CHƯƠNG I

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

N là *tập hợp các số nguyên không âm* và **N* = N** \ {0}.

Z là *tập hợp các số nguyên* và **Z* = Z** \ {0}.

Q là *tập hợp các số hữu tỉ* và **Q* = Q** \ {0}.

R là *tập hợp các số thực* và **R* = R** \ {0}.

I. MA TRẬN:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $m, n \in$ **N***. Một *ma trận thực* A có *kích thước* $(m \times n)$ là *một bảng số thực hình chữ nhật* có m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hay } A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \text{ với } a_{ij} \in \mathbf{R} \; (1 \le i \le m, 1 \le j \le n).$$

Khi $m = n$ thì A là *ma trận vuông thực cấp* n và ta viết $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$.

Ký hiệu : $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ là *tập hợp các ma trận thực* có *kích thước* $(m \times n)$.

$M_n(\mathbf{R})$ là *tập hợp các ma trận vuông thực cấp* n.

Ví dụ:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 4}} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & 4 & -5 \\ \sqrt[3]{7} & 0 & -1 & \cos 8 \\ -2 & \ln 9 & 6 & -\pi \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}) \text{ có } a_{14} = -5,\; a_{33} = 6 \text{ và } a_{21} = \sqrt[3]{7}.$$

$$B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le 3} = \begin{pmatrix} 7 & -1/2 & 0 \\ -5/3 & 4 & -9 \\ 6 & -8 & 2/7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q}) \text{ có } b_{13} = 0,\; b_{22} = 4 \text{ và } b_{32} = -8.$$

$C = (-9 \quad 4 \quad 0 \quad 7 \quad -1) \in M_{1\times 5}(\mathbf{Z})$. $\qquad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbf{N})$.

1.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> *Ma trận không* là ma trận *có tất cả các hệ số bằng* 0.

Ký hiệu *ma trận không* là $\mathbf{O}$ (*hiểu ngầm kích thước*) hoặc $\mathbf{O}_{m\times n}$ hoặc $\mathbf{O}_n$.

<u>Ví dụ:</u>

$$\mathbf{O}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R}) \quad \text{và} \quad \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1.3/ <u>CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN:</u>

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i \neq j \leq m$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên dòng cho ma trận*:

a) *Hoán vị* dòng (i) với dòng (j). Ta ghi $(i) \leftrightarrow (j)$.

b) *Nhân* dòng (i) với số $c \in \mathbf{R}^*$. Ta ghi $(i) \rightarrow c(i)$.

c) *Thế* dòng (i) bằng [dòng (i) + c.dòng (j)] với số $c \in \mathbf{R}$. Ta ghi $(i) \rightarrow [\,(i) + c(j)\,]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nói trên* lần lượt là $(i) \leftrightarrow (j)$, $(i) \rightarrow c^{-1}(i)$ và $(i) \rightarrow [\,(i) - c(j)\,]$.

<u>Ví dụ:</u>

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -6 & -4 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (1) \leftrightarrow (3).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ -21/4 & 0 & 3/4 & -6 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \text{ qua phép biến đổi } (2) \rightarrow -\frac{3}{4}(2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ 12 & 9 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$ qua *phép biến đổi* $(3) \to [\,(3) + 2(2)\,]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nói trên* lần lượt là $(1) \leftrightarrow (3)$, $(2) \to -\frac{4}{3}(2)$ và $(3) \to [\,(3) - 2(2)\,]$.

1.4/ **SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG DÒNG:**

Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Ta nói A và B là *tương đương dòng với nhau* nếu A có thể biến đổi thành B (và ngược lại) bằng *một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng*. Ký hiệu $A \sim B$ để chỉ A và B là *tương đương dòng với nhau*.

Quan hệ tương đương dòng là *một quan hệ tương đương* trên $M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix} = B.$$ Để ý A biến thành B qua *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* liên tiếp $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $(1) \leftrightarrow (3)$, $(1) \to -\frac{1}{4}(1)$ và $(3) \to [\,(3) - 8(1)\,]$.

Như vậy B lại có thể biến thành A qua *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* liên tiếp $(3) \to [\,(3) + 8(1)\,]$, $(1) \to -4(1)$, $(1) \leftrightarrow (3)$ và $(2) \to [\,(2) - 2(1)\,]$. Vậy $A \sim B$.

II. **HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:**

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. Một *hệ phương trình tuyến tính thực với* m *phương trình* và n *ẩn số* là *một hệ phương trình* có dạng như sau:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ với a_{ij}, b_i là *các số thực cho trước* ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$)

và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (đều xuất hiện dưới *dạng bậc nhất*) là n *ẩn số thực* cần tìm.

Đặt $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B = (b_i)_{1\le i\le m} \in M_{m\times 1}(\mathbf{R})$ và $X = (x_j)_{1\le j\le n} \in M_{n\times 1}(\mathbf{R})$ thì

hệ (*) được viết gọn thành các dạng $AX = B$ hoặc $(A \mid B)$ [*hiểu ngầm ma trận* X].

