CHƯƠNG V

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

Trong chương này, m và n là *các số nguyên* ≥ 1.

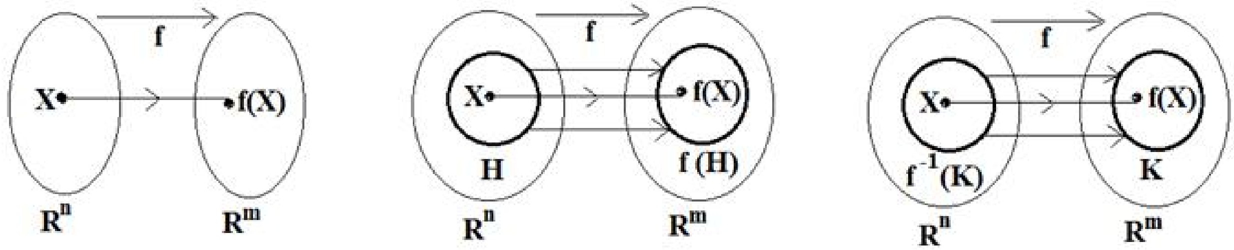
1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho *ánh xạ* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, nghĩa là

$\forall \alpha \equiv X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \exists!\ f(\alpha) \equiv f(X) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$.

a) Nếu $H \subset \mathbf{R}^n$ thì *ảnh của* H qua *ánh xạ* f là $f(H) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in H \} \subset \mathbf{R}^m$

b) Nếu $K \subset \mathbf{R}^m$ thì *ảnh ngược* của K bởi *ánh xạ* f là

$f^{-1}(K) = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) \in K \} \subset \mathbf{R}^n$.

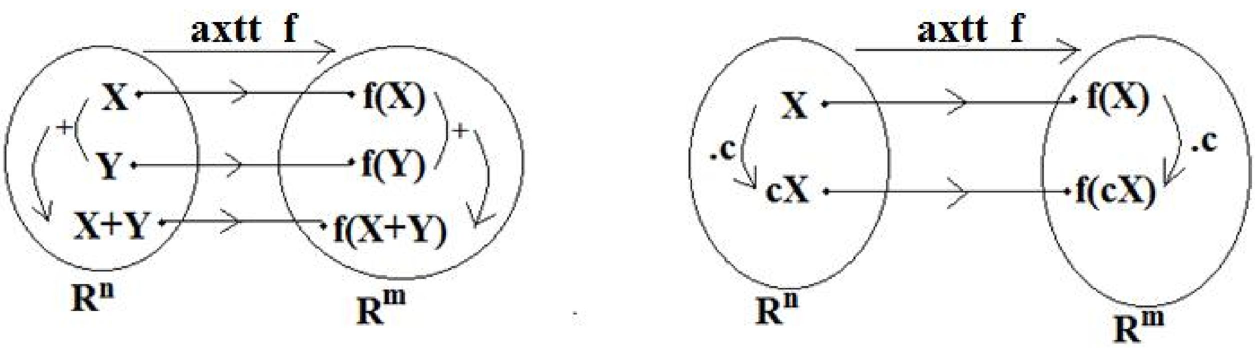


1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho *ánh xạ* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

a) f là *ánh xạ tuyến tính* (từ $\mathbf{R}^n$ vào $\mathbf{R}^m$) nếu f thỏa :

* $\forall \alpha \equiv X, \beta \equiv Y \in \mathbf{R}^n, f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ (1).

* $\forall \alpha \equiv X \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.\alpha) = c.f(\alpha)$ (2).



b) Suy ra f là *ánh xạ tuyến tính* nếu f thỏa

$\forall\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.\alpha + \beta) = c.f(\alpha) + f(\beta)$ (3).

c) Ký hiệu $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = \{ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \mid g$ là *ánh xạ tuyến tính* $\}$. Khi $m = n$,

ta viết gọn $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) = L(\mathbf{R}^n) = \{ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \mid g$ là *ánh xạ tuyến tính* $\}$.

Nếu $g \in L(\mathbf{R}^n)$ thì g còn được gọi là *một toán tử tuyến tính* trên $\mathbf{R}^n$.

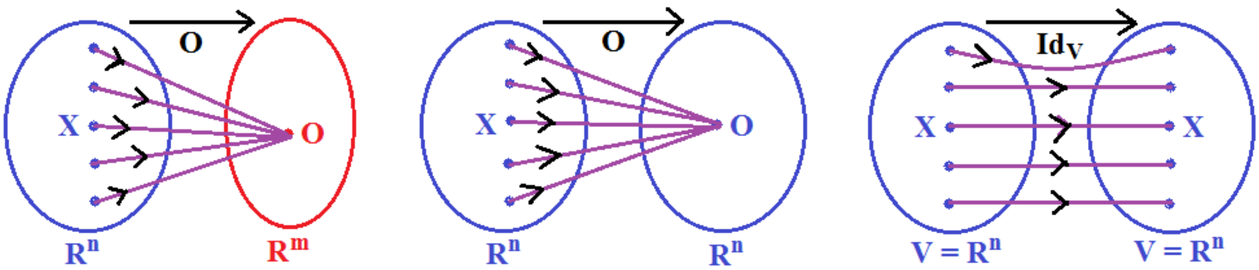
<u>Ví dụ:</u>

a) *Ánh xạ tuyến tính* $\mathbf{O} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ và *toán tử tuyến tính* $\mathbf{O} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$\qquad\qquad\alpha \mapsto \mathbf{O} \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \mapsto \mathbf{O}$

b) *Toán tử tuyến tính đồng nhất* trên $\mathbf{R}^n$ là $Id_{\mathbf{R}^n} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

$\qquad\qquad\alpha \mapsto \alpha$



c) $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ có $f(X) = (3x - 8y + z - 4t, - 7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t)$,

$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Ta *có thể kiểm tra* f thỏa (3) nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall X = (x, y, z, t), Y = (u, v, w, h) \in \mathbf{R}^4, \forall c \in \mathbf{R}, f(c.X + Y) =$

$= f(cx + u, cy + v, cz + w, ct + h) = [3(cx + u) - 8(cy + v) + (cz + w) - 4(ct + h),$

