ÔN THI GIỮA KỲ MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

<u>CHƯƠNG 1:</u>

a) *Giải hệ sau và kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli*:

$$\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 2x+3y-z-t=-6 \\ 3x-y-z-2t=-4 \\ x+2y+3z-t=-4 \end{cases}$$

* *Phương pháp Gauss – Jordan* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & 10 & 9 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -53 & -54 \\ 0 & 1^* & 0 & 38 & 37 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -51 & -51 \end{array}\right) \\ E_1\ \ E_2\ \ E_3 \end{array} \to (R_A\,|\,B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{ccccccc} x & y & z & t & & & \\ \hline 1^* & 0 & 0 & 0 & \vert & -1 & (1) \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & \vert & -1 & (2) \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & \vert & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & \vert & 1 & (4) \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & & & \end{array}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta thấy ngay hệ có nghiệm duy nhất : ($x = y = -1$, $z = 0$ và $t = 1$).

* *Phương pháp Gauss*: ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to (S_A\,|\,B'') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3^* & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -51^* & -51 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \\ F_1\ \ F_2\ \ F_3\ \ F_4 \end{array}$$

. Dùng lần lượt (4), (3), (2) và (1), ta có nghiệm duy nhất $t = (-51/-51) = 1$, $z = (27t - 27)/(-3) = 9 - 9t = 9 - 9.1 = 0$,

$y = 5z + 7t - 8 = 5.0 + 7.1 - 8 = -1$, $x = 1 - y - 2z - 3t = 1 - (-1) - 2.0 - 3.1 = -1$.

* $m = n = 4$, $A \in M_4(\mathbf{R})$, $\overline{A} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R})$, $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$: hệ có nghiệm duy nhất.

b) *Giải và biện luận hệ sau theo tham số thực m rồi kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli:*

$$\begin{cases} 3x+3y+7z-3t+6u=3 \\ 2x+2y+4z-t+3u=-2 \\ -3x-3y-5z+2t-7u=4m+1 \\ 2x+2y+8z-3t+u=5m-3 \end{cases}.$$

* *Phương pháp Gauss – Jordan* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 2 & -7 & 4m+1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 & 5m-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 4m+4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 5m-1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & -13 \\ 0 & 0 & 1^* & -3/2 & 3/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3m-9 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} E_1 & & E_2 & & & \end{array} \end{array} \to (R_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -5m-3 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} E_1 & & E_2 & E_3 & & (?) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}.$$

Nếu $m + 3 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ vô nghiệm [do (4)].

Nếu $m + 3 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có vô số nghiệm như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (1), (2) và (3), ta thấy $x = -y - (7/2)u + 12$, $z = (3/2)u - 9$ và $t = 2u - 10$.

* *Phương pháp Gauss* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 2 & -7 & 4m+1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 & 5m-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 4m+4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 5m-1 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array}$$

$$\rightarrow (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3m-9 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} F_1 & & F_2 & F_3 & & (?) \end{array}$$

Nếu $-3m-9 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ vô nghiệm [do (4)].

Nếu $-3m-9 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có vô số nghiệm như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (3), (2) và (1), ta có

$t = (4u - 20)/2 = 2u - 10$, $z = (3t - 3u + 12)/2 = [\,3(2u - 10) - 3u + 12\,]/2 = (3/2)u - 9$ và

$x = (2t - 3y - 7z - 3u + 5)/3 = \{2(2u - 10) - 3y - 7[(3/2)u - 9] - 3u + 5\}/3 = 12 - y - (7/2)u$

* Kiểm nghiệm lại bằng Kronecker – Capelli : $m = 4$, $n = 5$, $A \in M_{4\times5}(\mathbf{R})$, $\overline{A} \in M_{4\times6}(\mathbf{R})$.

