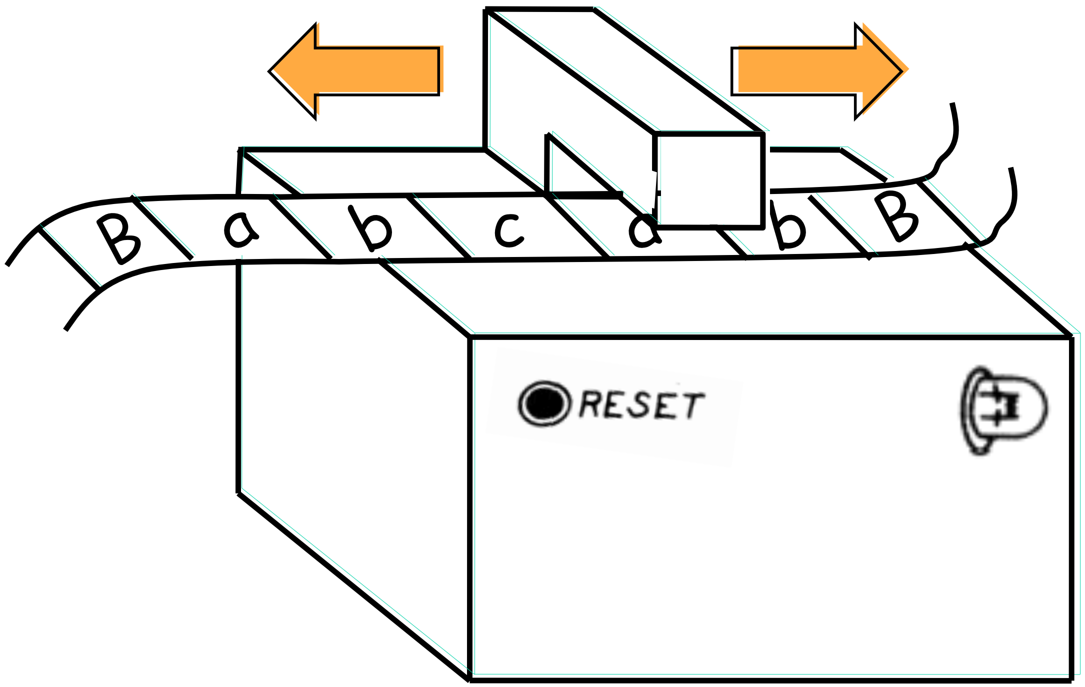
Fundamentos de Algoritmos y Computabilidad

* Máquina de Turing multicinta
* Máquina de Turing multipista
* Máquina de Turing universal
* Lenguajes generados por una máquina de Turing

Modificaciones de las máquinas de Turing

- Máquina de Turing multicinta
- Máquina de Turing multipista

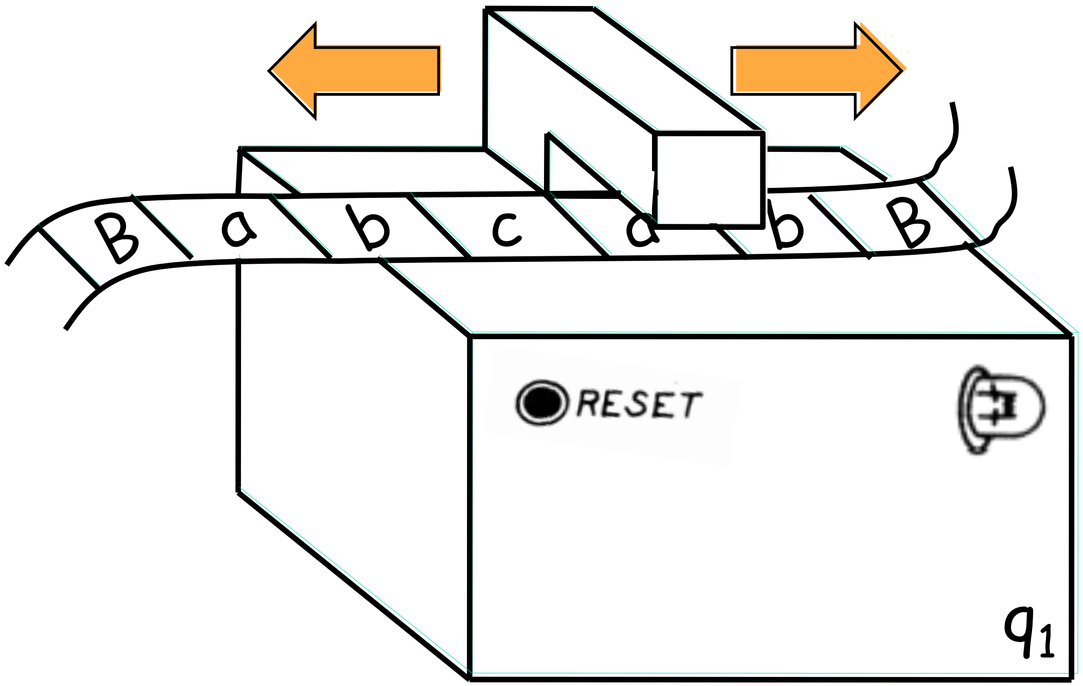
Máquina de Turing

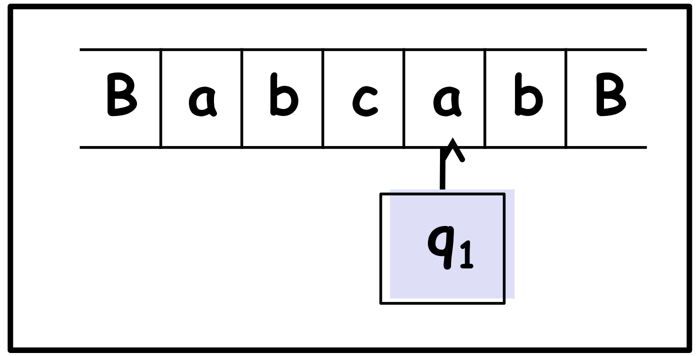


Máquina de Turing con **una sola cinta**

Máquinas de Turing

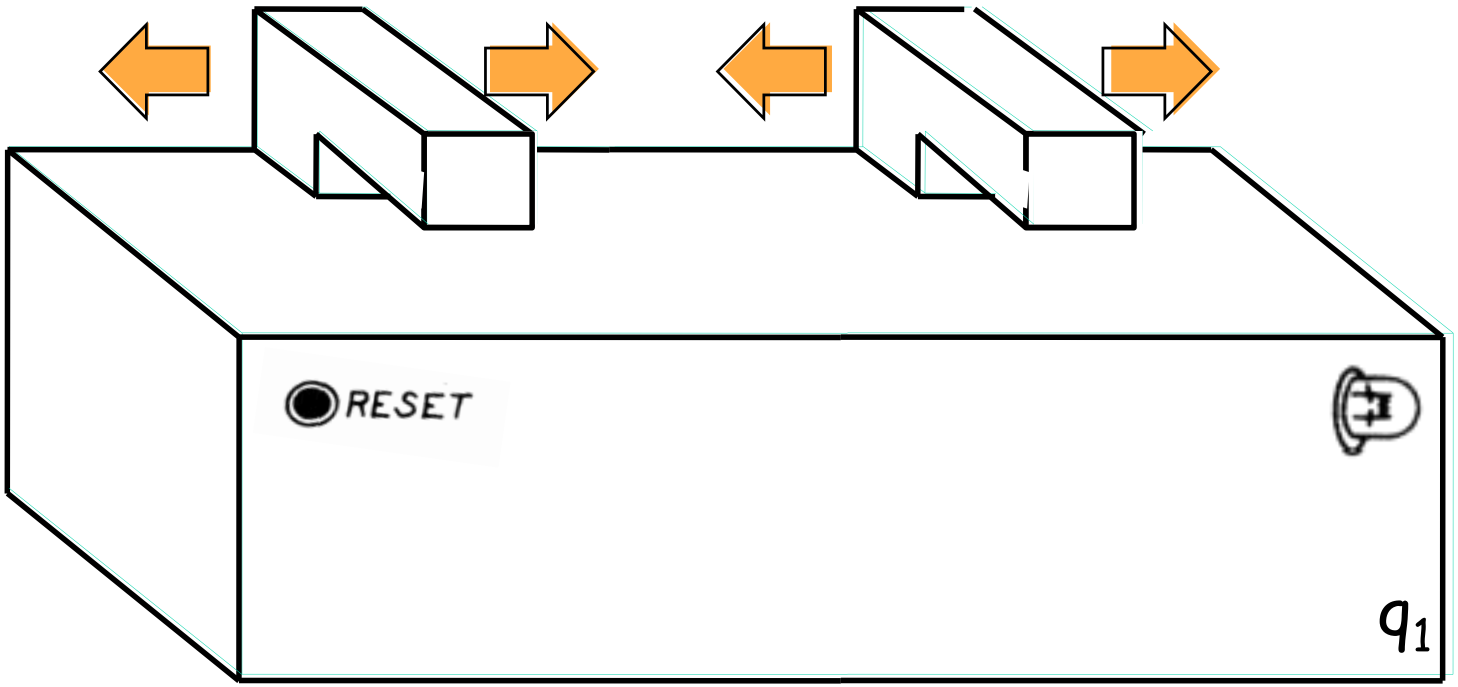
Máquina de Turing





Máquina de Turing con **una sola cinta**

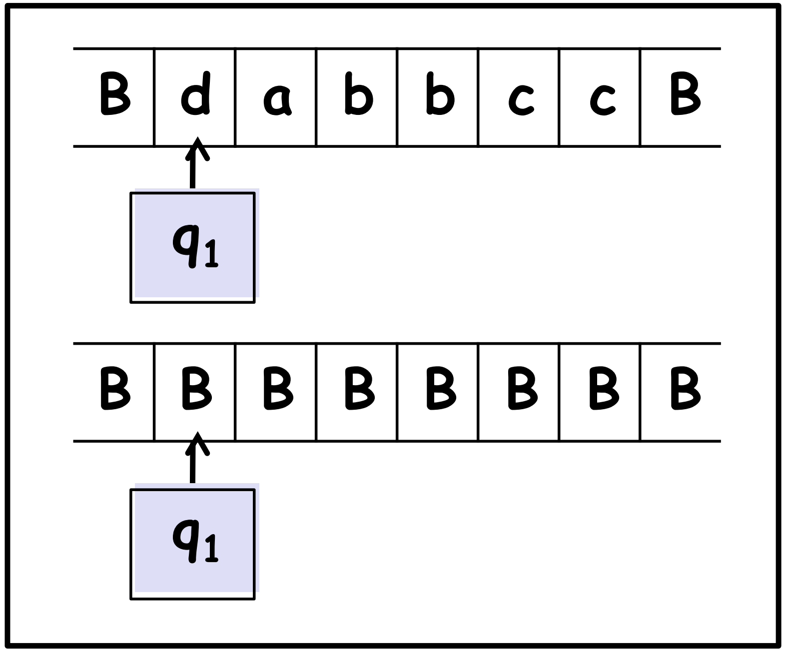
Máquina multicinta



- **Máquina multicinta con 2 cintas**. Cada cinta tiene su propia cabeza de lectura/escritura