$- 7(cx + u) + 5(cy + v) + 6(ct + h), 4(cx + u) + (cy + v) - 9(cz + w) - (ct + h)]$

$= c(3x - 8y + z - 4t, - 7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t) + (3u - 8v + w - 4h,$

$- 7u + 5v + 6h, 4u + v - 9w - h) = c.f(X) + f(Y).$

Ngoài ra ta *có thể giải thích* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ do *các thành phần* của $f(X)$ đều là *các biểu thức bậc nhất* theo các biến x, y, z và t.

d) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ có $g(X) = (- 2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z)$,

$\forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Ta *có thể kiểm tra* g thỏa (3) nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall X = (x, y, z)$, $Y = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, $\forall c \in \mathbf{R}$,

$g(c.X + Y) = g(cx + u, cy + v, cz + w) = [-2(cx + u) + 9(cy + v) + 6(cz + w),$

$8(cx + u) - 5(cy + v) + (cz + w), 3(cx + u) + 7(cy + v) - 4(cz + w)\,]$

$= c(-2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z) + (-2u + 9v + 6w, 8u - 5v + w,$

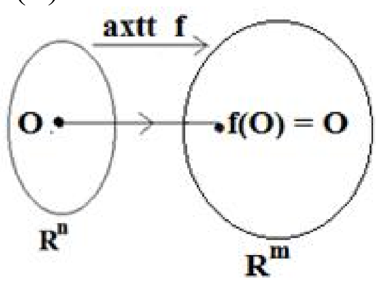
$3u + 7v - 4w) = c.g(X) + g(Y).$

Ngoài ra ta *có thể giải thích* $g \in L(\mathbf{R}^3)$ do *các thành phần* của $g(X)$ đều là *các biểu thức bậc nhất* theo các biến x, y và z.

1.3/ <u>TÍNH CHẤT :</u>

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó $,\forall \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}^n$, $\forall c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, ta có

a) $f(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ và $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.



b) $f(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = c_1 f(\alpha_1) + \cdots + c_k f(\alpha_k)$.

(*ảnh* của *một tổ hợp tuyến tính* bằng *tổ hợp tuyến tính* của *các ảnh tương ứng*).

<u>Ví dụ:</u> Cho $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^3$ thỏa $f(\alpha_1) = (-1, 3)$, $f(\alpha_2) =$ $= (2,-5)$ và $f(\alpha_3) = (4, 4)$. Khi đó $f(0, 0, 0) = (0, 0)$, $f(-\alpha_1) = -f(\alpha_1) = (1,-3)$ và $f(3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3) = 3f(\alpha_1) - 4f(\alpha_2) + 2f(\alpha_3) = 3(-1,3) - 4(2,-5) + 2(4,4) = (-3,37)$.

1.4/ <u>NHẬN DIỆN ÁNH XẠ VÀ TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH:</u>

Cho *ánh xạ* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Nếu có $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ thỏa $f(X) = X.A$, $\forall X \in \mathbf{R}^n$ thì $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

Thật vậy, $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $f(c.X + Y) = (c.X + Y).A = c.(X.A) + Y.A =$ $= c.f(X) + f(Y)$, nghĩa là f thỏa (3) của (**1.2**).

<u>Ví dụ:</u> Xét lại *các ánh xạ* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ và $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ trong **Ví dụ** của **(1.2)** :

$f(X) = (3x - 8y + z - 4t, -7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t), \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$

và $g(X) = (-2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z), \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Đặt $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -8 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbf{R})$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 9 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có

$f(X) = (x \;\; y \;\; z \;\; t)\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -8 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = X.A, \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$

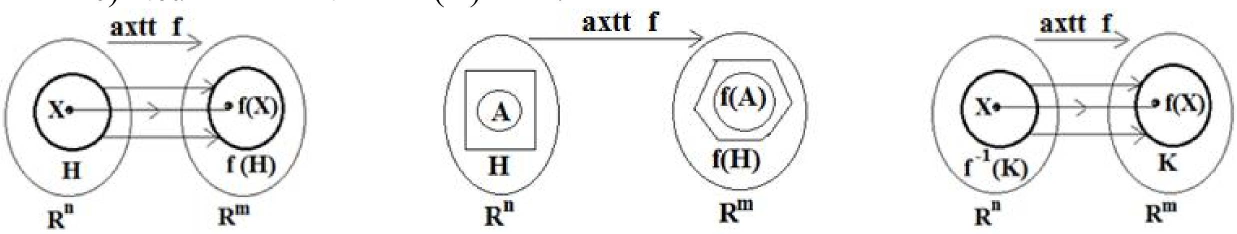
và $g(X) = (x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 9 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = X.B, \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

1.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

a) Nếu $H \leq \mathbf{R}^n$ thì $f(H) \leq \mathbf{R}^m$.

b) Nếu ($H \leq \mathbf{R}^n$ và H có *cơ sở* A) thì [$f(H) \leq \mathbf{R}^m$ và $f(H)$ có *tập sinh* $f(A)$].

c) Nếu $K \leq \mathbf{R}^m$ thì $f^{-1}(K) \leq \mathbf{R}^n$.



1.6/ <u>KHÔNG GIAN ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:</u>

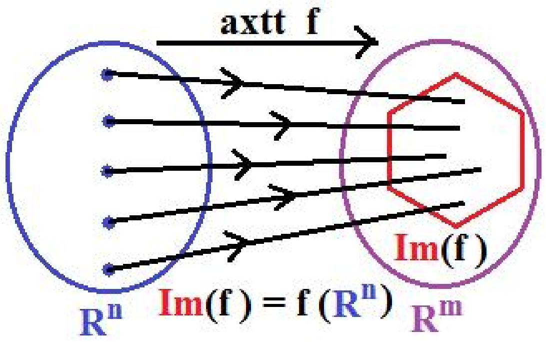
Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ và $H \leq \mathbf{R}^n$.