Nếu $m \neq -3$ thì $(R_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -5m-3 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (m+3)^* \end{array}\right)$ hay

$$\begin{array}{cccccc} E_1 & & E_2 & E_3 & & F_4 \end{array}$$

$$(S_A \mid B'') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3m-9)^* \end{array}\right)$$ và $r(\overline{A}) = 4 = r(A) + 1$: hệ vô nghiệm.

$$\begin{array}{cccccc} F_1 & & F_2 & F_3 & & F_4 \end{array}$$

Nếu $m = -3$ thì $(R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -18 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay

$$\begin{array}{cccc} E_1 & & E_2 & E_3 \end{array}$$

$$(S_A \mid B'') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2* & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{và } r(\overline{A}) = r(A) = 3 < n = 5:$$

$F_1 \qquad F_2 \quad F_3$

hệ có vô số nghiệm với $(5-3) = 2$ ẩn tự do.

c) *Tìm hạng của ma trận A dưới đây (biện luận theo tham số thực m)* :

$$A = \begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2m+1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -2 & 2m+3 \end{pmatrix}$$

$$\to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8 \end{pmatrix}. \text{ Nếu } m = 4 \text{ thì } S_A = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = 2.$$

$F_1 \; F_2 \qquad F_3$ (?) $\qquad\qquad F_1 \; F_2$

$$\text{Nếu } m \neq 4 \text{ thì } S_A = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8^* \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = 3.$$

$F_1 \; F_2 \qquad F_3$

<u>CHƯƠNG 2:</u>

a) Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $A^k, \forall k \geq 0$.

Thử $A^o = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ và } A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dự đoán $A^k = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}$, $\forall k \geq 0$. Ta chứng minh bằng qui nạp theo $k \geq 0$.

Khi $k = 0$ thì $A^o = (-1)^0\begin{pmatrix} 2.0+1 & -4.0 \\ 0 & 1-2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: mệnh đề đúng khi $k = 0$.

Xét $k \geq 0$ và giả sử mệnh đề đúng với k. Khi đó

$$A^{k+1} = A^k.A = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^k\begin{pmatrix} -2k-3 & 4k+4 \\ -k-1 & 2k+1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k+1}\begin{pmatrix} 2(k+1)+1 & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{pmatrix}$$: mệnh đề cũng đúng với $(k+1)$.

Kết luận : $A^k = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}$, $\forall k \geq 0$.

b) *Các ma trận sau có khả nghịch không ? Tại sao ?*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ta chỉ cần tìm S_A và S_B để có kết luận về tính khả nghịch của A và B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A.$$

$$\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad F_1 \quad F_2$$

Ta thấy S_A có 2 dòng $\neq \mathbf{O}$ nên $r(A) = 2 < n = 3$ và do đó A không khả nghịch.

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & -1^* \end{pmatrix} = S_B.$$

$$\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad F_1 \quad F_2 \quad F_3$$

Ta thấy S_B có 3 cột bán chuẩn nên $r(B) = 3 = n$ và do đó B khả nghịch.

c) *Các ma trận sau có khả nghịch không ? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo tương ứng.*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } L = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(H \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -6/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -2/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

E_1 $\qquad\qquad$ E_1 E_2

$= (R_H \mid H')$. Ta thấy $R_H \neq I_3$ nên H không khả nghịch.

$$(K \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) = (R_K = I_3 \mid K^{-1}).$$

E_1 E_2 E_3

Ta thấy $R_K = I_3$ nên K khả nghịch và $K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $K.K^{-1} = I_3$.

$$(L \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & 4 & 3 \end{array}\right) = (R_L = I_2 \mid L^{-1}).$$

E_1 $\qquad\qquad$ E_1 E_2

Ta thấy $R_L = I_2$ nên L khả nghịch và $L^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $L.L^{-1} = I_2$.

d) *Cho M khả nghịch và* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Hãy tìm M.*

$$(M^{-1}| I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -7/4 & -1/4 & 10/4 \\ 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1/4 & 1/4 & 2/4 \end{array}\right) = (I_3 \mid M). \text{ Vậy } M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E_1 E_2 E_3

Thử lại, $M^{-1}.M = I_3$.

e) Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

♦ Nếu A *khả nghịch* thì

* A^{-1} cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^{-1})^{-1} = A$.