Máquina multicinta

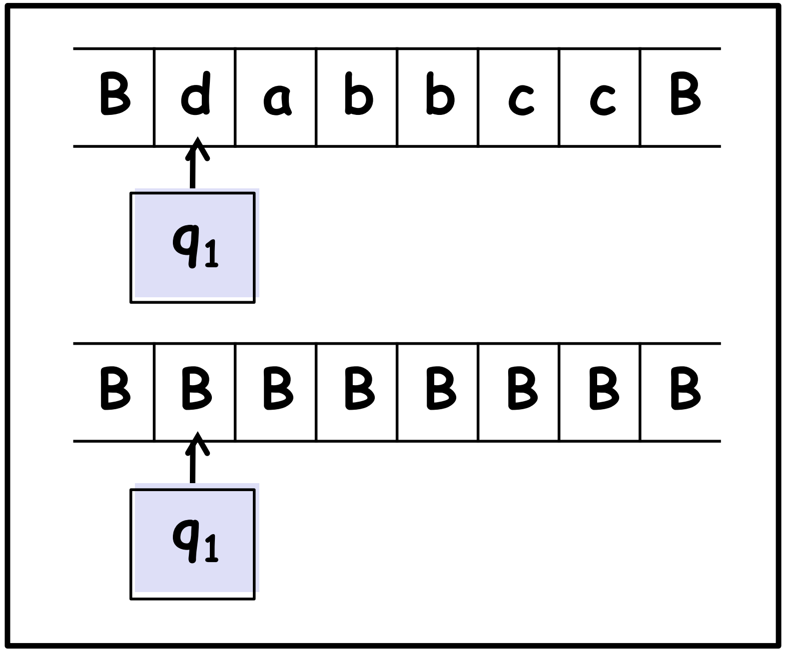
- Tiene varias cintas, cada una con su propia cabeza de lectura/escritura



Máquinas de Turing

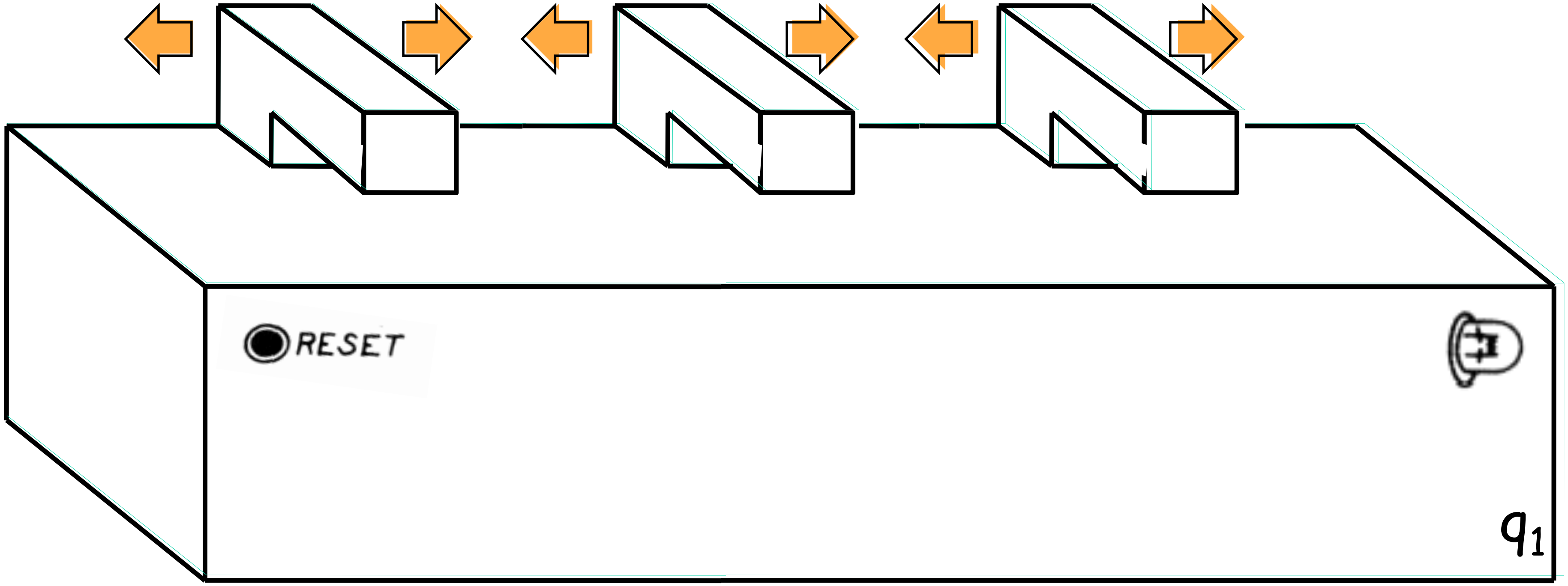
Máquina multicinta

• Tiene varias cintas, cada una con su propia cabeza de lectura/escritura



El **estado de la máquina** es el mismo en todas las cintas

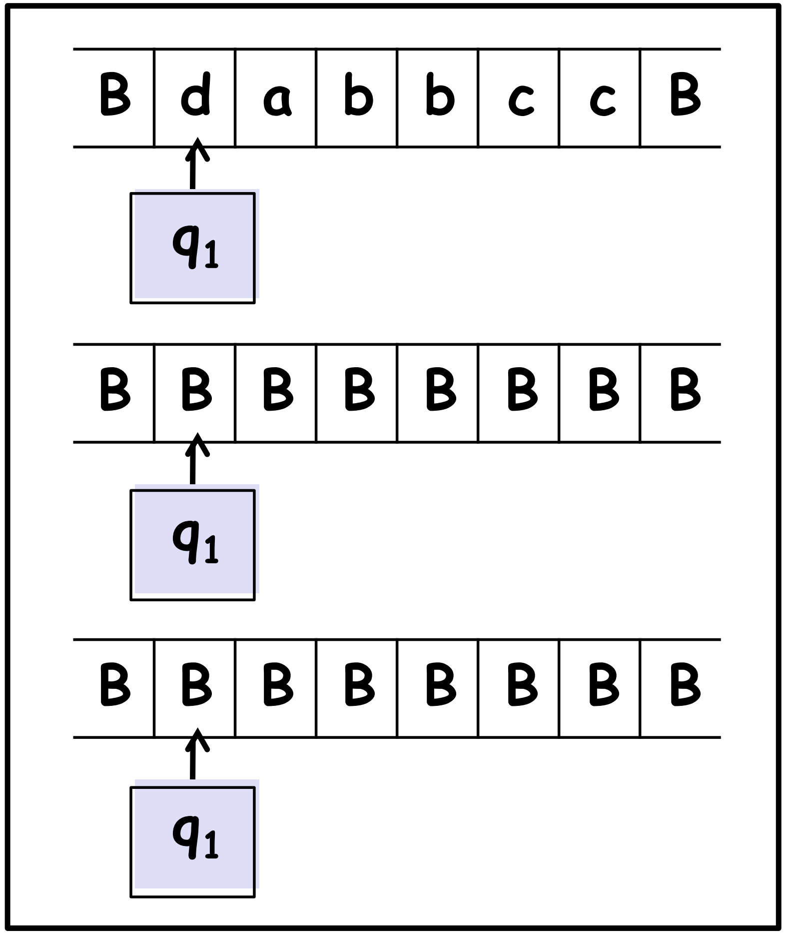
Máquina multicinta



• **Máquina multicinta con 3 cintas**. Cada cinta tiene su propia cabeza de lectura/escritura

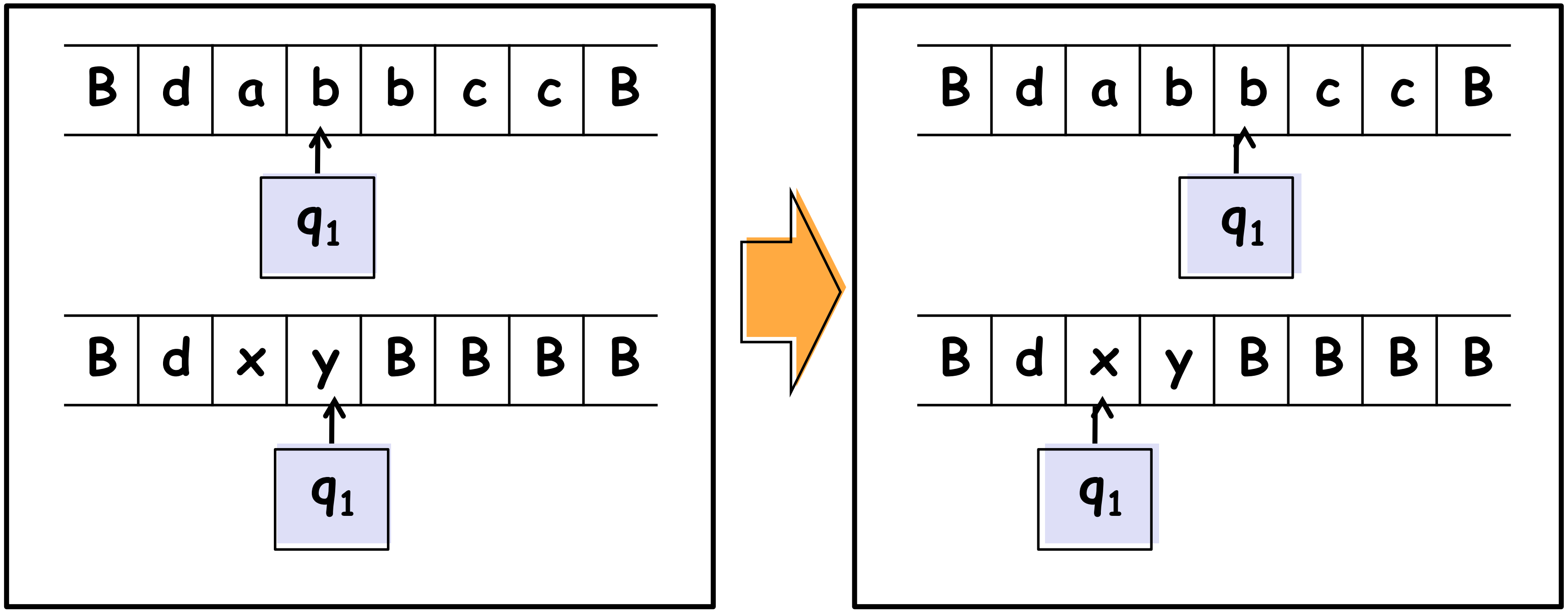
Máquinas de Turing

Una de las cintas inicia con la cadena de entrada y las otras con blancos. Éstas últimas sirven para colocar símbolos que permitan verificar que la cadena de entrada debe ser aceptada



