

CHƯƠNG I

CƠ SỞ LOGIC

I. MỆNH ĐỀ LOGIC:

1.1/ KHÁI NIỆM: *Mệnh đề logic* (gọi tắt là *mệnh đề*) là một câu phát biểu (về một lĩnh vực nào đó) *đúng* hoặc *sai một cách khách quan*. Tính đúng hoặc sai của một mệnh đề được xác định từ *chính nội dung của mệnh đề đó* mà không phụ thuộc vào người phát biểu.

Ta dùng các ký hiệu A, B, C, \dots để chỉ các mệnh đề.

Tính đúng hoặc sai của một mệnh đề được gọi *chân trị* (hay *giá trị chân lý*) của mệnh đề đó. Ta thường sử dụng các số nhị phân 1 (hoặc 0) để thể hiện chân trị *đúng* (hoặc *sai*) của một mệnh đề.

Ví dụ

a) Các phát biểu dưới đây là mệnh đề (logic):

$A =$ “ Nước Việt Nam thuộc về châu Á ” (chân trị *đúng*).

$B =$ “ Tứ giác phẳng có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông ” (chân trị *sai*).

$C =$ “ Vàng không nặng hơn sắt ” (chân trị *sai*).

$D =$ “ Truyện Kiều là tác phẩm của thi hào Nguyễn Du ” (chân trị *đúng*).

b) Các phát biểu dưới đây không phải là mệnh đề (logic):

$E =$ “ Hãy đọc sách ! ” (câu mệnh lệnh).

$F =$ “ Anh đi đâu ? ” và $G =$ “ Tú làm bài xong chưa ? ” (các câu nghi vấn).

$G =$ “ Trời lạnh quá ! ” (câu cảm thán mang tính chủ quan).

c) Cần phân biệt *Định nghĩa* với *Mệnh đề*. Định nghĩa không phải là Mệnh đề.

$H =$ “ Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song ” (Định nghĩa).

$K =$ “ Hình bình hành có các cặp cạnh đối tương ứng bằng nhau ” (Mệnh đề).

$L =$ “ Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau ” (Định nghĩa).

$M =$ “ Tổng của ba góc trong một tam giác bằng 180° ” (Mệnh đề).

1.2/ PHÂN LOẠI MỆNH ĐỀ:

Một mệnh đề được xếp vào một trong hai loại sau đây:

- a) *Mệnh đề sơ cấp* : không sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” trong phát biểu và không thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn.
- b) *Mệnh đề phức hợp*: có sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” (hàm ý phủ định) trong phát biểu **hay** có thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn (bằng cách sử dụng các từ nối : và, hay, suy ra, kéo theo, nếu ... thì, tương đương, nếu và chỉ nếu, khi và chỉ khi, điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ, hoặc, ...).

Ví dụ:

$A =$ “ Tháng giêng của mỗi năm đều có 30 ngày ” là mệnh đề sơ cấp.

$B =$ “ 22 không chia hết cho 5 ” và $C =$ “ $4 \leq 1$ ” là các mệnh đề phức hợp.

$D =$ “ Nếu $6 > 7$ thì $8 > 9$ ” là mệnh đề phức hợp.

II. CÁC PHÉP NỐI LOGIC (CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ):

Cho các mệnh đề P và Q .

2.1/ MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH: Ký hiệu \bar{P} hay $\neg P$ là mệnh đề phủ định của P

(đọc là *phủ định P*). \bar{P} phát biểu các khả năng, các trường hợp còn lại mà P chưa phát biểu. Chân trị của \bar{P} trái ngược với chân trị của P .

P	1	0
\bar{P}	0	1

Ví dụ:

$A =$ “ $3 > 8$ ” có $\bar{A} =$ “ $3 \leq 8$ ”.

$B =$ “ $4 \neq 7$ ” có $\bar{B} =$ “ $4 = 7$ ”.

$C =$ “ Tuổi của An khoảng từ 18 đến 20 ” có

\bar{C} = “ Tuổi của An ít hơn 18 hoặc nhiều hơn 20 ”.

D = “ Áo này màu xanh ” có \bar{D} = “ Áo này không phải màu xanh ”.

E = “ Một nửa lớp 20CTT thi đạt môn Toán ” có

\bar{E} = “ Tỷ lệ số sinh viên của lớp 20CTT thi đạt môn Toán không phải là $1/2$ ”.

F = “ Không quá 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ” có

\bar{F} = “ Hơn 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ”.

2.2/ MỆNH ĐỀ HỘI (PHÉP NỐI LIỀN):

Ký hiệu $P \wedge Q$ là *mệnh đề hội* của P và Q (đọc là P *hội* Q , P và Q).

$P \wedge Q$ *chỉ đúng* khi P và Q *cùng đúng*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \wedge Q$	1*	0	0	0

2.3/ MỆNH ĐỀ TUYỂN (PHÉP NỐI RỜI):

Ký hiệu $P \vee Q$ là *mệnh đề tuyển* của P và Q (đọc là P *tuyển* Q , P *hay* Q).

$P \vee Q$ *chỉ sai* khi P và Q *cùng sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \vee Q$	1	1	1	0*

2.4/ MỆNH ĐỀ KÉO THEO:

Ký hiệu $P \rightarrow Q$ là *mệnh đề kéo theo* của P và Q (đọc là P *kéo theo* Q ,

P *suy ra* Q , *nếu* P *thì* Q). $P \rightarrow Q$ *chỉ sai* khi P *đúng* và Q *sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \rightarrow Q$	1	0*	1	1

P	1	1	0*	0*
Q	1	0	1	0
$P \rightarrow Q$	1	0	1*	1*

P	1	1	0	0
Q	1*	0	1*	0
$P \rightarrow Q$	1*	0	1*	1

Nhận xét từ bảng chân trị của $P \rightarrow Q$ rằng:

* Nếu P *sai* thì $(P \rightarrow Q)$ *đúng* (bất chấp chân trị của Q).

* Nếu Q đúng thì $(P \rightarrow Q)$ đúng (bất chấp chân trị của P).

Chẳng hạn cho $D = [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$ với B là mệnh đề sai và A, C là các mệnh đề có chân trị tùy ý. Mệnh đề phức hợp D có chân trị đúng bất chấp chân trị của A và C .

2.5/ MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG:

Ký hiệu $P \leftrightarrow Q$ là mệnh đề tương đương của P và Q .

[đọc là (P tương đương Q), (P nếu và chỉ nếu Q), (P khi và chỉ khi Q)].

Đề ý $(P \leftrightarrow Q) \equiv [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$.