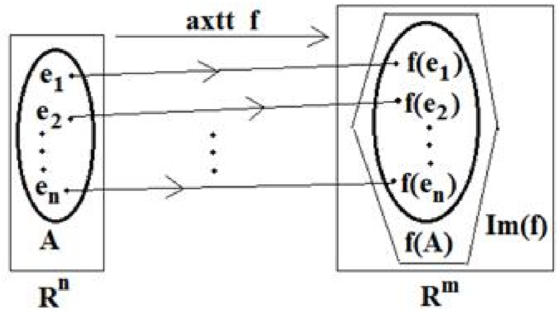
a) Nếu $H = \{ \mathbf{O} \}$ thì $f(H) = f(\{ \mathbf{O} \}) = \{ \mathbf{O} \}$: trường hợp tầm thường.

b) Nếu $H = \mathbf{R}^n$, ta có $f(H) = f(\mathbf{R}^n) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}^n \} \leq \mathbf{R}^m$.

Ta đặt $f(\mathbf{R}^n) = \mathrm{Im}(f)$ và gọi $\mathrm{Im}(f)$ là *không gian ảnh* của f.

c) Tìm *một cơ sở* cho $\mathrm{Im}(f)$: Chọn *cơ sở* A *tùy ý* của $\mathbf{R}^n$ (ta thường chọn A là *cơ sở chính tắc* B_o) thì $< f(A) > = \mathrm{Im}(f)$. Từ đó ta có thể tìm được *một cơ sở* cho $\mathrm{Im}(f)$ từ *tập sinh* $f(A)$ [dùng **(5.7)** của **CHƯƠNG IV**].





<u>Ví dụ:</u> $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ có $f(X) = (x + 2y + 4z - 7t,\ -3x - 2y + 5t,\ 2x + y - z - 2t)$,

$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Ta *kiểm tra dễ dàng* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$.

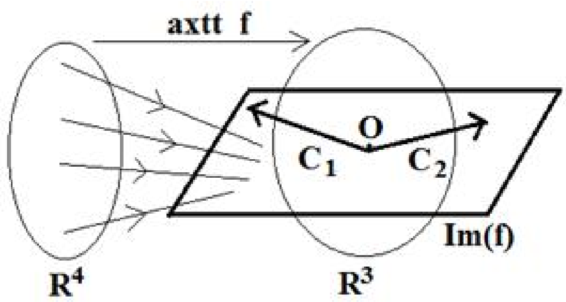
Đặt $A = B_o = \{\ \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0),\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0),\ \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0),\ \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\ \}$

là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^4$ thì $< f(A) > \ = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$. Ta có

$f(A) = \{\ f(\varepsilon_1) = (1,-3, 2),\ f(\varepsilon_2) = (2,-2, 1),\ f(\varepsilon_3) = (4, 0,-1),\ f(\varepsilon_4) = (-7, 5,-2)\ \}$.

Khi đó $\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -16 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4^* & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra

$\mathrm{Im}(f)$ có *cơ sở* $C = \{\ \gamma_1 = (1, -3, 2),\ \gamma_2 = (0, 4, -3)\ \}$ và $\dim \mathrm{Im}(f) = |\,C\,| = 2$.



$C_1 \equiv \gamma_1$ và $C_2 \equiv \gamma_2$

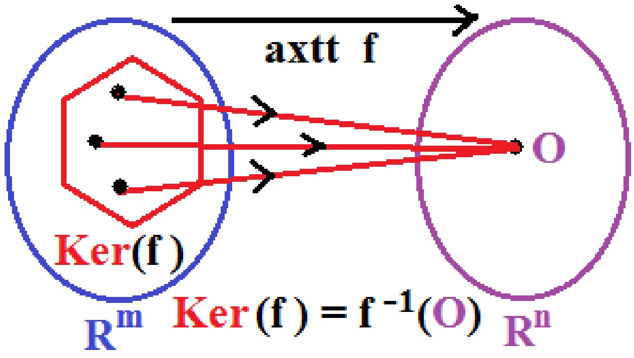
1.7/ <u>KHÔNG GIAN NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:</u>

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ và xét *trường hợp đặc biệt* $K = \{\ \mathbf{O}\ \} \le \mathbf{R}^m$.

a) Nếu $K = \mathbf{R}^m$ thì $f^{-1}(K) = f^{-1}(\mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^n$: trường hợp tầm thường.

b) Nếu $K = \{\ \mathbf{O}\ \}$, ta có $f^{-1}(K) = f^{-1}(\mathbf{O}) = \{\ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) = \mathbf{O}\ \} \le \mathbf{R}^n$.

Ta đặt $f^{-1}(\mathbf{O}) = \mathrm{Ker}(f)$ và gọi $\mathrm{Ker}(f)$ là *không gian nhân* của f.



c) Tìm *một cơ sở* cho Ker(f) : Ta thấy Ker(f) chính là *không gian nghiệm* của *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $f(\alpha) = \mathbf{O}$ với ẩn $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Từ đó ta có thể tìm được *một cơ sở* cho Ker(f) [dùng **(5.8)** của **CHƯƠNG IV**].

<u>Ví dụ:</u> Xét lại *ánh xạ tuyến tính* f trong **Ví dụ (1.6)** :

$f(X) = (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t), \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

$\text{Ker}(f) = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(\alpha) = \mathbf{O} \}$

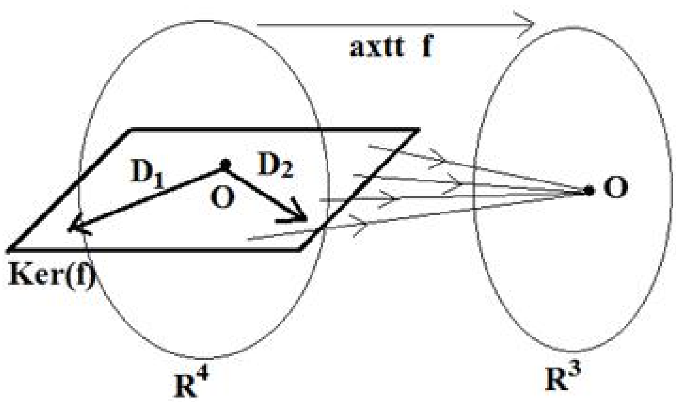
$= \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t) = \mathbf{O} \}$

$= \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 4z - 7t = -3x - 2y + 5t = 2x + y - z - 2t = 0 \}$.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có *vô số nghiệm* với 2 *ẩn tự do* : $z, t \in \mathbf{R}$, $x = 2z - t$, $y = 4t - 3z$.



