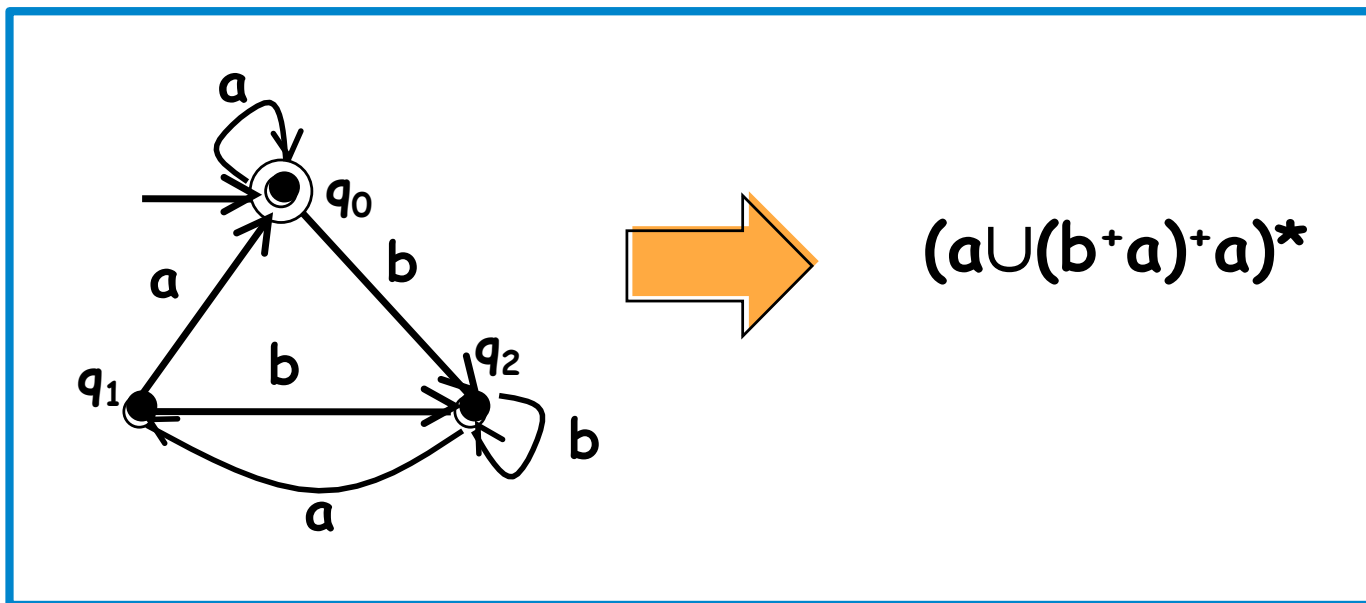


# Fundamentos de Algoritmos y Computabilidad

- \* Lema de Arden
- \* Lema del bombeo
- \* Gramáticas regulares

# Lenguajes regulares

**Problema.** Dado un autómata encontrar la expresión regular del lenguaje que acepta



# Lenguajes regulares

---

- Dados los lenguajes A y B

$$A = \{ab\}$$

$$B = \{bbb\}$$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

$$X = \{ab\} \cdot X \cup \{bbb\}$$

# Lenguajes regulares

---

- Dados los lenguajes A y B

$$A = \{ab\}$$

$$B = \{bbb\}$$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

$$X = \{ab\} \cdot X \cup \{bbb\}$$



$$\{ab\} \cdot \{ \{ab\} \cdot X \cup \{bbb\} \}$$

# Lenguajes regulares

---

- Dados los lenguajes A y B

$$A = \{ab\}$$

$$B = \{bbb\}$$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

$$X = \{ab\} \cdot X \cup \{bbb\}$$

$$X = \{bbb, abbbb, ababbbb, \dots\} = \{ab\}^* \cdot \{bbb\}$$

# Lenguajes regulares

---

- Dados los lenguajes A y B

$$A=\{ab\}$$

$$B=\{bbb\}$$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

$$X=\{ab\} \cdot X \cup \{bbb\} = A \cdot X \cup B$$

$$X=\{bbb, abbbb, ababbbb, \dots\} = \{ab\}^* \cdot \{bbb\} = A^* \cdot B$$

# Lenguajes regulares

---

- Dados los lenguajes A y B

$$A = \{ab\}$$

$$B = \{b, ba\}$$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

$$X = \{ab\} \cdot X \cup \{b, ba\} = A \cdot X \cup B$$



# Lenguajes regulares

---

**Lema de Arden.** Una ecuación de la forma  $X = AX \cup B$ , donde  $A, B, X$  son lenguajes y  $\varepsilon \notin A$  ( $A$  no contiene la cadena vacía), tiene una solución única  $X = A^*B$

# Lenguajes regulares

---

El lema permite expresar de forma no recursiva un lenguaje

**$X = A \cdot X \cup B$  es equivalente a  $X = A^*B$**

# Lenguajes regulares

---

Dado un diagrama de transición se puede obtener una expresión regular de la siguiente forma:

- Escriba una ecuación por cada estado del diagrama que represente el lenguaje generado a partir de ese nodo
- Resuelva las ecuaciones recursivas por medio del lema de Arden
- Reemplace las expresiones calculadas

# Lenguajes regulares

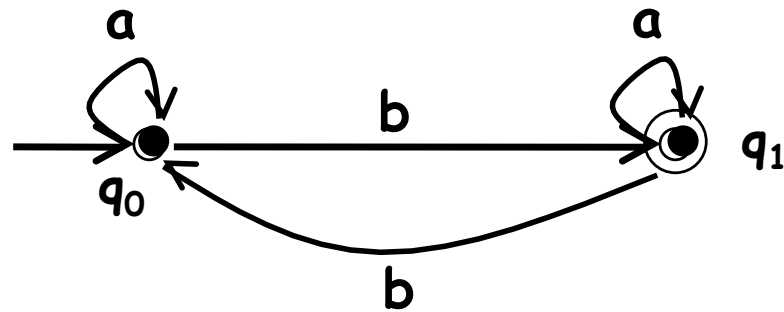
---

Dado un diagrama de transición se puede obtener una expresión regular de la siguiente forma:

- Escriba una ecuación por cada estado del diagrama que represente el lenguaje generado a partir de ese nodo
  - Resuelva las ecuaciones recursivas por medio del lema de Arden
  - Reemplace las expresiones calculadas
- 
- La expresión asociada a  $q_0$  será la **expresión regular** del autómata

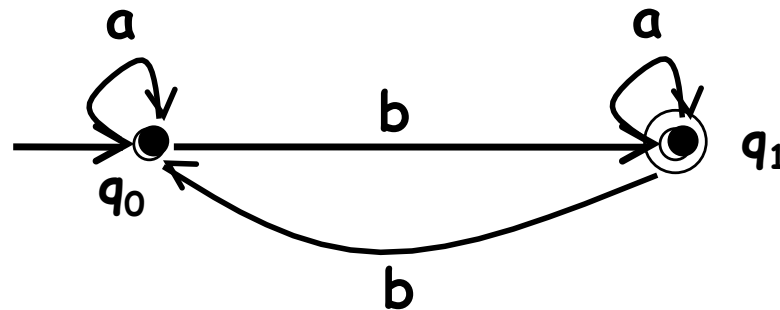
# Lenguajes regulares

---



# Lenguajes regulares

---



$A_0 = aA_0 \cup bA_1$ , indica las cadenas generadas en  $q_0$

$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon$ , indica las cadenas generadas en  $q_1$

# Lenguajes regulares

---

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

$$A_0 = aA_0 \cup bA_1$$

$$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon$$

# Lenguajes regulares

---

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

$$A_0 = aA_0 \cup bA_1$$

$$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon = a^*(bA_0 \cup \varepsilon) = a^*bA_0 \cup a^*$$



# Lenguajes regulares

---

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

$$A_0 = aA_0 \cup bA_1$$

$$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon = a^*(bA_0 \cup \varepsilon) = a^*bA_0 \cup a^*$$

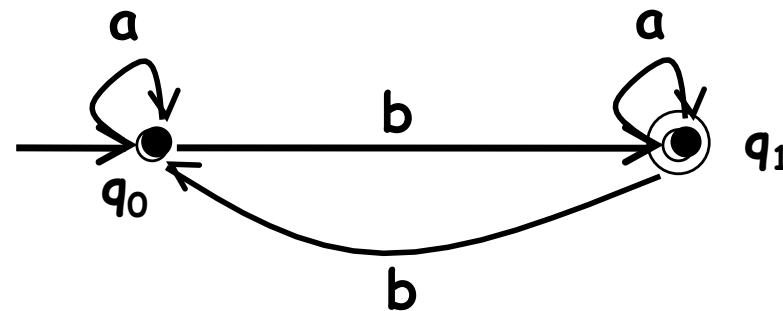
- Se reemplaza  $A_1$  en  $A_0$  y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_0 &= aA_0 \cup b(a^*bA_0 \cup a^*) = aA_0 \cup ba^*bA_0 \cup ba^* \\ &= (a \cup ba^*b)A_0 \cup ba^* \\ &= (a \cup ba^*b)^*ba^* \end{aligned}$$

