

# Chương 6. QUAN HỆ

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để giải phương trình hay hệ phương trình trong  $\mathbb{Z}_n$  ta sử dụng `msolve(eqns, n)`, trong đó `eqns` là phương trình hoặc tập hợp các phương trình.

**Ví dụ.** Giải phương trình  $2\bar{x} + \bar{3} = \bar{5}$  trong  $\mathbb{Z}_7$ .

```
> msolve(2*x+3=5, 7);  
  
{x = 1}
```

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2\bar{x} + 3\bar{y} = \bar{5}, \\ \bar{x} - 2\bar{y} = \bar{4} \end{cases}$  trong  $\mathbb{Z}_{11}$ .

```
> msolve({2*x+3*y=5, x-2*y=4}, 11);  
  
{x = 0, y = 9}
```

## Phần II. Bài tập

**Bài 6.1** Cho  $\mathcal{R}$  là quan hệ trên  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Hãy xét  $\mathcal{R}$  có những tính chất nào?

- a)  $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- b)  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- c)  $\mathcal{R} = \{(2, 4), (4, 2)\}$
- d)  $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- e)  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- f)  $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

**Bài 6.2** Cho  $\mathcal{R}$  là một quan hệ trên  $S$ . Hãy viết tập hợp  $\mathcal{R}$ , ma trận biểu diễn và xét các tính chất của  $\mathcal{R}$  nếu

- a)  $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1.$
- b)  $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2.$
- c)  $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3x + y \leq 5.$
- d)  $S = \{0, 1, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \geq 4.$
- e)  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y \text{ hay } x + 2y = 4).$
- f)  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x + 2) \mid y.$

**Bài 6.3** Xét các tính chất của quan hệ  $\mathcal{R}$  trên  $S$  nếu

- a)  $S = \mathbb{Z}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y^2.$

- b)  $S = \mathbb{Z}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y$  không chia hết  $x^2$ .
- c)  $S = \mathbb{Q}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = |y|$ .
- d)  $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \forall (x, u), (y, v) \in S : (x, u)\mathcal{R}(y, v) \Leftrightarrow x \leq y$ .
- e)  $S = \mathbb{R}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \neq y$ .
- f)  $S = \mathbb{R}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = 2^y$  (để ý  $2^t > t, \forall t \in \mathbb{R}$ ).

**Bài 6.4** Kiểm chứng  $\mathcal{R}$  là một quan hệ tương đương trên  $S$  rồi viết các lớp tương đương và tập thương tương ứng:

- a)  $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$ .
- b)  $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 + 3y = y^3 + 3x$ .
- c)  $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2^k y$  ( $k$  phụ thuộc  $x$  và  $y$ ).
- d)  $S = \{-11\pi/6, -\pi, -4\pi/5, -\pi/4, -\pi/5, -\pi/7, 0, \pi/6, \pi/3, 5\pi/6, \pi, 5\pi/4, 3\pi\},$

$$\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \cos(y + 2 - 1.7\pi).$$

- e)  $S = P(E)$  với  $E = \{1, 2, 3\}, \forall X, Y \in S : X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$  trong đó  $A = \{1, 2\}$ .

**Bài 6.5** Kiểm chứng  $\mathcal{R}$  là một quan hệ tương đương trên  $S = \mathbb{R}$  và xác định lớp tương đương  $[a]$  của  $a \in \mathbb{R}$  tương ứng (biện luận theo tham số thực  $a$ )

- a)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$
- b)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y)$
- c)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 \pm 12y = y^3 \pm 12x$  (xét riêng hai trường hợp  $+$  và  $-$ )
- d)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2y + 7x = xy^2 + 7y$
- e)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 4x + xy^2 = x^2y + 4y$
- f)  $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sin(xy)\cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin(xy)\cos^2 x$

**Bài 6.6** Cho  $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

- a) Viết tập hợp  $\mathcal{R}$  nếu  $\mathcal{R}$  là quan hệ tương đương trên  $S$  có 3 lớp tương đương là  $\{a, d, f\}, \{c, e\}$  và  $\{b\}$ .
- b) Trên  $S$  có bao nhiêu quan hệ tương đương chia  $S$  thành 3 lớp tương đương có số phần tử của các lớp lần lượt là 3, 2, 1 (tương tự như quan hệ tương đương  $\mathcal{R}$ )?
- c) Trên  $S$  có bao nhiêu quan hệ tương đương chia  $S$  thành 3 lớp tương đương?

**Bài 6.7** Kiểm chứng  $\mathcal{R}$  là một quan hệ thứ tự trên  $S$ . Hỏi  $\mathcal{R}$  là thứ tự toàn phần hay bán phần? Tại sao? Vẽ sơ đồ Hasse cho  $(S, \mathcal{R})$  và tìm min, max và các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có):

- a)  $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$
- b)  $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

- c)  $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \dot{\vdash} y$
- d)  $S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 24, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \dot{\vdash} y$
- e)  $S = \{96, 768, 6, 48, 384, 3, 24\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = 2^k x$  ( $k$  phụ thuộc theo  $x$  và  $y$ )
- f)  $S = \{2, 3, \dots, 11, 12\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [(x \text{ lẻ và } y \text{ chẵn}) \text{ hay } (x - y \text{ chẵn và } x \leq y)]$

**Bài 6.8** Cho  $S = \{a = 2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq 3 \text{ và } n \leq 2\}$  với các quan hệ thứ tự  $|$  và  $\dot{\vdash}$ .