$D_1 \equiv \delta_1$ và $D_2 \equiv \delta_2$

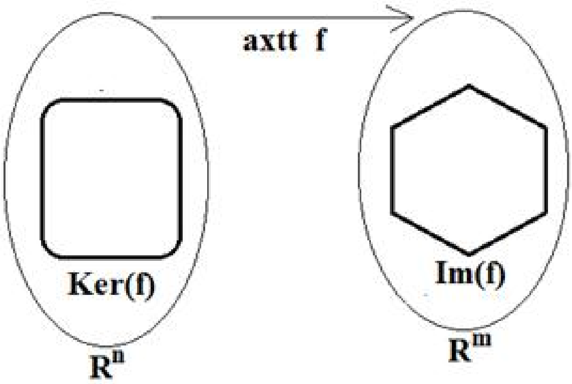
$\mathrm{Ker}(f) = \{\alpha = (2z - t, 4t - 3z, z, t) = z(2, -3, 1, 0) + t(-1, 4, 0, 1) \mid z, t \in \mathbf{R}\}$.

Như vậy $\mathrm{Ker}(f) = \langle D \rangle$ với $D = \{\delta_1 = (2,-3,1,0), \delta_2 = (-1,4,0,1)\}$ *độc lập tuyến tính*. Do đó $\mathrm{Ker}(f)$ có *một cơ sở* là $D = \{\delta_1, \delta_2\}$ và $\dim\mathrm{Ker}(f) = |D| = 2$.

1.8/ MỆNH ĐỀ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó

$\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathbf{R}^n = n$.

$\dim\mathrm{Ker}(f)$ được gọi là *số khuyết* của f và $\dim\mathrm{Im}(f)$ được gọi là *hạng* của f.



Ví dụ: Xét lại *ánh xạ tuyến tính* f trong **Ví dụ** (**1.6**) và (**1.7**).

Ta có $\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim\mathbf{R}^4$.

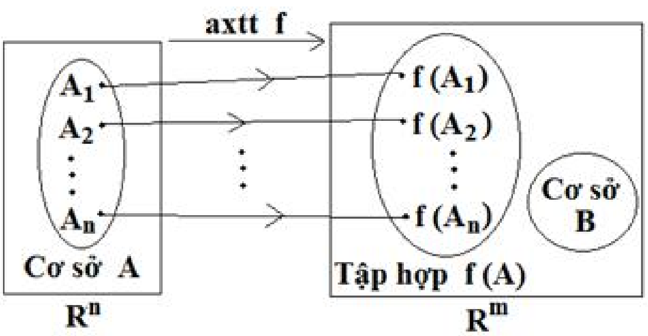
II. MA TRẬN BIỂU DIỄN ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ với $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ lần lượt có *các cơ sở* là

$A = \{\alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_2, \ldots, \alpha_n \equiv A_n\}$ và $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$.

a) Đặt $[f]_{A,B} = ([f(\alpha_1)]_B \ [f(\alpha_2)]_B \ \ldots \ [f(\alpha_n)]_B) \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Ta nói $[f]_{A,B}$ là *ma trận biểu diễn* của *ánh xạ tuyến tính* f theo *cặp cơ sở* A (của $\mathbf{R}^n$) và B (của $\mathbf{R}^m$).



Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*

$$[\,f\,]_{A,\,B} = (\,[\,f\,(\alpha_1)\,]_B \;\; [\,f\,(\alpha_2)\,]_B \,\ldots\, [\,f\,(\alpha_n)\,]_B\,) \quad (1).$$

b) $\forall\alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[\,f\,(\alpha)\,]_B = [\,f\,]_{A,\,B}\,[\,\alpha\,]_A$ (2).

Như vậy khi biết $[\,f\,]_{A,\,B}$ thì ta *xác định được biểu thức* của f theo (2).

(từ $[\,f\,(\alpha)\,]_B$ ta sẽ *tính được ngay* $f\,(\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) Nếu A và B lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ thì $[\,f\,]_{A,\,B}$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f . Biểu thức của f và *ma trận chính tắc* của f có thể *suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng*.

Ví dụ:

a) $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ với $f\,(u, v, w) = (-3u + 4v - w,\ 2u + v + 3w)$, $\forall(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{\,\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\,\}$ và B lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$.

Ta có $f\,(\varepsilon_1) = f\,(1, 0, 0) = (-3, 2)$, $f\,(\varepsilon_2) = f\,(0, 1, 0) = (4, 1)$ và $f\,(\varepsilon_3) = f\,(0, 0, 1) = (-1, 3)$ nên có ngay *ma trận chính tắc*

$$[\,f\,]_{A,\,B} = (\,[\,f\,(\varepsilon_1)\,]_B \;\; [\,f\,(\varepsilon_2)\,]_B \;\; [\,f\,(\varepsilon_3)\,]_B\,) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbf{R}).$$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có *ma trận chính tắc* $[\,g\,]_{B,\,A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbf{R})$.

với B và A lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$.

$$\forall\alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ [\,g(\alpha)\,]_A = [\,g\,]_{B,\,A}\,[\,\alpha\,]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 5x \\ 7x - y \\ 4x + 9y \end{pmatrix}.$$

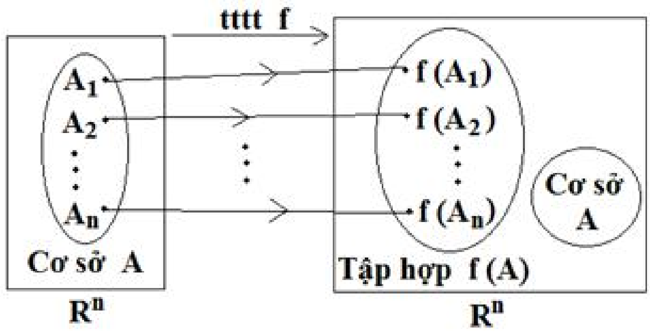
Từ đó *suy ra* $\forall\alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x, y) = (-5x + 2y,\ 7x - y,\ 4x + 9y)$.