$P \leftrightarrow Q$ chỉ đúng khi P và Q có cùng chân trị.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \leftrightarrow Q$	1*	0	0	1*

Ví dụ: Xét các mệnh đề sau:

$A =$ “ Nước tinh khiết không dẫn điện ” (đúng).

$B =$ “ Công thức hóa học của nước là H_2O ” (đúng).

$C =$ “ Vua Quang Trung đã đại thắng quân Minh ” (sai).

$D =$ “ $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3$ ” (sai).

$E =$ “ Có sự sống ở ngoài trái đất ” (?).

$F =$ “ Đội tuyển bóng đá Hà Lan sẽ vô địch worldcup trước năm 2100 ” (?).

Các mệnh sau là đúng : \bar{C} , $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \vee D$, $B \vee E$, $A \rightarrow B$, $C \rightarrow A$,

$D \rightarrow C$, $D \rightarrow F$, $E \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$.

Các mệnh sau là sai : \bar{A} , $C \wedge B$, $D \wedge C$, $D \wedge E$, $C \vee D$, $A \rightarrow C$, $B \leftrightarrow D$.

2.6/ THỨ TỰ ƯU TIÊN CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC:

Khi không có dấu ngoặc, ta qui ước phép phủ định có độ ưu tiên cao nhất, tiếp theo là các phép toán \wedge và \vee (\wedge và \vee có độ ưu tiên ngang nhau), thấp nhất là các phép toán \rightarrow và \leftrightarrow (\rightarrow và \leftrightarrow có độ ưu tiên ngang nhau).

Khi có mặt đồng thời hai phép toán có độ ưu tiên *ngang nhau* thì sử dụng dấu ngoặc phân cách để người đọc biết phép toán nào được thực hiện trước.

Ta cũng sử dụng các dấu ngoặc để *thay đổi thứ tự ưu tiên theo ý muốn*.

Cho các mệnh đề A , B và C .

Viết $\bar{A} \wedge B \rightarrow C$ được hiểu là thực hiện \bar{A} rồi thực hiện $(\bar{A} \wedge B)$ và sau cùng thực hiện $(\bar{A} \wedge B) \rightarrow C$.

Viết $A \vee B \leftrightarrow \bar{C}$ được hiểu là thực hiện \bar{C} rồi thực hiện $(A \vee B)$ và sau cùng thực hiện $(A \vee B) \leftrightarrow \bar{C}$.

Viết $(A \vee B) \wedge C$, $A \vee (B \wedge C)$, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$, $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$, $(A \rightarrow B) \vee C$, $(A \leftrightarrow B) \wedge C$ với hàm ý là các phép toán trong ngoặc đơn được thực hiện trước.

2.7/ BẢNG CHÂN TRỊ CỦA MỆNH ĐỀ PHỨC HỢP:

A là mệnh đề phức hợp được tạo từ các mệnh đề sơ cấp P_1, P_2, \dots và P_n .

Muốn xét chân trị của A , ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian.

Có 2^n khả năng xảy ra khi xét chân trị đồng thời của P_1, P_2, \dots và P_n .

Bảng chân trị của A có 2^n cột tương ứng với mỗi khả năng chân trị của P_1, P_2, \dots và P_n .

Ví dụ: Cho các mệnh đề sơ cấp P, Q, R và mệnh đề phức hợp A như sau :

$$A = \{ [(P \vee Q) \wedge (\bar{P} \rightarrow R)] \leftrightarrow \bar{R} \}.$$

Để xét chân trị của A , ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian theo thứ tự

$$B = (P \vee Q), \quad \bar{P}, \quad C = (\bar{P} \rightarrow R), \quad D = (B \wedge C) \quad \text{và} \quad \bar{R}.$$

Bảng chân trị của A có $2^3 = 8$ cột tương ứng với $2^3 = 8$ trường hợp chân trị đồng thời của P, Q và R . Trong 8 trường hợp chân trị đồng thời của P, Q và R , mệnh đề A chỉ đúng trong 3 trường hợp và sai trong 5 trường hợp còn lại. Do đó xác suất để mệnh đề A đúng là $(3/8) = 37,5\%$ và sai là $(5/8) = 62,5\%$.

P	1	1	1	0	1	0	0	0
Q	1	1	0	1	0	1	0	0
R	1	0	1	1	0	0	1	0
$B = (P \vee Q)$	1	1	1	1	1	1	0	0
\bar{P}	0	0	0	1	0	1	1	1
$C = (\bar{P} \rightarrow R)$	1	1	1	1	1	0	1	0
$D = (B \wedge C)$	1	1	1	1	1	0	0	0
\bar{R}	0	1	0	0	1	1	0	1
$A = (D \leftrightarrow \bar{R})$	0	1*	0	0	1*	0	1*	0

III. CÁC DẠNG MỆNH ĐỀ:

3.1/ KHÁI NIỆM:

a) *Biến số thực* là nơi để thay vào các hằng số thực khác nhau.

Biểu thức đại số là một cấu trúc bao gồm các hằng số thực, các biến số thực và các phép toán đại số $+$, $-$, \times , $:$, lũy thừa liên kết các hằng số và biến số.

Chẳng hạn $F(x, y, z, t) = \frac{2x^2y - 4yz^3t^4 + t - 3}{\sqrt{y^2 + 3z^4 + 1}}$ là một biểu thức đại số theo các biến số thực x, y, z và t .

b) *Biến mệnh đề* là nơi để thay vào các mệnh đề khác nhau.

Dạng mệnh đề là một cấu trúc bao gồm các mệnh đề, các biến mệnh đề và các phép toán mệnh đề $-$, \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow liên kết các mệnh đề và biến mệnh đề. Chẳng hạn $F(p, q, r, s) = \{ (p \leftrightarrow \bar{q}) \vee [r \rightarrow (A \wedge \bar{s})] \} \wedge (q \vee B)$ là một dạng mệnh đề theo các biến mệnh đề p, q, r, s và các mệnh đề

$A = " \pi > \sqrt{11} "$ (S) và $B = " \text{Nước sôi ở } 100^\circ \text{C dưới áp suất thường} "$ (Đ).

3.2/ DẠNG MỆNH ĐỀ HẰNG ĐÚNG VÀ HẰNG SAI:

Cho dạng mệnh đề $F = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo n biến mệnh đề p_1, p_2, \dots và p_n .

a) Nếu F *luôn luôn đúng* (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 1)

bất chấp chân trị của p_1, p_2, \dots và p_n thì ta nói F là *một dạng mệnh đề*

hằng đúng và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow 1$.

b) Nếu F luôn luôn sai (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 0) bất chấp chân trị của p_1, p_2, \dots và p_n thì ta nói F là một dạng mệnh đề hằng sai và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow \mathbf{0}$.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q và r .

a) $F(p, q, r, t) = [(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (\bar{q} \vee r \vee \bar{t})]$ có $F \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (lập bảng chân trị cho F).

b) $G(p, q, r) = \{ p \leftrightarrow [q \vee (\bar{r} \rightarrow B)] \} \wedge A$ với các mệnh đề $A = "2^3 > 3^2"$ và $B = "Lào tiếp giáp với Việt Nam"$. Ta có $G \Leftrightarrow \mathbf{0}$ (vì A có chân trị sai).