* A^t cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

* cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

* A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

♦ AB *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A và B đều *khả nghịch*).

Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (thứ tự *bị đảo ngược*).

♦ AB *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A hay B *không khả nghịch*).

♦ $(A_1A_2 \ldots A_k)$ *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ ($A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều *khả nghịch*).

Lúc đó $(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$ (thứ tự *bị đảo ngược*).

♦ $(A_1A_2 \ldots A_k)$ *không khả nghịch* $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_j *không khả nghịch*.

f) Tính toán ma trận (các phép cộng, trừ, nhân và lũy thừa ma trận).

g) Giải phương trình ma trận (A và C khả nghịch cho sẵn, X là ma trận ẩn và B cho sẵn).

* $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (*nghiệm duy nhất*).

* $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*).

* $AXC = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$(*nghiệm duy nhất*).

Ví dụ:

a) *Giả sử* A, B, C và $D \in M_n(\mathbf{R})$ *đều khả nghịch*. Ta có

$$(A^4B^{-5}C^2B^3D^{-9}C^{-7}D^6A^{-8})^{-1} = (A^{-8})^{-1}(D^6)^{-1}(C^{-7})^{-1}(D^{-9})^{-1}(B^3)^{-1}(C^2)^{-1}(B^{-5})^{-1}(A^4)^{-1}$$

$$= A^8D^{-6}C^7D^9B^{-3}C^{-2}B^5A^{-4}.$$

Tìm X *và* Y *nếu* $A^{-5}D^9XB^6 = -7A^{-3}C^2B^4$ và $A^9C^8YB^{-4}C^{-2} = 2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}$.

Ta có $X = (A^{-5}D^9)^{-1}(-7A^{-3}C^2B^4)(B^6)^{-1} = -7D^{-9}A^5A^{-3}C^2B^4B^{-6} = -7D^{-9}A^2C^2B^{-2}$,

$Y = (A^9C^8)^{-1}(2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2})(B^{-4}C^{-2})^{-1} = 2C^{-8}A^{-9}A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}C^2B^4 = 2C^{-3}A^7B^3$.

b) *Tìm các ma trận* X, Y, Z *thỏa*

$KX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $YL = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}$ *và* $LZK = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ [K *và* L *đã cho ở phần* c)].

Ta có $X = K^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 3 \\ 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -16 \end{pmatrix}$ và

$Z = L^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}K^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 22 & 21 & 4 \\ 39 & 26 & 13 \end{pmatrix}$.

c) *Tìm* H *thỏa* $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 .H^5.\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2$.

Nếu có H thì $H \in M_3(\mathbf{R})$. Ma trận đứng trước H không khả nghịch nên vế trái không khả nghịch trong khi vế phải lại khả nghịch : mâu thuẫn! Vậy phương trình vô nghiệm.

d) *Giải phương trình ma trận tổng quát*: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}X + X^t\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -11 & -8 \end{pmatrix}$ (*).

Ta có $X \in M_2(\mathbf{R})$ nên đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ và thay vào (*) rồi rút gọn để có hệ phương trình

$$\overset{\begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)} \to \underset{E_1}{\overset{\begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 8 & -7 & -12 & -39 \\ 0 & 10 & -9 & -15 & -47 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)}} \to \underset{E_1\ E_2}{\overset{\begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -7 & 0 & -23 \\ 0 & 1^* & 6 & -27 & -35 \\ 0 & 0 & -23 & 85 & 101 \\ 0 & 0 & -24 & 102 & 132 \end{array}\right)}} \to$$

$$\to \underset{E_1\ E_2\ E_3}{\overset{\begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -119 & -240 \\ 0 & 1^* & 0 & 75 & 151 \\ 0 & 0 & 1^* & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -306 & -612 \end{array}\right)}} \to \underset{E_1\ E_2\ E_3\ E_4}{\overset{\begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 2 \end{array}\right)}} : \text{nghiệm duy nhất } X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

CHƯƠNG 3:

a) *Tính* $|D| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5a & 8 \\ -3b & 2b & 4ab & -6b \\ 2 & -5 & -7a & 5 \\ 4(b-a) & 3(a-b) & 5a(a-b) & 6(b-a) \end{vmatrix}$ *và xét tính khả nghịch của* D.

