ÔN THI TOÁN RỜI RẠC CUỐI KỲ

1/ Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

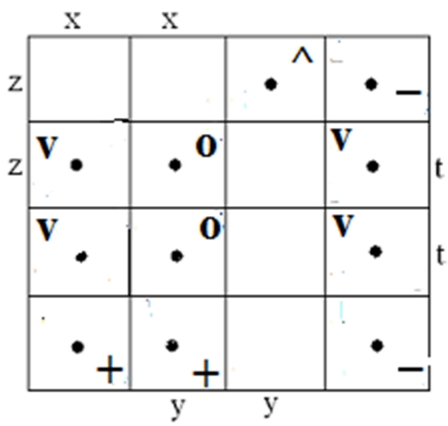
$$f(x, y, z, t) = (x\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,z)\bar{t} \vee t\,(\bar{y} \vee x\,y) = x\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\bar{t} \vee \bar{y}\,t \vee x\,y\,t$$

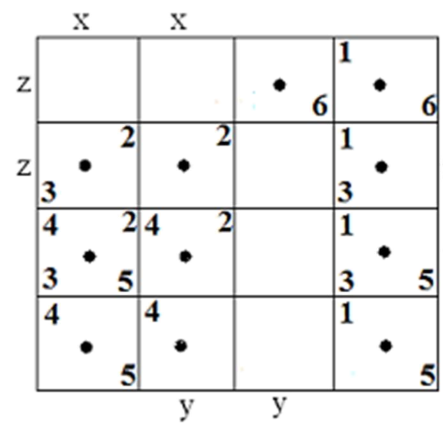
a) Vẽ biểu đồ $S = \text{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

<u>GIẢI</u>

a) $S = \text{Kar}(f) = K(x\bar{z}\,\bar{t})\ (+) \cup K(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t})\ (-) \cup K(\bar{x}\,y\,z\bar{t})\ (\wedge) \cup K(\bar{y}\,t)\ (\vee) \cup K(x\,y\,t)\ (o)$





S = Kar(f) (0,5 đ)

Các tế bào lớn của S là $T_1 = \bar{x}\,\bar{y}$, $T_2 = x\,t$, $T_3 = \bar{y}\,t$, $T_4 = x\bar{z}$, $T_5 = \bar{y}\,\bar{z}$ và $T_6 = \bar{x}\,z\bar{t}$.

b) Thực hiện thuật toán, ta có được 3 phép bao phủ cho S = Kar(f) :

$$\begin{array}{c} T_1 \text{ (tối tiểu)} \\ \uparrow \\ T_2 \to T_4 \to T_6 \to T_3 \to T_1 \text{ (chưa tối tiểu)} \\ \downarrow \\ T_5 \text{ (tối tiểu)} \end{array}$$

Ta có 3 phép phủ cho S = Kar(f) là

$S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_1$ (1), $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup \mathbf{T_3} \cup T_1$ (2) và $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_3 \cup T_5$ (3).

Phép phủ (2) chưa tối tiểu [vì dư $\mathbf{T_3}$ so với (1)]. Như vậy có hai phép phủ tối tiểu cho S = Kar(f) là (1) và (3). Từ (1) và (3), ta có

$f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\,z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}$ (nhận vì đơn giản hơn công thức dưới) [tự vẽ mạng các cổng cho f].

$f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\,z\bar{t} \vee \bar{y}\,t \vee \bar{y}\,\bar{z}$ (bị loại vì phức tạp hơn công thức trên) **(0,25 đ).**