3.3/ HỆ QUẢ LOGIC VÀ TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC:

Cho các dạng mệnh đề $E = E(p_1, p_2, \dots, p_n)$ và $F = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo n biến mệnh đề p_1, p_2, \dots và p_n .

a) $(E \rightarrow F)$ chỉ là sự kéo theo hình thức. $(E \rightarrow F)$ không phải là hằng đúng.

b) Nếu $(E \rightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Rightarrow F$ và nói F là hệ quả logic của E .

Đây là sự kéo theo thực sự.

c) $(E \leftrightarrow F)$ chỉ là sự tương đương hình thức. $(E \leftrightarrow F)$ không phải là hằng đúng

d) Nếu $(E \leftrightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Leftrightarrow F$ và nói E và F tương đương logic với nhau. Đây là sự tương đương thực sự.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q, r và s . Lập bảng chân trị để thấy

a) $[p \rightarrow (p \wedge \bar{q})]$ và $[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)]$ đều không phải là các dạng mệnh đề hằng đúng nên không được ghi $[p \Rightarrow (p \wedge \bar{q})]$ và $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)]$.

b) $[(p \wedge \bar{r}) \Rightarrow (p \vee \bar{q} \vee s)]$ và $\{ [p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow [p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p \}$.

IV. CÁC LUẬT LOGIC (TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC):

Cho các dạng mệnh đề (hay các mệnh đề) $E = E(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $F = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ và $G = G(p_1, p_2, \dots, p_n)$ theo n biến mệnh đề p_1, p_2, \dots và p_n .

4.1/ LUẬT PHỦ ĐỊNH KÉP: $\overline{\overline{E}} \Leftrightarrow E$.

4.2/ LUẬT LŨY ĐẲNG (của \wedge và \vee): $E \wedge E \Leftrightarrow E$; $E \vee E \Leftrightarrow E$.

4.3/ LUẬT GIAO HOÁN (của \wedge và \vee): $F \wedge E \Leftrightarrow E \wedge F$; $F \vee E \Leftrightarrow E \vee F$.

4.4/ LUẬT PHỦ ĐỊNH DE MORGAN (của \wedge và \vee):

$$\overline{E \wedge F} \Leftrightarrow \overline{E} \vee \overline{F} \quad ; \quad \overline{E \vee F} \Leftrightarrow \overline{E} \wedge \overline{F}.$$

Ví dụ:

A = “ Tôi học tiếng Anh và tiếng Pháp ”.

\overline{A} = “ Tôi *không* học tiếng Anh *hay không* học tiếng Pháp ”.

B = “ An đến trường hay đến thư viện ”.

\overline{B} = “ An *không* đến trường và *không* đến thư viện ”.

C = “ $\sqrt{3a-8} < 1$ ” (a là hằng số thực) $\Leftrightarrow C$ = “ $(3a-8) \geq 0$ và $\sqrt{3a-8} < 1$ ”.

\overline{C} = “ $(3a-8) < 0$ *hay* $\sqrt{3a-8} \geq 1$ ”.

4.5/ LUẬT HẤP THU (giữa \wedge và \vee):

$$[E \wedge (E \vee F)] \Leftrightarrow E \quad ; \quad [E \vee (E \wedge F)] \Leftrightarrow E.$$

Ví dụ: Cho $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

$$x^3(x^2 + 5y^6) = 0 \Leftrightarrow [x = 0 \text{ hay } (x^2 + 5y^6) = 0]$$

$$\Leftrightarrow [x = 0 \text{ hay } (x = 0 \text{ và } y = 0)] \Leftrightarrow x = 0 \text{ (y thực tùy ý).}$$

$$u^8(3u^4 + 6v^2) \neq 0 \Leftrightarrow [u \neq 0 \text{ và } (3u^4 + 6v^2) \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow [u \neq 0 \text{ và } (u \neq 0 \text{ hay } v \neq 0)] \Leftrightarrow u \neq 0 \text{ (v thực tùy ý).}$$

4.6/ LUẬT KẾT HỢP (của \wedge và \vee):

$$[(E \wedge F) \wedge G] \Leftrightarrow [E \wedge (F \wedge G)] \Leftrightarrow (E \wedge F \wedge G).$$

$$[(E \vee F) \vee G] \Leftrightarrow [E \vee (F \vee G)] \Leftrightarrow (E \vee F \vee G).$$

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

$$[(a \geq 2) \text{ và } (a \geq 4 \text{ và } 2a \neq b)] \Leftrightarrow [(a \geq 2 \text{ và } a \geq 4) \text{ và } (2a \neq b)]$$

$$\Leftrightarrow [(a \geq 4) \text{ và } (2a \neq b)].$$

$$[(a < -1) \text{ hay } (a < -2 \text{ hay } a^3 = 2\cos b)] \Leftrightarrow [(a < -1 \text{ hay } a < -2) \text{ hay } a^3 = 2\cos b]$$

$$\Leftrightarrow [(a < -1) \text{ hay } (a^3 = 2\cos b)].$$

4.7/ LUẬT PHÂN PHỐI (giữa \wedge và \vee):

$$[E \wedge (F \vee G)] \Leftrightarrow [(E \wedge F) \vee (E \wedge G)] \quad (\wedge \text{ phân phối với } \vee).$$

$$[E \vee (F \wedge G)] \Leftrightarrow [(E \vee F) \wedge (E \vee G)] \quad (\vee \text{ phân phối với } \wedge).$$

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

$$[(x < -1) \text{ và } (x < 4 \text{ hay } y \geq 3)] \Leftrightarrow [(x < -1 \text{ và } x < 4) \text{ hay } (x < -1 \text{ và } y \geq 3)]$$

$$\Leftrightarrow [(x < -1) \text{ hay } (x < -1 \text{ và } y \geq 3)] \Leftrightarrow (x < -1) \Leftrightarrow (x < -1 \text{ và } y \text{ thực tùy ý}).$$

$$[(xy \geq 5) \text{ hay } (xy \geq 2 \text{ và } x^3 \neq y^2)] \Leftrightarrow [(xy \geq 5 \text{ hay } xy \geq 2) \text{ và } (xy \geq 5 \text{ hay } x^3 \neq y^2)]$$

$$\Leftrightarrow [(xy \geq 2) \text{ và } (xy \geq 5 \text{ hay } x^3 \neq y^2)].$$

4.8/ LUẬT TRUNG HÒA (của \wedge và \vee): $(E \wedge \mathbf{1}) \Leftrightarrow E$; $(E \vee \mathbf{0}) \Leftrightarrow E$.