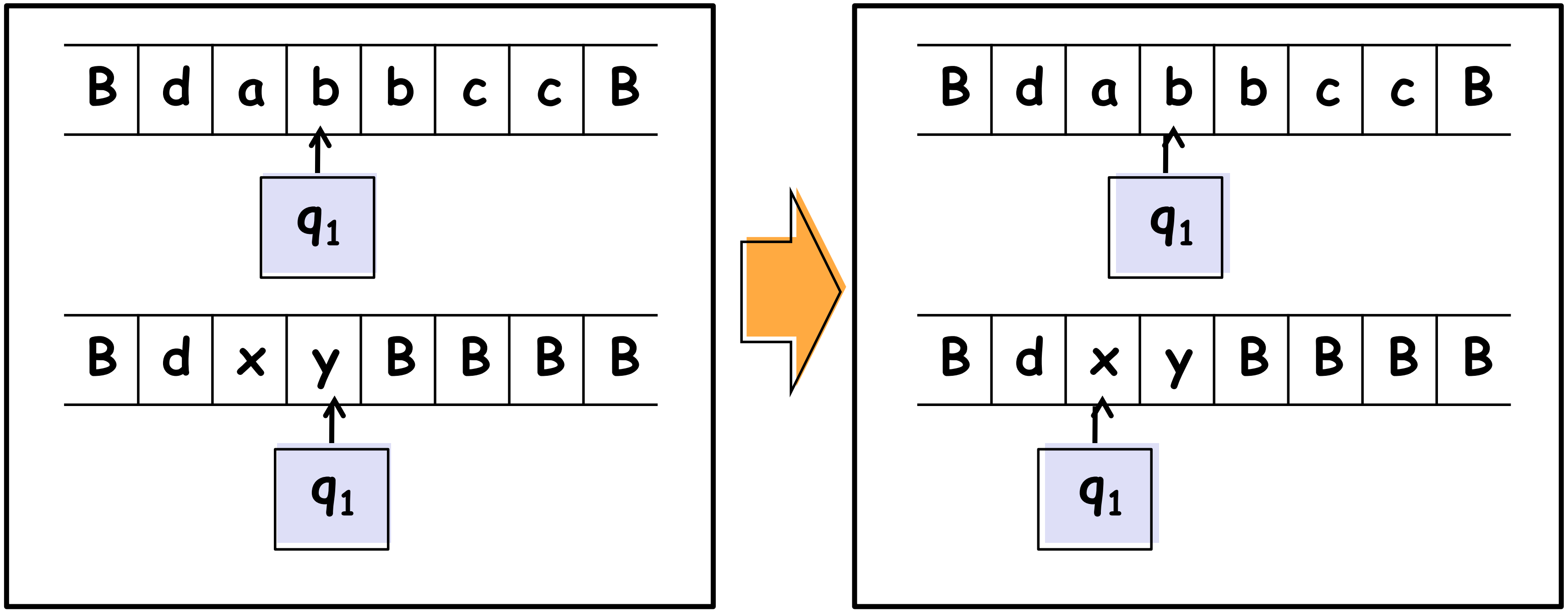
Máquina multicinta

- Cada cabeza puede avanzar en un sentido distinto



Máquina multicinta

- Una cabeza puede permanecer en su sitio. **Control estacionario**

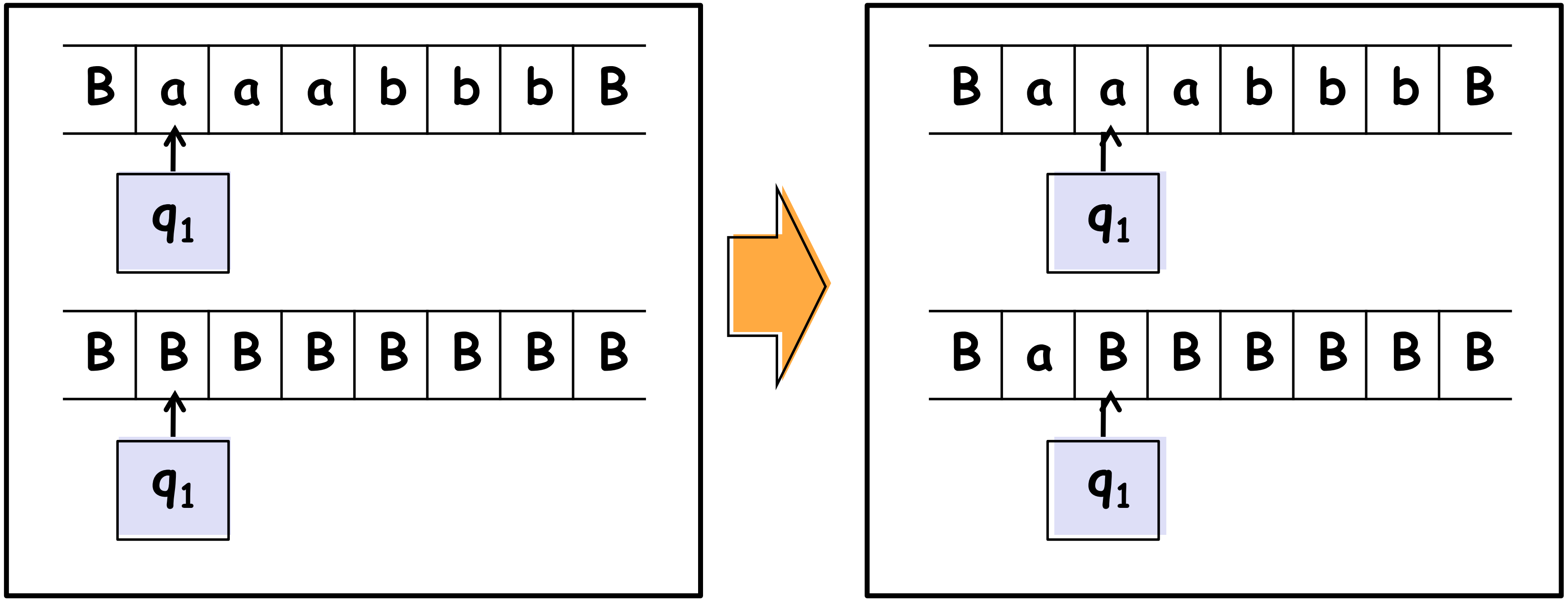


Máquina multicinta

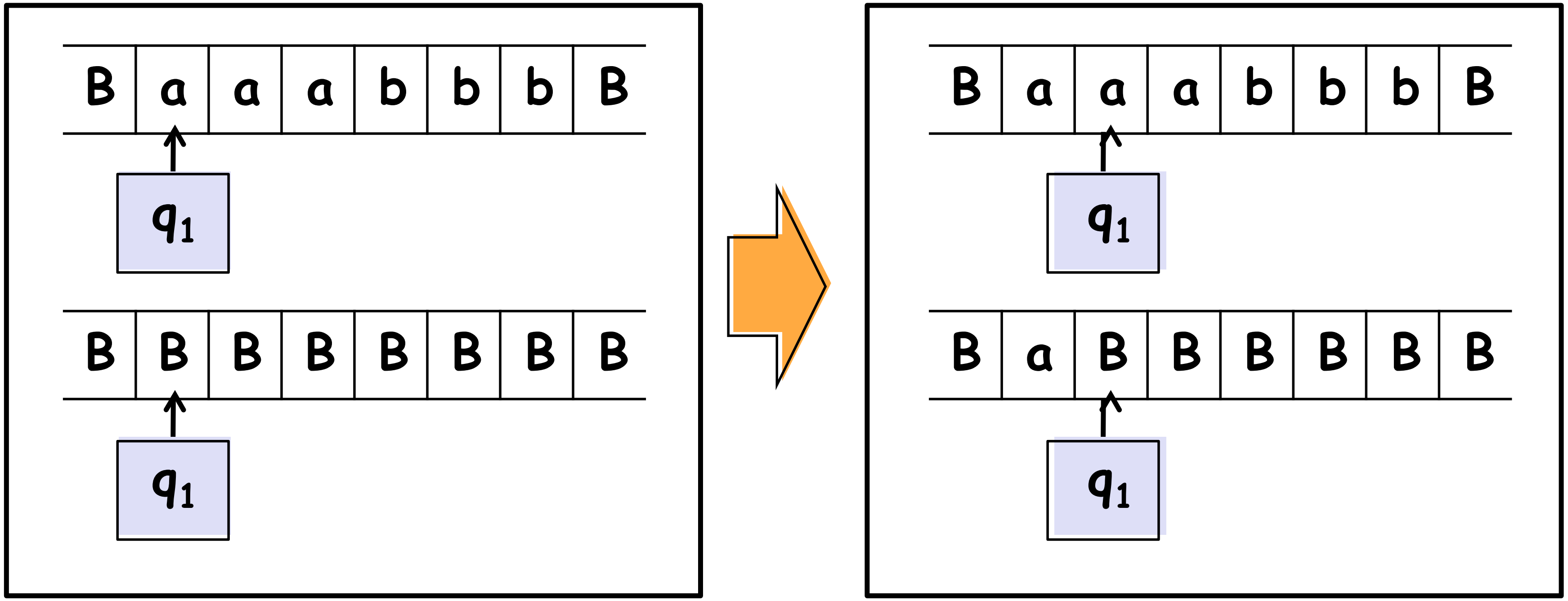
• La función de transición para una máquina de Turing con n cintas es de la forma:

$$\delta: Q \times \Gamma^n \rightarrow Q \times \Gamma^n \times \{L,R,S\}^n$$

Máquinas de Turing

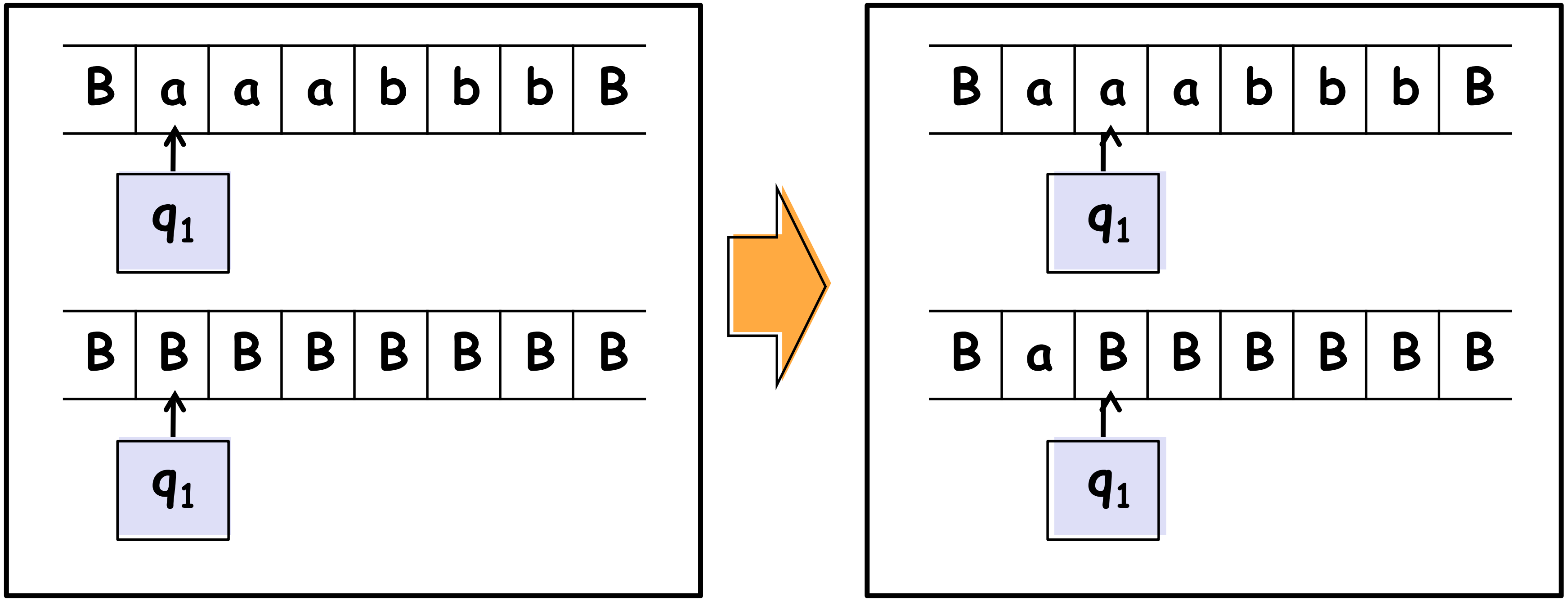


Máquinas de Turing



$\delta(q_1,(a,B))$

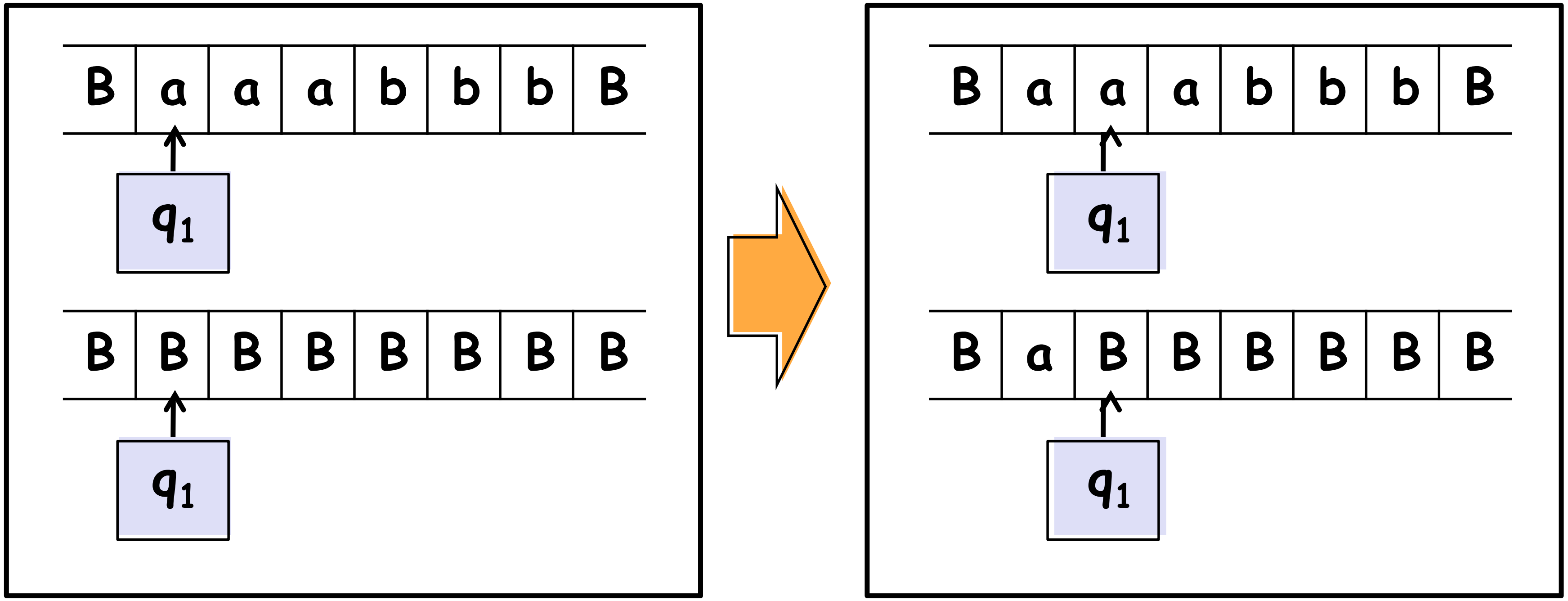
Máquinas de Turing



$\delta(q_1,(a,B))$

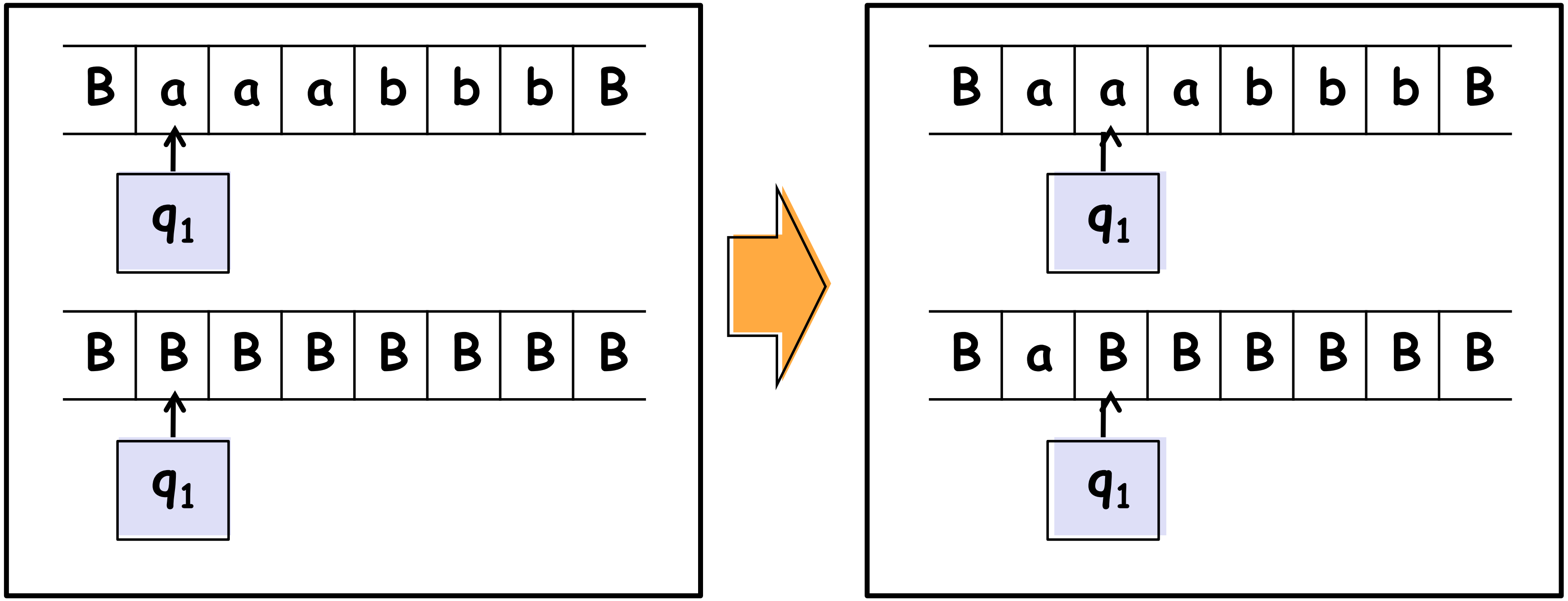
¿Qué debe indicar la transición?

Máquinas de Turing



$$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$$

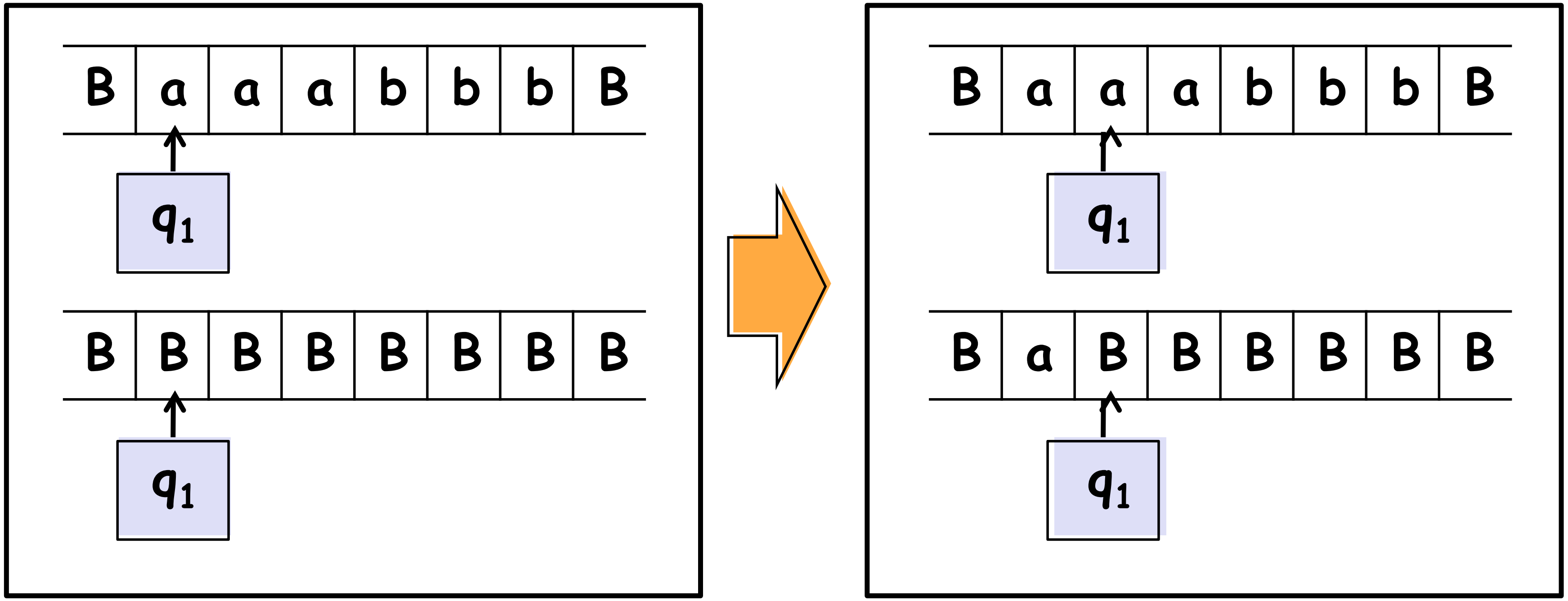
Máquinas de Turing



$$\delta(q_1,(\boxed{a},B))=(q_1,(\boxed{a},a),(\boxed{R},R))$$

En la cinta$_1$ se reemplaza a/a y se mueve a la derecha
Permanece en el estado q_1