2/ Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

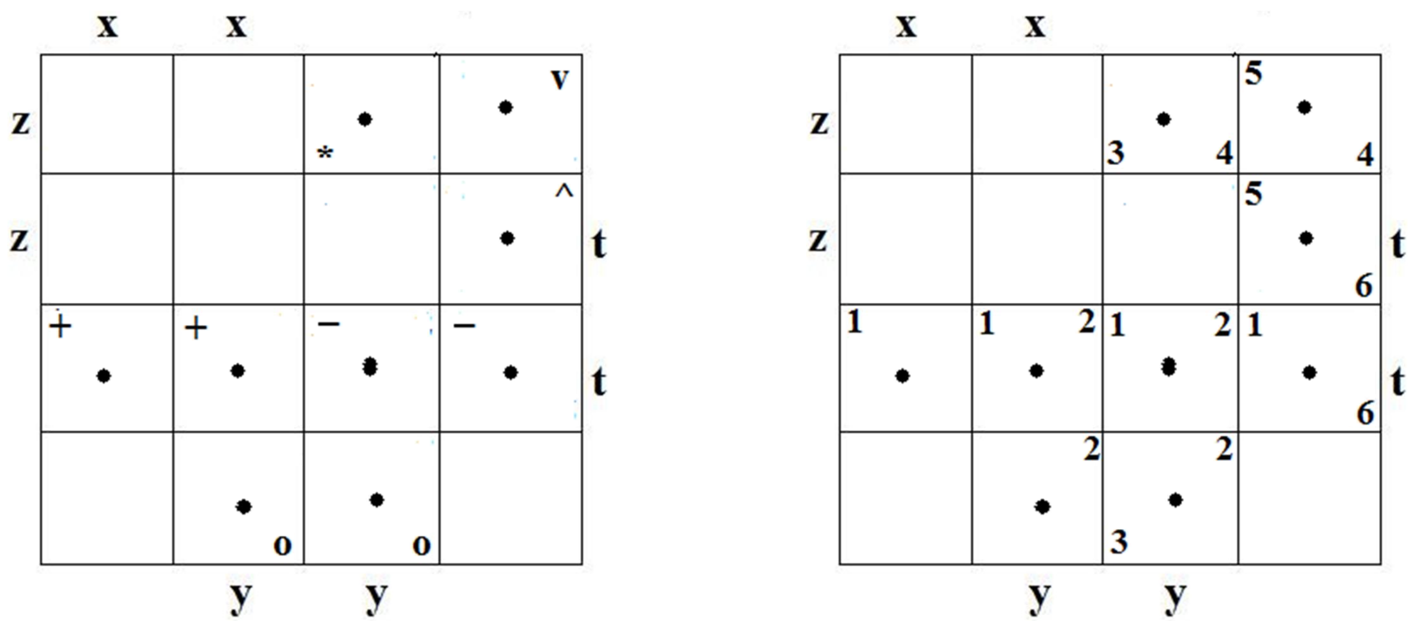
$$f(x, y, z, t) = (x\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z)\,t \vee \bar{t}\,(\bar{x}\,\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz)$$
$$= x\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}zt \vee \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee y\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t}\,.$$

a) Vẽ biểu đồ $S = \mathrm{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

<u>GIẢI</u>

a) $S = \mathrm{Kar}(f) = K(x\bar{z}t)\ (+) \cup K(\bar{x}\,\bar{z}t)\ (-) \cup K(\bar{x}\,\bar{y}zt)\ (\wedge) \cup K(\bar{x}\,\bar{y}z\bar{t})\ (\vee) \cup K(y\bar{z}\,\bar{t})$ (**o**) $\cup K(\bar{x}yz\bar{t})$ (*)



S = Kar(f)

S có 6 tế bào lớn $T_1 = \bar{z}\,t$, $T_2 = y\bar{z}$, $T_3 = \bar{x}\,y\bar{t}$, $T_4 = \bar{x}\,z\bar{t}$, $T_5 = \bar{x}\,\bar{y}z$ và $T_6 = \bar{x}\,\bar{y}t$.

b) S có 4 phép phủ như sau : $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (1), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (2),
$S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (3), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (4),
Phép phủ (2) và (3) trùng nhau nên ta chỉ có 3 phép phủ tối tiểu là (1), (2) và (4). Từ (1), (2) và (4), ta có 3 công thức đa thức đơn giản như nhau cho f :

$$\begin{array}{lll} T_1 \rightarrow & T_2 \rightarrow & T_5 \rightarrow T_3 \\ & \downarrow & \downarrow \\ T_5 \leftarrow & T_4 & T_4 \\ & \downarrow & \\ & T_6 & \end{array}$$

$f(x, y, z, t) = \bar{z}\,t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{t}$ (công thức đa thức tối tiểu của f và tự vẽ mạng các cổng)
$= \bar{z}\,t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}z$ (công thức đa thức tối tiểu của f)
$= \bar{z}\,t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}t$ (công thức đa thức tối tiểu của f) .

