Chương 2. ĐỊNH THỨC

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

2.1 Định thức của ma trận

Cho A là ma trận vuông. Khi đó:

- det(A): Tính định thức của A.
- adj(A) hay adjoint(A): Tìm ma trận phụ hợp của A.
- minor(A, i, j): Xác định ma trận có được từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j.

> A := matrix(3, 3, [-1, 2, -1, -2, 3, -5, -4, 5, 2]);

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> det(A);

$$15$$

> adj(A); # Ma trận phụ hợp của A

$$\begin{bmatrix} 31 & -9 & -7 \\ 24 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

> minor(A, 2, 3); # Xóa dòng 2 và cột 3

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

- col(A, i): Vectơ cột thứ i của ma trận A.
- col(A, i..k): Ma trận được tạo bởi vectơ cột thứ i đến thứ k của ma trận A.
- concat(A, B, . . .): Nối hai hay nhiều ma trận, vectơ có cùng số dòng dòng.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0; \\ -2x_1 & + & (m-2)x_2 & + & (m-5)x_3 & = & 2; \\ mx_1 & + & x_2 & + & (m+1)x_3 & = & -2. \end{array}\right.$$

```
> A:=matrix(3, 3, [1, 2, 2, -2, m-2, m-5, m, 1, m+1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{bmatrix}$$

```
> b := [0, 2, -2];
```

$$[0\ 2\ \ -2]$$

```
> dtA:= det(A);
```

$$dtA := m^2 - 4\,m + 3$$

```
> A1 := concat(b, col(A,2..3)):  dt1:= det(A1);
```

$$dt1 := -4m + 12$$

```
> A2:= concat(col(A,1), b, col(A,3)): dt2 := det(A2);
```

$$dt2 := 0$$

```
> A3:= concat(col(A,1.. 2), b):  dt3:= det(A3);
```

$$dt3 := 2m - 6$$

Từ kết quả tính toán trên ta có:

i) Nếu $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1},\, 0,\, \frac{2}{m-1}\right).$$

ii) Nếu $|A| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array} \right.$ thì:

- Với $m = 1$ ta có $|A_1| = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$ ta có $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$. Khi đó

```
> A:=matrix(3, 3, [1, 2, 2, -2, 1, -2, 3, 1, 4]):   b:= [0, 2, -2]:
> linsolve(A, b);
```

$$[\ 3\_t_1 - 2\ \ \_t_1\ \ \frac{-5}{2}\_t_1 + 1\ ]$$

Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2,\, t,\, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

▷ **Bài tập thực hành** - Không sử dụng các hàm của MAPLE

Xem ma trận vuông A như là mảng hai chiều, hãy viết các chương trình để:

- tính định thức của A.
- tìm ma trận phụ hợp của A.
- tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có).

Phần II. Bài tập

Bài 2.1 Tính các định thức cấp hai sau.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Bài 2.2 Tính các định thức cấp ba sau.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Bài 2.3 Tính các định thức cấp bốn sau.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Bài 2.4 Tính các định thức cấp n sau:

a) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \dots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \dots & x_2y_n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \dots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$;

Bài 2.5 Giả sử $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$. Hãy tính theo α các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$. f) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

Bài 2.6 Tìm các giá trị của x để các định thức sau bằng 0.

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 8x+13 \end{vmatrix}$.

Bài 2.7 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng:

a) $\det(AB) = \det(BA)$.

b) Nếu B khả nghịch thì $\det(B^{-1}AB) = \det A$.

Bài 2.8 Tìm ma trận phụ hợp (hay ma trận phó) của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.9 Tìm nghịch đảo của các ma trận trong Bài tập 2.8 bằng cách áp dụng công thức định thức.

Bài 2.10 Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó:

a) $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 2.11 Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $\det A \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

Bài 2.12 Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

a) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 = 12. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Bài 2.13 Giải và biện luận (theo tham số m) các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (m-3)x + 2y = m+3 \\ -(2m+1)x + (m+2)y = 6. \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3, \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - mx_3 = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1; \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m; \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m, \end{cases}$

f) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m; \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m; \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m, \end{cases}$

Bài 2.14 Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số a, b

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.