- a) Vẽ sơ đồ Hasse và tìm min, max cho  $(S, |)$  và  $(S, \dot{\vdash})$ .
- b) Đặt  $T = S \setminus \{1, 2, 72\}$ . Vẽ sơ đồ Hasse rồi tìm các phần tử tối tiểu và tối đại của  $(T, |)$  và  $(T, \dot{\vdash})$ .

**Bài 6.9** Cho  $S = \{a, b, c\}$  với quan hệ thứ tự  $\prec$ . Giả sử  $a$  là một phần tử tối tiểu và  $c$  là một phần tử tối đại của  $(S, \prec)$

- a) Vẽ tất cả các trường hợp khác nhau có thể xảy ra cho sơ đồ Hasse của  $(S, \prec)$ .
- b) Yêu cầu như a) nhưng có thêm điều kiện " $b$  cũng là một phần tử tối đại của  $(S, \prec)$ "

**Bài 6.10** Vẽ sơ đồ Hasse cho  $(S, \prec)$  rồi toàn phần hóa (sắp xếp topo) các thứ tự bán phần  $\prec$  sau:

- a)  $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  với  $d \prec a, b \prec e, g \prec e, h \prec f, i \prec e$  và  $h \prec d$ .
- b)  $S = \{1, 2, 4, 5, 12, 15, 20\}$  với  $\prec$  là quan hệ  $|$ .
- c)  $S = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16\}$  với  $\prec$  là quan hệ  $\dot{\vdash}$ .
- d)  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  với  $\prec$  là quan hệ  $|$ .

**Bài 6.11** Viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn trong  $\mathbb{Z}_n$  ( $n = 25$  và  $38$ ):

- |                         |                           |                              |
|-------------------------|---------------------------|------------------------------|
| a) $\overline{\pm 95}$  | c) $\overline{\pm 5124}$  | e) $\overline{\pm 815691}$   |
| b) $\overline{\pm 378}$ | d) $\overline{\pm 68047}$ | f) $\overline{\pm 23242423}$ |

**Bài 6.12** Làm các phép tính sau rồi viết kết quả dưới dạng chuẩn trong  $\mathbb{Z}_n$  ( $n = 28$  và  $43$ ):

- |   |   |  |                              |
|---|---|--|------------------------------|
| a) $\overline{52} \pm \overline{-94}$   | c) $\overline{-341} \pm \overline{926}$   | e) $\overline{-7083} \pm \overline{-8646}$ | g) $7 \cdot \overline{9245}$ |
| b) $\overline{52} \cdot \overline{-94}$ | d) $\overline{-341} \cdot \overline{926}$ | f) $\overline{7083} \cdot \overline{8646}$ | h) $\overline{9245}^2$       |

**Bài 6.13** Trong  $\mathbb{Z}_{26}$  và  $\mathbb{Z}_{60}$ , hãy xác định tất cả các phần tử khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

**Bài 6.14** Giải các phương trình sau trong  $\mathbb{Z}_n$  tương ứng:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\overline{3x} = \overline{7} \ (n = 16)$                                      | d) $\overline{3x} + \overline{9} = \overline{8x} + \overline{61} \ (n = 64)$ |
| b) $\overline{41x} - \overline{51} = \overline{-19x} + \overline{24} \ (n = 105)$ | e) $\overline{21x} + \overline{24} = \overline{108} \ (n = 63)$              |
| c) $\overline{78x} - \overline{13} = \overline{35} \ (n = 666)$                   | f) $\overline{5x} + \overline{7} = \overline{6} \ (n = 23)$                  |

$$\text{g) } \overline{68}(\overline{x} + \overline{24}) = \overline{102} \ (n = 492)$$

$$\text{h) } \overline{4x} + \overline{3} = \overline{7x} + \overline{12} \ (n = 11)$$

**Bài 6.15** Giải các hệ phương trình sau trong  $\mathbb{Z}_n$  tương ứng :

$$\text{a) } \begin{cases} \overline{3x} + \overline{2y} = \overline{1} \\ \overline{2x} - \overline{5y} = \overline{-3} \end{cases} \ (n = 7)$$

$$\text{c) } \begin{cases} \overline{5x} - \overline{3y} = \overline{3} \\ \overline{-4x} + \overline{5y} = \overline{-4} \end{cases} \ (n = 6)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \overline{4x} + \overline{y} = \overline{-2} \\ \overline{7x} + \overline{3y} = \overline{7} \end{cases} \ (n = 8)$$

$$\text{d) } \begin{cases} \overline{x} + \overline{2z} = \overline{1} \\ \overline{y} + \overline{2z} = \overline{2} \\ \overline{z} + \overline{2x} = \overline{1} \end{cases} \ (n = 3 \text{ và } 5)$$