<u>Ví dụ:</u> Cho *hệ phương trình tuyến tính* (có 3 *phương trình* và 4 *ẩn số*) :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 8x_3 - 7x_4 - 3x_1 = 0 \\ 9x_2 - 6x_3 + x_4 + 2x_1 = -4 \end{cases}$$. Hệ trên được viết gọn thành $AX = B$ hoặc $(A \mid B)$ với

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 8 & -7 \\ 2 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

2.2/ <u>NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC:</u>

Xét *hệ phương trình tuyến tính thực* $AX = B$ (*) đã nêu trong **(2.1)**.

Ta nói bộ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ là *một nghiệm* của hệ (*) nếu *tất cả các phương trình* của hệ (*) *đều được thỏa* khi thế $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, … và $x_n = c_n$.

<u>Ví dụ:</u> Ta có ($x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$) *thỏa các phương trình* của hệ sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -22 \\ -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$$. Do đó ta nói $(-2, 0, 3, 1)$ là *một nghiệm* của hệ đã cho.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (*số lượng nghiệm* của *một hệ phương trình tuyến tính thực*).

Xét *hệ phương trình tuyến tính thực* $AX = B$.

Có đúng một trong 3 trường hợp sau xảy ra :

a) Hệ *vô nghiệm*. b) Hệ có *nghiệm duy nhất*. c) Hệ có *vô số nghiệm*.

Ví dụ:

a) Phương trình $0x = 5$ *vô nghiệm*. Phương trình $2x = -6$ có *nghiệm duy nhất* $x = -3$. Phương trình $0x = 0$ có *vô số nghiệm* (x thực tùy ý).

b) Hệ $(-3x + 7y = 15 \ \& \ 9x - 21y = 4)$ *vô nghiệm*.

Hệ $(-3x + 7y = 15 \ \& \ 4x - 5y = -7)$ có *nghiệm duy nhất* ($x = 2, y = 3$).

Hệ $(-3x + 7y = 15 \ \& \ 6x - 14y = -30)$ có *vô số nghiệm* với *một ẩn tự do* là x hoặc y.

Viết *nghiệm* : [x *thực tùy ý*, $y = (3x + 15) / 7$] hoặc [y *thực tùy ý*, $x = (7y - 15) / 3$].

2.4/ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (HPTTT ĐẲNG CẤP):

Xét *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = \mathbf{O}$ (có vế phải $B = \mathbf{O}$).

Hệ này có ít nhất *một nghiệm tầm thường* là ($x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$).

Do đó khi giải hệ, chỉ có *đúng một trong hai trường hợp sau* xảy ra :

a) Hệ có *nghiệm duy nhất* (chính là *nghiệm tầm thường*).

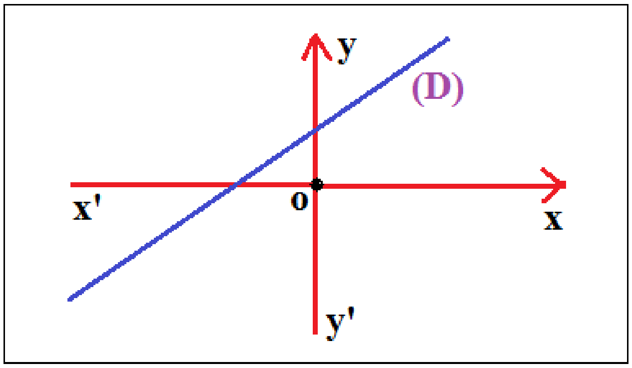
b) Hệ có *vô số nghiệm* (ngoài *nghiệm tầm thường*, hệ còn có *vô số nghiệm không tầm thường*).

Ví dụ:

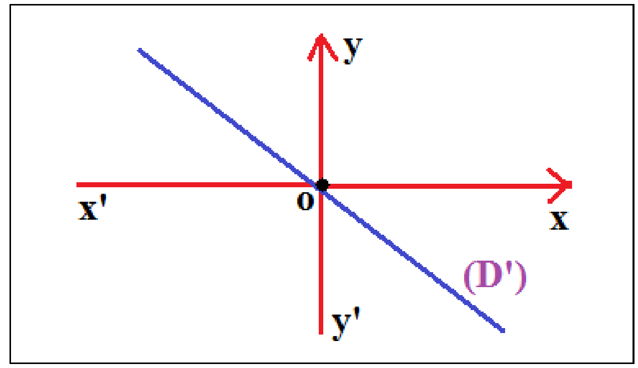
a) Hệ $(9x + 7y = 0 \ \& \ 4x - 5y = 0 \ \& \ 3x + 8y = 0)$ có *nghiệm duy nhất* $(x = 0, y = 0)$.