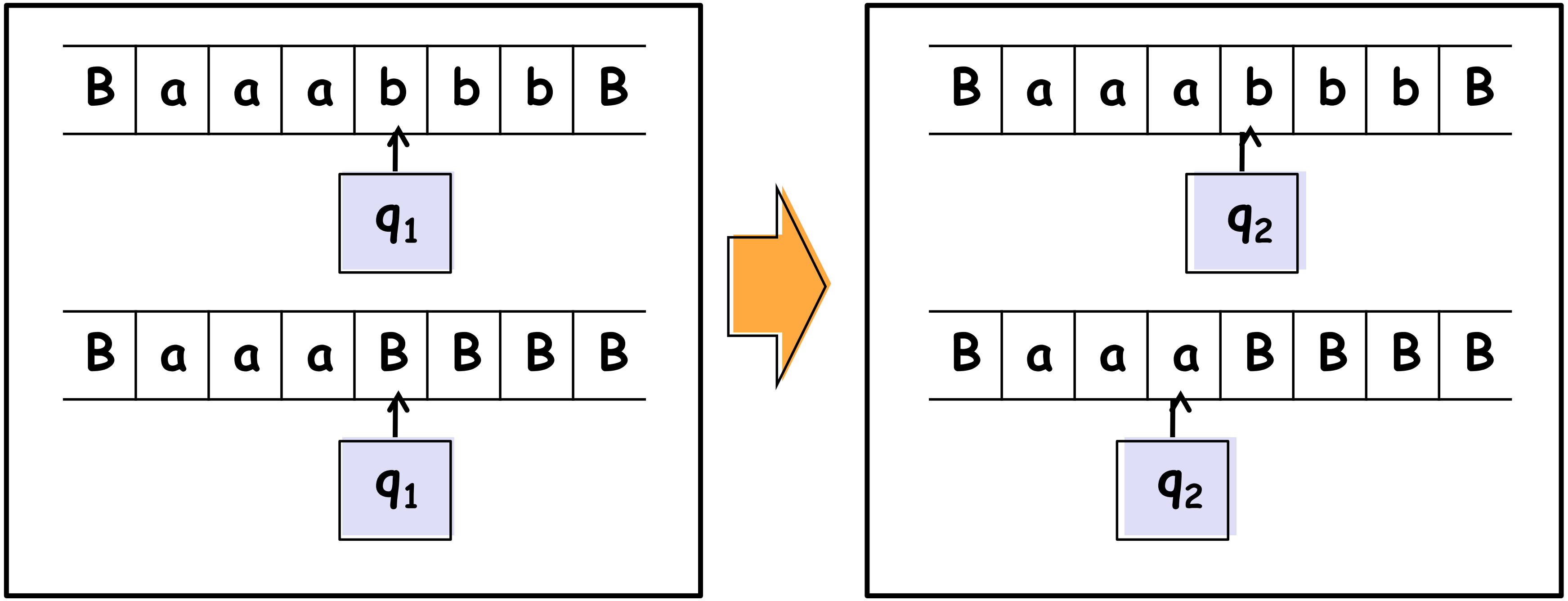
Máquinas de Turing



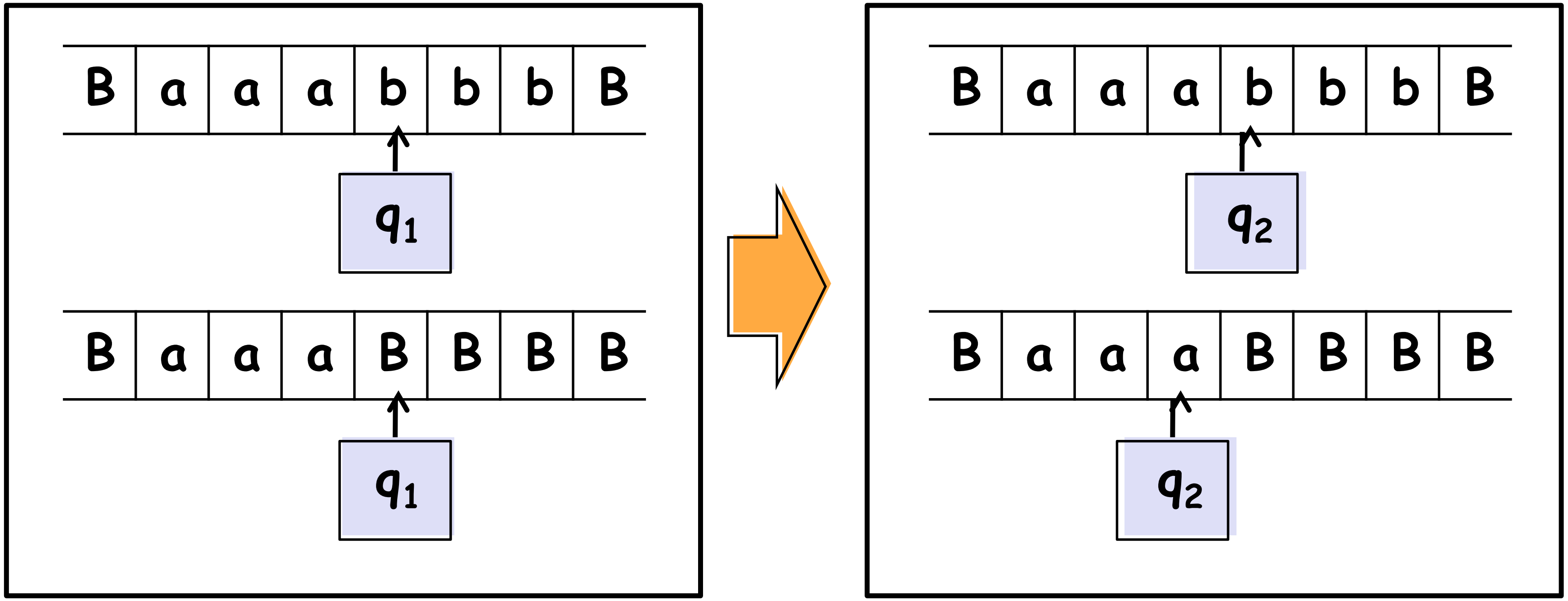
$$\delta(q_1,(a,\boxed{B}))=(q_1,(a,\boxed{a}),(R,\boxed{R}))$$

En la cinta$_2$ se reemplaza B/a y se mueve a la derecha
Permanece en el estado q_1