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

$$(2x + y > 3 \text{ và } 4x^2 + e^y \geq -1) \Leftrightarrow (2x + y > 3).$$

$$[8\sin x - 5\cos(y^3) = 14 \text{ hay } x^6 \neq 9^y + 1] \Leftrightarrow (x^6 \neq 9^y + 1).$$

4.9/ LUẬT THÔNG TRI (của \wedge và \vee): $(E \wedge \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{0}$; $(E \vee \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

$$(|a| - \ln b = 2 \text{ và } b^2 < \sin^2 b) \Leftrightarrow \mathbf{0} \text{ (không có } a, b \text{ nào thỏa hệ)} \Leftrightarrow \text{(hệ vô nghiệm)}$$

$$[\cos(ab) > 2 \text{ hay } e^{ab} + e^{-ab} \geq 1] \Leftrightarrow \mathbf{1} \text{ (} a, b \text{ nào cũng thỏa hệ)} \Leftrightarrow \text{(} a, b \text{ thực tùy ý)}$$

4.10/ LUẬT BÙ (của \wedge và \vee): $(E \wedge \bar{E}) \Leftrightarrow \mathbf{0}$; $(E \vee \bar{E}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Ví dụ: Cho $u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

$$(uv \geq 1 \text{ và } uv < 1) \Leftrightarrow \mathbf{0} \text{ (không có } u, v \text{ nào thỏa hệ)} \Leftrightarrow \text{(hệ vô nghiệm)}.$$

$$(7u^4 \neq 2^v + 3 \text{ hay } 7u^4 = 2^v + 3) \Leftrightarrow 1 \text{ (u,v nào cũng thỏa hệ) } \Leftrightarrow (u, v \text{ thực tùy ý})$$

4.11/ CÁC DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHỦ ĐỊNH CỦA MỆNH ĐỀ KÉO

THEO:

- a) $(E \rightarrow F) \Leftrightarrow (\bar{E} \vee F)$ (dùng để xóa hoặc phục hồi dấu \rightarrow).
- b) $(E \rightarrow F) \Leftrightarrow (\bar{F} \rightarrow \bar{E})$ (dùng để suy luận theo dạng *phản đảo*).
- c) $(E \rightarrow F)$ *không tương đương* với dạng *phản* $(\bar{E} \rightarrow \bar{F})$.
- d) $(E \rightarrow F)$ *không tương đương* với dạng *đảo* $(F \rightarrow E)$.
- e) $\overline{E \rightarrow F} \Leftrightarrow (E \wedge \bar{F})$ (dùng để xóa hoặc phục hồi dấu \rightarrow dưới dấu phủ định).

$$[\text{Từ a), dùng (4.4) và (4.1) ta có } \overline{E \rightarrow F} \Leftrightarrow \overline{\bar{E} \vee F} \Leftrightarrow (\bar{\bar{E}} \wedge \bar{F}) \Leftrightarrow (E \wedge \bar{F})]$$

Ví dụ:

A = “ Nếu (An học tốt) thì (An thi đạt) ” $(E \rightarrow F)$.

$A \Leftrightarrow B$ với $B = “ (\text{An học không tốt}) \text{ hay } (\text{An thi đạt}) ” (\bar{E} \vee F)$.

$A \Leftrightarrow C$ với $C = “ \text{Nếu (An thi rớt) thì (An đã học không tốt)} ” (\bar{F} \rightarrow \bar{E})$.

$A \Leftrightarrow D$ với $D = “ \text{Nếu (An học không tốt) thì (An thi rớt) } ” (\bar{E} \rightarrow \bar{F})$.

$A \Leftrightarrow E$ với $E = “ \text{Nếu (An thi đạt) thì (An đã học tốt) } ” (F \rightarrow E)$.

Để ý A đúng và D, E đều sai nên A *không tương đương* với D và E.

4.12/ ÁP DỤNG:

Các luật logic được sử dụng để

- *Rút gọn một dạng mệnh đề.*
- *Chứng minh một dạng mệnh đề hằng đúng hoặc hằng sai.*
- *Chứng minh hai dạng mệnh đề tương đương với nhau.*

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q và r.

- a) Rút gọn dạng mệnh đề $A = [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})]$.

$$\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \vee (p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow [(p \vee \bar{p}) \wedge q] \vee (p \wedge \bar{q}) \\
&\Leftrightarrow (1 \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \bar{q}) \\
&\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge 1 \Leftrightarrow (q \vee p).
\end{aligned}$$

b) Chứng minh dạng mệnh đề $B = \{ [p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \}$ là hằng đúng.

$$\begin{aligned}
B &\Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee r \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee (\bar{p} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r) \\
&\Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee [\bar{p} \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow \bar{G} \vee G \Leftrightarrow 1 \text{ với } G = [p \rightarrow (q \vee r)].
\end{aligned}$$

c) Chứng minh dạng mệnh đề $C = \{ [p \wedge (q \vee r)] \wedge \overline{(p \wedge q) \vee r} \}$ là hằng sai.

$$\begin{aligned}
C &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge \overline{p \wedge q \wedge r} \\
&\Leftrightarrow (H \vee K) \wedge (\bar{H} \wedge \bar{r}) \text{ với } H = (p \wedge q) \text{ và } K = (p \wedge r). \text{ Suy ra} \\
C &\Leftrightarrow (H \wedge \bar{H} \wedge \bar{r}) \vee (K \wedge \bar{H} \wedge \bar{r}) \Leftrightarrow (0 \wedge \bar{r}) \vee (K \wedge \bar{H} \wedge \bar{r}) \Leftrightarrow 0 \vee (K \wedge \bar{H} \wedge \bar{r}) \\
&\Leftrightarrow K \wedge \bar{H} \wedge \bar{r} \Leftrightarrow \bar{H} \wedge K \wedge \bar{r} \Leftrightarrow (\bar{H} \wedge p) \wedge (r \wedge \bar{r}) \Leftrightarrow (\bar{H} \wedge p) \wedge 0 \Leftrightarrow 0.
\end{aligned}$$

d) Cho các dạng mệnh đề $E = \{ [q \rightarrow (p \wedge r)] \wedge \overline{(p \vee r) \rightarrow q} \}$ và

$$F = \overline{(p \vee r) \rightarrow q}. \text{ Chứng minh } E \Leftrightarrow F.$$

$$\begin{aligned}
E &\Leftrightarrow [\bar{q} \vee (p \wedge r)] \wedge (p \vee r) \wedge \bar{q} \Leftrightarrow (\bar{q} \vee u) \wedge \bar{q} \wedge (p \vee r) \text{ với } u = (p \wedge r) \\
&\Leftrightarrow [(\bar{q} \vee u) \wedge \bar{q}] \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow \bar{q} \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge \bar{q} \Leftrightarrow \overline{(p \vee r) \rightarrow q} = F.
\end{aligned}$$

V. MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ:

5.1/ LƯỢNG TỪ: Cho tập hợp A và biến x lấy các giá trị trong A .

a) *Lượng từ phổ biến* \forall (với mỗi, với mọi, với tất cả).