b) Hệ $(5x + 8y - 4z = 0)$ có *vô số nghiệm* với *hai ẩn tự do* là (x, y) hoặc (x, z) hoặc (y, z). Ta ghi kết quả theo *một trong ba dạng* sau : [$x, y \in \mathbf{R}, z = \dfrac{5x+8y}{4}$]

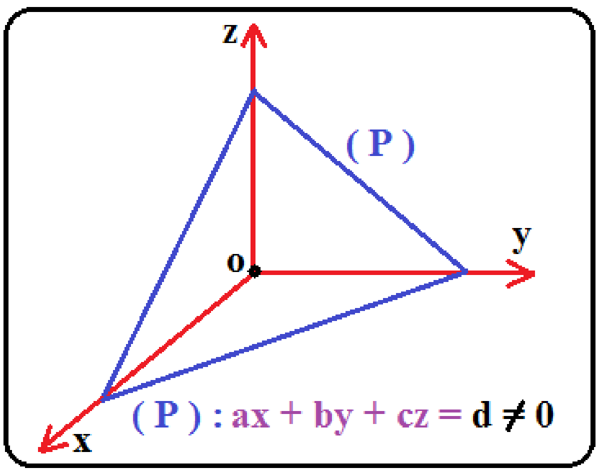
hoặc [$x, z \in \mathbf{R}, y = \dfrac{4z-5x}{8}$] hoặc [$y, z \in \mathbf{R}, x = \dfrac{4z-8y}{5}$].

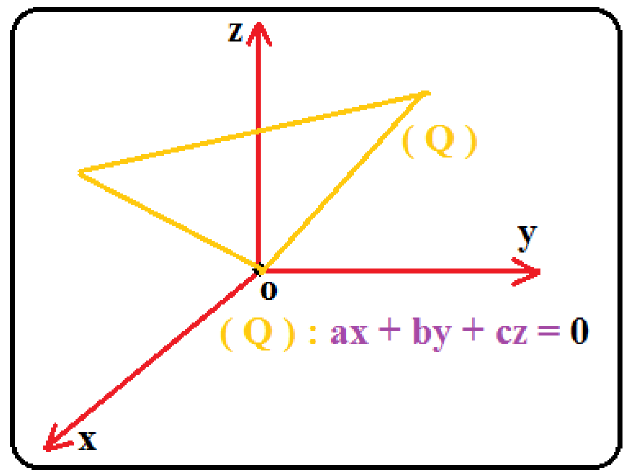


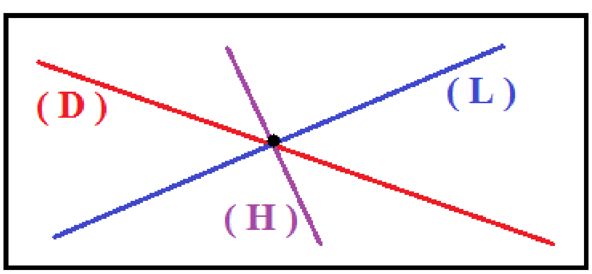
(D) : $ax + by = -c$ ($c \neq 0$)



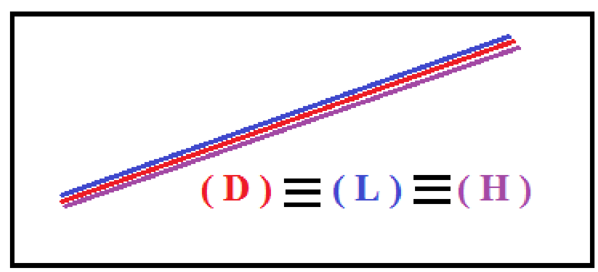
(D') : $ax + by = 0$



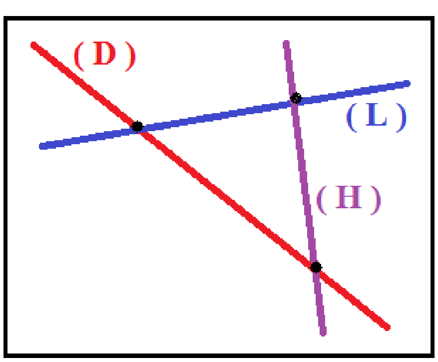




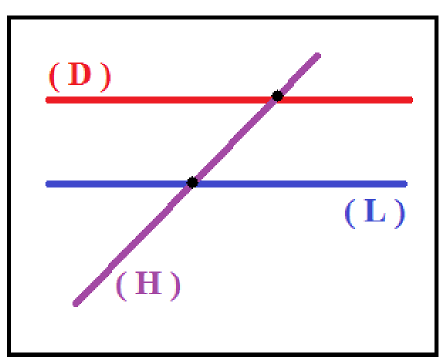
Hệ có nghiệm duy nhất



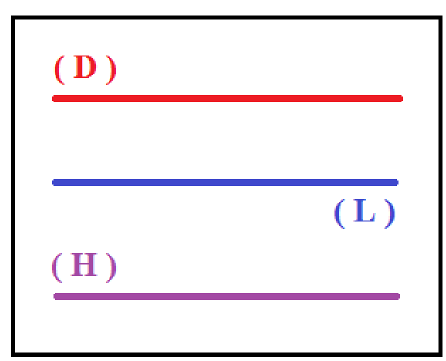
Hệ có vô số nghiệm



Hệ vô nghiệm



Hệ vô nghiệm



Hệ vô nghiệm

III. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

3.1/ MỆNH ĐỀ:

a) Nếu *hai hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ và $CX = D$ có các ma trận $(A \mid B)$ và $(C \mid D)$ *tương đương dòng với nhau* thì hai hệ trên là *tương đương với nhau* (nghĩa là hai hệ trên *có cùng một tập hợp nghiệm*).

b) Suy ra trong quá trình *giải một hệ phương trình tuyến tính*, ta có thể *sử dụng tùy ý các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* mà *không làm thay đổi tập hợp nghiệm của nó.*

3.2/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT:

Xét *hệ phương trình tuyến tính* với 4 *ẩn số* x, y, z và t :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Từ *hệ sau cùng*, ta thấy hệ có *nghiệm duy nhất* ($x = 1, y = 2, z = -1, t = -2$).

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $(3) \to (3) - 3(1)$, $(4) \to [\,(4) - 2(1)\,]$.

Bảng 2: $(2) \to [(2) + (3)]$, $(1) \to [(1) - 2(2)]$, $(3) \to [(3) + 4(2)]$, $(4) \to [(4) + 7(2)]$.

Bảng 3: $(4) \to [(4) - (3)]$, $(3) \to -18^{-1}(3)$, $(1) \to [(1) - 7(3)]$, $(2) \to [(2) + 2(3)]$.

Bảng 4: $(4) \to 18^{-1}(4)$, $[(1) \to (1) + 2(4)]$, $[(2) \to (2) - 3(4)]$, $[(3) \to (3) + 2(4)]$.

3.3/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÔ NGHIỆM:

Xét *hệ phương trình tuyến tính* với 5 *ẩn số* x, y, z, t và u:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$: Ta thấy hệ *vô nghiệm*.

Bảng 1: $(4) \to [(4) - (1)], (1) \to [(1) - (2)], (2) \to [(2) - 2(3)], (3) \to [(3) - (1)]$.

Bảng 2: $(2) \leftrightarrow (3)$.

Bảng 3: $(1) \to [\ (1) - 2(2)\ ],\quad (3) \to [\ (3) + 7(2)\ ],\quad (4) \to [\ (4) + 3(2)\ ]$.

Bảng 4: $(4) \to [\ (4) - 2^{-1}(3)\ ]$.

3.4/ VÍ DỤ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ VÔ SỐ NGHIỆM:

Xét *hệ phương trình tuyến tính* với 5 *ẩn số* x_1, x_2, x_3, x_4 và x_5:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$: Ta thấy các cột (3) và (5) *không biến đổi được*.

Viết lại *các phương trình không tầm thường* (1), (2) và (3) của *hệ cuối cùng* :

$x_1 + x_3 - (7/6)x_5 = 5/6$ (1), $x_2 - x_3 - (5/6)x_5 = -5/6$ (2), $x_4 - (1/3)x_5 = 2/3$ (3)

Từ (1), (2) và (3), hệ có *vô số nghiệm* với 2 *ẩn tự do* là x_3 và x_5 như sau:

$x_3 = a$, $x_5 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x_1 = (7b - 6a + 5)/6$, $x_2 = (6a + 5b - 5)/6$, $x_4 = (b + 2)/3$.

Bảng 1: (2) → [(2) – (1)], (3) → [(3) – 4(1)], (4) → [(4) – 2(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) – 3(2)], (4) → [(4) + (2)], (2) → -2^{-1}(2) , (1) → [(1) – (2)].

Bảng 3: (3) → 9^{-1}(3), (4) → [(4) – 12(3)], (1) → [(1) + 2(3)], (2) → [(2) + (3)].

3.5/ CÁC CỘT CHUẨN (có m DÒNG):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad E_{m-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1^* \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \end{pmatrix}.$$

3.6/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH:

Xét *hệ phương trình tuyến tính thực* (A | B) có m *phương trình* và n *ẩn số*.

Ta thực hiện các bước sau đây:

* Dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp* để *xây dựng tuần tự các cột chuẩn* E_1, E_2, E_3, … trong A (*từ trái qua phải*). Việc *chuẩn hóa các cột* phải *tuân thủ các qui định sau* :

- Khi xây dựng E_k, *không làm thay đổi* các cột E_1, E_2, … , E_{k-1} đã có trước đó.
- Nếu cột đang xét *không thể chuẩn hóa* thành E_k thì xét qua *cột kế cận bên phải*.
- Sau khi xây dựng xong E_k, phải tiến hành ngay việc xây dựng E_{k+1}(nếu được).