2.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$.

$\mathbf{R}^n$ có *một cơ sở* là $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\,\}$.

a) Đặt $[f]_A = [f]_{A,A} = ([f(\alpha_1)]_A \; [f(\alpha_2)]_A \ldots [f(\alpha_n)]_A) \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta nói $[f]_A$ là *ma trận biểu diễn* của *toán tử tuyến tính* f theo *cơ sở* A.



Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*

$$[f]_A = ([f(\alpha_1)]_A \; [f(\alpha_2)]_A \ldots [f(\alpha_n)]_A) \quad (1).$$

b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[f(\alpha)]_A = [f]_A [\alpha]_A$ (2).

Như vậy khi biết $[f]_A$ thì ta *xác định được biểu thức* của f theo (2).

(từ $[f(\alpha)]_A$ ta *tính được ngay* $f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) Nếu A là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ thì $[f]_A$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f. *Biểu thức* của f và *ma trận chính tắc* của f có thể *suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng.*

Ví dụ:

a) $f(u, v, w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w), \forall (u,v,w) \in \mathbf{R}^3$ và $f \in L(\mathbf{R}^3)$.

$A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$. Ta có $f(\varepsilon_1) = f(1,0,0) = (2,-1,1)$, $f(\varepsilon_2) = f(0,1,0) = (-1, 3, 2)$ và $f(\varepsilon_3) = f(0, 0,1) = (0, 1, -1)$ nên có ngay *ma trận chính tắc* $[f]_A = ([f(\varepsilon_1)]_A \; [f(\varepsilon_2)]_A \; [f(\varepsilon_3)]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2)$ có *ma trận chính tắc* $[g]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ [B là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^2$].

$\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $[\, g(\alpha)\,]_B = [\, g\,]_B\, [\, \alpha\,]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x-4y \\ -2x+9y \end{pmatrix}$.

Từ đó *suy ra ngay* $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x, y) = (7x - 4y, -2x + 9y)$.

2.3/ CÔNG THỨC THAY ĐỔI CƠ SỞ TRONG MA TRẬN BIỂU DIỄN:

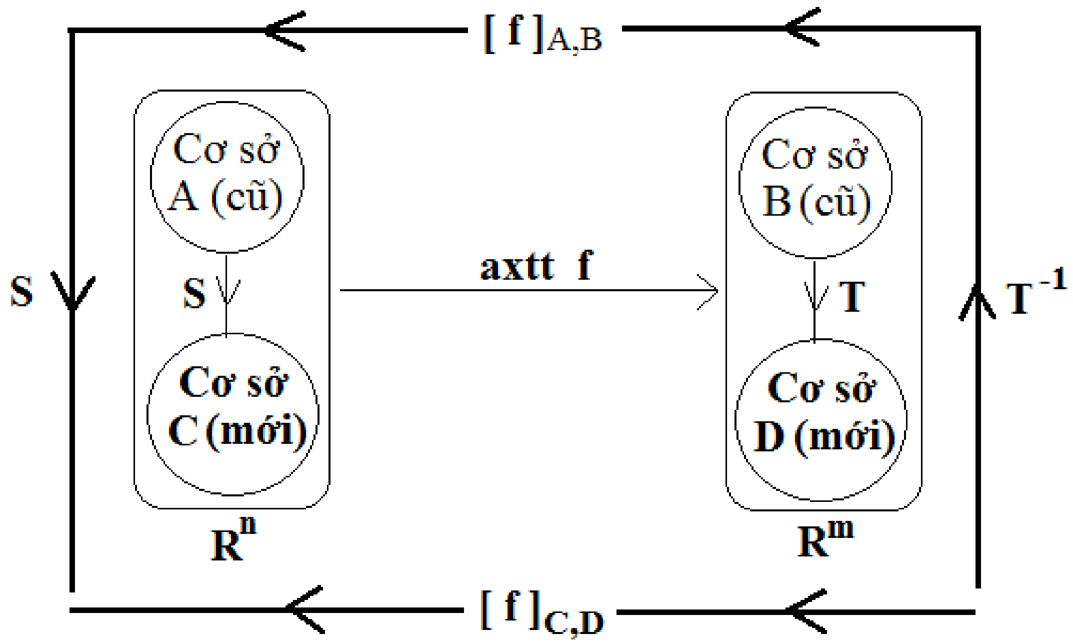
Cho $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

$\mathbf{R}^n$ có *các cơ sở* lần lượt là A (***cũ***) và C (***mới***) với $S = (A \to C) \in M_n(\mathbf{R})$.

$\mathbf{R}^m$ có *các cơ sở* lần lượt là B (***cũ***) và D (***mới***) với $T = (B \to D) \in M_m(\mathbf{R})$.

a) Ta có *công thức* $[\, f\,]_{C,D} = T^{-1}.[\, f\,]_{A,B}.S$ (***mới*** tính theo ***cũ***) [1]

và do đó $[\, f\,]_{A,B} = T.[\, f\,]_{C,D}.S^{-1}$ (***cũ*** tính theo ***mới***). [2]



b) Suy ra *các trường hợp* ***mới*** tính theo ***cũ***:

$[\, f\,]_{C,B} = [\, f\,]_{A,B}.S$ [lúc này $T = (B \to B) = I_m$ và $T^{-1} = I_m$].

$[\, f\,]_{A,D} = T^{-1}.[\, f\,]_{A,B}$ [lúc này $S = (A \to A) = I_n$].

$[\, f\,]_{C,D} = [\, f\,]_{A,D}.S$ [lúc này $T = (D \to D) = I_m$ và $T^{-1} = I_m$].

$[\, f\,]_{C,D} = T^{-1}.[\, f\,]_{C,B}$ [lúc này $S = (C \to C) = I_n$].

c) Suy ra $[\, f\,]_{A,B} = [\, f\,]_{C,B}.S^{-1}$, $[\, f\,]_{A,B} = T.[\, f\,]_{A,D}$ (***cũ*** tính theo ***mới***).

