỗi cột*) của A *ra ngoài dấu định thức*.

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$ và $B = -2A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 4 & -6 & -2 \\ 10 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

Ta có $|B| = (-2)^3|A| = -8(-41) = 328$.

b) $\begin{vmatrix} 28^* & -40^* & 76^* & -12^* \\ -1 & 25 & 6 & -3 \\ 4 & 10 & -5 & 2 \\ -7 & -35 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & -10^* & 19 & -3 \\ -1 & 25^* & 6 & -3 \\ 4 & 10^* & -5 & 2 \\ -7 & -35^* & 9 & 1 \end{vmatrix} = (4 \times 5)\begin{vmatrix} 7 & -2^* & 19 & -3 \\ -1 & 5^* & 6 & -3 \\ 4 & 2^* & -5 & 2 \\ -7 & -7^* & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

bằng cách rút các thừa số chung từ dòng (1) và cột (2).

2.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$ và $c \in \mathbf{R}$.

Giả sử $A \to A'$ bằng *phép biến đổi sơ cấp* $(i) \to [\,(i) + c(j)\,]$ (hoặc $[\,(i)' \to (i)' + c(j)'\,]$).

Khi đó $|A'| = |A|$ (*không thay đổi* và *độc lập với* c).

***<u>GHI CHÚ</u>*:** Hạng của ma trận không đổi khi dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên cột*.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3^* & 0^* & -2^* \end{pmatrix}$ và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 7^* & -1 & 2 \\ -11^* & 3 & 1 \\ -11^* & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Ta có

$|A_1| = |A|$ do $(3) \to [\,(3) + 2(1)\,]$ và $|A_2| = |A|$ do $(1)' \to [\,(1)' - 3(2)'\,]$.

2.6/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta có thể *phân tích* $|A|$ thành *tổng của hai định thức* dựa theo *một dòng* (hay *một cột*) *nào đó*. Chẳng hạn *phân tích đối với định thức cấp* 3 *như dưới đây*:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ [*phân tích* theo dòng (1)].

$$\begin{vmatrix} a & b+b' & c \\ d & e+e' & f \\ g & h+h' & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' & c \\ d & e' & f \\ g & h' & i \end{vmatrix}$$ [*phân tích* theo cột (2)].

Ví dụ: *Rút gọn định thức sau đây* (trước khi *tính bằng qui tắc* SARRUS):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & b-ax & c \\ d+ex & e-dx & f \\ g+hx & h-gx & i \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b-ax & c \\ d & e-dx & f \\ g & h-gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b-ax & c \\ ex & e-dx & f \\ hx & h-gx & i \end{vmatrix}$$ [*phân tích* theo *cột* (1)].

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -ax & c \\ d & -dx & f \\ g & -gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ hx & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & -ax & c \\ ex & -dx & f \\ hx & -gx & i \end{vmatrix}$$ [*phân tích* theo *cột* (2)]

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 + 0 - x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = (x^2+1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ (*tính tỉ lệ và sự hoán vị*)

$= (x^2 + 1)[\,(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)\,]$ (*qui tắc* SARRUS).

2.7/ <u>ÁP DỤNG:</u> Trước khi tính *định thức một ma trận*, ta có thể dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* (hay *cột*) *thích hợp* để *tạo nhiều hệ số* 0 *trên một dòng* (hay *cột*) *nào đó*. Các hệ số 0 này được tạo ra dựa vào *hệ số* ± 1 *có trên dòng* (hay *cột*) *tương ứng* hoặc dựa vào *quan hệ bội số - ước số*. Nếu *không có sẵn* hệ số ± 1, ta lại dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* (hay *cột*) thích hợp để *tạo* ± 1.

<u>Ví dụ:</u>

a) $$\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 & -20 \\ 2 & -4 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 8 & 28 \\ 4 & -8 & 5 & 24 \end{vmatrix} = \frac{4.4}{480}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 8 & 7 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1^{*} & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1^{*} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1^{*} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1.$$

b) $$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1^{*} \\ -1 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 5 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 138 \text{ (cách 1).}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2^{*} & 5 \\ 1 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = 138 \text{ (cách 2).}$$

c) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & b & b \\ c & c & y & c \\ d & d & d & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{*} & 0 & 0 & 0 \\ b & x-b & 0 & 0 \\ c & 0 & y-c & 0 \\ d & 0 & 0 & z-d \end{vmatrix} = a(x-b)(y-c)(z-d) \text{ [} \Delta \textit{ dưới} \text{].}$$

d) $$\begin{vmatrix} \cos 2a & d & 2\sin^2 a \\ (\sin b - \cos b)^2 & 2d & (\sin b + \cos b)^2 \\ -2\cos^2 c & -d & \cos 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d & 2\sin^2 a \\ 2 & 2d & (\sin b + \cos b)^2 \\ -1 & -d & \cos 2c \end{vmatrix} = 0 \text{ (2 cột } \textit{tỉ lệ} \text{).}$$

e) $$\begin{vmatrix} 657.419 & 656.419 \\ 928.308 & 927.308 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.000 & 656.419 \\ 1.000 & 927.308 \end{vmatrix} = 1.000\begin{vmatrix} 1 & 656.419 \\ 1 & 927.308 \end{vmatrix} =$$