* *Quá trình chuẩn hóa các cột* của A *sẽ kết thúc* khi *gặp sự mâu thuẫn* hoặc khi *đã chuẩn hóa xong cột cuối cùng* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*.

* Khi kết thúc *quá trình chuẩn hóa các cột* của A, sẽ có *đúng 1 trong 3 trường*

hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: Ta *gặp sự mâu thuẫn* khi *đang chuẩn hóa* [nghĩa là *gặp một dòng* có dạng $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad | a)$ với $a \neq 0$. Dòng này là hệ quả của *hai dòng nào đó có tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải*]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.

b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được n *cột chuẩn liên tiếp* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ trong A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất* bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự *từ trên xuống dưới* của *hệ cuối cùng* trong *quá trình chuẩn hóa* để thấy lần lượt *các ẩn từ trái qua phải*.

c) Trường hợp 3: Ta chỉ xây dựng được k *cột chuẩn* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ $(k < n)$ trong A *xen kẽ với* $(n - k)$ *cột khác không chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ có *vô số nghiệm* *với* $(n - k)$ *ẩn tự do* như sau :

* Các ẩn ứng với *các cột không chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do lấy giá trị thực tùy ý.*

* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột chuẩn hóa được*) *được tính theo các ẩn tự do* dựa theo *các phương trình không tầm thường* với *thứ tự từ trên xuống dưới* của *hệ cuối cùng* trong *quá trình chuẩn hóa*.

3.7/ <u>ĐIỀU KIỆN CHUẨN HÓA CỦA MỘT CỘT:</u>

Ta muốn *chuẩn hóa* cột $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ thành $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (số 1^* ở vị trí *dòng* k).

a) Nếu $u_k = u_{k+1} = \ldots = u_m = 0$ thì U *không thể chuẩn hóa thành* E_k.

(*không sử dụng* $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ để tạo 1^* cho E_k vì *cần bảo toàn* $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$ đã có trước đó. Còn $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ *không thể tạo* 1^* cho E_k được).

b) Nếu *có ít nhất một hệ số* $\neq 0$ trong các số $u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ thì U *có thể chuẩn hóa* thành E_k [hệ số $\neq 0$ *tự chia cho chính nó* để tạo 1^* cho E_k. Dùng 1^* đó để *tạo các hệ số* 0 *ở các vị trí khác* cho E_k. Nếu 1^* đó *nằm ở dòng thứ* j với $j \neq k$ thì ta *hoán vị* các dòng (j) và (k) *với nhau*].

Ví dụ:

a) Ta muốn *chuẩn hóa* các cột $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ thành E_4.

U *không thể chuẩn hóa* thành E_4 được (vì $u_4 = u_5 = u_6 = 0$).

V *có thể chuẩn hóa* thành E_4 được (vì có $v_5 = 7 \neq 0$) bằng *các phép biến đổi*

$(5) \to [(5) + 2(6)]$, $(1) \to [(1) - 2(5)]$, $(3) \to [(3) + 8(5)]$, $(6) \to [(6) + 3(5)]$, $(4) \leftrightarrow (5)$.

b) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm*:

$$(A \mid B) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 9 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{l} E_1 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 4 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{l} E_1 \end{array} \end{array}$$: *sự mâu thuẫn* và hệ *vô nghiệm*.

Dòng (3) và (4) có *sự tỉ lệ không tương thích ở vế trái và vế phải* : $(4) \to [(4) + \frac{3}{2}(3)]$.

c) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính* (3 *ẩn* x, y, z) có *nghiệm duy nhất*:

$$(A\,|\,B) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1^* & 0 & -\ln 3 \\ 0 & 0 & 1^* & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \end{array}$$: hệ có *nghiệm duy nhất* ($x = \sqrt{2}$, $y = -\ln 3$, $z = \frac{4}{9}$).

d) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính* (9 ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_9$) có *vô số nghiệm*:

$$(A\,|\,B) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1^* & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & \sin 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & -4 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 6 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccc} E_1 & E_2 & & & E_3 & & E_4 & E_5 & \end{array} \end{array}.$$

Các cột (3), (4), (6), (9) *không chuẩn hóa được.* Từ *các phương trình không tầm thường* của *hệ cuối cùng*, ta thấy hệ có *vô số nghiệm* với

4 *ẩn tự do* $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_6 = c$, $x_9 = d$, ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) , $x_1 = 5a - 8b - 7d$,

$x_2 = -2a + 3b - 9c + \sin 8$, $x_5 = 4c + d - \sqrt{3}$, $x_7 = \pi$ và $x_8 = -6d - \frac{4}{7}$.