La expresión asociada a  $A_0$  es la expresión que representa el autómata

# Lenguajes regulares

---

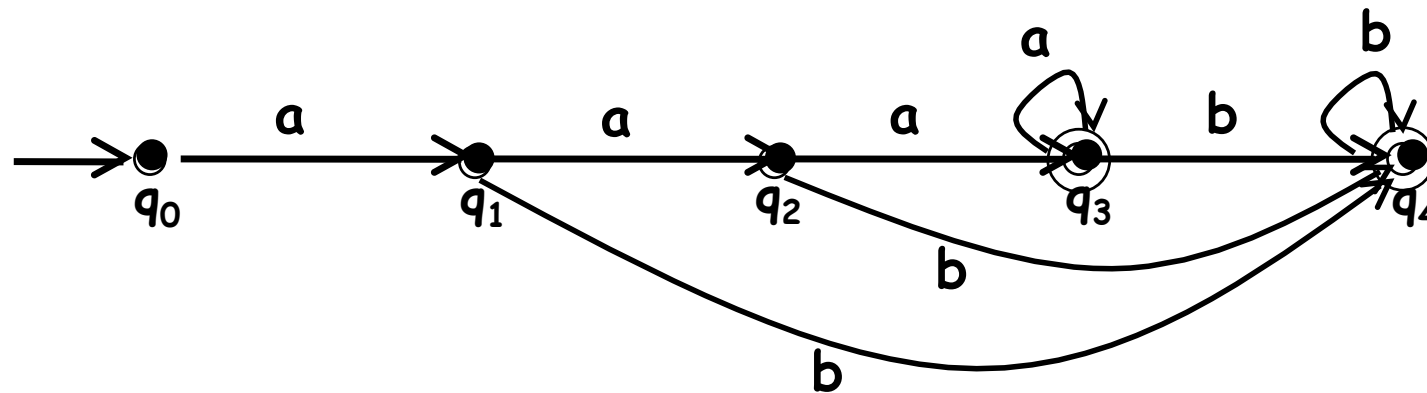


Autómata que representa  $(a \cup ba^*b)^*ba^*$

# Lenguajes regulares

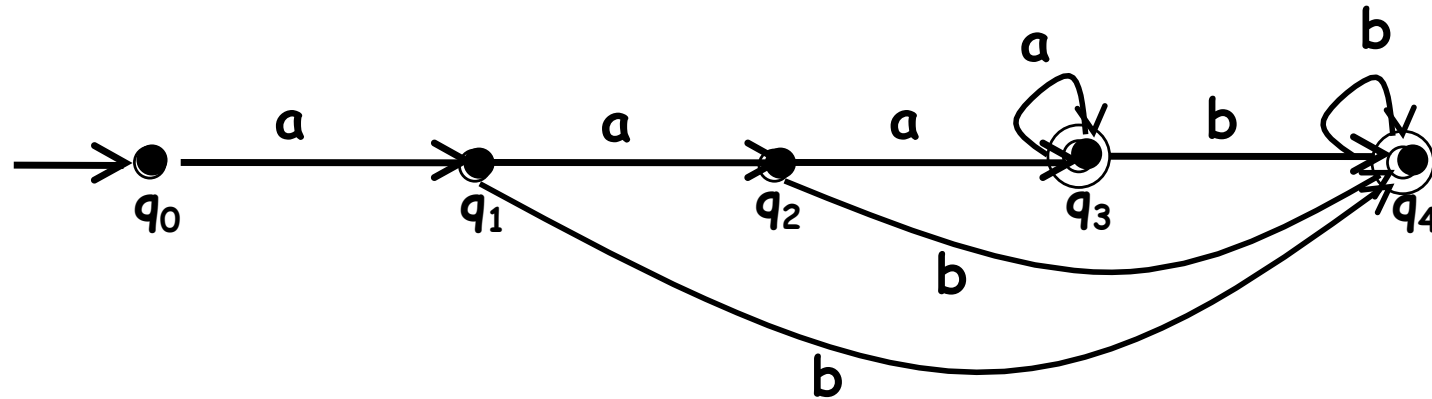
---

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

---



$$A_0 = aA_1$$

$$A_1 = aA_2 \cup bA_4$$

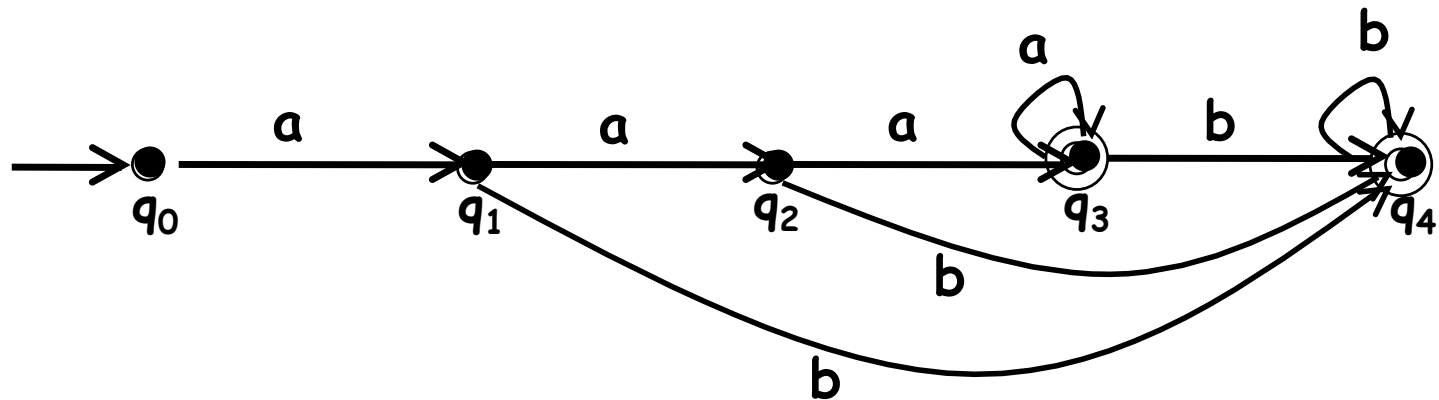
$$A_2 = aA_3 \cup bA_4$$

$$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \varepsilon$$

$$A_4 = bA_4 \cup \varepsilon$$

# Lenguajes regulares

---



$$A_0 = aA_1$$

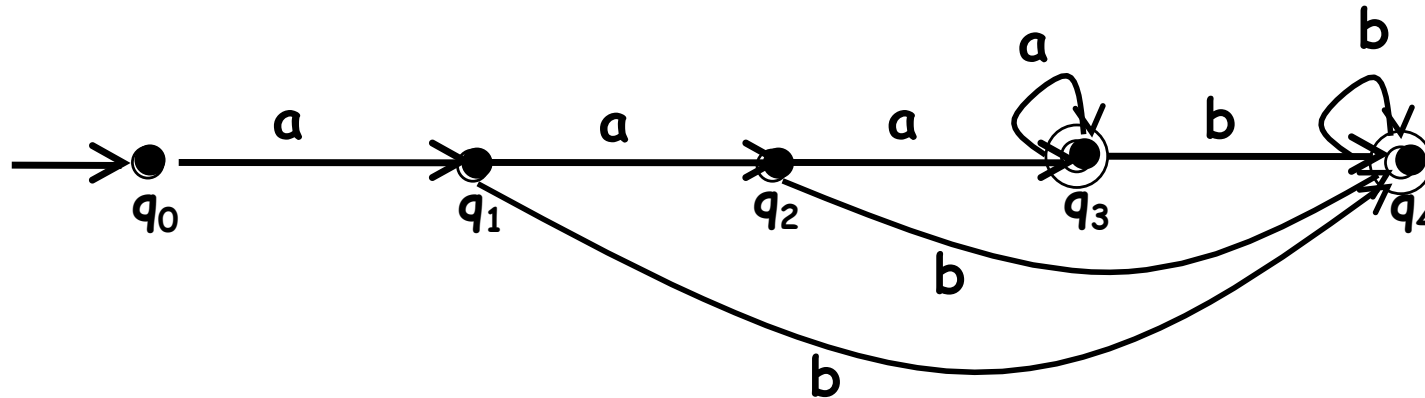
$$A_1 = aA_2 \cup bA_4$$

$$A_2 = aA_3 \cup bA_4$$

$$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \varepsilon$$

$$A_4 = bA_4 \cup \varepsilon = b^*$$

# Lenguajes regulares



$$A_0 = aA_1 = a(aa^+b^* \cup ab^+ \cup b^+) = aaa^+b^* \cup aab^+ \cup ab^+$$

$$A_1 = aA_2 \cup bA_4 = a(a^+b^* \cup b^+) \cup b^+ = aa^+b^* \cup ab^+ \cup b^+$$

$$A_2 = aA_3 \cup bA_4 = aa^*b^* \cup bb^* = a^+b^* \cup b^+$$

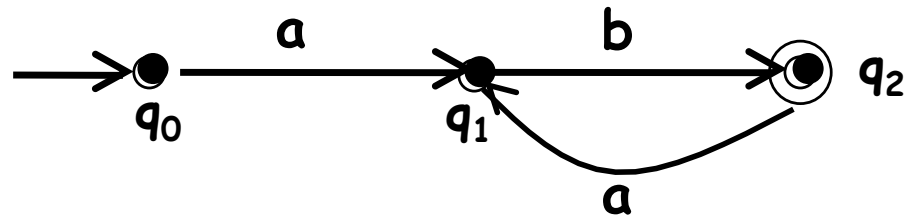
$$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \varepsilon = aA_3 \cup bb^* \cup \varepsilon = aA_3 \cup b^+ \cup \varepsilon = a^*(b^+ \cup \varepsilon) = a^*b^*$$

$$A_4 = bA_4 \cup \varepsilon = b^*$$

# Lenguajes regulares

---

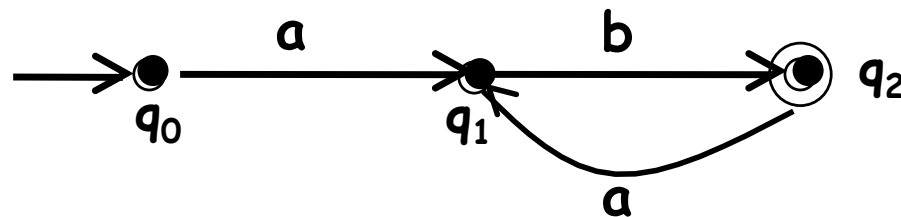
Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

---

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



$$A_0 = aA_1 = a(ba)^*b$$

$$A_1 = bA_2 = b(aA_1 \cup \varepsilon) = baA_1 \cup b = (ba)^*b$$

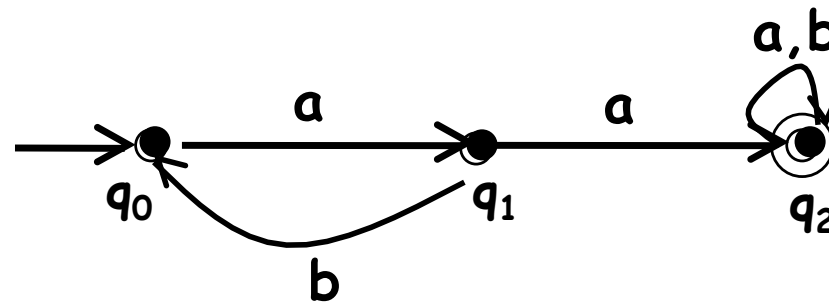
$$A_2 = aA_1 \cup \varepsilon$$



# Lenguajes regulares

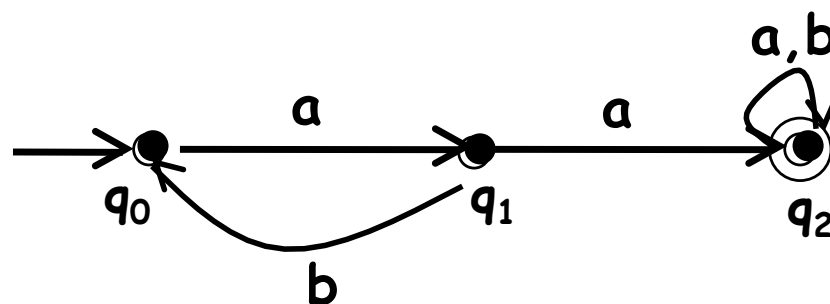
---

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



$$A_0 = aA_1 = a(a(a \cup b)^* \cup bA_0) = aa(a \cup b)^* \cup abA_0 = (ab)^*aa(a \cup b)^*$$

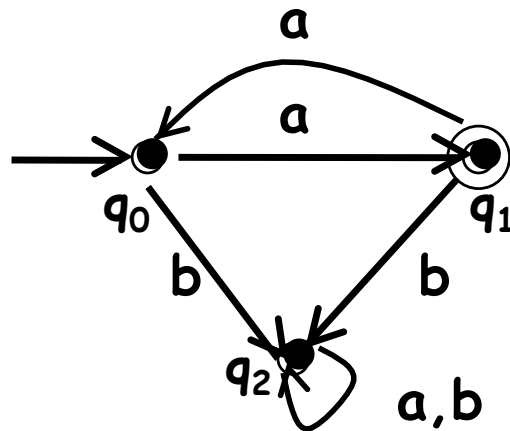
$$A_1 = aA_2 \cup bA_0 = a(a \cup b)^* \cup bA_0$$

$$A_2 = aA_2 \cup bA_2 \cup \varepsilon = (a \cup b)A_2 \cup \varepsilon = (a \cup b)^*$$

# Lenguajes regulares

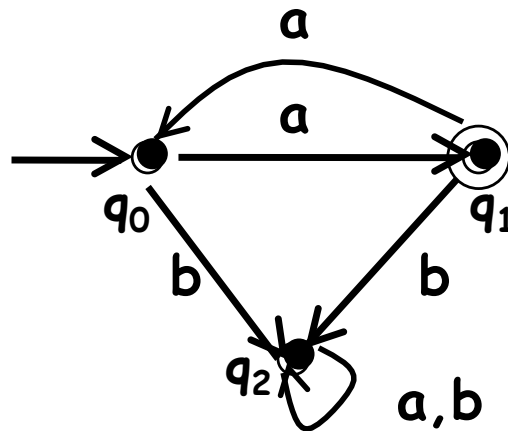
---

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



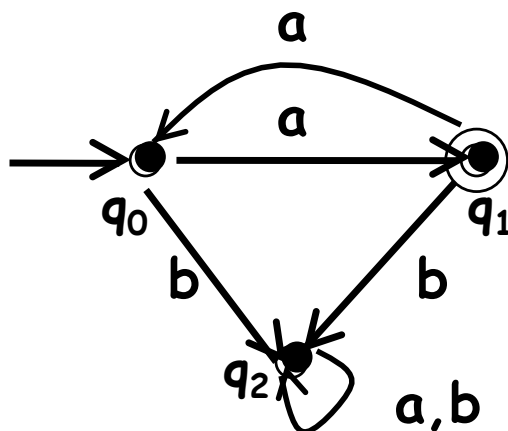
$$A_0 = aA_1 \cup bA_2$$

$$A_1 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon$$

$$A_2 = aA_2 \cup bA_2$$

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



$$A_0 = aA_1 \cup bA_2 = a(aA_0 \cup \varepsilon) = aaA_0 \cup a = (aa)^*a$$

$$A_1 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup \varepsilon$$

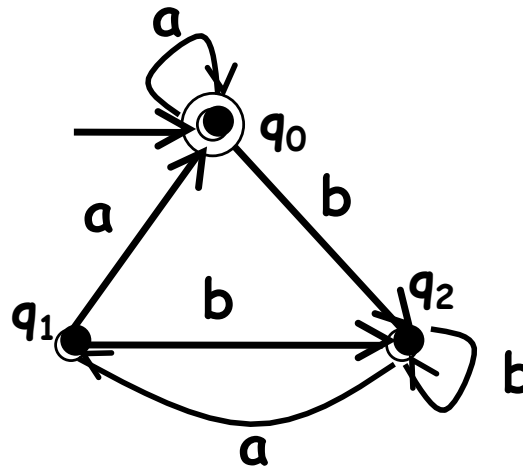
$$A_2 = aA_2 \cup bA_2 = (a \cup b)A_2 \cup \emptyset = (a \cup b)\emptyset$$

$$A \cdot \emptyset = \emptyset$$

# Lenguajes regulares

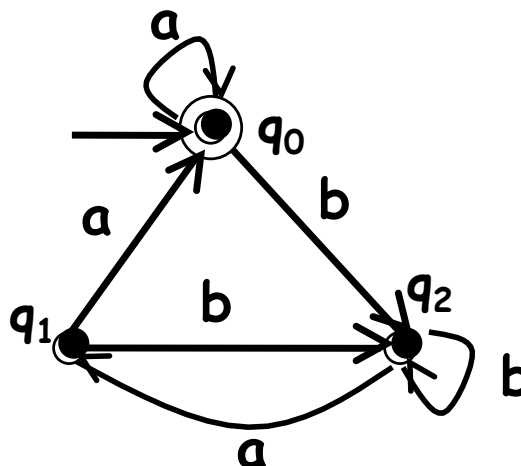
---

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



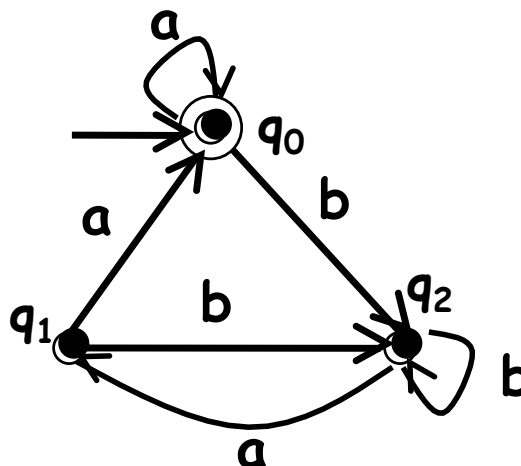
$$A_0 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup bb^*aA_1 \cup \varepsilon = aA_0 \cup b^+a((b^+a)^*aA_0) \cup \varepsilon$$

$$A_1 = aA_0 \cup bA_2 = aA_0 \cup bb^*aA_1 = (bb^*a)^*aA_0 = (b^+a)^*aA_0$$

$$A_2 = aA_1 \cup bA_2 = bA_2 \cup aA_1 = b^*aA_1$$

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



$$\begin{aligned} A_0 &= aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup bb^*aA_1 \cup \varepsilon = aA_0 \cup b^+a((b^+a)^*aA_0) \cup \varepsilon \\ &= aA_0 \cup b^+a(b^+a)^*aA_0 \cup \varepsilon \\ &= aA_0 \cup (b^+a)^+aA_0 \cup \varepsilon \\ &= (a \cup (b^+a)^+a)A_0 \cup \varepsilon \\ &= (a \cup (b^+a)^+a)^* \end{aligned}$$