$\forall x \in A$: với mỗi (với mọi, với tất cả) phần tử x thuộc về tập hợp A .

b) *Lượng từ tồn tại* \exists (tồn tại, có ít nhất một, có ai đó, có cái gì đó).

$\exists x \in A$: tồn tại (có ít nhất một) phần tử x thuộc về tập hợp A .

5.2/ VI TỪ: Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ ($1 \leq j \leq n$).

$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một câu phát biểu có nội dung liên quan đến các biến x_j

và chân trị của $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ phụ thuộc theo các biến x_j ($1 \leq j \leq n$).

Ta nói $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là *một vị từ theo n biến* $x_j \in A_j$ ($1 \leq j \leq n$).

Ví dụ:

a) $p(x) = "3x^2 - 4x > 1"$ với $x \in \mathbf{R}$. Ta có $p(0) = "3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 > 1"$ sai

và $p(2) = "3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 > 1"$ đúng. Ta gọi $p(x)$ là vị từ một biến.

b) $q(y, z) = "(4y - 7z) : 5"$ với $y \in \mathbf{Z}$ và $z \in \mathbf{Q}$. (ký hiệu $:$ là *chia hết cho*).

Ta có $q(-2, \frac{3}{7}) = "[4(-2) - 7(\frac{3}{7})] : 5"$ sai và

$q(6, -\frac{1}{7}) = "[4(6) - 7(-\frac{1}{7})] : 5"$ đúng. Ta gọi $q(y, z)$ là vị từ hai biến.

5.3/ MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ:

Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ ($1 \leq j \leq n$). Xét vị từ theo n biến

$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và các lượng từ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \{ \forall, \exists \}$.

a) Ta xây dựng *một mệnh đề lượng từ theo n biến* x_1, x_2, \dots, x_n là

$A = "\delta_1 x_1 \in A_1, \delta_2 x_2 \in A_2, \dots, \delta_n x_n \in A_n, p(x_1, x_2, \dots, x_n)"$.

b) Qui ước $\bar{\forall} \equiv \exists, \bar{\exists} \equiv \forall$, ta có *dạng phủ định* của mệnh đề lượng từ A là

$\bar{A} = "\bar{\delta}_1 x_1 \in A_1, \bar{\delta}_2 x_2 \in A_2, \dots, \bar{\delta}_n x_n \in A_n, \overline{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}"$.

c) Ta có thể xét trực tiếp chân trị của A (nếu đơn giản) hoặc xét gián tiếp chân

trị của \bar{A} rồi suy ra chân trị của A (nếu chân trị của \bar{A} dễ xét hơn A).

Ví dụ:

a) $A = "\exists x \in \mathbf{Q}, x^3 = x"$ có $\bar{A} = "\forall x \in \mathbf{Q}, x^3 \neq x"$. A đúng vì $\exists 1 \in \mathbf{Q}, 1^3 = 1$

b) $B = "\forall x \in \mathbf{R}, x > \sin x"$ có $\bar{B} = "\exists x \in \mathbf{R}, x \leq \sin x"$.

\bar{B} đúng vì $\exists 0 \in \mathbf{R}, 0 \leq \sin 0 = 0$. Suy ra B sai.

c) $C = “ \exists x \in \mathbf{R}, \forall y > 0, x \leq 2^y - 3 ”$ có $\bar{C} = “ \forall x \in \mathbf{R}, \exists y > 0, x > 2^y - 3 ”$.

C đúng vì $\exists(-2) \in \mathbf{R}, \forall y > 0, -2 \leq 2^y - 3$ (để ý $2^y > 1, \forall y > 0$).

d) $D = “ \forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 2y^3 > 5x^4 + 8 ”$ có

$\bar{D} = “ \exists x \in \mathbf{Z}, \forall y \in \mathbf{Q}, 2y^3 \leq 5x^4 + 8 ”$.

Ta có thể giải thích trực tiếp D đúng hoặc giải thích gián tiếp là \bar{D} sai.

D đúng vì $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}$ thỏa $y > \sqrt[3]{5x^4 + 8} > 0$, nghĩa là $2y^3 > y^3 > 5x^4 + 8$.

\bar{D} sai. Thật vậy, nếu \bar{D} đúng thì có x nguyên cố định thỏa $2y^3 \leq 5x^4 + 8$,

$\forall y \in \mathbf{Q}$. Cho $y \rightarrow +\infty$ (lúc đó $2y^3 \rightarrow +\infty$) thì mâu thuẫn vì $5x^4 + 8$ cố định.

e) $E = “ \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2) \rightarrow (x > y) ”$. Ta có

$E \Leftrightarrow E' = “ \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 \leq y^2) \text{ hay } (x > y) ”$ (xóa dấu \rightarrow) và

$\bar{E} = “ \exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2) \text{ và } (x \leq y) ”$. Ta khẳng định E đúng bằng

cách giải thích gián tiếp là E' đúng hay giải thích gián tiếp là \bar{E} sai.

E' đúng vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y = x \in \mathbf{R}, (x^2 \leq y^2 = x^2)$ là đúng.

\bar{E} sai. Thật vậy, nếu \bar{E} đúng thì có x thực cố định thỏa $x^2 > y^2, \forall y \in \mathbf{R}$.

Cho $y \rightarrow +\infty$ ($y^2 \rightarrow +\infty$) thì mâu thuẫn vì x^2 cố định. Vậy $(x^2 > y^2)$ sai.

f) $F = “ \text{Họ (chúng tôi, các bạn) đi du lịch Rome} ”$ (lượng từ phổ biến tiềm ẩn).