3.8/ VÍ DỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THỰC CÓ THAM SỐ:

Giải và biện luận *hệ phương trình tuyến tính* với 3 *ẩn số* x, y, z theo *tham số thực* m

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & & \end{array} \end{array} (*).$$

Bảng 1: (2) → [(2) – (3)],   (3) → [(3) – (1)],   (4) → [(4) – m(1)].

a) Nếu $m = 1$ thì hệ tương đương với *đúng một phương trình* là $x + y + z = 1$.

Hệ có *vô số nghiệm* với 2 *ẩn tự do* : $y, z \in \mathbf{R}$, $x = 1 - y - z$.

b) Nếu $m \neq 1$, ta tiếp tục biến đổi hệ (*):

$$\begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & \big| & m \\ 0 & 1-m & m-1 & \big| & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & \big| & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & \big| & 1-m^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 2 & \big| & m \\ 0 & 1^* & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & \big| & 1-m \\ 0 & 0 & 2(1-m) & \big| & 1-m^2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & \big| & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & \big| & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & \big| & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & (1-m)(m+3) \end{pmatrix} \end{array}.$$

E_1 $\qquad$ E_1 E_2 $\qquad$ E_1 E_2 E_3

Khi $m = -3$ thì hệ có *nghiệm duy nhất* ($x = y = z = -1$).

Khi $1 \neq m \neq -3$ thì hệ *vô nghiệm* [do *phương trình cuối*].

Bảng 1: $(3) \to [(3) + (2)]$, $(4) \to [(4) - (2)]$, $(2) \to (1-m)^{-1}(2)$, $(1) \to [(1) - (2)]$.

Bảng 2: $(4) \to [(4) + 2(3)]$, $(3) \to (m-1)^{-1}(3)$, $(1) \to [(1) - 2(3)]$, $(2) \to [(2) + (3)]$.

3.9/ CÁC CỘT BÁN CHUẨN (có m DÒNG):

Dạng tổng quát của *các cột bán chuẩn* có m dòng là

$$F_1 = \begin{pmatrix} a^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} b \\ c^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f^* \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ F_{m-1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u^*_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } F_m = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ v^*_m \end{pmatrix} \text{ trong đó}$$

$a^*, c^*, f^*, \ldots, u^*_{m-1}, v^*_m$ là *các số thực tùy ý* $\neq 0$ và

$b, d, e, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ là *các số thực tùy ý*.

Các cột chuẩn (có m dòng) chính là *các cột bán chuẩn* (có m dòng) *đặc biệt*.

<u>Ví dụ:</u> Một số *cột bán chuẩn* có 5 dòng :

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{5}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad F_4 = \begin{pmatrix} -\ln 6 \\ 0 \\ \sqrt[3]{4} \\ -4/7^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad F_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 8/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sin 9^* \end{pmatrix}.$$

3.10/ PHƯƠNG PHÁP GAUSS GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:

Xét *hệ phương trình tuyến tính thực* $(A \mid B)$ có m *phương trình* và n *ẩn số*. *Phương pháp Gauss* có *những sự tương tự nhất định* với *phương pháp Gauss – Jordan* nhưng ta xây dựng *các cột bán chuẩn* (thay vì *các cột chuẩn*). Điều kiện để một cột *bán chuẩn hóa được* y hệt như điều kiện *chuẩn hóa được* (xem **3.7**). *Phương pháp Gauss* được thực hiện cụ thể như sau :

* Dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp* để *xây dựng tuần tự các cột bán chuẩn* $F_1, F_2, F_3, \ldots$ trong A (*từ trái qua phải*). Việc *bán chuẩn hóa các cột phải tuân thủ các qui định sau* :

- Khi xây dựng F_k, *không làm thay đổi* các cột $F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}$ đã có trước đó.
- Nếu cột đang *xét không thể bán chuẩn hóa thành* F_k thì xét qua *cột kế cận bên phải.*
- Sau khi xây dựng xong F_k, phải tiến hành ngay việc xây dựng F_{k+1}(nếu được)

* *Quá trình bán chuẩn hóa các cột* của A *sẽ kết thúc* khi *gặp sự mâu thuẫn* hoặc khi *đã bán chuẩn hóa xong cột cuối cùng* của A mà *không gặp sự mâu thuẫn* .

