

7장 연습문제 정답

[Section 7.1]

1.

- (a) 참
- (b) 참
- (c) 참
- (d) 거짓 / 확대변환을 수행하는 행렬이다.
- (e) 거짓 / 이동은 선형변환이 아니다.
- (f) 참

2.

선형변환이 아니다.

3.

- (a) 선형변환이다.
- (b) 선형변환이다.
- (c) 선형변환이다.
- (d) 선형변환이 아니다.
- (e) 선형변환이다.
- (f) 선형변환이다.

4.

선형변환이다.

5.

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

(h) $[3 \ 0 \ 4 \ -5]$

6.

- (a) $(9, 2)$ (b) $(1, 4)$ (c) $(11, 8)$ (d) $(2x + 2y + z, 3x + y - z)$

7.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

9.

(2)

10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16.

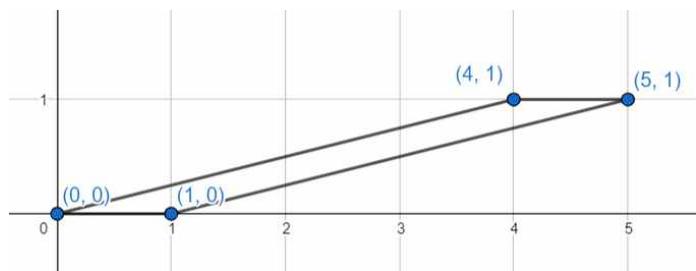
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

17.

- (a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$

18.

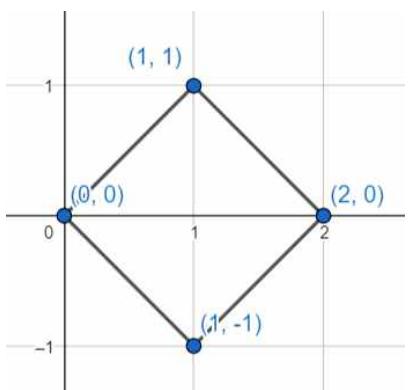
(a)



(b)



(c)



19.

$$(-(2x+y) + (x+2y), 2(x+2y)) = (-x+y, 2x+4y)$$

20.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$$

21.

- (a) 노름보존 선형연산자가 아니다.
- (b) 노름보존 선형연산자이다.

22.

- (a) 2회 연속 이동변환은 교환법칙이 성립한다.
- (b) 2회 연속 확대변환은 교환법칙이 성립한다.
- (c) 2회 연속 회전변환은 교환법칙이 성립한다.

23.

- (a) $(0,0,0) \rightarrow (0,0,0)$
 $(\sqrt{3}, 0, 0) \rightarrow (\sqrt{3}, 0, 0)$
 $(0, 2, 0) \rightarrow (6, 2, 0)$
 $(0, 0, 1) \rightarrow (2, 0, 1)$
- (b) $(0,0,0) \rightarrow (2, -1, 3)$
 $(\sqrt{3}, 0, 0) \rightarrow (\sqrt{3}+2, -1, 3)$
 $(0, 2, 0) \rightarrow (2, 1, 3)$
 $(0, 0, 1) \rightarrow (2, -1, 4)$

24.

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{에 대해, } A^\top A = I \text{이므로 } A \text{는 직교연산자이다.}$$

한편, [정리 7-7]에 의해 A 가 직교연산자이므로 A 는 노름보존 선형연산자이다.

25.

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

26.

- (a) \mathbb{R}^2 공간에서 벡터 x 의 길이를 $\frac{1}{2}$ 배로 축소
- (b) \mathbb{R}^2 공간에서 원점을 중심으로 반시계방향으로 135° 회전
- (c) \mathbb{R}^2 공간에서 좌표를 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 -3만큼 이동

27.

$$(\frac{40}{13}, \frac{20}{13}, 0)$$

[Section 7.2]

28.

- (a) 참
- (b) 참
- (c) 참
- (d) 거짓 / 행공간과 영공간이 직교한다.
- (e) 참
- (f) 참
- (g) 거짓 / 같아야 한다.
- (h) 참
- (i) 참

29.

- (a) 2 (b) 2

30.

- (a) 계수: 3, 퇴화차수: 1 (b) 계수: 2, 퇴화차수: 1

31.