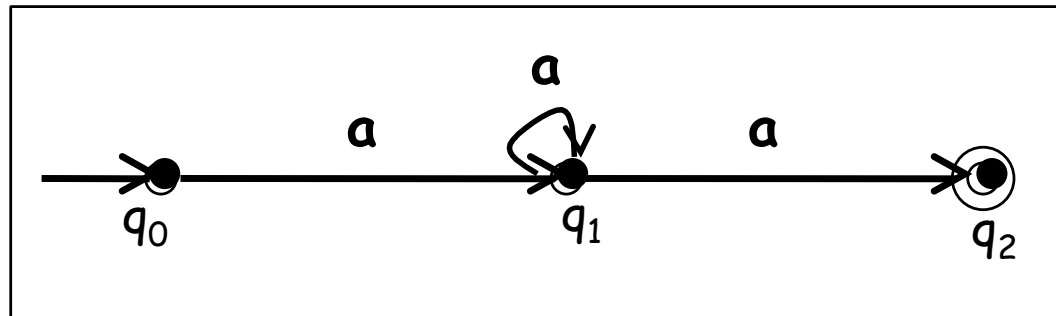


# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados

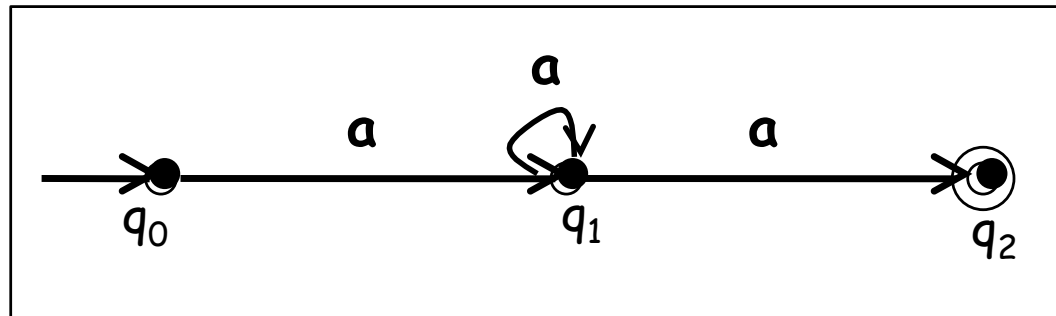


# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



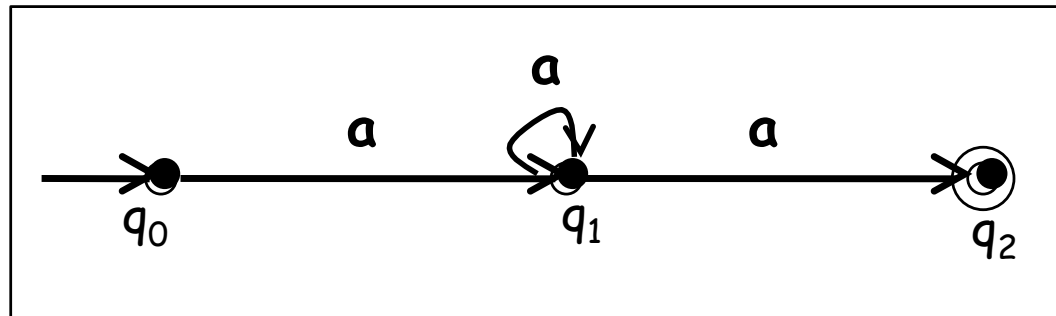
- Si  $L$  es infinito se pueden encontrar cadenas cuya longitud es mayor que  $n$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



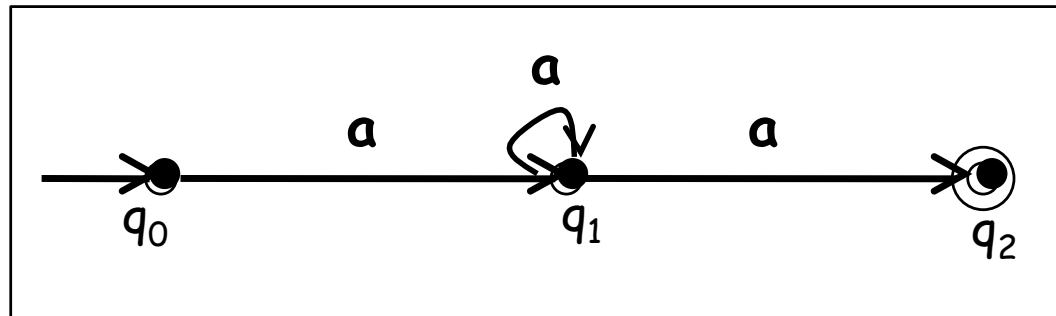
¿Cómo hace un autómata que tiene 3 estados para generar cadenas de longitud 100?

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



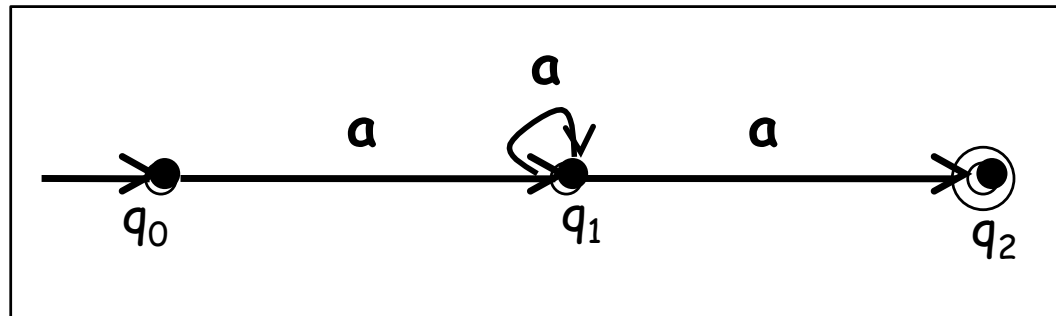
Si es un lenguaje regular infinito debe existir un ciclo en el autómata

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



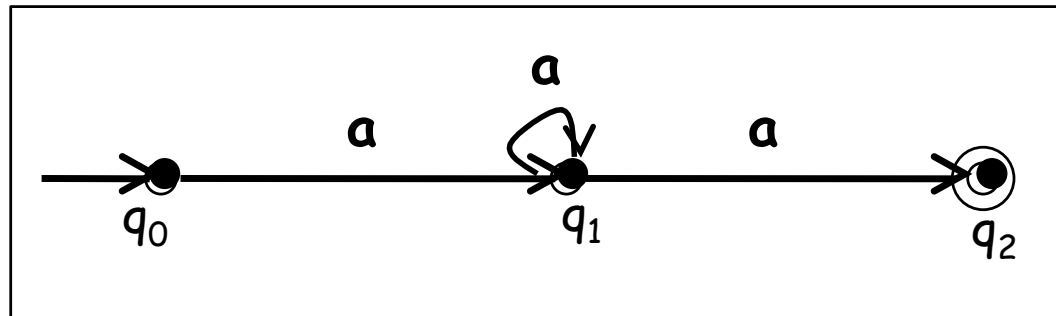
- Suponga que  $w = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  es una cadena de longitud  $n+1$  que pertenece a  $L$ . Al hacer el recorrido por  $M$ , se debe **pasar por un mismo estado más de una vez**, es decir, debe existir un ciclo

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



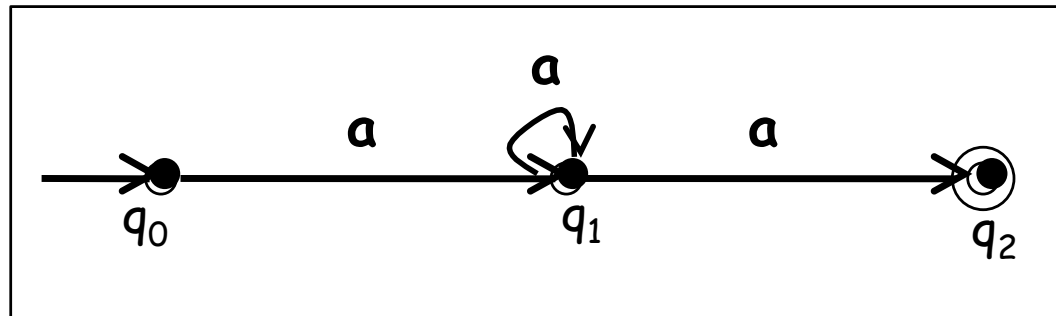
- Suponga que  $w=aaa$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



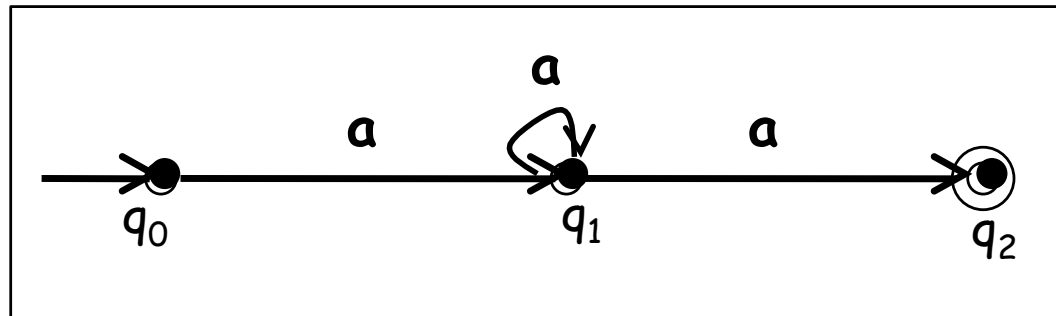
$$w = a(a)a$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



$$w = a(a)^2a$$

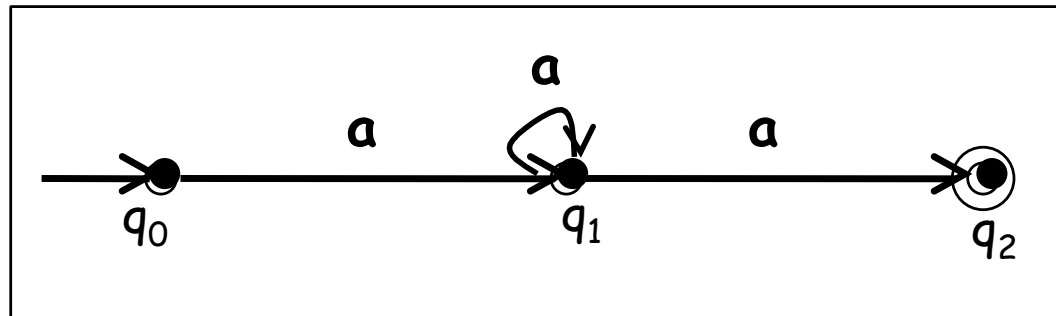


# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



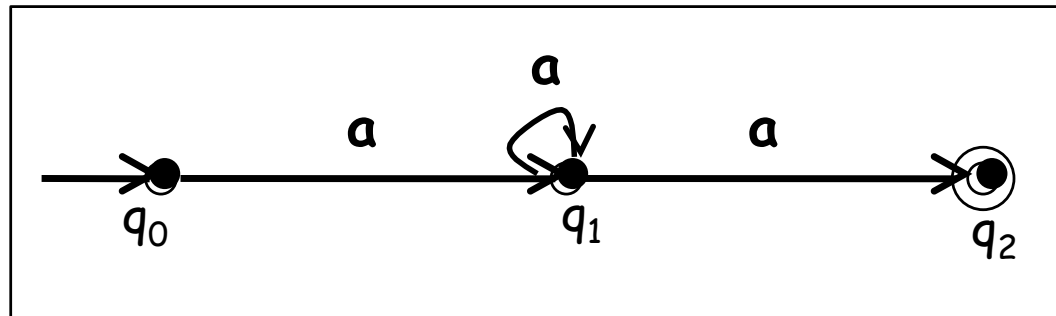
$$w = a(a)^3a$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



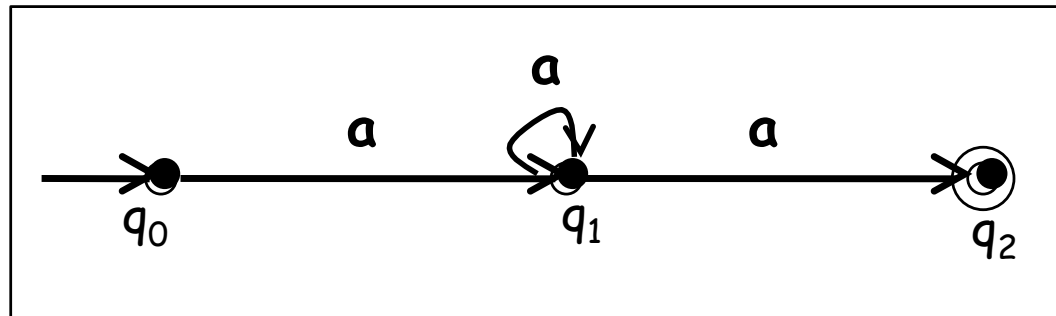
$$w = a(a)^{100}a$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



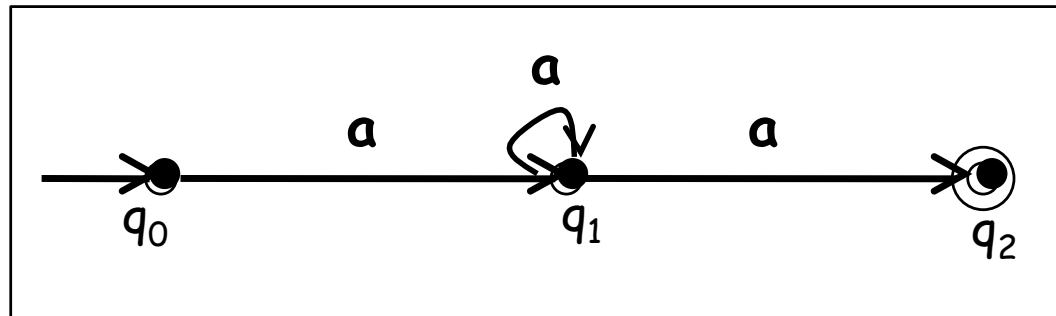
$$w = a(a)^0a = a \cdot \varepsilon \cdot a = aa$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