$\bar{F} = “ \text{Có ai đó trong số họ (chúng tôi, các bạn) không đi du lịch Rome} ”$.

g) $G = “ (\text{Tất cả}) \text{ các nghệ sĩ thích học ngoại ngữ} ”$.

$\bar{G} = “ \text{Có nghệ sĩ nào đó không thích học ngoại ngữ} ”$.

h) $H = “ \text{Có bạn nào đó trong lớp đạt điểm 10 môn Toán} ”$.

$\bar{H} = “ \text{Cả lớp không đạt điểm 10 môn Toán} ”$.

$= “ \text{Không có bạn nào đó trong lớp đạt điểm 10 môn Toán} ”$.

k) $K = “ \text{Không có ai (mọi người không) đến trễ} ”$. $\bar{K} = “ \text{Có ai đó đến trễ} ”$.

5.4/ HOÁN ĐỔI LƯỢNG TỪ:

Cho các tập hợp A, B và vị từ 2 biến $p(x, y)$ với $x \in A$ và $y \in B$. Ta có

a) Có thể hoán đổi 2 lượng từ cùng loại đứng cạnh nhau.

$$“ \forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y) ” \Leftrightarrow “ \forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y) ”.$$

$$“ \exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y) ” \Leftrightarrow “ \exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y) ”.$$

b) Không được hoán đổi 2 lượng từ khác loại đứng cạnh nhau.

$$“ \exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y) ” \Rightarrow “ \forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y) ” \text{ (chiều } \Leftarrow \text{ sai)}$$

Vế trái : có x cố định trong A , y tùy ý trong B .

Vế phải : với mỗi y tùy ý trong B , có x trong A và x phụ thuộc theo y .

Ví dụ:

$$a) “ \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \leq 4 ” \Leftrightarrow “ \forall y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \leq 4 ”.$$

Cả hai vế đều có chân trị sai (vế trái có giá trị lớn tùy ý với x, y thích hợp).

$$b) “ \exists x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 3x + y = -1 ” \Leftrightarrow “ \exists y \in \mathbf{Q}, \exists x \in \mathbf{Z}, 3x + y = -1 ”.$$

Cả hai vế đều có chân trị đúng (chọn $x = 0$ và $y = -1$).

$$c) “ \forall x \in \mathbf{Q}, \exists y \in \mathbf{R}, y = \sin x ” \text{ (chân trị đúng vì hàm sin xác định trên } \mathbf{Q}).$$

$$“ \exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{Q}, y = \sin x ” \text{ (chân trị sai vì } y = \sin 0 = 0 \text{ và } y = \sin 1 > 0).$$

VI. CÁC QUI TẮC SUY DIỄN (CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG

MINH).

Cho các mệnh đề $P, Q, R, S, P_1, P_2, \dots$ và P_n .

6.1/ QUI TẮC PHẢN ĐẢO (Phản chứng dạng 1):

$(P \Rightarrow Q) \equiv (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ (Ta có thể chứng minh vế phải thay cho chứng minh vế trái nếu việc chứng minh vế phải đơn giản hơn).

Ví dụ: Cho a và b nguyên. Chứng minh “ $(ab \text{ lẻ}) \Rightarrow (a \text{ và } b \text{ đều lẻ})$ ”.

- a) Chứng minh trực tiếp : Viết $a = 2c + r$ và $b = 2d + s$ trong đó c, d là các số nguyên và $r, s \in \{0, 1\}$. Do $ab = 2(2cd + cs + dr) + rs$ lẻ nên $rs = 1$.
Suy ra $r = s = 1$, nghĩa là a và b đều lẻ (chứng minh phong cách hàn lâm).
- b) Chứng minh phản chứng : “ $(a \text{ hay } b \text{ chẵn}) \Rightarrow (ab \text{ chẵn})$ ”. Giả sử a hay b chẵn, nghĩa là $a = 2c$ hay $b = 2d$ với c, d là các số nguyên. Ta có $ab = 2(cb)$ hay $ab = 2(ad)$ nên ab chẵn (chứng minh kiểu đơn giản).

6.2/ QUI TẮC NÊU MÂU THUẤN (Phản chứng dạng 2):

$(P \Rightarrow Q) \equiv [(P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \mathbf{O}]$ trong đó \mathbf{O} thể hiện *sự mâu thuẫn* hay *vô lý*.

(Ta có thể chứng minh về phải thay cho chứng minh về trái nếu việc chứng minh về phải đơn giản hơn).

Ví dụ: Cho các số thực a và b .

Chứng minh “ $(a \text{ hữu tỉ và } b \text{ vô tỉ}) \Rightarrow (a + b \text{ vô tỉ})$ ”.

a) Chứng minh trực tiếp : không thể được vì ta không có dạng tường minh cho các số vô tỉ.

b) Chứng minh phản chứng : “ $(a \text{ hữu tỉ, } b \text{ vô tỉ và } a + b \text{ hữu tỉ}) \Rightarrow \mathbf{O}$ ”.

Giả sử a hữu tỉ, b vô tỉ và $a + b$ hữu tỉ, nghĩa là $a = \frac{p}{q}$ và $a + b = \frac{r}{s}$

trong đó p, q, r, s là các số nguyên với $q \neq 0 \neq s$. Suy ra

$$b = (a + b) - a = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{qs} \text{ là số hữu tỉ : mâu thuẫn với giả thiết}$$

b vô tỉ. Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.3/ QUI TẮC HỘI TUYỂN ĐƠN GIẢN:

a) $[(P \wedge Q) \Rightarrow P]$ (hội đơn giản để xóa bớt thông tin Q không cần thiết).

b) $[P \Rightarrow (P \vee Q)]$ (tuyển đơn giản để thêm vào thông tin Q gây nhiễu).

Ví dụ:

(An học Anh văn và Pháp văn) \Rightarrow (An học Anh văn).

Cho số thực a . Ta có $(a > 5) \Rightarrow [(a > 5) \textbf{ hay } (a < 10)]$.

6.4/ QUI TẮC KHÃNG ĐỊNH (Modus – Ponens):

a) Dạng 1: $\left\{ \begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ P \end{matrix} \right\} \Rightarrow Q$.

b) Dạng 2: $\left\{ \begin{matrix} P \vee Q \\ \bar{P} \end{matrix} \right\} \Rightarrow Q$.

Ví dụ:

a) [(Nếu An rảnh thì An xem phim) và (An rảnh)] \Rightarrow (An xem phim).

b) [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú ăn chay trường)]

\Rightarrow [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú không ăn gà quay)]

\Rightarrow (Vy đã ăn gà quay).

6.5/ QUI TẮC PHỦ ĐỊNH (Modus – Tollens):

$\left\{ \begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ \bar{Q} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{P}$.