- (a) 열공간의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, 영공간의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (b) 열공간의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 영공간의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

32.

열공간의 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, 기저에 대한 벡터 b 의 좌표: $\begin{bmatrix} 5 \\ -25/9 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

33.

- (a) x 는 유일하다.
- (b) x 는 유일하다.
- (c) x 는 유일하지 않다.
- (d) $Ax = b$ 를 만족하는 x 가 존재하지 않는다.

34.

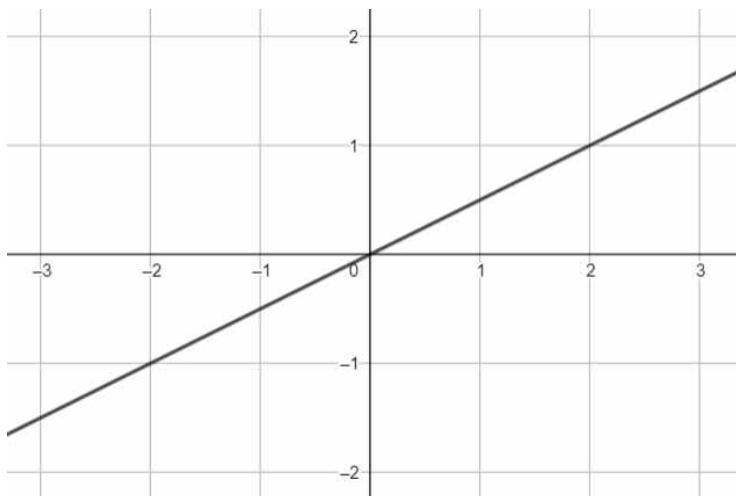
2

35.

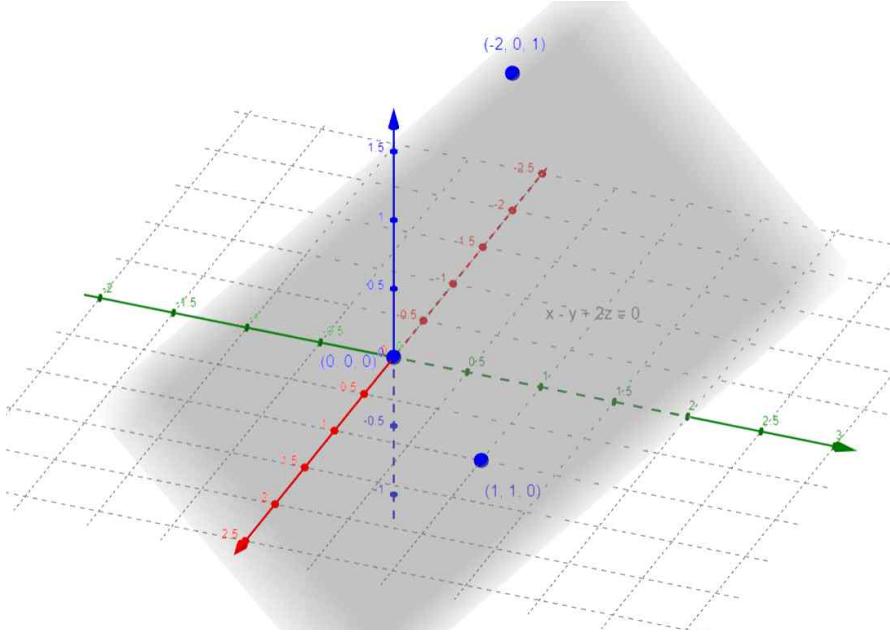
계수: 3, 퇴화차수: 2

36.

열공간: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 공간상의 직선 $y = \frac{1}{2}x$



영공간: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 공간상에서 두 벡터가 이루는 평면 $x - y + 2z = 0$



37.

행공간: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$, 좌영공간: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

38.

$\{(a, -a, b, -b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

39.

1

40.

열공간) 차원: 2, 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

영공간) 차원: 2, 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

행공간) 차원: 2, 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

좌영공간) 차원: 1, 기저: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

41.

연립방정식의 해는 유일하다.

42.

\mathbb{R}^4 공간에 있는 2차원 부분공간

43.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$