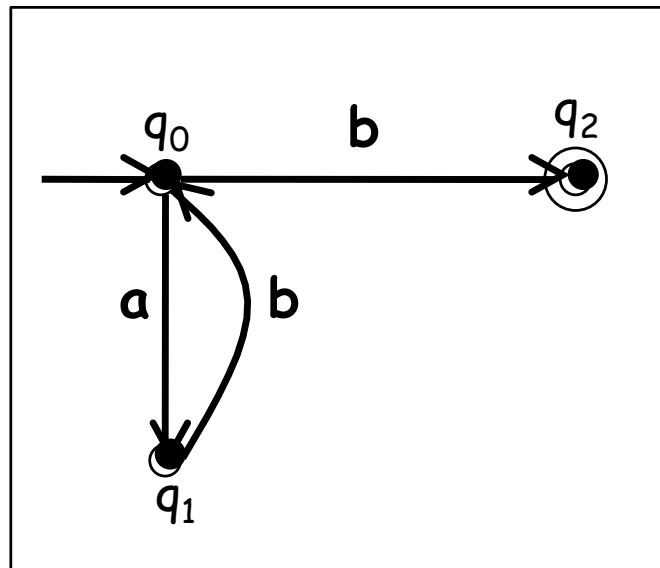
El lema del bombeo establece que cada palabra de longitud mayor o igual a  $n$  de un lenguaje regular debe tener una parte que se puede "bombear" 0, 1, 2 o más veces y el resultado sigue perteneciendo al lenguaje

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



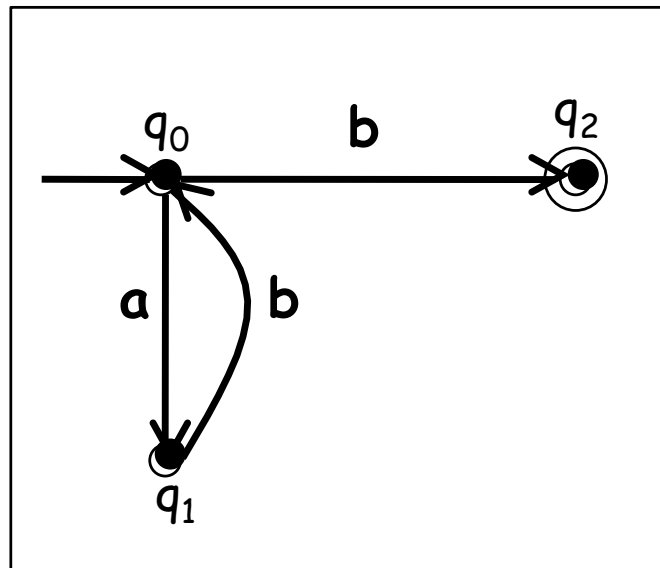
$L = \{b, abb, ababb, \dots\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



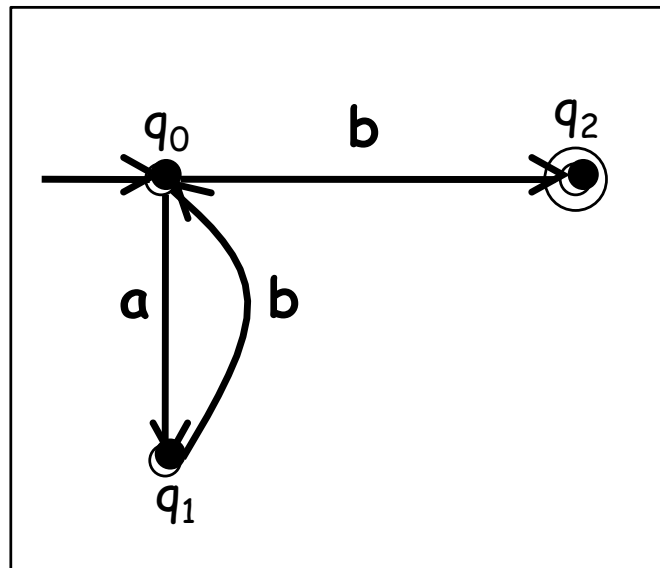
¿Cómo hace este autómata que tiene 3 estados para generar cadenas de longitud 100?

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



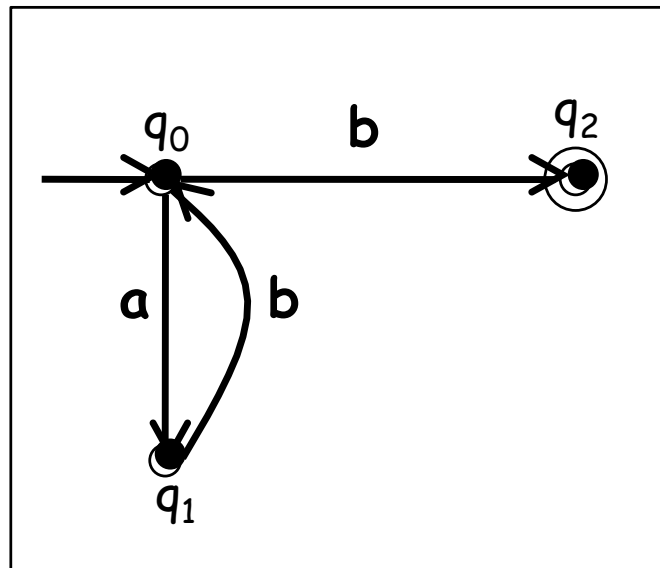
Si es un lenguaje regular infinito debe existir un ciclo en el autómata

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



$w=abb$

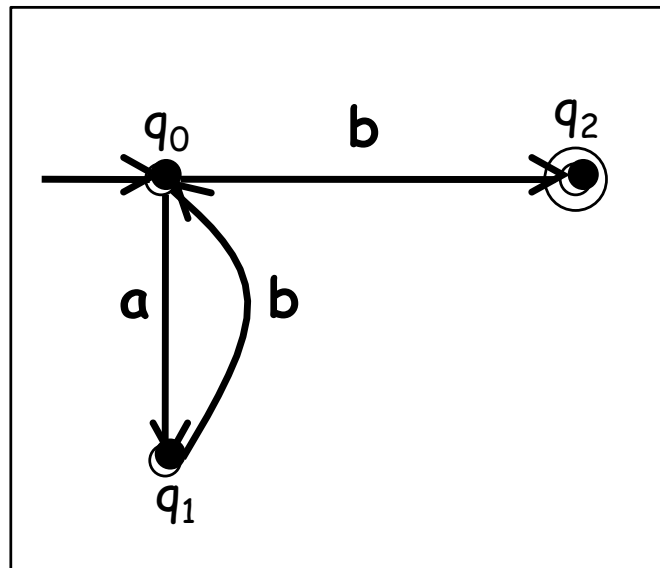


# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



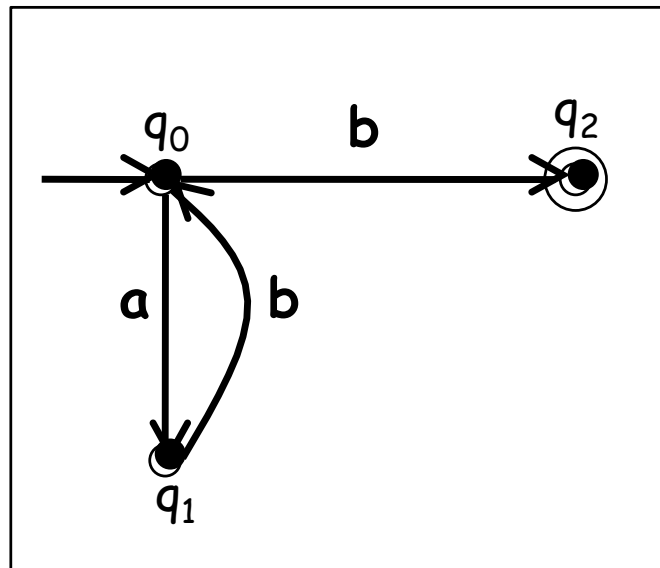
$$w = (ab)b$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



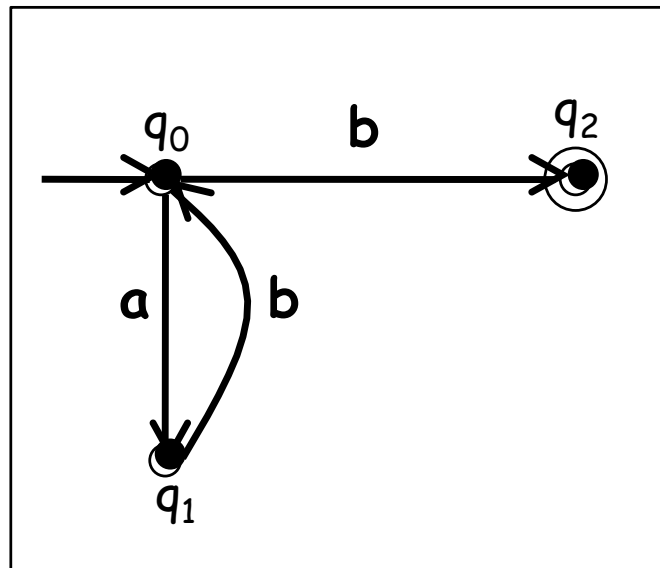
$$w = (ab)^2b$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



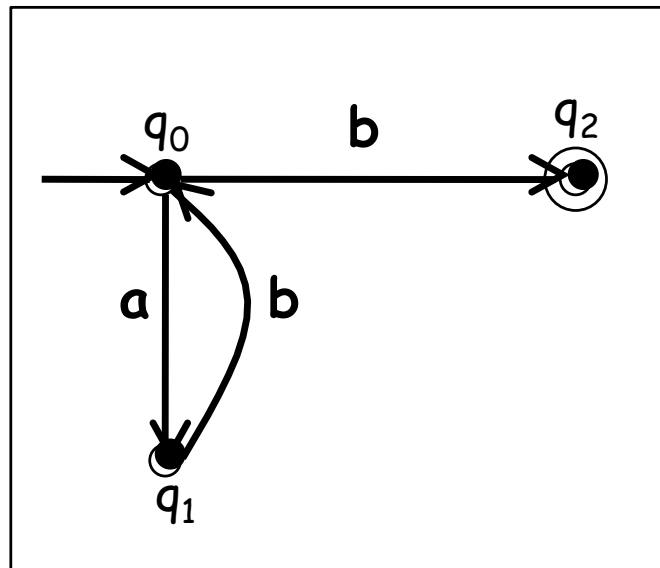
$$w = (ab)^3b$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados



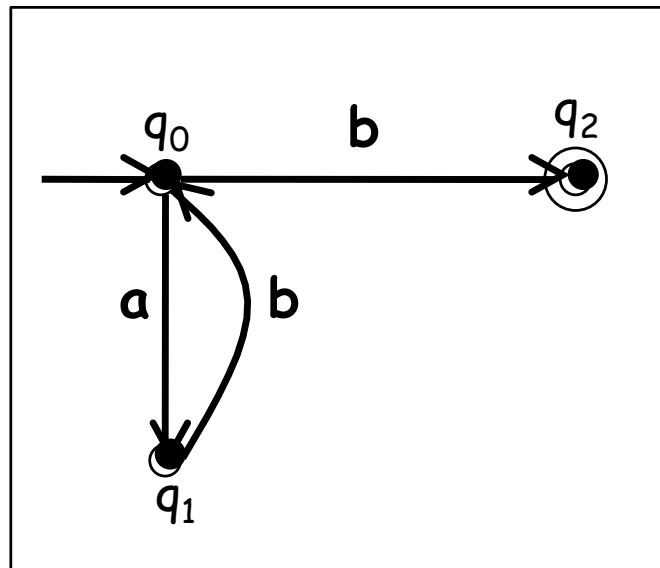
$$w = (ab)^{100}b$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados

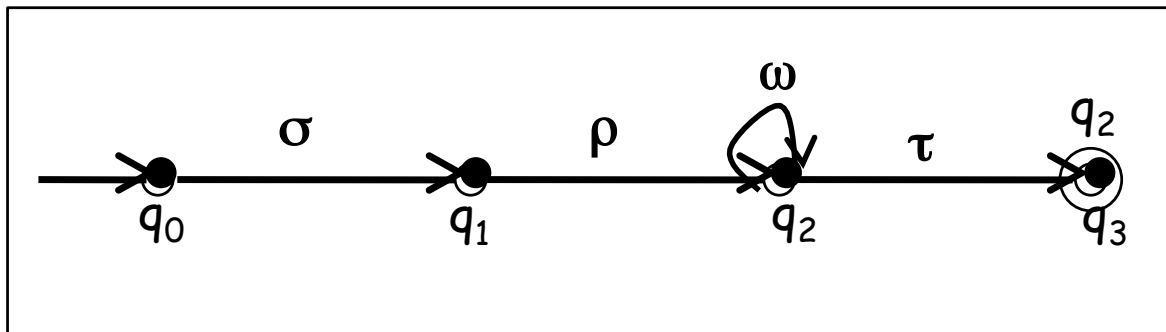


$$w = (ab)^0 b = \varepsilon \cdot b = b$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- $L$  es regular infinito
- Debe tener cadenas de longitud mayor a  $n$ , la cantidad de estados
- Ya que cada transición consume un símbolo y se tienen cadenas de longitud mayor a  $n$ , debe existir un ciclo en el autómata
- Si una cadena  $\sigma\omega\tau$  pertenece a  $L$ , se puede bombear una parte de la cadena y el resultado,  $\sigma\omega^i\tau$ , también pertenece a  $L$ , para  $i \geq 0$