3/ $f(x, y, z, t) = y\bar{t} \vee x\bar{y}\,t \vee \bar{x}\,\bar{t} \vee \bar{z}\,\bar{t}$ (*) $= y\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee \bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}z\bar{t}$ (**) : công thức (*) đơn giản hơn (**).

4/ Cho $T = \{ 1, 2, 3 \}$ và đặt $\forall x, y \in T,\ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x + 1 \geq y$.

Xác định tập hợp $L = \{ (x, y) \in T^2 \mid x\mathfrak{R}y \}$.

Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền của quan hệ hai ngôi $\mathfrak{R}$.

GIẢI

L = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) }

$\mathfrak{R}$ phản xạ ($\forall x \in T, x + 1 \geq x$ nên $x \mathfrak{R} x$). $\mathfrak{R}$ không đối xứng ($\exists 3, 1 \in T, 3\mathfrak{R}1$ và $1\overline{\mathfrak{R}}3$).

$\mathfrak{R}$ không phản xứng ($\exists 1, 2 \in T, 1\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}1$ và $1 \neq 2$). $\mathfrak{R}$ không truyền ($\exists 1, 2, 3 \in T, 1\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}3$ và $1\overline{\mathfrak{R}}3$).

5/ a) Giải phương trình trên $\mathbf{Z_{14}}$: $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79}$, $\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420}$ và $\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347}$.

b) Giải phương trình trên $\mathbf{Z_{32}}$: $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954}$ và $\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716}$.

GIẢI

a) Trên $\mathbf{Z_{14}}$ **:** $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

$\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{0}$: phương trình có nghiệm tùy ý trong $\mathbf{Z_{14}}$

(14 nghiệm : $\overline{y} = \overline{0}, \overline{1}, .., \overline{13}$).

$\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347} \Leftrightarrow \overline{9}.\overline{z} = \overline{3} \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{9}^{-1}.\overline{3} = \overline{11}.\overline{3} = \overline{33} = \overline{5}$

[nghiệm duy nhất vì (9, 14) = 1 và $\overline{9} \in U(\mathbf{Z_{14}})$].

b) Trên $\mathbf{Z_{32}}$ **:** $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954} \Leftrightarrow \overline{12}.\overline{y} = \overline{26} \Rightarrow \overline{8}.\overline{12}.\overline{y} = \overline{8}.\overline{26} \Rightarrow \overline{96}.\overline{y} = \overline{208}$

$\Rightarrow \overline{0}.\overline{y} = \overline{16} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

[n = 32, a = 12, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** × 8 = **d**n’ với n’ = 8, b = 26 và $\overline{b \vdots d}$. Nhân $\overline{b'} = \overline{8}$ vào hai vế].

$\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716} \Leftrightarrow \overline{28}.\overline{x} = \overline{20}$ (1) [n = 32, a = 28, b = 20, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** × 8, a = **4** × 7, b = **4** × 5].

$\Leftrightarrow \overline{4}.\overline{7}.\overline{x} = \overline{4}.\overline{5}$ (trong $\mathbf{Z_{4\times 8}}$) đưa đến $\overline{7}.\overline{X} = \overline{5}$ (trong $\mathbf{Z_8}$) (2). Ta có (7, 8) = 1 nên $\overline{7} \in U(\mathbf{Z_8})$.

Do $\overline{7}.\overline{7} = \overline{1}$ nên $\overline{7}^{-1} = \overline{7}$ và (2) có nghiệm duy nhất (trong $\mathbf{Z_8}$) là $\overline{X} = \overline{7}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{3}$.

Suy ra (1) có 4 nghiệm trong $\mathbf{Z_{32}}$ là $\overline{x} = \overline{3+8j}$ (j = 0, 1, 2 , 3), nghĩa là $\overline{x} = \overline{3}$, $\overline{x} = \overline{11}$, $\overline{x} = \overline{19}$,

$\overline{x} = \overline{27}$ trong $\mathbf{Z_{32}}$.

6/ $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, đặt $x\,\Re\,y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k} \Leftrightarrow (x^2 - y^2) \vdots 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8}$.

$\forall x, y \in \mathbf{N}$, đặt $x\,\gamma\,y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k}$

a) Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{Z}$ mà không là quan hệ thứ tự.

b) Chứng minh γ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbf{N}$ mà không là quan hệ tương đương.

