실습 보고서

[실습번호: 06]

[실습제목: 6 장 벡터/vector 파트 1]

과 목 명	선형대수
교 수 명	이 선 우
학 번	20237107
작 성 자	하 태 영
제 출 일	2025.11.03

한림대학교

가. 6 장 연습문제 풀기

(1) 복습하기

정의 6-8 벡터공간

공집합이 아닌 임의의 집합 V에 합(+) 연산, 스칼라 배(·) 연산이 정의되어 있다고 하자. 임의의 벡터 u, v, w와 스칼라 α, β에 대하여, 다음 성질을 만족하는 집합 V를 주어진 연산에 대한 벡터공간(vector Space)이라 한다.

(1) $u, v \in V$이면, $u+v \in V$이다.

(2) $\alpha u \in V$

(3) $u + v = v + u$

(4) $u + (v + w) = (u + v) + w$

(5) $u + 0 = u$인 영벡터 0가 V에 단 하나 존재한다.

(6) V의 모든 벡터 u에 대해, $u + (-u) = 0$를 만족하는 $-u$가 존재한다. (벡터 합에 대한 역원)

(7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

(8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

(9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

(10) $1u = u$

정의 6-13 선형종속과 선형독립

벡터공간 V의 원소인 벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$과 적어도 하나는 0이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \cdots, c_n$에 대해 다음 식이 성립하면,

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$

$v_1, v_2, \cdots, v_n$은 선형종속(linearly dependent) 또는 일차종속이라 한다. 즉, 한 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현할 수 있으면, 이들 벡터는 선형종속이다. 한편,

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$

을 만족하는 스칼라가 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$뿐이라면, $v_1, v_2, \cdots, v_n$은 선형독립(linearly independent) 또는 일차독립이라 한다.

정의 6-17 벡터공간의 차원

벡터공간 V의 기저에 있는 벡터의 개수를 벡터공간의 차원(dimension)이라 하고, $\dim(V)$로 표기한다.

3. 벡터 $u=(1,-2,3)$, $v=(-2,5,3)$, $w=(4,2,7)$에 대해 다음 벡터를 구하라.

(a) $3u+2v = 3(1,-2,3)+2(-2,5,3) = (3-4,\ -6+10,\ 9+6) = \underline{(-1,4,15)}$

(b) $-4u+2v+3w = -4(1,-2,3)+2(-2,5,3)+3(4,2,7) = (-4-4+12,\ 8+10+6,\ -12+6+21) = \underline{(4,24,15)}$

(c) $5u-4w = 5(1,-2,3)-4(4,2,7) = (5-16,\ -10-8,\ 15-28) = \underline{(-11,-18,-13)}$

(d) $2u+3v=4w+x$일 때 x

$2(1,-2,3)+3(-2,5,3) = 4(4,2,7)+x$

$(2-6,\ -4+15,\ 6+9) = (16,8,28)+x$

$(-4,11,15) = (16,8,28)+x$

$x = (-4-16,\ 11-8,\ 15-28) = (-20,3,-13)$

$\therefore x = \underline{(-20,3,-13)}$

(e) $4u+2(-3v+5w) = 4(1,-2,3)+2(-3(-2,5,3)+5(4,2,7))$

$= (4,-8,12) + 2(6+20,\ -15+10,\ -9+35)$

$= (4,-8,12) + 2(26,-5,26) = (4+52,\ -8-10,\ 12+52) = \underline{(56,-18,64)}$

4. 다음 문장이 참인지 거짓인지 판단하고, 거짓인 경우 그 이유를 설명하라.