Máquinas de Turing

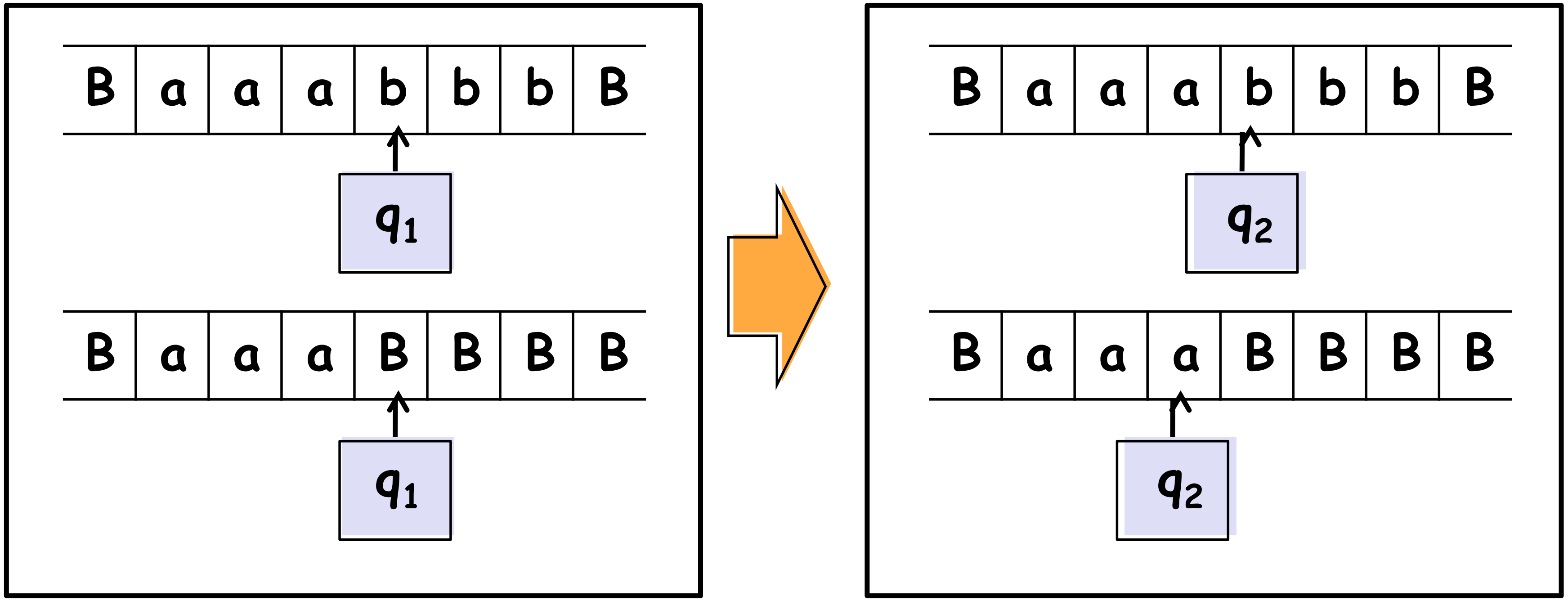


Máquinas de Turing



$$\delta(q_1,(b,B))=(q_2,(b,B),(S,L))$$

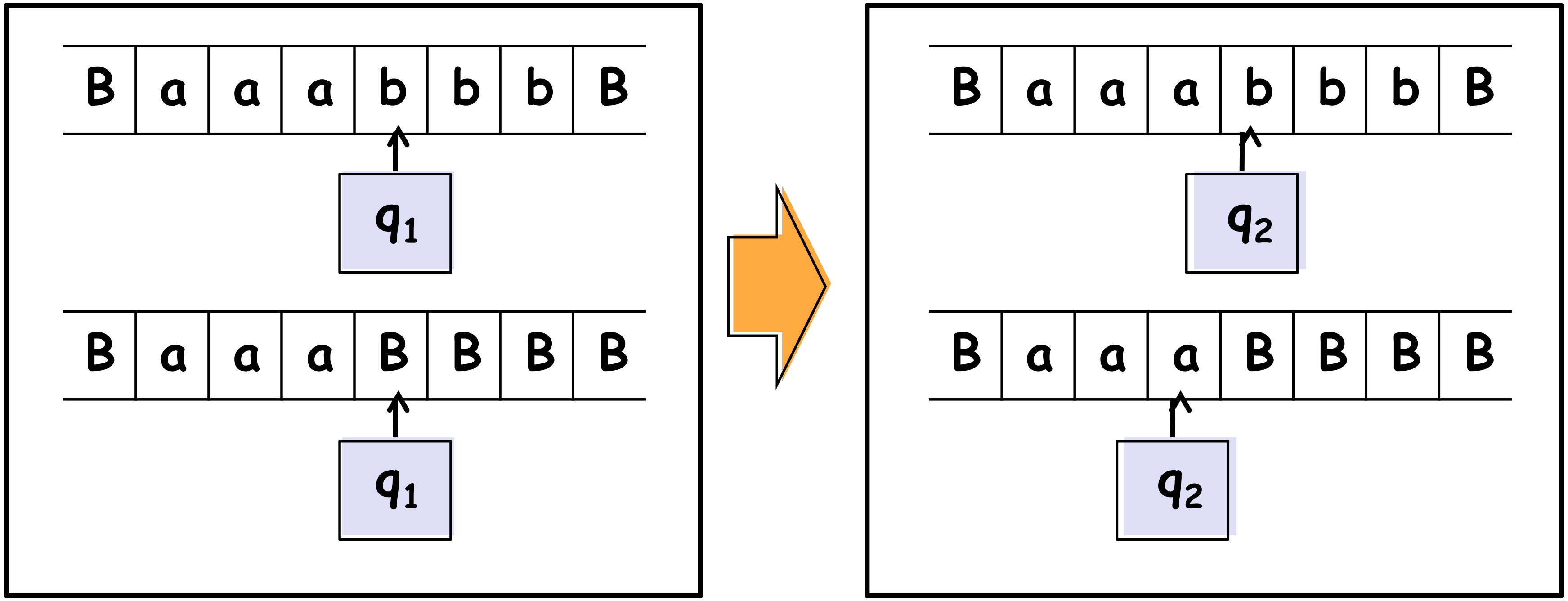
Máquinas de Turing



$$\delta(q_1,(\boxed{b},B))=(q_2,(\boxed{b},B),(\boxed{S},L))$$

En la $cinta_1$ se reemplaza b/b y se queda estacionaria la cabeza. Se pasa al estado q_2

Máquinas de Turing



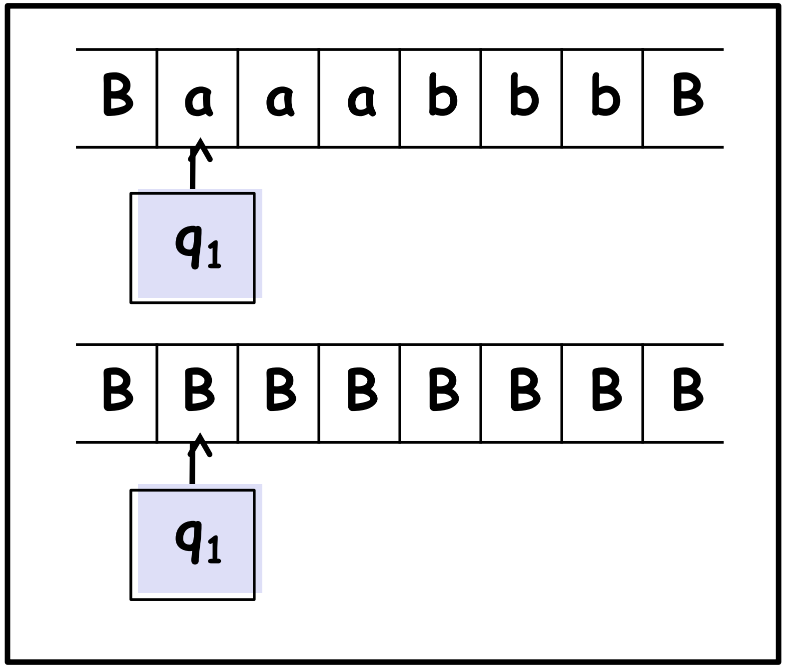
$$\delta(q_1,(b\boxed{,B}))=(q_2,(b\boxed{,B}),(S\boxed{,L}))$$

En la cinta$_2$ se reemplaza B/B y se mueve a la izquierda.
Se pasa al estado q_2

Máquinas de Turing

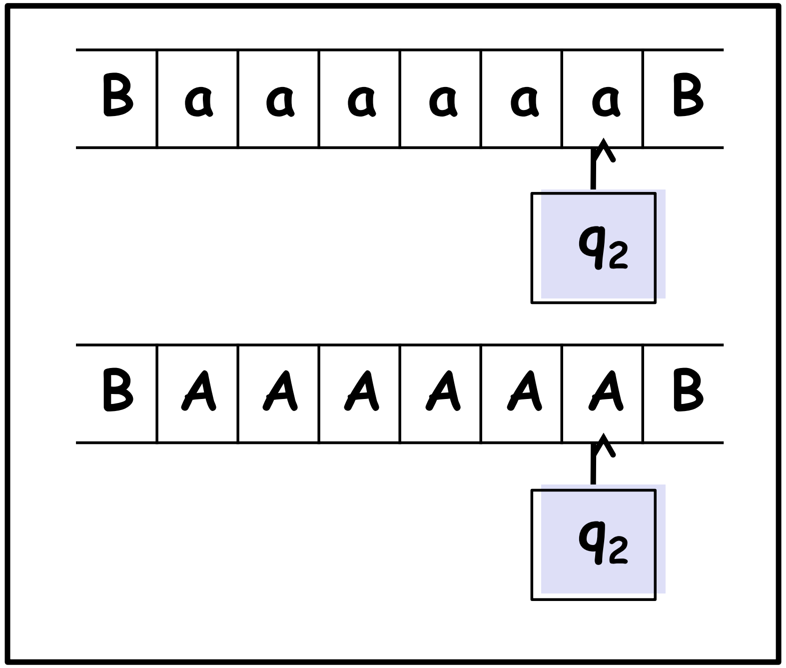
- Muestre el cómputo sobre la siguiente MT multicinta:

$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$
$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(L,L))$



Máquinas de Turing

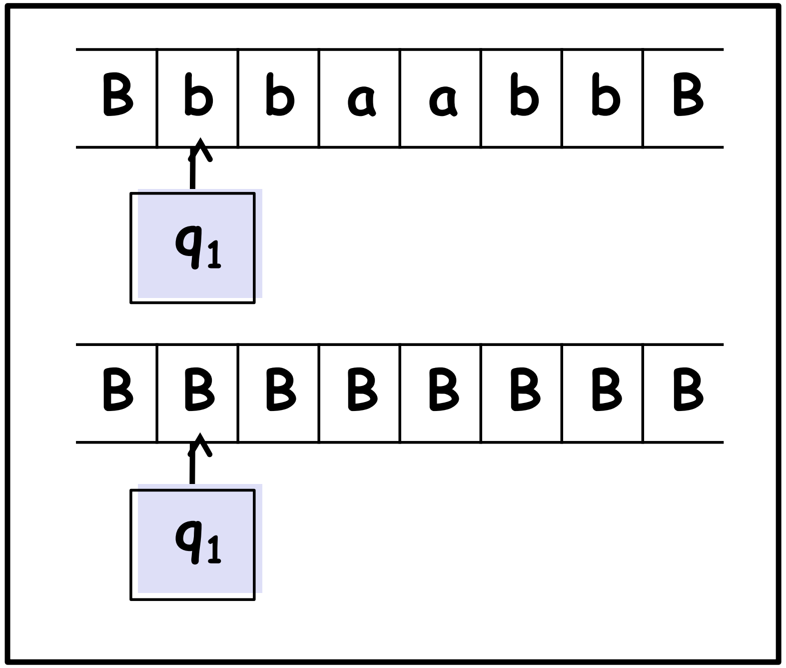
$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$
$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(L,L))$



Máquinas de Turing

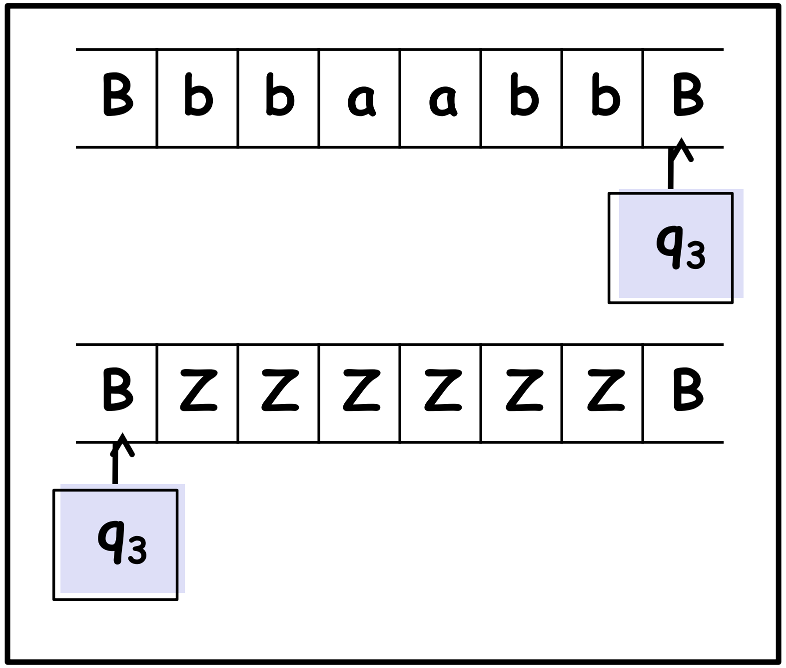
- Muestre el cómputo sobre la siguiente MT multicinta:

$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,X),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(b,Y),(R,R))$
$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,X))=(q_2,(B,Z),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,Y))=(q_2,(B,Z),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,B))=(q_3,(B,B),(S,S))$



Máquinas de Turing

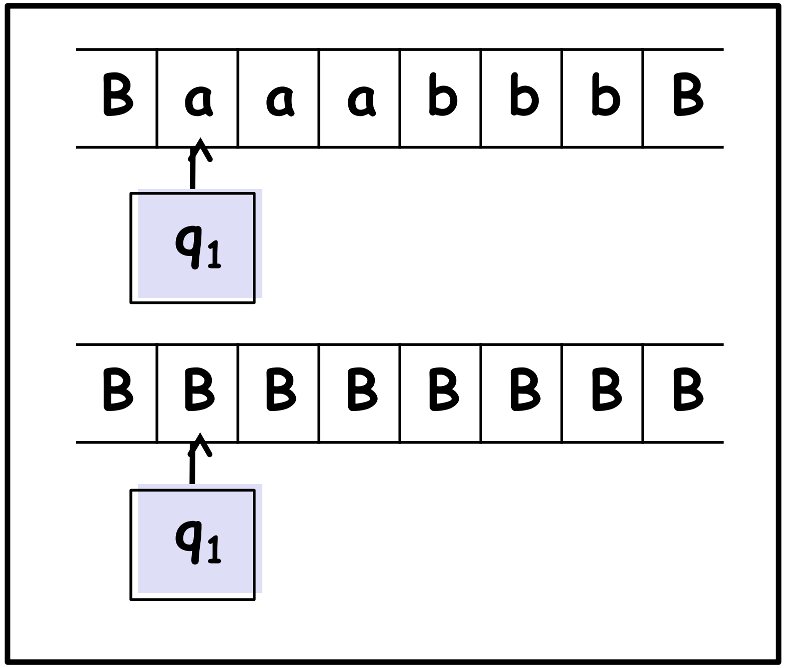
$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,X),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(b,Y),(R,R))$
$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,X))=(q_2,(B,Z),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,Y))=(q_2,(B,Z),(S,L))$
$\delta(q_2,(B,B))=(q_3,(B,B),(S,S))$



Máquinas de Turing

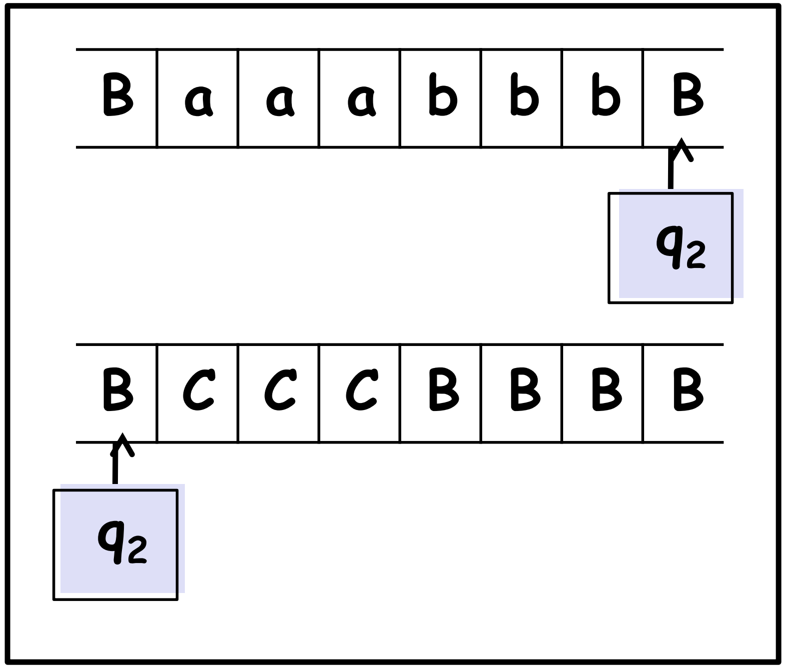
- Muestre el cómputo sobre la siguiente MT multicinta:

$$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$$
$$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(b,B),(S,L))$$
$$\delta(q_1,(b,A))=(q_1,(b,C),(R,L))$$
$$\delta(q_1,(B,A))=(q_1,(B,C),(S,L))$$
$$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(S,S))$$



Máquinas de Turing

$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,A),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_1,(b,B),(S,L))$
$\delta(q_1,(b,A))=(q_1,(b,C),(R,L))$
$\delta(q_1,(B,A))=(q_1,(B,C),(S,L))$
$\delta(q_1,(B,B))=(q_2,(B,B),(S,S))$

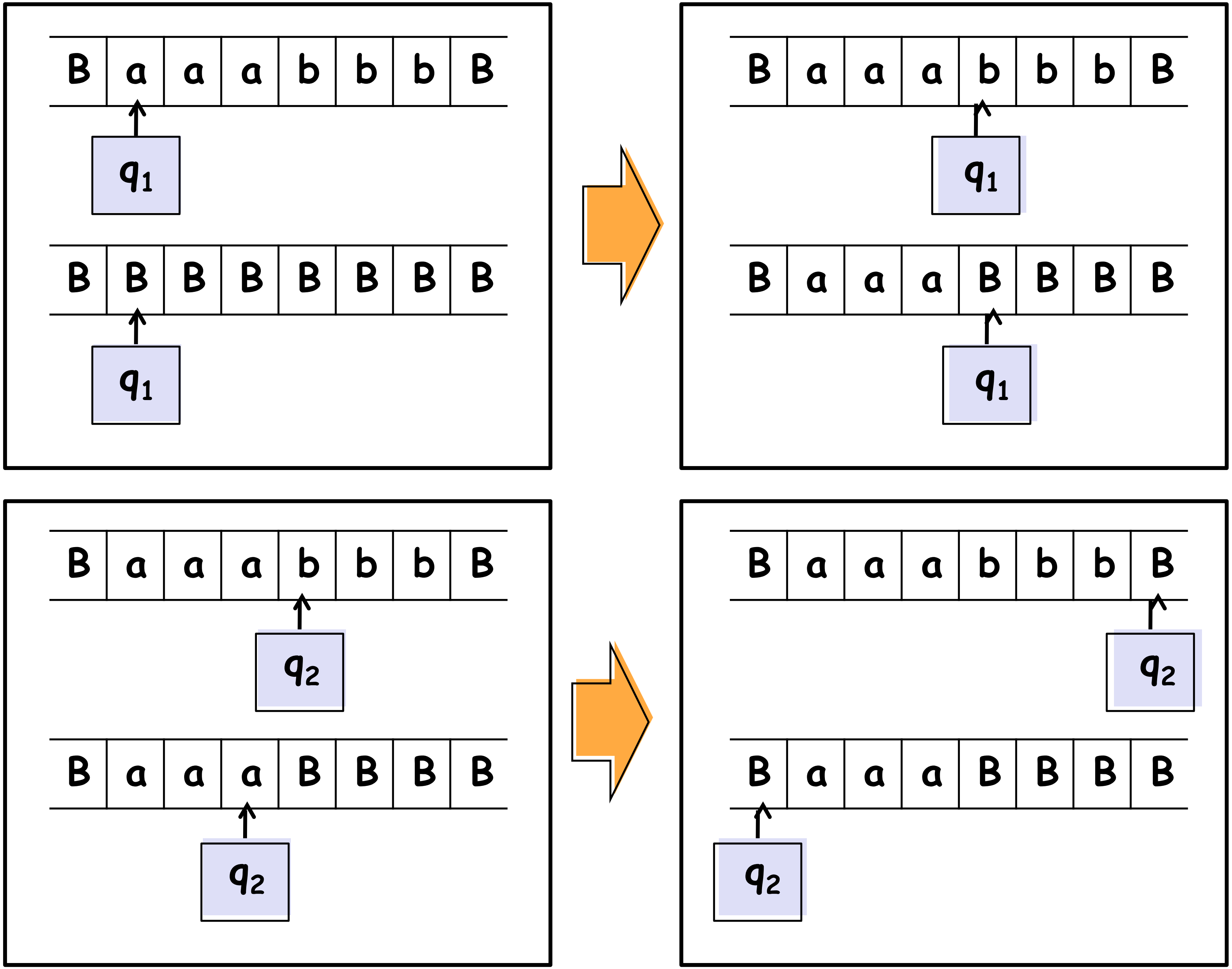


Máquinas de Turing

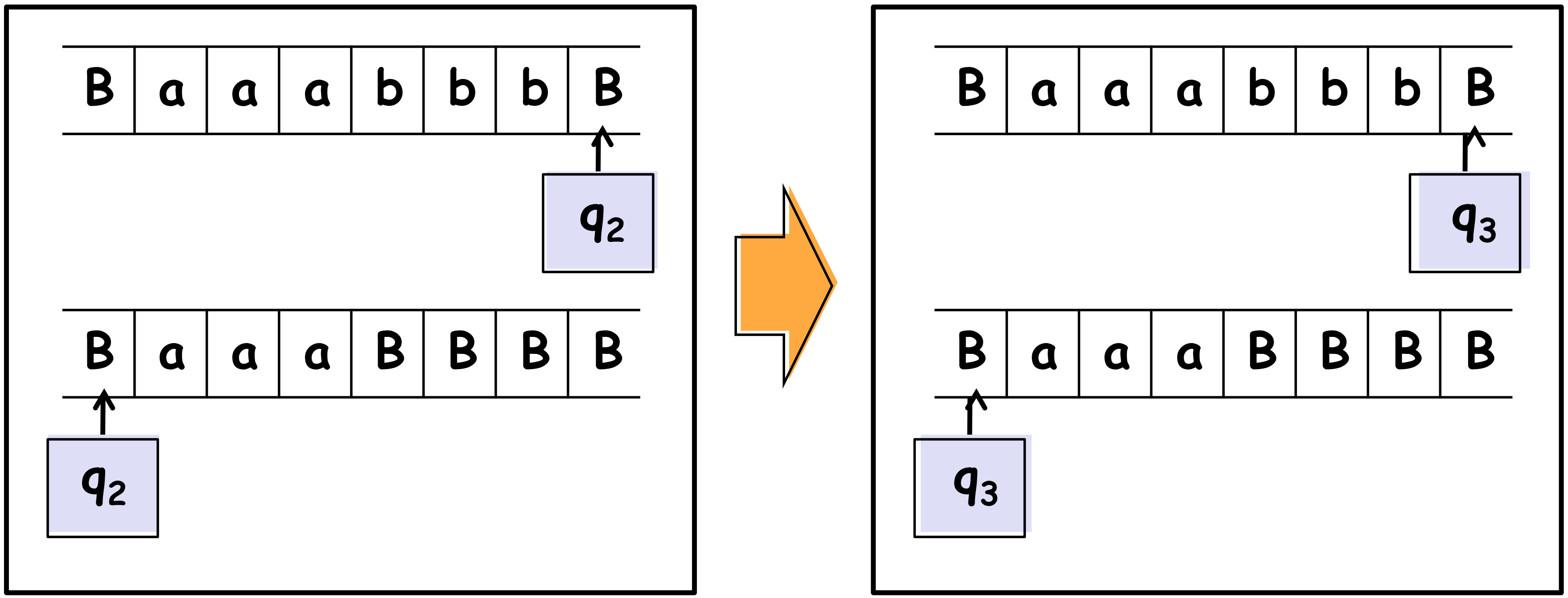
MT multicinta que acepte $a^n b^n$, $n \geq 1$