# Lenguajes regulares

---

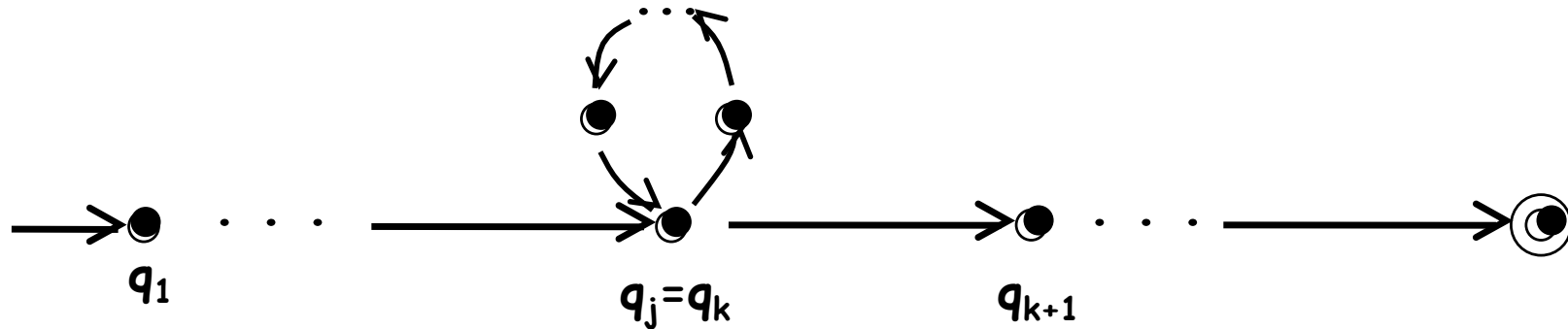
## Lema del bombeo

- Suponga que  $L$  es regular infinito y que es aceptado por un AFD  $M$  que tiene  $n$  estados
- Si  $L$  es infinito se pueden encontrar cadenas cuya longitud es mayor que  $n$
- Suponga que  $w = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  es una cadena de longitud  $n+1$  que pertenece a  $L$ . Al hacer el recorrido por  $M$ , se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo

# Lenguajes regulares

---

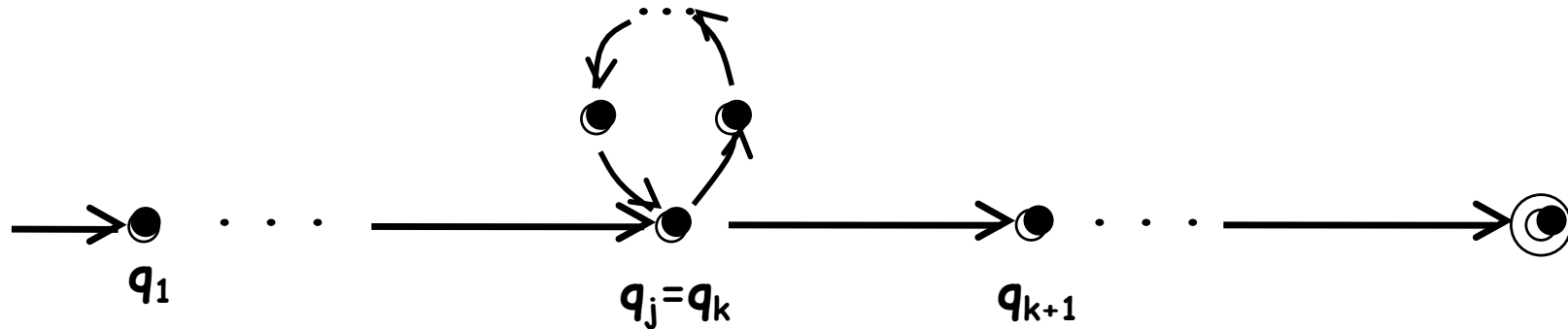
- Suponga que  $w = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  es una cadena de longitud  $n+1$  que pertenece a  $L$ . Al hacer el recorrido por  $M$ , se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo





# Lenguajes regulares

- Suponga que  $w = a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  es una cadena de longitud  $n+1$  que pertenece a  $L$ . Al hacer el recorrido por  $M$ , se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo



- Se puede dar vueltas en el ciclo tantas veces como se quiera, por lo tanto,  $a_1 \dots a_j (a_{j+1} \dots a_k)^m a_{k+1} \dots a_{n+1}$  estará en  $L$  para todo  $m \geq 0$

# Lenguajes regulares

---

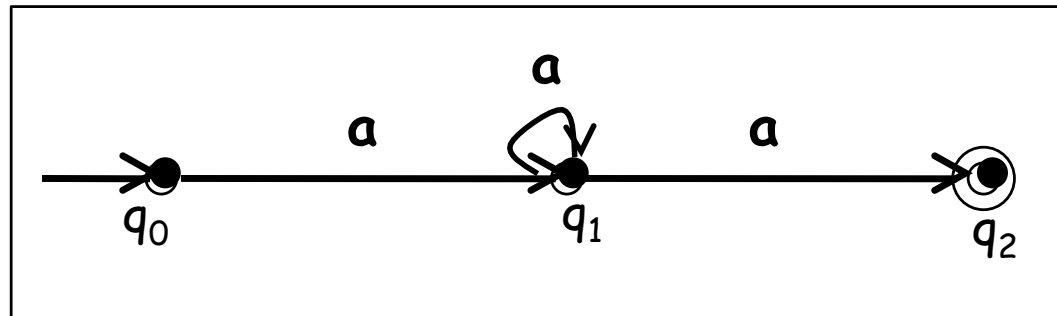
## Lema del bombeo

- Sea  $L$  un lenguaje regular infinito. Hay una constante  $n$  de forma que, si  $w$  es una cadena de  $L$  cuya longitud es mayor o igual a  $n$ , se tiene que  $w=uv^ix$ , siendo  $uv^ix \in L$  para todo  $i \geq 0$ , con  $|v| \geq 1$  y  $|uv| \leq n$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Sea  $L$  un lenguaje regular infinito. Hay una constante  $n$  de forma que, si  $w$  es una cadena de  $L$  cuya longitud es mayor o igual a  $n$ , se tiene que  $w=uv^ix$ , siendo  $uv^ix \in L$  para todo  $i \geq 0$ , con  $|v| \geq 1$  y  $|uv| \leq n$

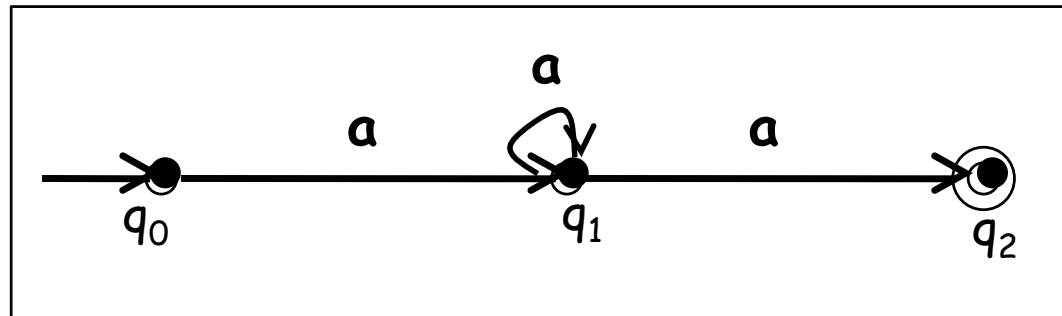


**$w=aaa$**

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Sea  $L$  un lenguaje regular infinito. Hay una constante  $n$  de forma que, si  $w$  es una cadena de  $L$  cuya longitud es mayor o igual a  $n$ , se tiene que  $w=uv^ix$ , siendo  $uv^ix \in L$  para todo  $i \geq 0$ , con  $|v| \geq 1$  y  $|uv| \leq n$

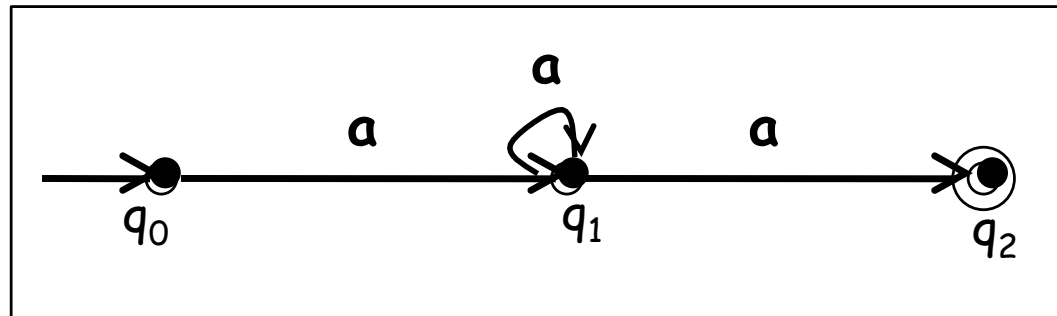


$w=aaa$   
↑ ↑ ↑  
 $u v x$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Sea  $L$  un lenguaje regular infinito. Hay una constante  $n$  de forma que, si  $w$  es una cadena de  $L$  cuya longitud es mayor o igual a  $n$ , se tiene que  $w=uv^ix$ , siendo  $uv^ix \in L$  para todo  $i \geq 0$ , con  $|v| \geq 1$  y  $|uv| \leq n$



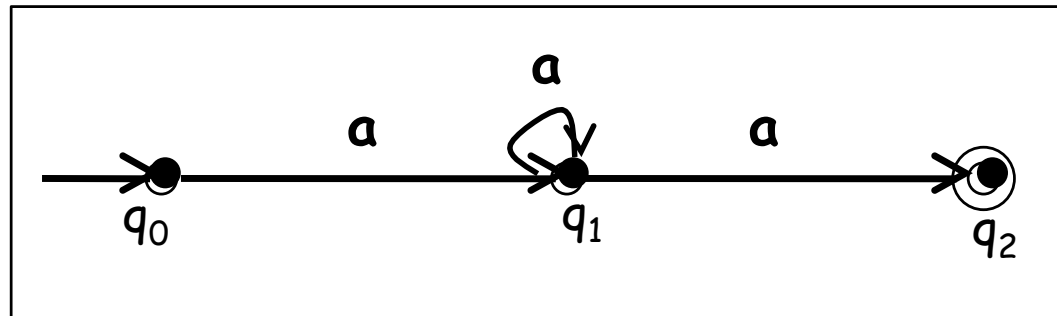
$w=aaa$   $\Rightarrow$   $w=a(aa)a$  debe pertenecer al lenguaje

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{matrix}$   $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{matrix}$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Sea  $L$  un lenguaje regular infinito. Hay una constante  $n$  de forma que, si  $w$  es una cadena de  $L$  cuya longitud es mayor o igual a  $n$ , se tiene que  $w=uv^ix$ , siendo  $uv^ix \in L$  para todo  $i \geq 0$ , con  $|v| \geq 1$  y  $|uv| \leq n$



$w=aaa$    $w=a \varepsilon a$  debe pertenecer al lenguaje

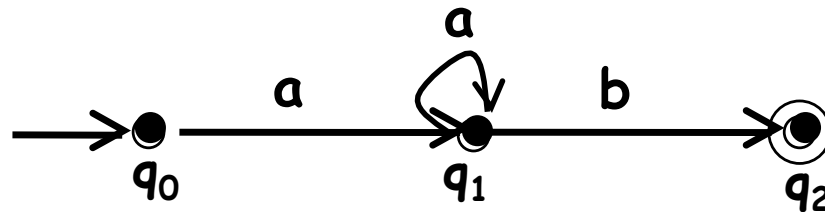
$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{matrix}$   $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^0 & x \end{matrix}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por  $a^+b$  y el autómata



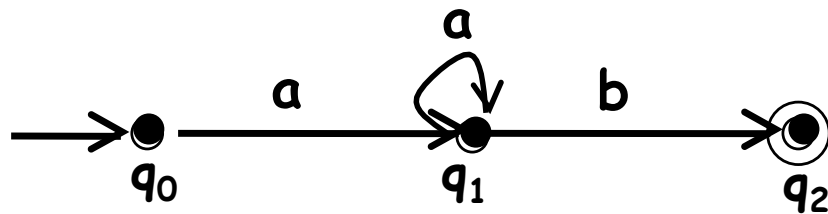
$w=aab$  es una cadena de  $L$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por  $a^+b$  y el autómata



$w = a \ a \ b$  es una cadena de  $L$

          ↑  ↑  ↑

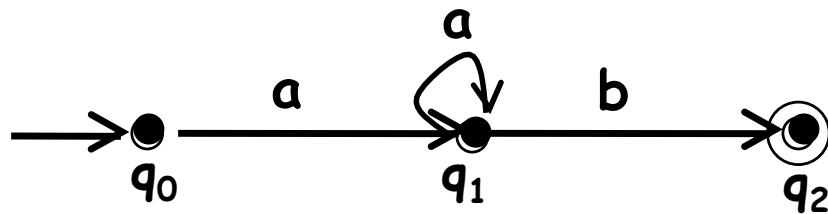
          u  v  x



# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por  $a^+b$  y el autómata



$w = a \ a \ b$  es una cadena de  $L$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$

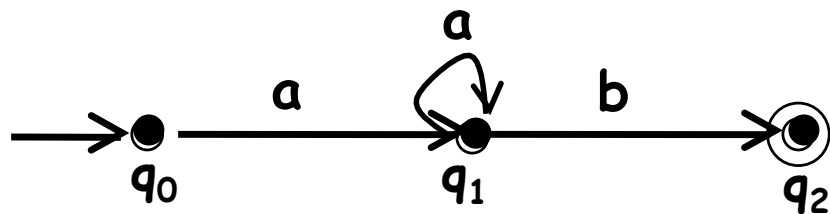
$w = a \ a^2 \ b$  también es una cadena de  $L$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array}$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por  $a^+b$  y el autómata



$w = a \ a \ b$  es una cadena de  $L$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$