(a) 모든 벡터공간에는 영벡터가 포함된다. <u>참</u>

(b) 벡터공간은 벡터 합과 스칼라배 연산에 대해 닫혀있지 않을 수 있다. <u>거짓</u>

<u>벡터공간은 벡터 합과 스칼라 배 연산에 대해 반드시 닫혀 있어야 합니다.</u>

(c) n차원 실수벡터로 구성된 R^n 공간은 벡터공간이다. <u>참</u>

(d) 벡터공간의 벡터에 대한 선형결합의 결과는 해당 벡터공간에 포함된다. <u>참</u>

(e) 벡터공간의 기저는 영벡터를 생성할 수 있다. <u>참</u>

(f) 벡터공간의 기저를 사용하여 선형결합으로 벡터를 표현하는 방법은 유일하다. <u>참</u>

(g) 벡터공간의 기저에 있는 벡터의 개수는 해당 벡터공간의 차원보다 작거나 같다. <u>거짓</u>

<u>벡터공간 V의 기저에 있는 벡터의 개수는 해당 벡터공간의 차원과 항상 같습니다.</u>

(h) n차 이하의 다항식의 집합은 벡터공간이다. <u>참</u>

(i) 2×3 행렬의 집합은 행렬의 합과 스칼라배 연산에 대해 닫혀있다. <u>참</u>

5. 다음 집합 S가 R^3의 벡터공간인지 아닌지 판단하라.

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in R^3 \mid x_1\ge 0\right\} \qquad v=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \quad c=-2 \quad cv=(-2)\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

<u>∴ 스칼라배에 대해 닫혀 있지 않으므로, 집합 S는 벡터공간이 될 수 없다.</u>

7. 집합 $S=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1-4x_2+5x_3=2\}$가 벡터공간인지 아닌지 판단하라.

반례) 영벡터 포함 조건 불만족

$$x_1-4x_2+5x_3=2$$
$$0-4(0)+5(0)=2$$
$$0=2\ (\text{거짓})$$

∴ S는 영벡터를 포함하지 않으므로 벡터공간이 아니다.

8. 다항식 $f(x)=2+3x-x^2$을 기저 $\{1,\ 1+x,\ (1+x)^2\}$의 선형결합으로 표현하라.

$$f(x)=C_1(1)+C_2(1+x)+C_3(1+2x+x^2)$$
$$=C_1+C_2+C_2x+C_3+2C_3x+C_3x^2$$
$$=(C_1+C_2+C_3)+(C_2+2C_3)x+(C_3)x^2$$

$C_1+C_2+C_3=2 \rightarrow C_1+5+(-1)=2 \rightarrow C_1=-2$

$C_2+2C_3=3 \rightarrow C_2+(-2)=3 \rightarrow C_2=5$

$C_3=-1$

$\therefore C_1=-2,\ C_2=5,\ C_3=-1$

$$\therefore f(x)=(-2)(1)+5(1+x)+(-1)(1+x)^2$$

9. 벡터 $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$을 기저 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$의 선형결합으로 표현하라.

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$$

$C_1+2C_2+2C_3=1$

$0C_1-2C_2+0C_3=3$

$0C_1+C_2+4C_3=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&1\\0&-2&0&3\\0&1&4&-1\end{array}\right)$$

$C_1=\frac{15}{4},\ C_2=-\frac{3}{2},\ C_3=\frac{1}{8}$

$C_2=-\frac{3}{2}$ $\quad -\frac{3}{2}+4C_3=-1 \rightarrow 4C_3=\frac{1}{2} \rightarrow C_3=\frac{1}{8}$

$C_1-3+\frac{1}{4}=1 \rightarrow C_1-\frac{12}{4}+\frac{1}{4}=1 \quad C_1=\frac{11}{4}+1=\frac{15}{4}$

$$\therefore \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\frac{15}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$$

10. 다음 벡터들이 각각 R^2 공간의 기저가 될 수 있는지 확인하라.

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}=-1-4=-5$ $\quad$ ∴ 기저가 될 수 있다.

(b) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}=4-4=0$ $\quad$ ∴ 기저가 될 수 없다.

(c) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-1-0=-1$ $\quad$ ∴ 기저가 될 수 있다.

(d) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \det\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}=-2-(-2)=0$ $\quad$ ∴ 기저가 될 수 없다.

11. 다음 벡터들이 R^3 공간을 생성하는지 확인하라.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\-2&2&0\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-6)+(-1)^{1+3}\cdot(-2)\cdot(2)$$
$$= -6-4=-10$$

$\det(A)\neq 0$ 이므로 선형 독립입니다.

$\therefore$ R^3공간을 생성합니다.

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 0+(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot 0 = 0$$

$\det(A)=0$ 이므로 선형 독립이 아닙니다.

$\therefore$ R^3공간을 생성하지 않는다.

(c) $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&4\\0&0&4\end{pmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot 4\cdot(1-0) = 4$$

$\det(A)\neq 0$ 이므로 선형 독립입니다.

$\therefore$ R^3공간을 생성합니다.