Ta có $|D| = ab(a-b)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} 1^* & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -9 & -11 & -1 \\ -7 & -9 & 4 \end{vmatrix}$

$$= ab(a-b)\begin{vmatrix} 0 & -1^* & 0 \\ 2 & -11 & -23 \\ 2 & -9 & -14 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} 2 & -23 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = 18ab(a-b).$$

D khả nghịch $\Leftrightarrow |D| = 18ab(a-b) \neq 0 \Leftrightarrow (\, a \neq 0 \neq b \neq a \,)$.

D không khả nghịch $\Leftrightarrow |D| = 18ab(a-b) = 0 \Leftrightarrow (\, a = 0$ hay $b = 0$ hay $a = b\,)$.

b) *Kiểm tra tính khả nghịch rồi tìm nghịch đảo của* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

B không khả nghịch vì $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-30 + 8 + 21) - (12 + 15 - 28) = -1 + 1 = 0.$

A khả nghịch vì $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 24 + 60) - (6 + 16 + 60) = 32 - 82 = -50 \neq 0.$

Tính $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij}\ (1 \leq i, j \leq 3)$:

$C_{11} = (-1)^{1+1}|A(1,1)| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10,$ $C_{12} = (-1)^{1+2}|A(1,2)| = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14$

$C_{13} = (-1)^{1+3}|A(1,3)| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9,$ $C_{21} = (-1)^{2+1}|A(2,1)| = -\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$C_{22} = (-1)^{2+2}|A(2,2)| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10,$ $C_{23} = (-1)^{2+3}|A(2,3)| = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10$

$C_{31} = (-1)^{3+1}|A(3,1)| = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30,$ $C_{32} = (-1)^{3+2}|A(3,2)| = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 22$

$C_{33} = (-1)^{3+3}|A(3,3)| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -32.$

Lập $C = \left(C_{ij}\right)_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 9 \\ 0 & 10 & -10 \\ 30 & 22 & -32 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} C^t = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 10 & 0 & -30 \\ 14 & -10 & -22 \\ -9 & 10 & 32 \end{pmatrix}.$

c) Suy ra $|E|$ với $E = 4A^{-9}.(A^T)^{10}A^7(A^{-4})^T$ với T là phép chuyển vị ma trận.

Ta có $|E| = 4^3|A^{-9}|.|(A^T)^{10}|.|A^7|.|(A^{-4})^T| = 4^3|A|^{-9}.|A^T|^{10}.|A|^7.|A^{-4}|$

$= 4^3|A|^{-9}.|A|^{10}.|A|^7.|A|^{-4} = 4^3|A|^4 = 64(-50)^4 = 400.000.000.$

d) *Giải và biện luận hệ sau bằng qui tắc Cramer* :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 \\ m+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ thì hệ trên viết gọn là $AX = B$.

Ta tính $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ và Δ_3.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+6 \\ m-1 & 6 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m = -m(m+5).$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ m+1 & 1 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1^* & 0 \\ m+2 & 1 & m+3 \\ m+2 & m & 3m+3 \end{vmatrix} = -(m+2)\begin{vmatrix} 1 & m+3 \\ 1 & 3m+3 \end{vmatrix} = -2m(m+2).$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & m+1 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -1 & -3 \\ 0 & m+3 & m+6 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & m+6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3m.$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m+3 \\ 0 & m-1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+3 \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - 2m = -m(m+2).$$

* Nếu $-5 \neq m \neq 0$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m+2)}{m+5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{m+5} \quad \text{và} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m+2}{m+5}.$$

* Nếu $m = -5$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_1 = -30$ nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $m = 0$ thì $\Delta = 0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, ta thế $m = 0$ vào hệ và giải (PP Gauss – Jordan):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = 2 - 3a$ và $x_2 = 6a - 3$.