$w = a \ \epsilon \ b$  también es una cadena de  $L$

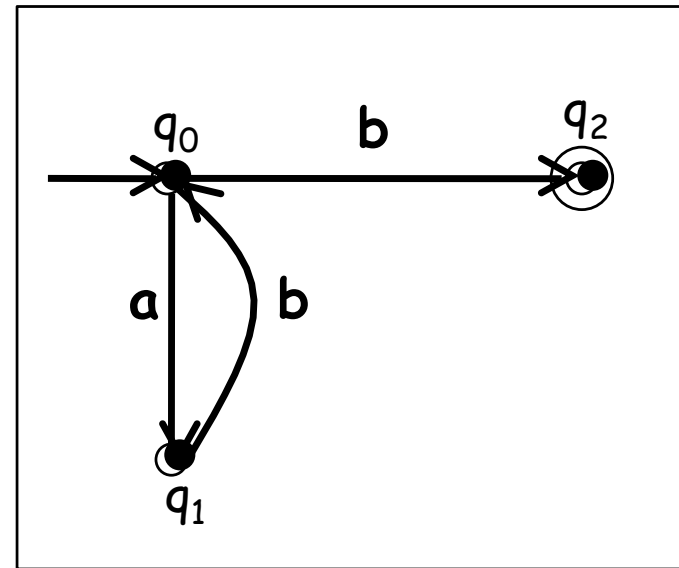
$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^0 & x \end{array}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

$w = a b b$  es una cadena de  $L$

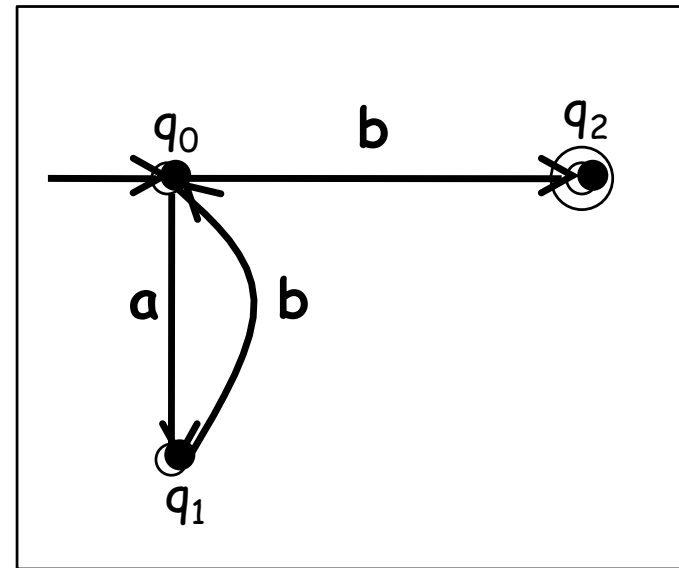


# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

$w = \varepsilon \text{ } \underline{a} \text{ } b \text{ } b$  es una cadena de  $L$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v \quad x$

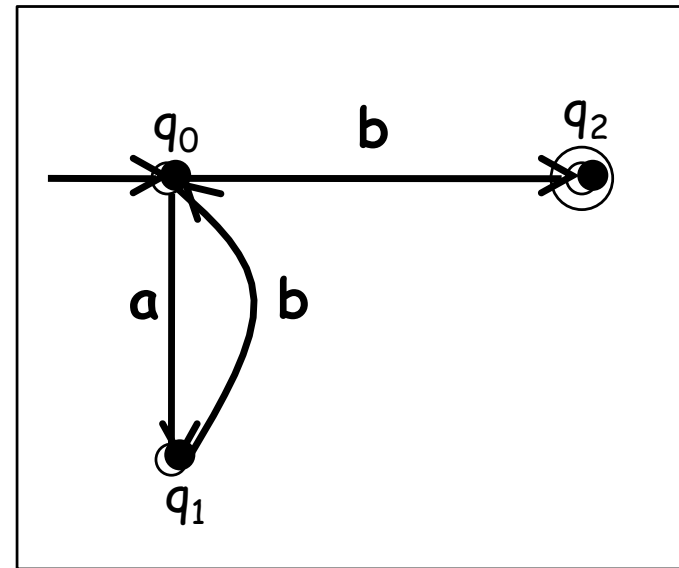


# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

$w = \varepsilon \quad \underline{a} \quad b \quad b$  es una cadena de  $L$   
           $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
           $u \quad v \quad x$

$w = \varepsilon \quad \underline{(ab)^2} \quad b$  pertenece a  $L$   
           $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
           $u \quad v^2 \quad x$



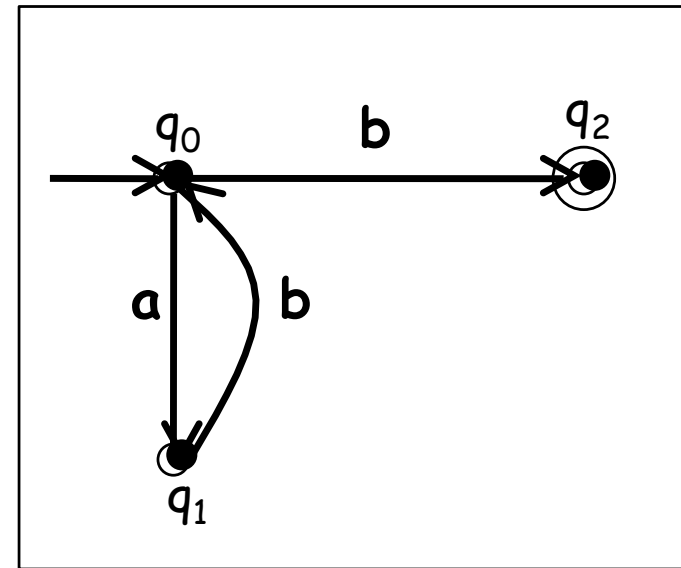
# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

$w = \varepsilon \quad \underline{a} \quad b \quad b$  es una cadena de  $L$   
           $\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
           $u$        $v$        $x$

$w = \varepsilon \quad \underline{(ab)^2} \quad b$  pertenece a  $L$   
           $\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
           $u$        $v^2$        $x$

$w = \varepsilon \quad \varepsilon \quad b$  pertenece a  $L$   
           $\uparrow$        $\uparrow$        $\uparrow$   
           $u$        $v^0$        $x$



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = aa^n a$$

- Expresar  $w$  de la forma  $w = uvx$  de tal forma que  $uv^ix$  también pertenezca al lenguaje.  $v$  es la parte que se puede bombear



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{c} w = aa^1 \overline{a^{n-1}} a \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ u \quad v \quad x \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = \underset{\uparrow}{a} \underset{\uparrow}{a^1} \underset{\uparrow}{a^{n-1}} a$$

$u \quad v \quad x$



$$w = a \underset{\uparrow}{\varepsilon} \underset{\uparrow}{a^{n-1}} a$$

$u \quad v^0 \quad x$



$$w = \underset{\uparrow}{a} \underset{\uparrow}{a^2} \underset{\uparrow}{a^{n-1}} a$$

$u \quad v^2 \quad x$



$$w = uv^i x \in L \text{ para } i \geq 0$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = aa^{n-1}a$$

- Expresar  $w$  de la forma  $w = uvx$  de tal forma que  $uv^ix$  también pertenezca al lenguaje.  $v$  es la parte que se puede bombear

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{c} w = aa^{n-1}a \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ u \quad v \quad x \end{array}$$

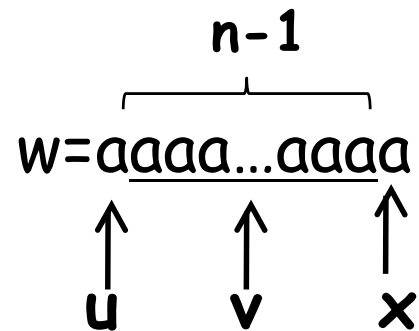
# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{c} w = aa^{n-1}a \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ u \quad v \quad x \end{array}$$

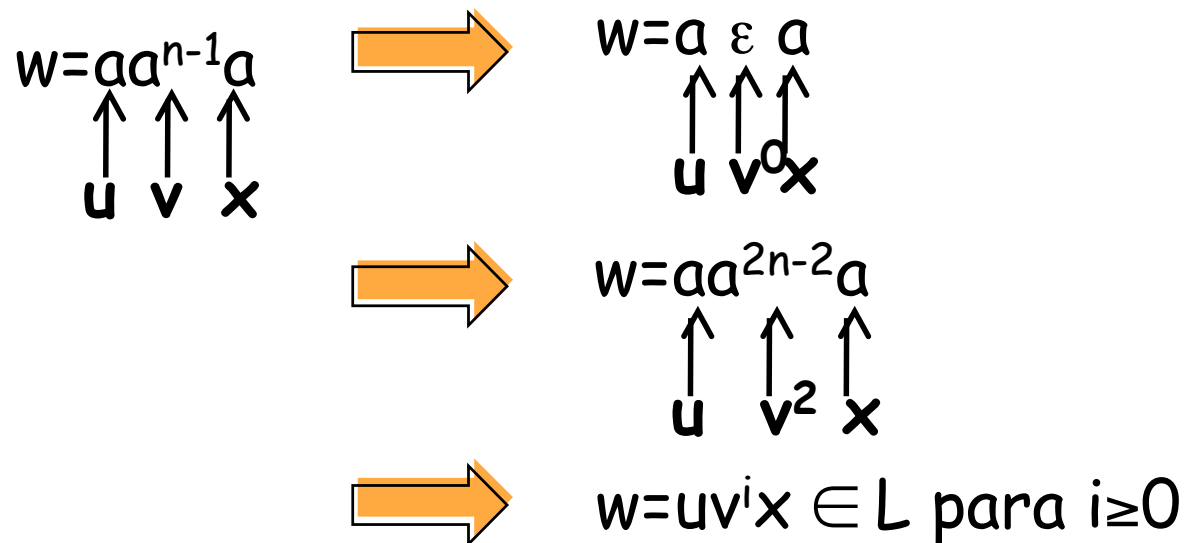
# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{aa^m a \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

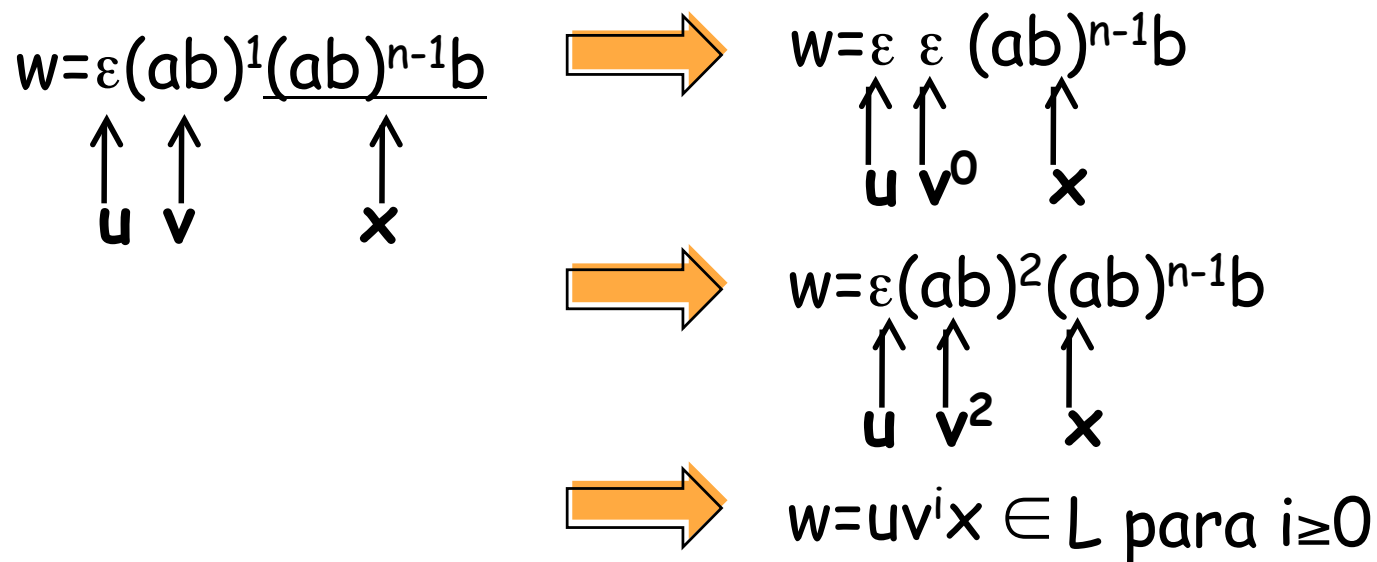
$$w = (ab)^n b$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema



# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{lcl} w = (ab)^1(ab)^1(ab)^{n-2}b & \longrightarrow & w = (ab)^1 \varepsilon (ab)^{n-2}b \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array} & & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^0 & x \end{array} \\ & \longrightarrow & w = (ab)^1(ab)^2(ab)^{n-2}b \\ & & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array} \\ & \longrightarrow & w = uv^i x \in L \text{ para } i \geq 0 \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

- El lema del bombeo es una propiedad que debe estar presente en todo lenguaje regular. Si un lenguaje no cumple el lema, no es regular

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b^n$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{ccccc} w = \varepsilon & a^n & b^n \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$$

y se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} w = \varepsilon & a^{2n} & b^n & \text{no es una cadena de } L \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b^n$$



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^r a^s b^n \quad \text{donde } r+s=n$$

↑	↑	↑
<b>u</b>	<b>v</b>	<b>x</b>

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^r a^s b^n \quad \text{donde } r+s=n$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$$

y se tiene que

$$w = a^r a^{2s} b^n \text{ no es una cadena de } L$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b^{2n}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{ccccc} w = \varepsilon & a^n & b^{2n} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$$

y se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} w = \varepsilon & a^{2n} & b^{2n} & \text{no es una cadena de } L \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{ccccc} w = & a^r & a^s & b^{2n} & \text{donde } r+s=n \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & u & v & x & \end{array}$$

y se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} w = & a^r & a^{2s} & b^{2n} & \text{no es una cadena de } L \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & u & v^2 & x & \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b c^m$$