$= 1000(927.308 - 656.419) = 270.889.000.$

III. ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH:

3.1/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) A *khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. b) A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Ghi chú: Khi xét *tính khả nghịch* của A, tìm | A | thì *thuận lợi hơn* là tìm R_A.

Ví dụ:

Xét *tính khả nghịch* của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ (a, b, c là *các tham số thực*)

Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$

Suy ra: A *khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \neq c \neq a$.

A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = b)$ *hay* $(b = c)$ *hay* $(c = a)$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: Giả sử $A \in M_n(\mathbf{R})$ và A *khả nghịch* (nghĩa là $|A| \neq 0$).

Ta xác định *ma trận nghịch đảo* A^{-1} bằng *phương pháp định thức* như sau:

* Tính n^2 *hệ số đồng thừa* $C_{ij}^A = (-1)^{i+j}|A(i, j)|$ $(1 \leq i, j \leq n)$ của A.

* Lập *ma trận* $C = \left(C_{ij}^A\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbf{R})$ [*ma trận* của n^2 *hệ số đồng thừa*].

* Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t$ (t = *transposition*) và

C^t gọi là *ma trận phụ hợp* của A.

Ký hiệu $C^t = \mathrm{Adj}(A)$ [Adj = Adjoint].

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41 \neq 0$ nên A *khả nghịch*.

Ta tính đầy đủ $3^2 = 9$ *hệ số đồng thừa* $C_{ij}^A = C_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ như sau:

$C_{11} = (-1)^{1+1}|A(1,1)| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20$, $C_{12} = (-1)^{1+2}|A(1,2)| = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -17$

$C_{13} = (-1)^{1+3}|A(1,3)| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$, $C_{21} = (-1)^{2+1}|A(2,1)| = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -2$

$C_{22} = (-1)^{2+2}|A(2,2)| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -14$, $C_{23} = (-1)^{2+3}|A(2,3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$C_{31} = (-1)^{3+1}|A(3,1)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$, $C_{32} = (-1)^{3+2}|A(3,2)| = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$C_{33} = (-1)^{3+3}|A(3,3)| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10$.

Lập $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} C^t = -\dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 20 & 2 & 7 \\ 17 & 14 & 8 \\ -11 & 3 & -10 \end{pmatrix}$.

3.3/ GHI CHÚ: Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và A *khả nghịch*.

[nghĩa là $\Delta = |A| = (ad - bc) \neq 0$].

Ta có thể *tính nhẩm ma trận nghịch đảo* A^{-1} *một cách nhanh chóng* như sau:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (*hoán vị đường chéo xuôi* và *đổi dấu đường chéo ngược*).

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|A| = 60 \neq 0$ nên A *khả nghịch* và

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.4/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$ với $k \geq 2$. Khi đó:

a) $|AB| = |A|.|B|$ và $|A_1A_2 \ldots A_k| = |A_1|.|A_2| \ldots |A_k|$.

b) Suy ra $\forall k \geq 2, |A^k| = |A|^k$ (*áp dụng* khi $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$).

c) Nếu A *khả nghịch* ($a = |A| \neq 0$) thì $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ và $\forall r \in \mathbf{Z}, |A^r| = |A|^r$.

Do đó $|\mathrm{Adj}(A)| = |C^t| = |aA^{-1}| = a^n|A^{-1}| = a^n.a^{-1} = a^{n-1} = |A|^{n-1}$.

<u>Ví dụ:</u> $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ có $|A| = -3, |B| = 4$ và $|C| = -6$. Ta có

$|AB| = |A|.|B| = (-3)4 = -12$ và $|ABC| = |A|.|B|.|C| = (-3)4(-6) = 72$

$|A^4| = |A|^4 = (-3)^4 = 81$, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{-1}{3}$ và $|A^{-5}| = |A|^{-5} = (-3)^{-5} = \dfrac{-1}{243}$

$|\mathrm{Adj}(A)| = |C^t| = |A|^{n-1} = (-3)^{n-1}$.