$[\, f\,]_{A,D} = [\, f\,]_{C,D}.S^{-1}$ và $[\, f\,]_{C,B} = T.[\, f\,]_{C,D}$ (***cũ*** tính theo ***mới***).

d) Tính $[\,f\,]_{C,B}$ và $[\,f\,]_{A,D}$ theo lẫn nhau (không có sự phân định ***cũ*** và ***mới***)

bằng cách dựa vào $[\,f\,]_{A,B}$ *hay* $[\,f\,]_{C,D}$ như sau:

$[\,f\,]_{C,B} = [\,f\,]_{A,B}.S = T.[\,f\,]_{A,D}.S$ *hay* $[\,f\,]_{C,B} = T.\,[\,f\,]_{C,D} = T.[\,f\,]_{A,D}.S$

$[\,f\,]_{A,D} = T^{-1}.[\,f\,]_{A,B} = T^{-1}.[\,f\,]_{C,B}.S^{-1}$ *hay* $[\,f\,]_{A,D} = [\,f\,]_{C,D}.S^{-1} = T^{-1}.[\,f\,]_{C,B}.S^{-1}$

<u>Ghi chú</u>:

a) Nếu A và B lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ thì dễ dàng *có được ngay* S và T.

b) Nhận xét từ *các công thức* ở các phần a), b) và c):

* *Ma trận* ứng với *cặp cơ sở của không gian phía trước* luôn luôn *ở phía sau* của *vế phải*.

* *Ma trận* ứng với *cặp cơ sở của không gian phía sau* luôn luôn *ở phía trước* của *vế phải*.

* Trường hợp ***mới*** tính theo ***cũ***, *nghịch đảo* (– 1) chỉ *xuất hiện* ở *ma trận đổi cơ sở đứng phía trước* của *vế phải*.

* Trường hợp ***cũ*** tính theo ***mới***, *nghịch đảo* (– 1) chỉ *xuất hiện* ở *ma trận đổi cơ sở đứng phía sau* của *vế phải*.

c) Nhận xét từ *các công thức* ở các phần a), b) và c):

* Khi có *sự thay đổi cặp cơ sở của không gian phía trước* lẫn *cặp cơ sở của không gian phía sau* thì ở *vế phải*, *các ma trận đổi cơ sở* xuất hiện *ở cả hai phía*.

* Khi chỉ có *sự thay đổi cặp cơ sở của không gian phía trước* thì ở *vế phải*, *ma trận đổi cơ sở* xuất hiện *ở phía sau*.

* Khi chỉ có *sự thay đổi cặp cơ sở của không gian phía sau* thì ở *vế phải*, *ma trận đổi cơ sở* xuất hiện *ở phía trước*.

Ví dụ:

a) $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ có $f(u, v, w) = (-3u + 4v - w, 2u + v + 3w), \forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ và B lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$.

Ta có *ma trận chính tắc* $[f]_{A,B} = ([f(\varepsilon_1)]_B \; [f(\varepsilon_2)]_B \; [f(\varepsilon_3)]_B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cho *các cơ sở* của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$ lần lượt là

$C = \{\gamma_1 = (1,2,4), \gamma_2 = (5,1,2), \gamma_3 = (3,-1,1)\}$ và $D = \{\delta_1 = (7,-2), \delta_2 = (4,-1)\}$

Ta có $S = (A \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $T = (B \to D) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ có $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Từ đó $[f]_{C,D} = T^{-1}[f]_{A,B}\,S = \begin{pmatrix} -65 & -55 & -18 \\ 114 & 93 & 28 \end{pmatrix}$,

$[f]_{C,B} = [f]_{A,B}\,S = \begin{pmatrix} 1 & -13 & -14 \\ 16 & 17 & 8 \end{pmatrix}$ và $[f]_{A,D} = T^{-1}[f]_{A,B} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -11 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix}$.

b) Xét $h \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có $[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với A, B, C, D, S và T được hiểu

như trên. Ta có *ma trận chính tắc* $[h]_{B,A} = S[h]_{D,C}\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 56 \\ 3 & 10 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall \alpha = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $h(\alpha) = h(x, y) = (14x + 56y, 3x + 10y, 9x + 29y)$.

Hơn nữa $[h]_{B,C} = [h]_{D,C}\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $[h]_{D,A} = S[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2.4/ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$, $n = m$, $A \equiv B$, $C \equiv D$ và $S \equiv T$.

$\mathbf{R}^n$ có *các cơ sở* lần lượt là A (***cũ***) và C (***mới***) với $S = (A \to C) \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có *công thức* $[f]_C = S^{-1}.[f]_A.S$ (***mới*** tính theo ***cũ***)

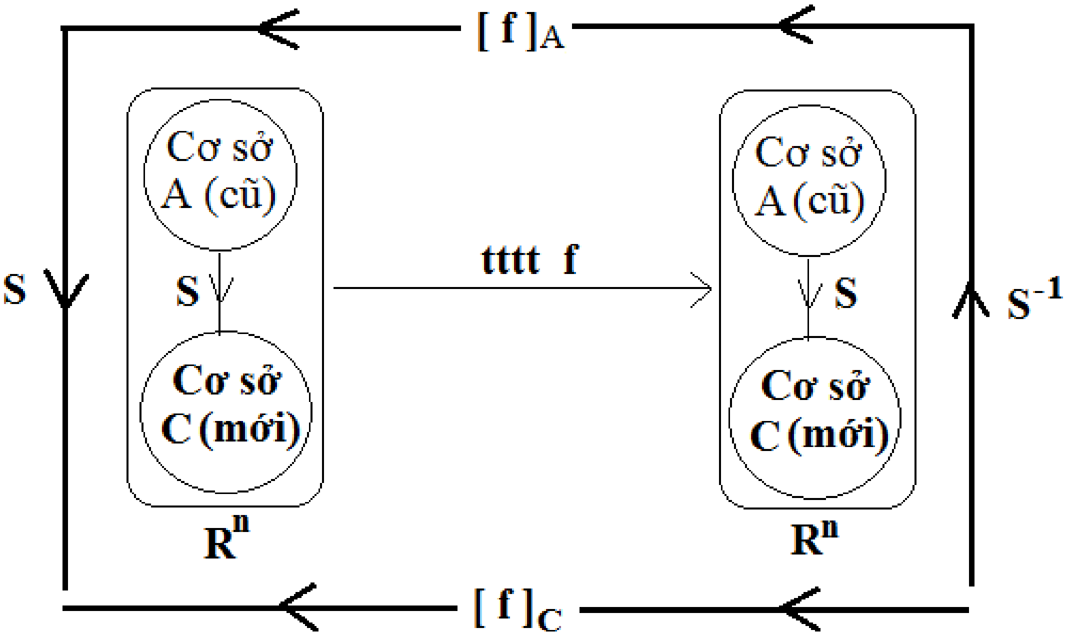
và do đó $[f]_A = S.[f]_C.S^{-1}$ (***cũ*** tính theo ***mới***).