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = \varepsilon a^n b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v \quad x$



$$w = \varepsilon \varepsilon b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^0 \quad x$



$$w = \varepsilon a^{2n} b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^2 \quad x$



$$w = uv^i x \in L \text{ para } i \geq 0$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b c^m$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$\begin{array}{ccccc} w = & a^{n-1} & a^1 & b & c^m \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & u & v & x & \end{array}$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{a^n b c^m \mid n, m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^{n-1} a^1 b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v \quad x$



$$w = a^{n-1} \varepsilon b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^0 \quad x$



$$w = a^{n-1} a^2 b c^m$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^2 \quad x$



$$w = uv^i x \in L \text{ para } i \geq 0$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{abcd^m \mid m \geq 0\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{abcd^m \mid m \geq 0\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = \underline{abcd^1}d^{n-1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v \quad x$



$$w = abc \ \varepsilon \ d^{n-1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^0 \quad x$



$$w = abcd^2d^{n-1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $u \quad v^2 \quad x$



$$w = uv^ix \in L \text{ para } i \geq 0$$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \text{ y } w \text{ es palíndroma}\}$

# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \text{ y } w \text{ es palíndroma}\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^n b a^n$$



# Lenguajes regulares

---

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje  $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \text{ y } w \text{ es palíndroma}\}$

- Se toma una cadena  $w$  de longitud mayor o igual a  $n$ , donde  $n$  se conoce como la constante del lema

$$w = a^r a^s b a^n \quad \text{donde } r+s=n$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$$

y se tiene que

$$w = a^r a^{2s} b a^n \text{ no es una cadena de } L$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v^2 & x \end{array}$$

# Lenguajes regulares

---

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta,  \alpha  \leq  \beta $
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

# Lenguajes regulares

---

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta,  \alpha  \leq  \beta $
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Gramática regular



# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

- $S$ ,  $A$  y  $B$  son símbolos no terminales, e indican que deben ser sustituidos según las producciones

- $a$  y  $b$  son símbolos terminales que pertenecen a un alfabeto  $\Sigma$

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$$S \rightarrow aA \mid bB$$
$$A \rightarrow aA \mid a$$
$$B \rightarrow bB \mid b$$

Las gramáticas generan cadenas

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$$S \rightarrow aA \mid bB$$
$$A \rightarrow aA \mid a$$
$$B \rightarrow bB \mid b$$

Las gramáticas generan cadenas

$$S \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaa$$

La cadena **aaa** es generada por la gramática

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

$S \rightarrow aA \rightarrow aa$

$S \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaaaA \rightarrow aaaaa$

$S \rightarrow bB \rightarrow bb$

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$$S \rightarrow aA \mid bB$$
$$A \rightarrow aA \mid a$$
$$B \rightarrow bB \mid b$$

¿La cadena **ab** se puede generar por la gramática?



# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$S \rightarrow aAb \mid bBa$

$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBa \mid \varepsilon$

Indique cuáles de las siguientes cadenas se pueden generar por la gramática:

- ab
- aabb
- bbaa
- abb
- bbba

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$S \rightarrow abS \mid \varepsilon$

Indique cuáles de las siguientes cadenas se pueden generar por la gramática:

- $\varepsilon$
- abab
- aaab
- abb

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas

$S \rightarrow aE$

$E \rightarrow A|B$

$A \rightarrow aA|b$

$B \rightarrow aB|b$

La cadena **aaab** se puede generar así:

$S \rightarrow aE \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaaA \rightarrow aaab$

Se utiliza la notación  $S \xrightarrow{*} w$  para indicar que la cadena  $w$  se **puede generar** a partir de  $S$  en 0 o más etapas

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas regulares

- Considere el lenguaje regular  $a(a^* \cup b^*)b$ . Una forma de expresar las cadenas aceptadas por el lenguaje, es por medio de las producciones

# Lenguajes regulares

---

## Gramáticas regulares

- Considere el lenguaje regular  $a(a^* \cup b^*)b$ . Una forma de expresar las cadenas aceptadas por el lenguaje, es por medio de las producciones

$$S \rightarrow aE$$

$$E \rightarrow A|B$$

$$A \rightarrow aA|b$$

$$B \rightarrow bB|b$$

# Lenguajes regulares

---

Una **gramática regular** se define como un conjunto de 4 elementos,  $G=(\Sigma,N,S,P)$  donde:

- $\Sigma$  es el alfabeto
- $N$  son los símbolos no terminales
- $S$  es el símbolo inicial
- $P$  es la colección de reglas de sustitución o producciones

$$S \rightarrow aE$$

$$E \rightarrow A|B$$

$$A \rightarrow aA|b$$

$$B \rightarrow bB|b$$

# Lenguajes regulares

---

Una **gramática regular** se define como un conjunto de 4 elementos,  $G=(\Sigma,N,S,P)$  donde:

- $\Sigma$  es el alfabeto
- $N$  son los símbolos no terminales
- $S$  es el símbolo inicial
- $P$  es la colección de reglas de sustitución o producciones de la forma  $A \rightarrow w$ , donde  $A \in N$  y  $w \in (\Sigma \cup N)^*$  que satisface:
  1.  $w$  contiene un no terminal como máximo
  2. Si  $w$  contiene un no terminal, entonces es el símbolo que está en el extremo derecho de  $w$

# Lenguajes regulares

---

Las siguientes gramáticas no son regulares:

$$S \rightarrow AB$$

$$S \rightarrow aAb$$

$$aSb \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow aA|a$$

$$A \rightarrow cA|c$$

$$bAa \rightarrow b|c$$

$$B \rightarrow bB|b$$



# Lenguajes regulares

---

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P:$   $S \rightarrow bA$   
 $A \rightarrow aaA \mid b$

# Lenguajes regulares

---

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P:$   $S \rightarrow bA$   
 $A \rightarrow aaA \mid b$

$bb, baab, baaaab, baaaaaab, \dots$

# Lenguajes regulares

---

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: \quad S \rightarrow bA$   
 $\quad A \rightarrow aaA \mid b$

El lenguaje aceptado por la gramática,  $L(G)$ , contiene las cadenas de la forma  $b(aa)^*b$

# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS | b$

# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS | b$

El lenguaje aceptado por la gramática,  $L(G)$ , contiene las cadenas de la forma  $a^*b$

# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, B\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS \mid B$   
 $B \rightarrow bB \mid \varepsilon$

# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, B\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS \mid B$   
 $B \rightarrow bB \mid \varepsilon$

El lenguaje aceptado por la gramática,  $L(G)$ , contiene las cadenas de la forma  $a^*b^*$

# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow abS \mid A$   
 $A \rightarrow a \mid b$



# Lenguajes regulares

---

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow abS \mid A$   
 $A \rightarrow a \mid b$

El lenguaje aceptado por la gramática,  $L(G)$ , contiene las cadenas de la forma  $(ab)^*(a \cup b)$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca  $(ab)^+$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca  $(ab)^+$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow abS \mid ab$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $(a \cup b)a^*(a \cup b)$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $(a \cup b)a^*(a \cup b)$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A, B\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aA \mid bA$   
 $A \rightarrow aA \mid a \mid b$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $(a \cup b)^* a (a \cup b)^*$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $(a \cup b)^* a (a \cup b)^*$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A, B\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS | bS | aA$   
 $A \rightarrow aA | bA | \varepsilon$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje  
dado por  $(ab)^+(a \cup b)^*$



# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $(ab)^+(a \cup b)^*$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $N = \{S, A\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow abS \mid abA$   
 $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

# Lenguajes regulares

---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje  
dado por  $a^*b^*c^*$

# Lenguajes regulares

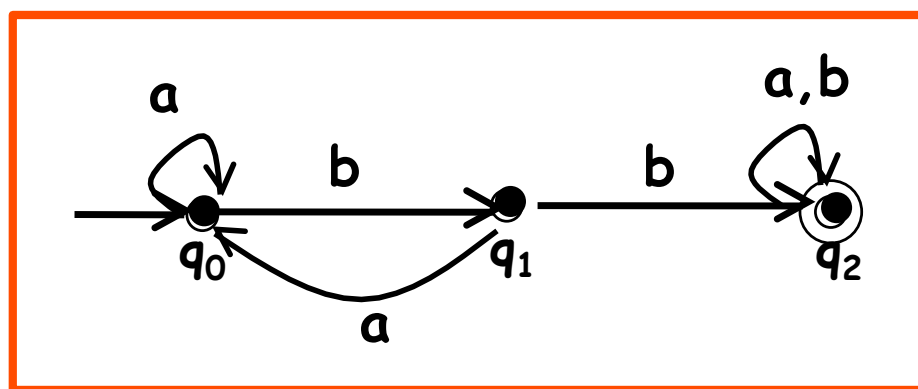
---

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por  $a^*b^*c^*$

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $N = \{S, B, C\}$
- $S$  es el símbolo inicial
- $P: S \rightarrow aS | bB | cC | \epsilon$   
     $B \rightarrow bB | cC | \epsilon$   
     $C \rightarrow cC | \epsilon$

# Lenguajes regulares

**Teorema.** Dado un autómata  $M$ , existe una gramática  $G$  tal que  $L(M)=L(G)$



**Autómata  $M$**



$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow aS \mid bB$

$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$

**Gramática  $G$**

# Lenguajes regulares

---

**Teorema.** Dado un autómata  $M$ , existe una gramática  $G$  tal que  $L(M)=L(G)$

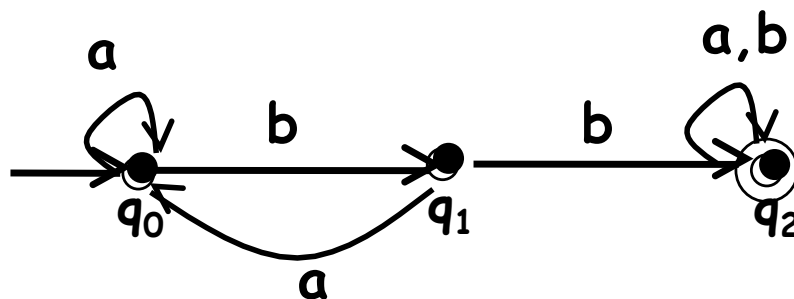
Las producciones se obtienen tomando a los estados del autómata como no terminales y los símbolos del alfabeto como terminales

# Lenguajes regulares

---

**Teorema.** Dado un autómata  $M$ , existe una gramática  $G$  tal que  $L(M)=L(G)$

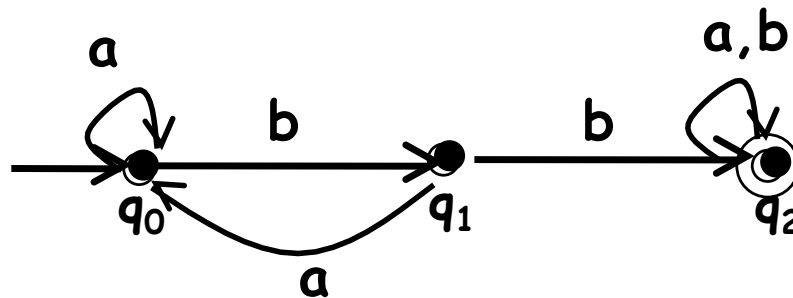
Las producciones se obtienen tomando a los estados del autómata como no terminales y los símbolos del alfabeto como terminales



# Lenguajes regulares

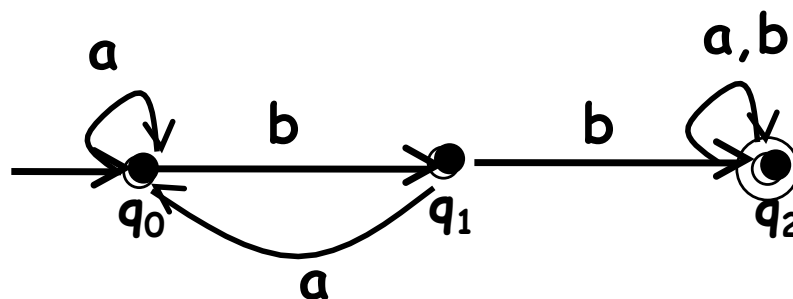
---

**Teorema.** Dado un autómata  $M$ , existe una gramática  $G$  tal que  $L(M)=L(G)$



# Lenguajes regulares

**Teorema.** Dado un autómata  $M$ , existe una gramática  $G$  tal que  $L(M)=L(G)$



El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_0 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_0 \mid bq_2$$

$$q_2 \rightarrow aq_2 \mid bq_2 \mid \varepsilon$$



$$S \rightarrow aS \mid bA$$

$$A \rightarrow aS \mid bB$$

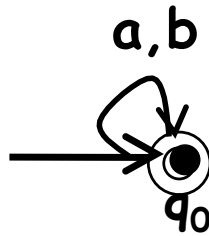
$$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$$



# Lenguajes regulares

---

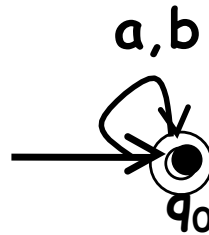
- Autómata que reconoce  $(a \cup b)^*$



# Lenguajes regulares

---

- Autómata que reconoce  $(a \cup b)^*$



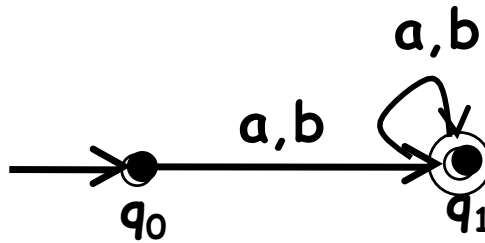
- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_0 | bq_0 | \varepsilon \quad \Rightarrow \quad S \rightarrow aS | bS | \varepsilon$$