* Khi kết thúc *quá trình bán chuẩn hóa các cột* của A, có *đúng 1 trong 3 trường hợp sau đây xảy ra*:

a) Trường hợp 1: Ta *gặp sự mâu thuẫn* [nghĩa là gặp một dòng có dạng $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad | a)$ với $a \neq 0$. Dòng này là *hệ quả của hai dòng nào đó* có *sự tỉ lệ không tương thích giữa vế trái và vế phải*]. Khi đó hệ *vô nghiệm*.

b) Trường hợp 2: Ta xây dựng được n *cột bán chuẩn liên tiếp* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ trong A mà *không gặp sự mâu thuẫn nào*. Khi đó hệ *có nghiệm duy nhất* được xác định như sau: dùng *các phương trình không tầm thường theo thứ tự từ dưới lên trên* của *hệ cuối cùng* trong *quá trình bán chuẩn hóa* để tính lần lượt *các ẩn từ phải qua trái* (dùng *các ẩn đã biết* để tính *các ẩn chưa biết*).

c) Trường hợp 3: Ta xây dựng được k *cột bán chuẩn* $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ($k < n$) trong A *xen kẽ với* $(n-k)$ *cột khác không bán chuẩn hóa được* mà *không gặp sự mâu thuẫn nào.*

Khi đó hệ có *vô số nghiệm với* $(n-k)$ *ẩn tự do* được xác định như sau:

* Các ẩn ứng với *các cột không bán chuẩn hóa được* là *các ẩn tự do* lấy *giá trị thực tùy ý*.

* Các ẩn còn lại (ứng với *các cột bán chuẩn hóa được*) được tính theo *các ẩn tự do* bằng cách dùng *các phương trình không tầm thường* theo thứ tự *từ dưới lên trên* của *hệ cuối cùng* trong *quá trình bán chuẩn hóa* để tính lần lượt các ẩn *từ phải qua trái* (dùng *các ẩn đã biết* để tính *các ẩn chưa biết*).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính* có *nghiệm duy nhất* (*các ẩn* là x, y, z, t):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & & & & \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & & & \end{array} \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \end{array} \end{array}$$: hệ *có nghiệm duy nhất* như sau:

$t = [6/(-6)] = -1$, $z = -9t - 5 = 4$, $y = [(4z - 2t - 24)/3] = -2$, $x = [(y - 5t + 3)/2] = 3$.

Bảng 1: (2) → [(2) + 2(1)],   (3) → [(3) + (1)],   (4) → [(4) – 3(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) + 2(4)],   (4) → [(4) + (2)].

Bảng 3 : (4) → [(4) – (3)].

b) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm* (*các ẩn* là x, y, z, t):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array}\right) \\ \begin{array}{c} F_1 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \end{array}$$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$: hệ *vô nghiệm*.

Bảng 1: (3) → [(3) + 2(2)], (1) → [(1) + 2(2)], (2) → [(2) + 2(1)], (4) → [(4) + 7(1)]

Bảng 2: (3) → [(3) – 4(2)],   (4) → [(4) + 3(2)].

Bảng 3 : (4) → [(4) + 2(3)].

c) Trường hợp *hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm* (*các ẩn* là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array}\right) \\ \begin{array}{c} F_1 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \end{array}$$

: các cột (4) và (5) *không bán chuẩn hóa* được.

Viết lại *các phương trình không tầm thường* (1), (2) và (3) của *hệ cuối cùng* :

$x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$ (1), $2x_2 - x_3 + 2x_5 = -7$ (2), $3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$ (3)

Từ (3), (2) và (1), ta thấy hệ có *vô số nghiệm* với

2 *ẩn tự do* : $x_4 = a$, $x_5 = b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x_3 = (2a - b + 2) / 3$,

$x_2 = (x_3 - 2b - 7) / 2 = (2a - 7b - 19) / 6$, $x_1 = x_2 - 3x_3 + 2a + 4 = (2a - b - 7) / 6$

Bảng 1: (2) → [(2) – 3(1)], (3) → [(3) + (4)], (4) → [(4) + 2(1)].

Bảng 2: (3) → [(3) – 5(2)], (4) → [(4) – 2(2)].

Bảng 3 : (3) → 2^{-1}(3), (4) → [(4) – (3)].

IV. HẠNG CỦA MA TRẬN:

4.1/ DẠNG BẬC THANG VÀ DẠNG BẬC THANG RÚT GỌN CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

a) *Bán chuẩn hóa tối đa các cột* của A, ta được ma trận $S_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (*biến đổi Gauss*). Trong S_A, *các dòng không tầm thường* (dòng ≠ **O**) nằm phía trên các dòng **O** và *số hạng* ≠ 0 *đầu tiên của các dòng đó* chính là *số hạng có đánh dấu* * của *các cột bán chuẩn*. Ta nói S_A là *dạng bậc thang* của A hay *ma trận rút gọn theo dòng* của A. *Dạng bậc thang* S_A của A *không duy nhất.*

b) *Chuẩn hóa tối đa các cột* của A, ta được ma trận $R_A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ (*biến đổi Gauss – Jordan*). Trong R_A, *các dòng không tầm thường* (dòng ≠ **O**) *nằm phía trên* các dòng **O** và *số hạng* ≠ 0 *đầu tiên của các dòng đó* chính là số 1* của *các cột chuẩn*. Ta nói R_A là *dạng bậc thang rút gọn* của A hay *ma trận rút gọn theo dòng từng bậc* của A. *Dạng bậc thang rút gọn* R_A của A là *duy nhất*.

R_A là *một trường hợp đặc biệt* của S_A.