b) Suy ra *các trường hợp* ***mới*** tính theo ***cũ***:

$[f]_{C,A} = [f]_A.S$, $[f]_{A,C} = S^{-1}.[f]_A$, $[f]_C = [f]_{A,C}.S$, $[f]_C = S^{-1}.[f]_{C,A}$

c) Suy ra *các trường hợp* ***cũ*** tính theo ***mới***:

$[f]_A = [f]_{C,A}.S^{-1}$, $[f]_A = S.[f]_{A,C}$, $[f]_{A,C} = [f]_C.S^{-1}$ và $[f]_{C,A} = S.[f]_C$



Ghi chú : Nếu A là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ thì dễ dàng *có được ngay* S.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3)$ với

$$f(u, v, w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w), \ \forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3.$$

Cho $A = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$.

Ta có *ma trận chính tắc* $[\,f\,]_A = ([\,f(\varepsilon_1)\,]_A \ [\,f(\varepsilon_2)\,]_A \ [\,f(\varepsilon_3)\,]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Cho $C = \{ \gamma_1 = (1, -2, 2), \gamma_2 = (2, 0, 1), \gamma_3 = (2, -3, 3) \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^3$

với $S = (A \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ qua *các phép biến đổi*

$$(S \mid \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) = (\mathbf{I}_3 \mid S^{-1}). \text{ Ta có } [\,f\,]_C = S^{-1}.[\,f\,]_A.S = \begin{pmatrix} -62 & -10 & -95 \\ -10 & 0 & -15 \\ 43 & 7 & 66 \end{pmatrix},$$

$$[\,f\,]_{C,\,A} = [\,f\,]_A.S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -5 & -1 & -8 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad [\,f\,]_{A,\,C} = S^{-1}.[\,f\,]_A = \begin{pmatrix} -4 & 27 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -19 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $h \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[\,h\,]_C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 21 \\ 2 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & -14 \end{pmatrix}$ với A, C, S và S^{-1} được hiểu như trên. Ta có *ma trận chính tắc* $[\,h\,]_A = S.[\,h\,]_C.S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall \alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $h(\alpha) = h(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$.

Ta có $[\,h\,]_{A,\,C} = [\,h\,]_C.S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ và $[\,h\,]_{C,\,A} = S.[\,h\,]_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

III. XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TỪ ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ :

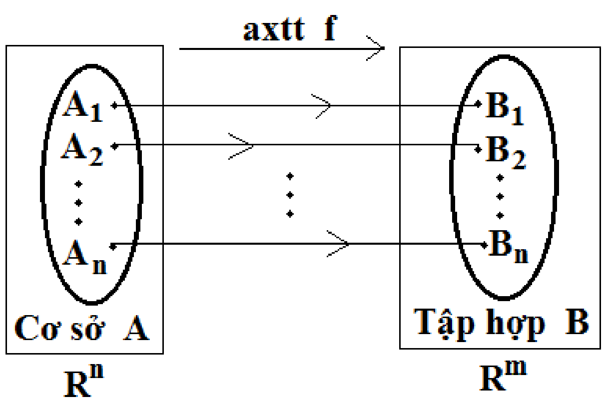
3.1/ MỆNH ĐỀ: Giả sử $\mathbf{R}^n$ có *một cơ sở* là $A = \{\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \,\}$.

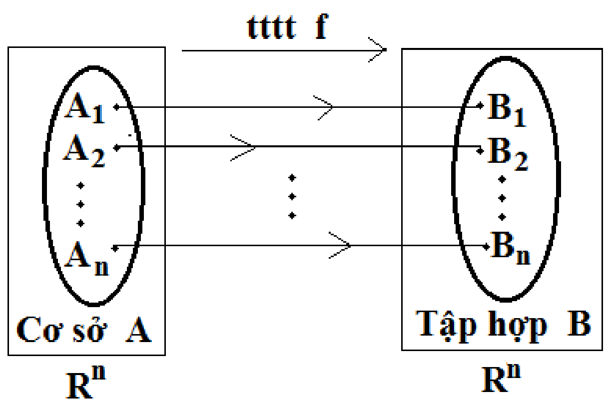
Cho $f, g \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó $f = g \;\Leftrightarrow\; \forall j \in \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}, f(\alpha_j) = g(\alpha_j)$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: Giả sử $\mathbf{R}^n$ có *một cơ sở* là $A = \{\, \alpha_1 \equiv A_1, \alpha_2 \equiv A_2, \ldots, \alpha_n \equiv A_n \}$.

Chọn tùy ý $\beta_1 \equiv B_1, \beta_2 \equiv B_2, \ldots, \beta_n \equiv B_n \in \mathbf{R}^m$.

Khi đó *có duy nhất* $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ thỏa $f(\alpha_j) = \beta_j, \forall j \in \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}$.





3.3/ XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TỪ ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ:

Ta trình bày *cách xác định ánh xạ tuyến tính* f trong **(3.2)**.

a) ***Cách 1***: dùng *tọa độ vector* theo *cơ sở*.

$\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, tìm $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ để *được biểu diễn* $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$.