Ví dụ:

[(Nếu An giàu thì An mua xe du lịch) và (An không mua xe du lịch)]

\Rightarrow (An chưa giàu).

6.6/ QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN (Syllogism):

$\left\{ \begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{matrix} \right\} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (bỏ bớt suy luận trung gian Q).

Ví dụ:

[(Nếu trời mưa lớn thì đường bị ngập) và (nếu đường bị ngập thì An về nhà trễ)]

\Rightarrow [(Nếu trời mưa lớn thì An về nhà trễ)].

6.7/ QUI TẮC CHỨNG MINH THEO CÁC TRƯỜNG HỢP:

$$[(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n) \Rightarrow Q] \equiv \left\{ \begin{array}{l} P_1 \Rightarrow Q \\ P_2 \Rightarrow Q \\ \vdots \\ P_n \Rightarrow Q \end{array} \right\}.$$

(Ta có thể chứng minh các trường hợp riêng lẻ ở vế phải thay cho chứng minh vế trái vì việc chứng minh vế phải đơn giản hơn chứng minh một trường hợp tổng quát ở vế trái).

Ví dụ: Cho số nguyên k .

a) Chứng minh k^2 chia 4 dư 0 hoặc 1.

Ta chứng minh theo 2 trường hợp k chẵn hoặc k lẻ.

Nếu $k = 2r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = 4r^2$ chia 4 dư 0.

Nếu $k = 2r + 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = [4(r^2 + r) + 1]$ chia 4 dư 1.

b) Chứng minh $(2k^2 + k + 1)$ không chia hết cho 3.

Ta chứng minh theo 3 trường hợp tương ứng với số dư khi chia k cho 3.

Nếu $k = 3r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 3r + 1 = [3r(6r + 1) + 1]$ chia 3 dư 1.

Nếu $k = 3r + 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 15r + 4 = [3r(6r + 5) + 4]$ chia 3 dư 1. Nếu $k = 3r + 2$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 27r + 11 = [9r(2r + 3) + 11]$ chia 3 dư 2.

6.8/ HỆ QUẢ:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{array} \right\} \Rightarrow [(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)].$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{array} \right\} \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)].$$

6.9/ ÁP DỤNG:

Cho các dạng mệnh đề E_1, E_2, \dots, E_n và F .

a) Giải thích một quá trình suy luận là *đúng*:

Ta muốn chứng minh $[(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ là *đúng*. Lúc đó ta viết

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \\ \hline \therefore F \end{array}$$

Nếu dùng bảng chân trị hoặc dùng các luật logic biến đổi thì khá phức tạp, đặc biệt là khi n lớn. Ta dùng một trong ba cách chứng minh sau để được *đơn giản và có hiệu quả hơn*:

Cách 1: chia bài toán thành *nhiều bước suy luận trung gian* và ở mỗi bước ta dùng *các luật logic* (mục **IV**) hoặc *các qui tắc suy diễn* đã nêu trên.

Muốn thực hiện cách này, chúng ta phải sử dụng thành thạo *các luật logic* và *các qui tắc suy diễn*.

Cách 2 : dùng *qui tắc phản chứng dạng 2* trong (6.2).

Giả sử quá trình suy luận trên là *sai*, nghĩa là $E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n \wedge \bar{F}$. Ta có E_1, E_2, \dots, E_n đều *đúng* và F *sai*. Từ đó hãy chỉ ra *một sự mâu thuẫn*.

Như vậy quá trình suy luận đã cho là *đúng*. Muốn thực hiện cách này, chúng ta chỉ cần biết chân trị đúng hoặc sai của *các mệnh đề phủ định, mệnh đề hội, mệnh đề tuyển, mệnh đề kéo theo* và *mệnh đề tương đương*.

Cách 3 (chỉ thuận tiện trong *một số trường hợp nhất định*) :

Giả sử E_1, E_2, \dots và E_n đều *đúng*. Ta sẽ chứng minh F cũng *đúng*.

Như vậy quá trình suy luận đã cho thực sự là *đúng*. Muốn thực hiện cách

này, chúng ta chỉ cần biết chân trị đúng hoặc sai của *các mệnh đề phủ định, mệnh đề hội, mệnh đề tuyển, mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương.*

b) Giải thích một quá trình suy luận là *sai*: Ta muốn khẳng định suy luận

$[(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ là *sai*. Ta chỉ có một cách duy nhất như sau :

Ta gán cho mỗi biến mệnh đề chân trị 0 hoặc 1 (mỗi biến chỉ gán một chân trị duy nhất) sao cho E_1, E_2, \dots, E_n đều đúng và F sai. Khi đó

quá trình suy luận $[(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ là *sai trong trường hợp*

đặc biệt đã gán chân trị, nghĩa là $[(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ là *sai*.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q, r, s, t và u .

Xem xét các suy luận dưới đây đúng hay sai và giải thích tại sao ?

a) $p \rightarrow t$ (1)	b) $p \rightarrow r$ (1)	c) $(\bar{p} \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$ (1)	d) p (1)
$\bar{r} \rightarrow q$ (2)	\bar{u} (2)	\bar{t} (2)	$\bar{p} \rightarrow q$ (2)
p (3)	$s \rightarrow t$ (3)	$r \rightarrow t$ (3)	$(q \wedge r) \rightarrow s$ (3)
$t \rightarrow \bar{q}$ (4)	$\bar{s} \rightarrow \bar{r}$ (4)	-----	$t \rightarrow r$ (4)
-----	$\bar{t} \vee u$ (5)	$\therefore s \rightarrow p$ (4).	-----
$\therefore r \vee s$ (5).	-----		$\therefore \bar{s} \rightarrow \bar{t}$ (5).
	$\therefore p \rightarrow q$ (6).		

Ta chứng minh a) *đúng* bằng **Cách 1**: Từ (1) và (3), ta có t (6). Từ (6) và (4), ta có \bar{q} (7). Từ (7) và (2), ta có \bar{r} (8). Từ (8), ta có r (9). Từ (9), ta có $r \vee s$ (5). Như vậy suy luận a) *đúng*.

Ta chứng minh a) *đúng* bằng **Cách 2**: Giả sử (1), (2), (3), (4) *đúng* và (5) *sai*. Do (3) đúng nên p đúng. Do (5) sai nên r và s đều sai. Do (1) đúng và p đúng nên t đúng. Do (2) đúng và r sai nên q đúng. Do t và q đều đúng nên (4) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*. Như vậy suy luận a) *đúng*.