4.2/ HẠNG CỦA MA TRẬN:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và các dạng S_A và R_A của A.

Đặt $r(A)$ = (*hạng của* A) = *số dòng không tầm thường* (dòng $\neq \mathbf{O}$) của S_A(hay R_A)

hay $r(A)$ = (*hạng của* A) = *số cột* (*bán*) *chuẩn* hiện diện trong R_A (hay S_A).

Ta có $0 \leq r(A) \leq \min\{ m, n \}$. Khi $A = \mathbf{O}_{m \times n}$ thì $r(A) = 0$. Khi $A \neq \mathbf{O}_{m \times n}$ thì

$r(A) \geq 1$. Hạng của ma trận không đổi khi dùng *các phép biến đổi sơ cấp trên dòng*.

Ví dụ: Xét $A \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R})$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} F_1 & & & & \end{matrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} F_1 & F_2 & & & \end{matrix} \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} F_1 & F_2 & & F_3 & \end{matrix} \end{array} = S_A \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} E_1 & E_2 & & & \end{matrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} E_1 & E_2 & & E_3 & \end{matrix} \end{array} = R_A$$

Ta có $r(A) = 3$ vì S_A (hay R_A) có 3 dòng *không tầm thường* (3 dòng $\neq \mathbf{O}$).

Ta có $r(A) = 3$ vì R_A (hay S_A) có 3 cột (*bán*) *chuẩn*.

$0 \leq r(A) = 3 \leq \min\{ m = 4, n = 5 \} = 4$.

Bảng 1: $(2) \to [\,(2) + 2(1)\,]$, $(3) \to [\,(3) + (4)\,]$, $(4) \to [\,(4) + 3(1)\,]$.

Bảng 2: $(4) \to [\,(4) - 2(2)\,]$, $(2) \to -5^{-1}(2)$, $(3) \to [\,(3) - (2)\,]$.

Bảng 3 : $(4) \to [\,(4) + 3(3)\,]$.

Bảng 4 : $(1) \to [\,(1) + 3(2)\,]$, $(1) \to -(1)$.

Bảng 5 : $(1) \to [\,(1) + (3)\,]$, $(3) \to -2^{-1}(3)$, $(2) \to [\,(2) + (3)\,]$.

4.3/ ĐỊNH LÝ KRONECKER – CAPELLI:

Cho *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ có m *phương trình* và n *ẩn số*.

Đặt $\overline{A} = (A \mid B) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbf{R})$. Ta gọi $\overline{A}$ là *ma trận bổ sung* của hệ $(A \mid B)$.

Ta có $r(A) = k \le n$ và $[\, r(\overline{A}) = r(A)$ hay $r(\overline{A}) = r(A) + 1 \,]$.

a) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) + 1$ thì hệ $(A \mid B)$ *vô nghiệm*.

b) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ *có nghiệm duy nhất*.

c) Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = k < n$ thì hệ *có vô số nghiệm* với *số ẩn tự do* là $(n - k)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xem lại *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ trong (**3.2**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$ nên hệ có *nghiệm duy nhất*.

b) Xem lại *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ trong (**3.3**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60^* & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^* \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} F_1 & F_2 & F_3 & & & F_4 \end{array} \end{array}$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ *vô nghiệm*.

c) Xem lại *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ trong (**3.4**):

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to (R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & & E_3 \end{array} \end{array}$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$ nên hệ có *vô số nghiệm* với *số ẩn tự do* là

$(n - k) = 5 - 3 = 2$.

d) Xem lại *hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ trong **(3.8)** :

* Khi $m = 1$:

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to (R_A\,|\,B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{llll} E_1 & & & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 1 < n = 3$ nên hệ có *vô số nghiệm* với *số ẩn tự do* là

$(n - k) = 3 - 1 = 2$.

* Khi $m = -3$:

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to (R_A\,|\,B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{llll} E_1 & E_2 & E_3 & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 3$ nên hệ có *nghiệm duy nhất*.

* Khi $-3 \neq m \neq 1$:

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to (R_A\,|\,B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-m)(m+3)^* \end{pmatrix} \\ \begin{array}{llll} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ *vô nghiệm*.

e) Xem lại *các hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ trong **Ví dụ** của **(3.10)**:

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{pmatrix} \to (S_A\,|\,B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{lllll} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$ nên hệ có *nghiệm duy nhất*.

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^* \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} F_1 & F_2 & F_3 & & F_4 \end{array} \end{array}.$$

Ta có $r(\overline{A}) = 4 = 3 + 1 = r(A) + 1$ nên hệ *vô nghiệm*.

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \to (S_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} F_1 & F_2 & F_3 & & & \end{array} \end{array}$$

Ta có $r(\overline{A}) = r(A) = k = 3 < n = 5$ nên hệ có *vô số nghiệm* với *số ẩn tự do* là

$(n - k) = 5 - 3 = 2$.