GIẢI

a) $\Re$ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{Z}, (x^2 - x^2) = 0 \in \mathbf{Z}$ nên $x\Re x$.

$\Re$ đối xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, $x\Re y \Rightarrow (x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z} \Rightarrow (y^2 - x^2) = (-\boldsymbol{k}) \in \mathbf{Z} \Rightarrow y\Re x$.

$\Re$ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{Z}$, $(x\Re y$ và $y\Re z) \Rightarrow [\,(x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}$ và $(y^2 - z^2) = \boldsymbol{k'} \in \mathbf{Z}\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) \in \mathbf{Z} \Rightarrow x\Re z$.

$\Re$ không phản xứng vì $\exists\, 1, -1 \in \mathbf{Z}$, $1\Re(-1), (-1)\Re 1$ và $1 \neq -1$.

$[\,1^2 - (-1)^2 = (-1)^2 - 1^2 = 8.0$ với $0 \in \mathbf{Z}\,]$.

Vậy $\Re$ là một quan hệ tương đương nhưng không là quan hệ thứ tự trên $\mathbf{Z}$.

b) γ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{N}, (x^2 - x^2) = 0 \in \mathbf{N}$ nên $x\,\gamma\,x$.

γ phản xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{N}$, $(x\,\gamma\,y$ và $y\,\gamma\,x) \Rightarrow (x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}$ và $(y^2 - x^2) = (-\boldsymbol{k}) \in \mathbf{N} \Rightarrow \boldsymbol{k} = 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

γ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{N}$, $(x\,\gamma\,y$ và $y\,\gamma\,z) \Rightarrow [\,(x^2 - y^2) = \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}$ và $(y^2 - z^2) = \boldsymbol{k'} \in \mathbf{N}\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k'}) \in \mathbf{N} \Rightarrow x\,\gamma\,z$. .

γ không đối xứng vì $\exists\, 5, 3 \in \mathbf{Z}$, $5\,\gamma\,3$ và $3\,\overline{\gamma}\,5$

$[\,5^2 - 3^2 = 8.2$ với $2 \in \mathbf{N}$ và $3^2 - 5^2 = -16 \neq 8k, \forall k \in \mathbf{N}\,]$.

Vậy γ là một quan hệ thứ tự nhưng không là quan hệ tương đương trên $\mathbf{N}$.

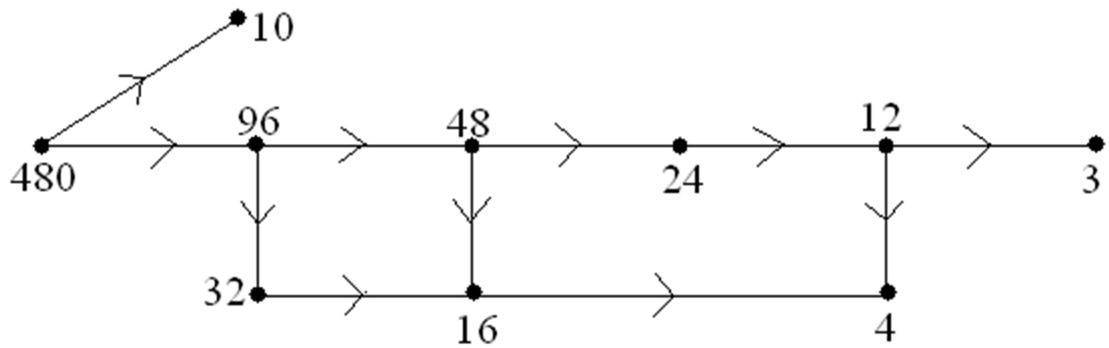
7/ Cho $S = \{ 3, 4, 10, 12, 16, 24, 32, 48, 96, 480 \}$. Xét quan hệ thứ tự $\vdots$ trên S như sau:

$$\forall x, y \in S,\ x \vdots y \Leftrightarrow x \text{ là một bội số của } y$$

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \vdots)$ và tìm các phần tử cực tiểu (tối tiểu), cực đại (tối đại), nếu có.

$\vdots$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* ?