Ta chứng minh b) *đúng* bằng **Cách 2**: Giả sử (1), (2), (3), (4), (5) *đúng* và (6) *sai*. Do (2) đúng và (6) sai nên p đúng và u, q đều sai. Do (1) đúng và p

đúng nên r đúng. Do (5) đúng và u sai nên t sai. Do (3) đúng và t sai nên s sai. Do s sai và r đúng nên (4) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*.

Như vậy suy luận b) là *đúng*.

Ta chứng minh b) *đúng* bằng **Cách 3**: Giả sử (1), (2), (3), (4) và (5) đều *đúng*.

Do (2) đúng nên u sai. Do (5) đúng và u sai nên t sai. Do (3) đúng và t sai nên s sai. Do (4) đúng và s sai nên r sai. Do (1) đúng và r sai nên p sai. Do p sai nên (6) đúng. Như vậy suy luận b) *đúng*.

Ta chứng minh c) *đúng* bằng **Cách 1**: Từ (2) và (3), ta có \bar{r} (5). Từ (5), ta có $\bar{r} \vee \bar{s}$ (6). Từ (6), ta có $\overline{r \wedge s}$ (7). Từ (7) và (1), ta có $\overline{p \vee q}$ (8). Từ (8), ta có $\bar{p} \wedge \bar{q}$ (9). Từ (9), ta có $p \wedge \bar{q}$ (10). Từ (10), ta có p (11). Từ (11), ta có $\bar{s} \vee p$ (12). Từ (12), ta có $s \rightarrow p$ (4). Như vậy suy luận c) *đúng*.

Ta chứng minh c) *đúng* bằng **Cách 3**: Giả sử (1), (2) và (3) đều *đúng*.

Do (2) đúng nên t sai. Do (3) đúng và t sai nên r sai, nghĩa là $(r \wedge s)$ sai.

Do (1) đúng và $(r \wedge s)$ sai nên $(\bar{p} \vee q)$ sai, nghĩa là \bar{p} sai và p đúng.

Do p đúng nên (4) đúng. Như vậy suy luận c) *đúng*.

Ta chứng minh d) *sai* bằng cách gán các chân trị đặc biệt 0 hoặc 1 cho các biến mệnh đề p, q, r, s và t sao cho (1), (2), (3), (4) đều *đúng* và (5) *sai*.

Gán chân trị 1 cho p, r, t và gán chân trị 0 cho q, s thì (1), (2), (3), (4)

đều *đúng* và (5) *sai*. Như vậy suy luận d) *sai trong một trường hợp đặc biệt đã gán* nên d) *sai*.

GHI CHÚ: Trong việc kiểm tra suy luận e) dưới đây là *đúng*, ta chỉ nên dùng **Cách 1** và **Cách 2** mà thôi (nếu dùng **Cách 3** sẽ phức tạp và khó khăn vì khi xét khả năng *đúng* của một mệnh đề dạng \rightarrow hay \vee , ta có 3 khả năng xảy ra).

$$e) [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{p} \rightarrow r) \wedge (\bar{r} \vee s)] \Rightarrow (\bar{q} \rightarrow s).$$

Cách 1 : Từ (3), ta có $r \rightarrow s$ (5). Từ (2) và (5), ta có $\bar{p} \rightarrow s$ (6).

Từ (1), ta có $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ (7). Từ (7) và (6), ta có (4).

Như vậy suy luận e) *đúng*.

Cách 2 : Giả sử (1), (2) và (3) *đều đúng* và (4) *sai*.

Do (4) sai nên q và s đều sai. Do (1) đúng và q sai nên p sai.

Do (2) đúng và p sai nên r đúng.

Do r đúng và s sai nên (3) sai : *mâu thuẫn với điều đã giả sử*.

Như vậy suy luận e) *đúng*.

VII. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUI NẠP:

Cho $m \in \mathbb{N}$. Giả sử ta có một dãy vô hạn các mệnh đề P_n ($n \geq m$) và ta muốn chứng minh chúng đều đúng. Ta dùng phương pháp chứng minh qui nạp.

7.1/ QUI NẠP GIẢ THIẾT YẾU (ÍT GIẢ THIẾT):

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.

* Chứng minh $\forall k \geq m, (P_k \text{ đúng} \Rightarrow P_{k+1} \text{ đúng})$.

* Kết luận P_n đúng, $\forall n \geq m$.

Ví dụ: Chứng minh $\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta chứng minh $P_n = "1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}"$ đúng, $\forall n \geq 1$.

* $P_1 = "1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}"$ hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 1$ và giả sử P_k đúng, nghĩa là

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} (*)$$

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

$$\text{Viết } P_{k+1} = "1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(2(k+1)+1)]}{6}"$$

Ta kiểm tra vế trái của P_{k+1} bằng vế phải của P_{k+1} .

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ [dùng (*)]} \\ &= \frac{(k+1)}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \text{Vế phải.}\end{aligned}$$

* Vậy P_n đúng, $\forall n \geq 1$.

7.2/ QUI NẠP GIẢ THIẾT MẠNH (NHIỀU GIẢ THIẾT):

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.

* Chứng minh $\forall k \geq m, [(P_m, P_{m+1}, \dots \text{ và } P_k \text{ đều đúng}) \Rightarrow P_{k+1} \text{ đúng}]$.

* Kết luận: P_n đúng, $\forall n \geq m$.

Ví dụ: Chứng minh $\forall n \geq 2, n$ là tích của các số nguyên tố dương (số nguyên tố dương là số nguyên dương chỉ có đúng hai ước số dương là 1 và chính nó).

Ta chứng minh $P_n = “ n \text{ là tích của các số nguyên tố dương } ”$ đúng, $\forall n \geq 2$.

* $P_2 = “ 2 \text{ là tích của đúng một số nguyên tố dương } ”$ hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 2$ và giả sử P_2, P_3, \dots, P_k đều đúng, nghĩa là

$\forall t \in \{ 2, 3, \dots, k \}, t$ là tích của các số nguyên tố dương (*).

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng bằng cách xét 2 trường hợp [xem (6.7)].

Viết $P_{k+1} = “ (k+1) \text{ là tích của các số nguyên tố dương } ”$.

Khi $(k+1)$ là số nguyên tố thì đương nhiên $(k+1)$ là tích của đúng một số nguyên tố dương.

Khi $(k+1)$ là số không nguyên tố thì $(k+1) = uv$ với $u, v \in \{2, 3, \dots, k\}$.

Theo (*), $u = p_1 p_2 \dots p_r$ và $v = q_1 q_2 \dots q_s$ với $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$

là các số nguyên tố dương. Suy ra $(k+1) = uv = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$ cũng là tích của các số nguyên tố dương.

* Vậy P_n đúng, $\forall n \geq 2$.