# Lenguajes regulares

---

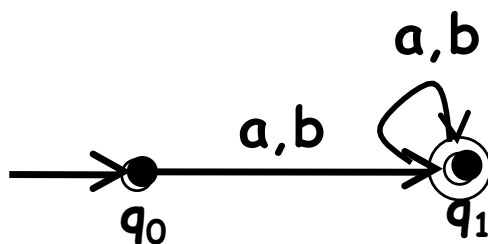
- Autómata que reconoce  $(a \cup b)^+$



# Lenguajes regulares

---

- Autómata que reconoce  $(a \cup b)^+$



- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_1 \mid \varepsilon$$



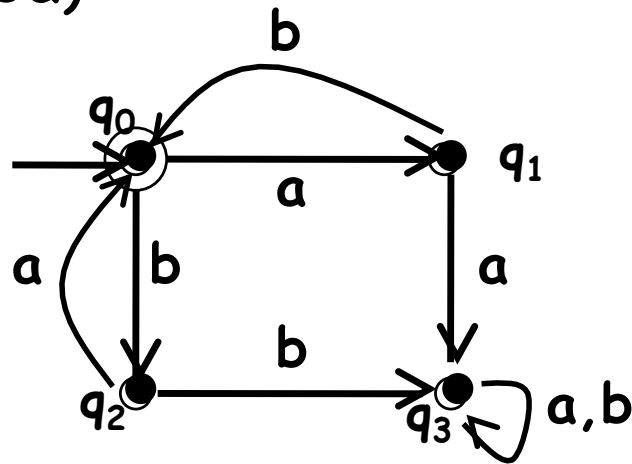
$$S \rightarrow aA \mid bA$$

$$A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$$

# Lenguajes regulares

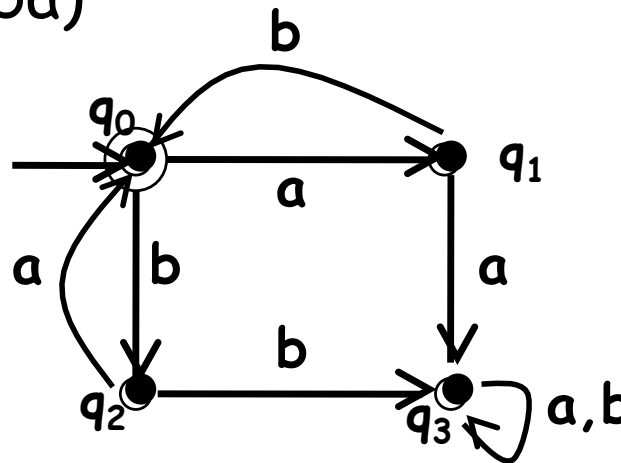
---

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $(ab \cup ba)^*$



# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $(ab \cup ba)^*$



- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$$

$$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$$

$$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$$



$$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$$

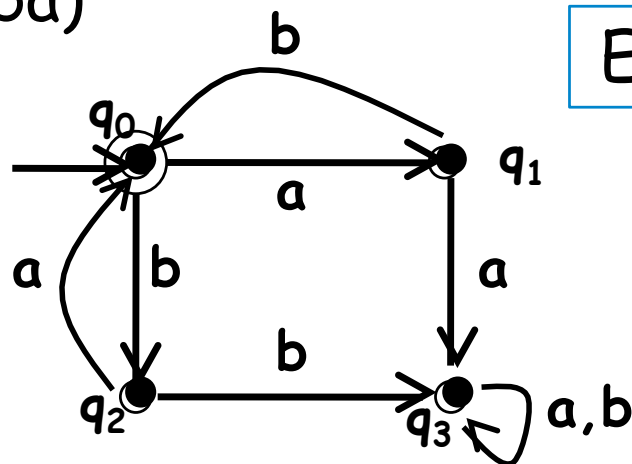
$$A \rightarrow bS | aC$$

$$B \rightarrow aS | bC$$

$$C \rightarrow aC | bC$$

# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $(ab \cup ba)^*$



Evalúe la cadena **aab**

- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$$

$$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$$

$$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$$



$$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$$

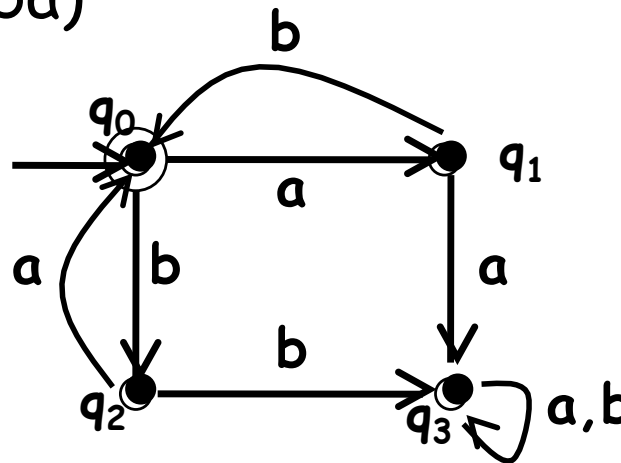
$$A \rightarrow bS | aC$$

$$B \rightarrow aS | bC$$

$$C \rightarrow aC | bC$$

# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $(ab \cup ba)^*$



La cadena **aab**  
no se genera por  
la gramática

- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$$

$$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$$

$$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$$



$$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$$

$$A \rightarrow bS | aC$$

$$B \rightarrow aS | bC$$

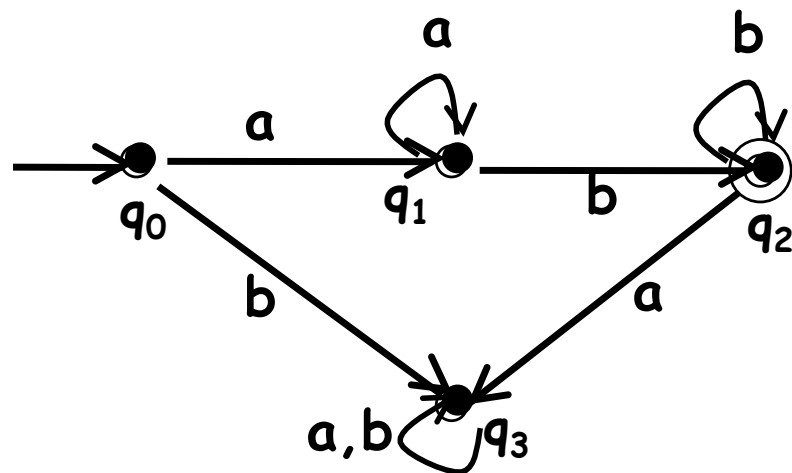
$$C \rightarrow aC | bC$$



# Lenguajes regulares

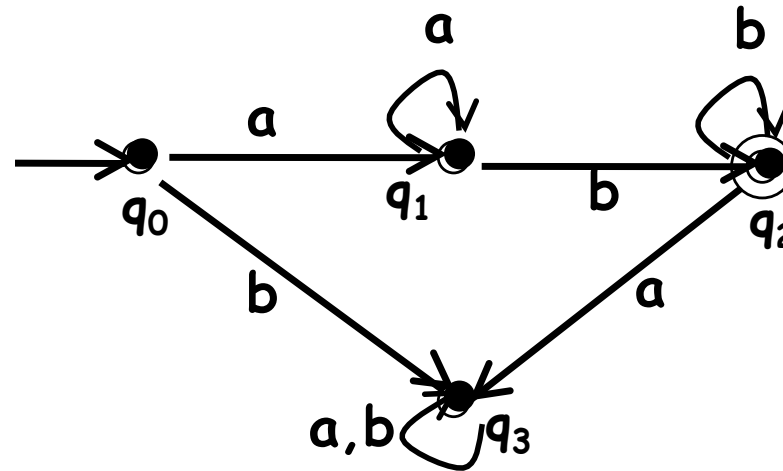
---

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $a^+b^+$



# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce  $a^+b^+$



- El autómata  $M$  induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_3$$

$$q_1 \rightarrow aq_1 | bq_2$$

$$q_2 \rightarrow bq_2 | \varepsilon | aq_3$$

$$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$$



$$S \rightarrow aA | bC$$

$$A \rightarrow aA | bB$$

$$B \rightarrow bB | \varepsilon | aC$$

$$C \rightarrow aC | bC$$

# Lenguajes regulares

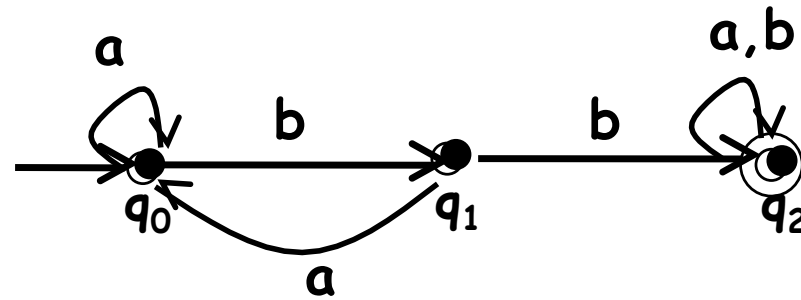
**Teorema.** Dada una gramática regular  $G$ , existe un autómata  $M$ , tal que  $L(M)=L(G)$

$S \rightarrow aS | bA$

$A \rightarrow aS | bB$

$B \rightarrow aB | bB | \varepsilon$

Gramática  $G$



Autómata  $M$

# Lenguajes regulares

---

**Teorema.** Dada una gramática regular  $G$ , existe un autómata  $M$ , tal que  $L(M)=L(G)$

La construcción del autómata se realiza utilizando las producciones teniendo en cuenta que los símbolos no terminales corresponden con estados y los terminales con transiciones

# Lenguajes regulares

---

**Teorema.** Dada una gramática regular  $G$ , existe un autómata  $M$ , tal que  $L(M)=L(G)$

La construcción del autómata se realiza utilizando las producciones teniendo en cuenta que los símbolos no terminales corresponden con estados y los terminales con transiciones

$$S \rightarrow aS | bA$$

$$A \rightarrow aB | bB | \varepsilon$$

$$B \rightarrow aB | bB$$

# Lenguajes regulares

---

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aS | bA$$

$$A \rightarrow aB | bB | \varepsilon$$

$$B \rightarrow aB | bB$$

# Lenguajes regulares

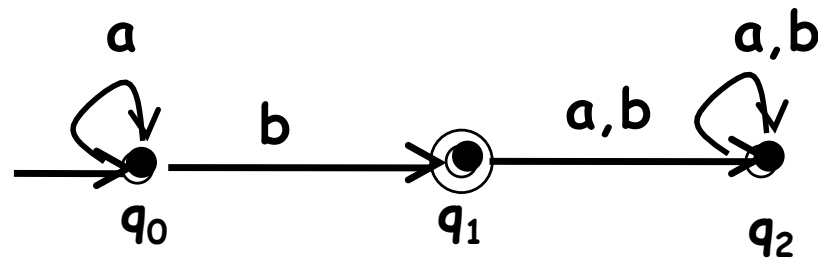
---

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aS \mid bA$$

$$A \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aB \mid bB$$



# Lenguajes regulares

---

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aB | bA | \varepsilon$$
$$A \rightarrow abaS$$
$$B \rightarrow babS$$



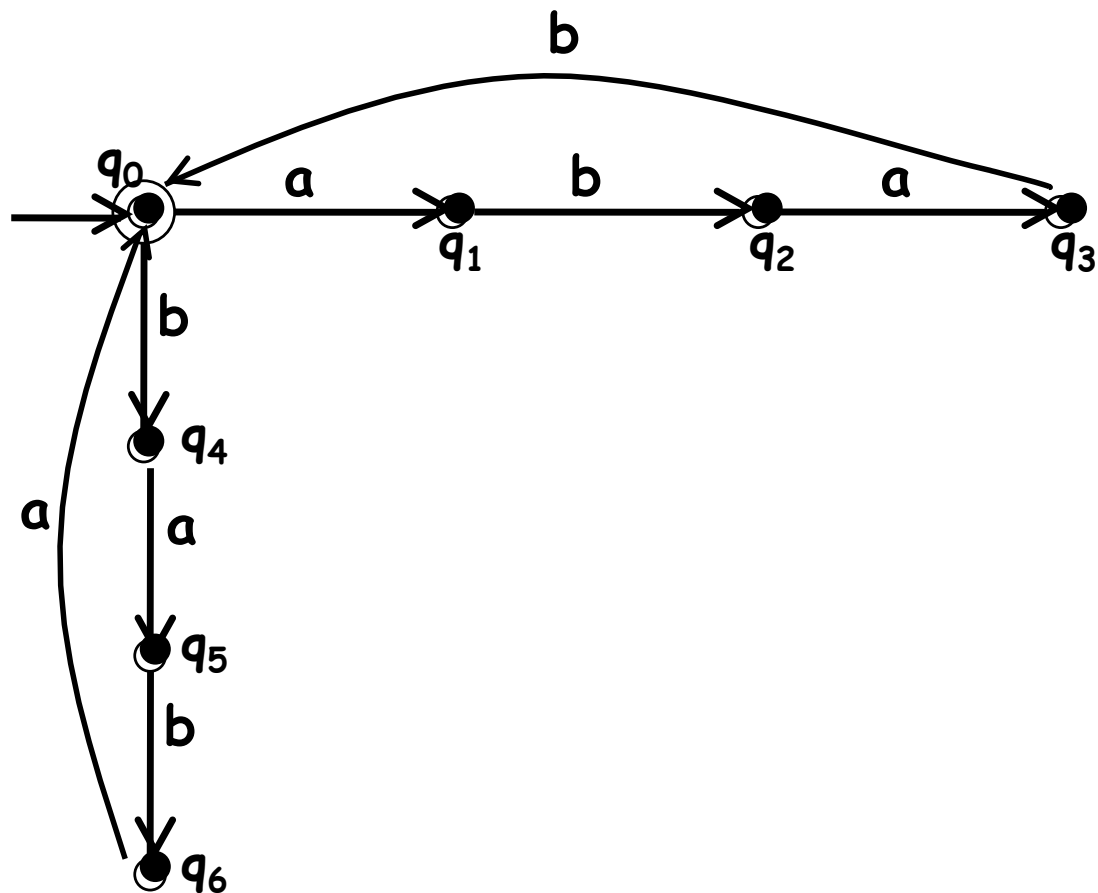
# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$S \rightarrow aB | bA | \varepsilon$

$A \rightarrow abaS$

$B \rightarrow babS$



# Lenguajes regulares

---

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aA | \varepsilon$$

$$A \rightarrow abA | baB | \varepsilon$$

$$B \rightarrow aB | bA$$