GIẢI



(S, ⋮)

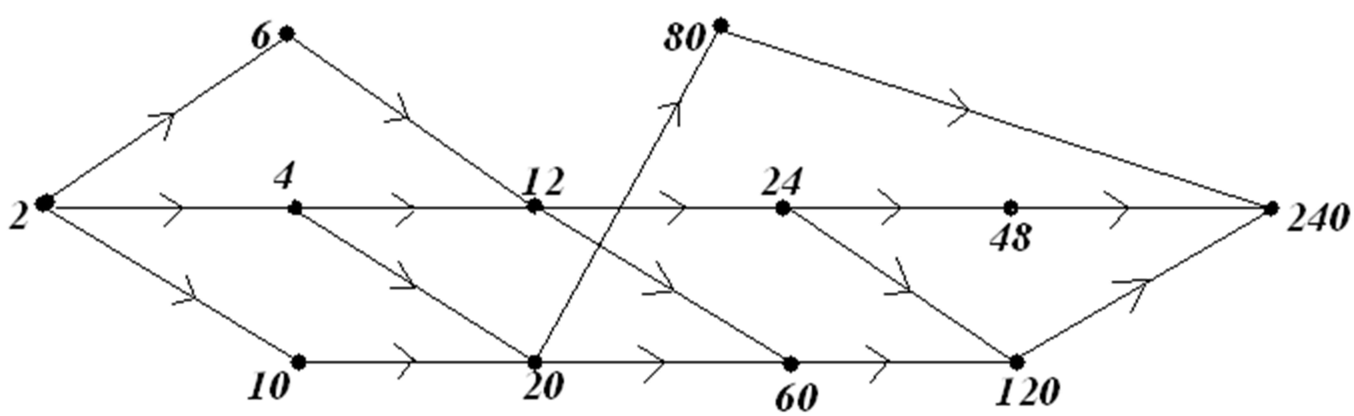
min(S, ⋮) = 480. Các phần tử tối đại là 3, 4 và 10.

⋮ là thứ tự bán phần trên S vì $3, 4 \in S$ có $\overline{3 \vdots 4}$ và $\overline{4 \vdots 3}$.

8/ Cho $T = \{ 2, 4, 6, 10, 12, 20, 24, 48, 60, 80, 120, 240 \}$ và quan hệ thứ tự | trên T như sau : $\forall x, y \in T$, $x \mid y \Leftrightarrow x$ là một ước số của y.

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(T, |)$ và tìm min, max, các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có). | là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* ?

GIẢI



(T, |)

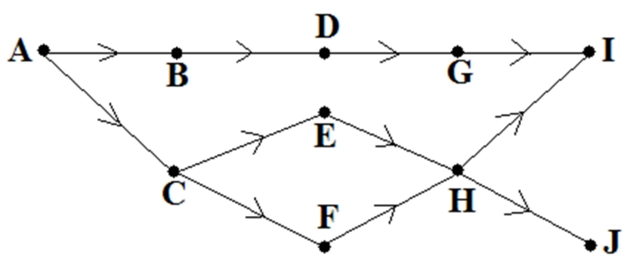
min(T, |) = 2 và max(T, |) = 240 . | là thứ tự bán phần trên T vì $4, 6 \in T$ có $\overline{4 \mid 6}$ và $\overline{6 \mid 4}$.

9/ Cho A = {1}, B = {1, 2}, C = {1, 3}, D = {1, 2. 4}, E = {1, 3. 5}, F = {1, 3. 4}, G = {1, 2. 4, 5}, H = {1, 3, 4, 5}, I = {1, 2, 3. 4, 5} và J = {1, 3. 4, 5, 6}.

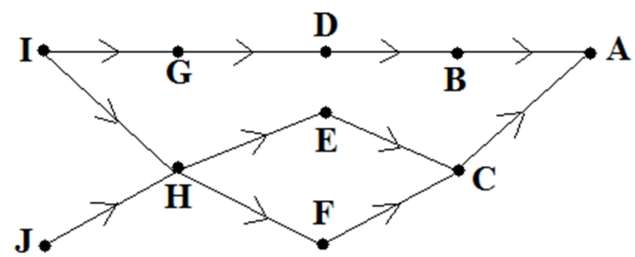
Đặt $\Omega = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \}$. Trên Ω, ta có hai quan hệ thứ tự $\subset$ và $\supset$.

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(\Omega, \subset)$ và $(\Omega, \supset)$. Sau đó tìm min, max, các phần tử tối tiểu và tối đại của chúng (nếu có). $\subset$ và $\supset$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* trên Ω ?