IV. <u>QUI TẮC CRAMER:</u>

Định thức được áp dụng vào việc khảo sát *các hệ phương trình tuyến tính* có *số phương trình* và *số ẩn bằng nhau*.

4.1/ <u>KÝ HIỆU:</u> Xét *hệ phương trình tuyến tính thực* $AX = B$ (có n *phương trình* và n *ẩn số*) trong đó $A \in M_n(\mathbf{R})$, $B \in M_{n\times 1}(\mathbf{R})$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Với $1 \leq j \leq n$, đặt

$\Delta = |A|$ và $\Delta_j = |A_j|$ trong đó A_j là A *xóa cột* (j) và *thay bằng cột* B.

4.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Với *các ký hiệu như trên*:

a) $\Delta x_j = \Delta_j$ khi $1 \leq j \leq n$.

b) Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có *nghiệm duy nhất* là $x_j = (\Delta_j / \Delta)$ khi $1 \leq j \leq n$.

c) Nếu $\Delta = 0$ và $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Delta_k \neq 0$ thì hệ *vô nghiệm*.

(lúc đó đẳng thức $\Delta x_k = \Delta_k$ *vô nghĩa*).

d) Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ thì hệ *vô nghiệm* hoặc *vô số nghiệm*.

Khi đó ta phải *giải hệ* bằng *phương pháp Gauss* hay *Gauss – Jordan* để có *kết quả chính xác* (vì lúc này qui tắc CRAMER *không còn hiệu lực nữa*).

Ví dụ:

a) *Giải* và *biện luận hệ phương trình tuyến tính* sau theo *tham số thực* m:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=0 \\ (m-2)x_2+(m-5)x_3-2x_1=2 \\ (m+1)x_3+mx_1+x_2=-2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên có dạng $AX = B$ với

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ và } B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ta tính Δ, Δ_1, Δ_2 và Δ_3 .

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ -2 & 3 & m-1 \\ m & -m & 1-m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ -m & 1-m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ 3-m & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(m-1)(m-3).$$

$$\Delta_1=|A_1|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2^* & m-2 & m-5 \\ 0 & m-1 & 2m-4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ m-1 & 2m-4 \end{vmatrix}=4(3-m).$$

$$\Delta_2=|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2^* & m-5 \\ m-2 & 0 & 2m-4 \end{vmatrix}=0$$ [dòng (1) *tỉ lệ* với dòng (3)].

$$\Delta_3=|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2^* \\ m-2 & m-1 & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix}=2(m-3).$$

* Nếu $1 \neq m \neq 3$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ có *nghiệm duy nhất* là

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4}{1-m},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=0 \text{ và } x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{2}{m-1}.$$

* Nếu $m=1$ thì $\Delta=0 \neq \Delta_1=8$ nên hệ *vô nghiệm*.

* Nếu $m=3$ thì $\Delta=0 = \Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$, ta thế $m=3$ vào hệ và giải hệ

bằng *phương pháp Gauss – Jordan* :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1^* & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có *vô số nghiệm* như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = -\frac{6a+4}{5}$ và $x_2 = \frac{2(1-a)}{5}$.

b) Xét 4 *hệ phương trình tuyến tính* (2 *ẩn số* x, y và m, p, q là *các hằng số thực*)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} m-3 & -1 & p \\ 5-m & m & q \end{array}\right)(1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 1 \end{array}\right)(2) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{array}\right)(3) \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)(4) \end{array}$$

Hệ (1) : $\forall m, p, q \in \mathbf{R}$, $\Delta = \begin{vmatrix} m-3 & -1 \\ 5-m & m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 \geq 1 > 0$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} p & -1 \\ q & m \end{vmatrix} = mp + q$ và $\Delta_y = \begin{vmatrix} m-3 & p \\ 5-m & q \end{vmatrix} = m(p+q) - (5p+3q)$

nên hệ có *nghiệm duy nhất*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{mp+q}{m^2-4m+5} \quad \text{và} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{m(p+q)-(5p+3q)}{m^2-4m+5}.$$

Hệ (2) : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \neq \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -21$ nên hệ *vô nghiệm*.

Hệ (3) : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$ và hệ $\Leftrightarrow$ $(2x - 3y = 1)$

Ta thấy hệ có *vô số nghiệm* với *một ẩn tự do* $y \in \mathbf{R}$, $x = \frac{3y+1}{2}$.

Hệ (4) : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Ta thấy hệ *vô nghiệm* vì hệ có phương trình $0x + 0y = 2 \neq 0$.