Suy ra $f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + \cdots + c_n f(\alpha_n)$

$= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n$.

b) ***Cách 2***: dùng *ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính*.

* *Trường hợp* $n \neq m$:

Gọi C và D lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ với $S = (C \to A)$.

Viết $[\,f\,]_{A,D} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_D\ \ [\,f(\alpha_2)\,]_D \ldots [\,f(\alpha_n)\,]_D\,) = (\beta_1^t\ \ \beta_2^t\ \ldots\ \beta_n^t)$. Ta có

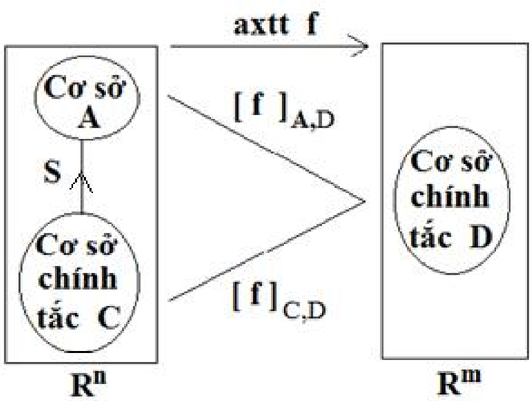
ma trận chính tắc $[\,f\,]_{C,D} = [\,f\,]_{A,D}\,.\,S^{-1}$. Từ đó *suy ra ngay* $f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$

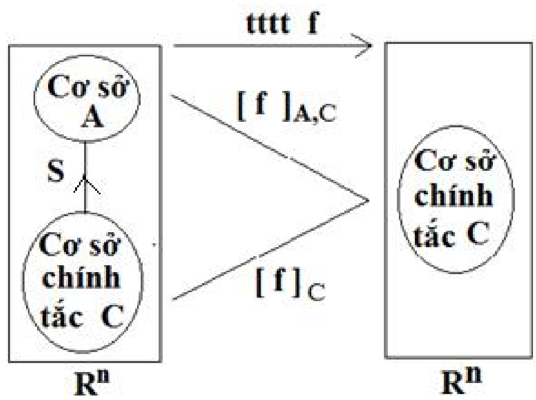
* *Trường hợp* $n = m$: $f \in L(\mathbf{R}^n)$, $C \equiv D$ và $[\,f\,]_{C,D} \equiv [\,f\,]_C$.

Gọi C là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ với $S = (\,C \to A\,)$.

Viết $[\,f\,]_{A,C} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_C\ \ [\,f(\alpha_2)\,]_C \ldots [\,f(\alpha_n)\,]_C\,) = (\beta_1^t\ \ \beta_2^t\ \ldots\ \beta_n^t)$. Ta có

ma trận chính tắc $[\,f\,]_C = [\,f\,]_{A,C}\,.\,S^{-1}$. Từ đó *suy ra ngay* $f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$





Ví dụ:

$\mathbf{R}^3$ có *cơ sở* $A = \{\, \alpha_1 = (1, -1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (3, -1, 2) \,\}$.

a) Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ thỏa $f(\alpha_1) = \beta_1 = (3, 0, -1, 2)$,

$f(\alpha_2) = \beta_2 = (1, -2, 4, 0)$ và $f(\alpha_3) = \beta_3 = (-4, 1, 0, 3)$.

b) Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3)$ thỏa

$g(\alpha_1) = \gamma_1 = (-2, 1, 3)$, $g(\alpha_2) = \gamma_2 = (-3, 2, 1)$ và $g(\alpha_3) = \gamma_3 = (-7, 5, 3)$.

Cách 1: $\forall\alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, tìm $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-x-y \\ y+2z-x \\ x-z \end{pmatrix}$ bằng cách

giải hệ $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \alpha : (\alpha_1^t\ \ \alpha_2^t\ \ \alpha_3^t \mid \alpha^t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & y+z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & -y \\ 0 & 1^* & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 1^* & 0 & y+2z-x \\ 0 & 0 & 1^* & x-z \end{array}\right) \end{array}$$

Từ đó $f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + c_3 f(\alpha_3)$

$= (z - x - y)(3, 0, -1, 2) + (y + 2z - x)(1, -2, 4, 0) + (x - z)(-4, 1, 0, -3)$

$= (-8x - 2y + 9z, 3x - 2y - 5z, -3x + 5y + 7z, -5x - 2y + 5z)$.

và $g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 g(\alpha_1) + c_2 g(\alpha_2) + c_3 g(\alpha_3)$

$= (z - x - y)(-2, 1, 3) + (y + 2z - x)(-3, 2, 1) + (x - z)(-7, 5, 3)$

$= (-2x - y - z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$.

Cách 2 : Gọi C và D lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ với

$S = (\,C \to A\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qua *các phép biến đổi*

$$(S \mid \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = (\,\mathbf{I}_3 \mid S^{-1}).$$

Viết $[\,f\,]_{A,D} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_D\ \ [\,f(\alpha_2)\,]_D\ \ [\,f(\alpha_3)\,]_D\,) = (\,[\,\beta_1\,]_D\ \ [\,\beta_2\,]_D\ \ [\,\beta_3\,]_D\,)$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ và ta có *ma trận chính tắc* $[\ f\ ]_{C,\ D} = [\ f\ ]_{A,\ D} . S^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 9 \\ 3 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall\alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$f(\alpha) = f(x, y, z) = (-8x - 2y + 9z, 3x - 2y - 5z, -3x + 5y + 7z, -5x - 2y + 5z)$$

Viết $[\ g\ ]_{A,\ C} = (\ [\ g(\alpha_1)\ ]_C\ \ [\ g(\alpha_2)\ ]_C\ \ [\ g(\alpha_3)\ ]_C\ ) = (\ [\ \gamma_1\ ]_C\ \ [\ \gamma_2\ ]_C\ \ [\ \gamma_3\ ]_C\ )$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ và ta có *ma trận chính tắc* $[\ g\ ]_C = [\ g\ ]_{A,\ C} . S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Suy ra

$\forall\alpha = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $g(\alpha) = g(x, y, z) = (-2x - y - z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$.