GIẢI



$(\Omega, \subset)$



$(\Omega, \supset)$

$\min(\Omega, \subset) = A$. Tối đại là I và J.

$\max(\Omega, \subset) = A$. Tối tiểu là I và J.

$\subset$ và $\supset$ đều là các thứ tự *bán phần* trên Ω vì $\exists B, C \in \Omega, B \not\subset C$ và $C \not\subset B$.

10/ Đặt Σ là tập hợp các tam giác cân trên mặt phẳng và $\sim$ là quan hệ đồng dạng trên Σ.

Chứng minh $\sim$ là một quan hệ tương đương nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên Σ.

GIẢI

Hai tam giác cân đồng dạng khi và chỉ khi góc ở đỉnh cân của chúng bằng nhau.

Σ phản xạ [$\forall \alpha \in \Sigma$ (α có góc ở đỉnh cân là $\hat{A}$), $\hat{A} = \hat{A}$ nên $\alpha \sim \alpha$].

Σ đối xứng [$\forall \alpha, \beta \in \Sigma$ (α và β có góc ở đỉnh cân lần lượt là $\hat{A}$ và $\hat{B}$), $\alpha \sim \beta \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}$

nên $\beta \sim \alpha$].

Σ truyền [$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ (α, β và γ có góc ở đỉnh cân lần lượt là $\hat{A}, \hat{B}$ và $\hat{C}$),

$\begin{cases} \alpha \sim \beta \\ \beta \sim \gamma \end{cases} \Rightarrow (\hat{A} = \hat{B}$ và $\hat{B} = \hat{C}) \Rightarrow (\hat{A} = \hat{C}) \Rightarrow (\alpha \sim \gamma)$].

Σ không phản xứng (hai tam giác đều δ và ε với cạnh lần lượt là 1 và 2 thỏa $\delta \sim \varepsilon, \varepsilon \sim \delta, \delta \neq \varepsilon$).

Do đó $\sim$ là một quan hệ tương đương nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên Σ.

11/ Cho các số nguyên a và b. Cần quan tâm các vấn đề sau :

* Dùng thuật chia Euclide để tìm $d = (a, b)$ và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = ra + sb$.

Suy ra $e = [\,a, b\,]$ và dạng tối giản của $\frac{a}{b}$ rồi tìm $u, v \in \mathbf{Z}$ thỏa $\frac{1}{e} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$.

* Phân tích nguyên tố a và b để :

- Tìm $d = (a, b)$, $e = [\,a, b\,]$ và dạng tối giản của $\frac{a}{b}$.

- Xét tính nguyên tố cùng nhau của a và b.

- Mô tả và tính số lượng các ước số nguyên (các ước số nguyên âm hoặc dương) của a.

12/ a) Tính tổng $S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)(-2)^k$ theo $n \geq 0$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$S_o = (0 + 1)(0 + 2)(-2)^o = 2$ và $S_n = S_{n-1} + (n + 1)(n + 2)(-2)^n$, $\forall n \geq 1$ ($\lambda = 1 \neq \alpha = -2$).

b) Tính tổng $T_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).3^k$ theo $n \geq 1$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$T_1 = (2.1 - 1)3^1 = 3$ và $T_n = T_{n-1} + (2n - 1)3^n$, $\forall n \geq 2$ ($\lambda = 1 \neq \alpha = 3$).

c) Tính tổng $U_n = \sum_{k=2}^{n} (k^3 - 2k^2 + 4k)$ theo $n \geq 2$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$U_2 = (2^3 - 2.2^2 + 4.2) = 8$ và $U_n = U_{n-1} + (n^3 - 2n^2 + 4n)$, $\forall n \geq 3$ ($\lambda = 1 = \alpha$).

d) $a_o = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n - 2)$, $\forall n \geq 0$ ($\lambda = -4 = \alpha$).

e) $a_1 = -13$, $a_2 = 50$ và $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1).3^n$, $\forall n \geq 1$ [$f(\alpha) \neq 0$].

f) $a_o = 3$, $a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}$, $\forall n \geq 2$ [$f(\alpha) = 0 \neq f'(\alpha)$].

g) $a_2 = -28$, $a_3 = -149$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4$, $\forall n \geq 3$ [$f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$].