MT multicinta que acepte $a^n b^n$, $n \geq 1$

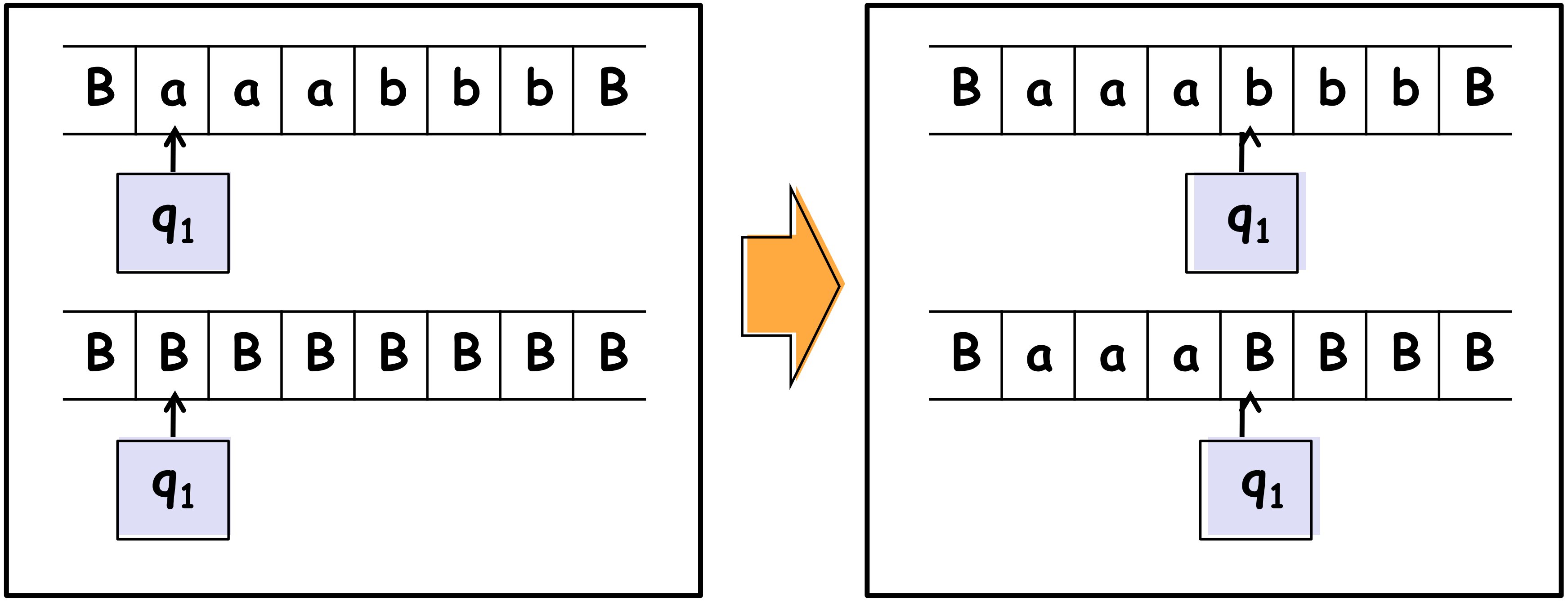
Idea: por cada a en la $cinta_1$ se escribe una a en la $cinta_2$. Cuando se llegue a la primera b, se seguirá desplazando hacia la derecha en la $cinta_1$ y hacia la izquierda la $cinta_2$. Solamente se avanza si hay una b en la $cinta_1$ y una a en la $cinta_2$. Cuando en ambas cintas se llegue al símbolo en blanco, se acepta



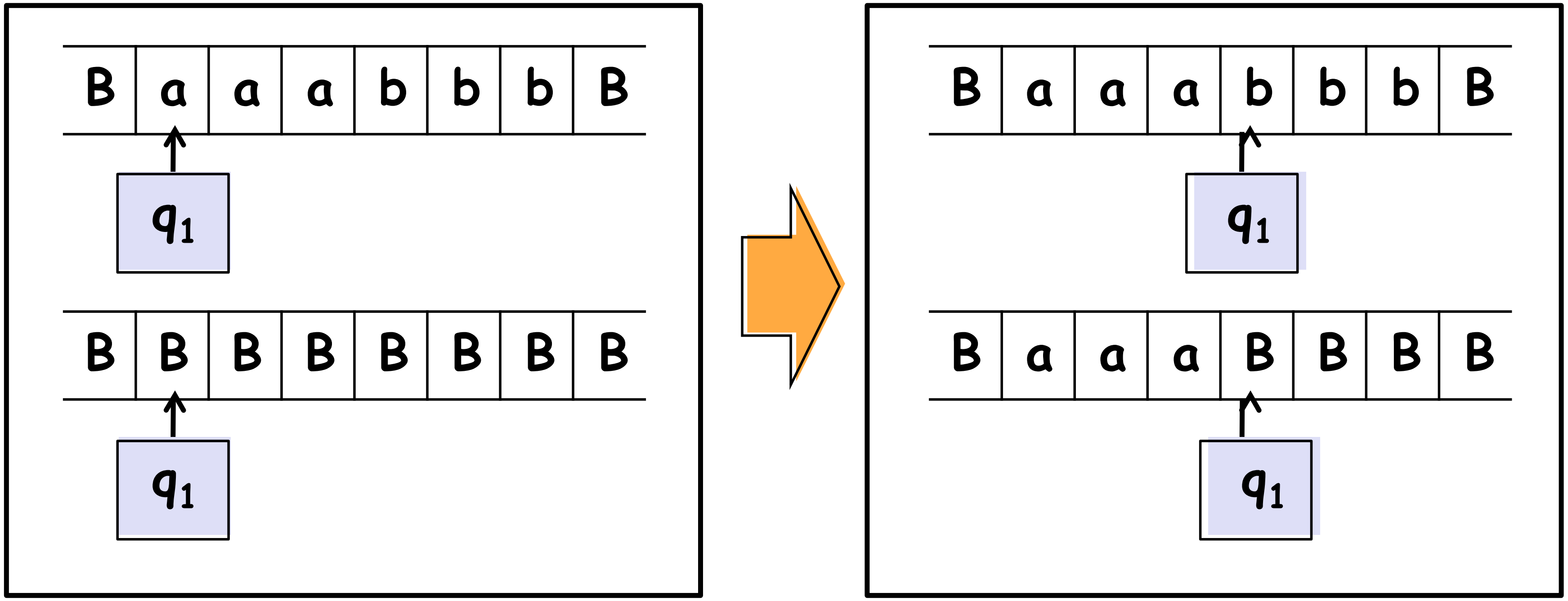
B a a a b b b B
q1
B B B B B B B B
q1
B a a a b b b B
q1
B a a a B B B B
q1
B a a a b b b B
q2
B a a a B B B B
q2
B a a a b b b B
q2
B a a a B B B B
q2



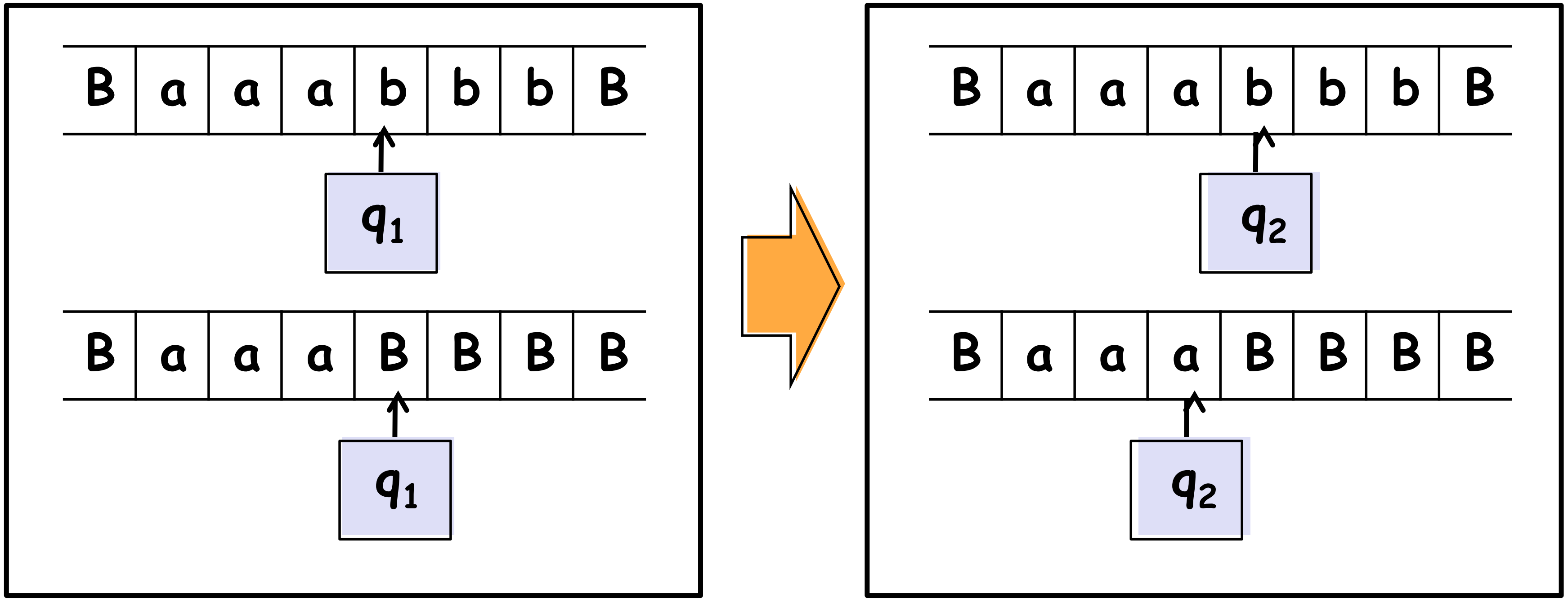
B a a a b b b B
q2
B a a a B B B B
q2
B a a a b b b B
q3
B a a a B B B B
q3



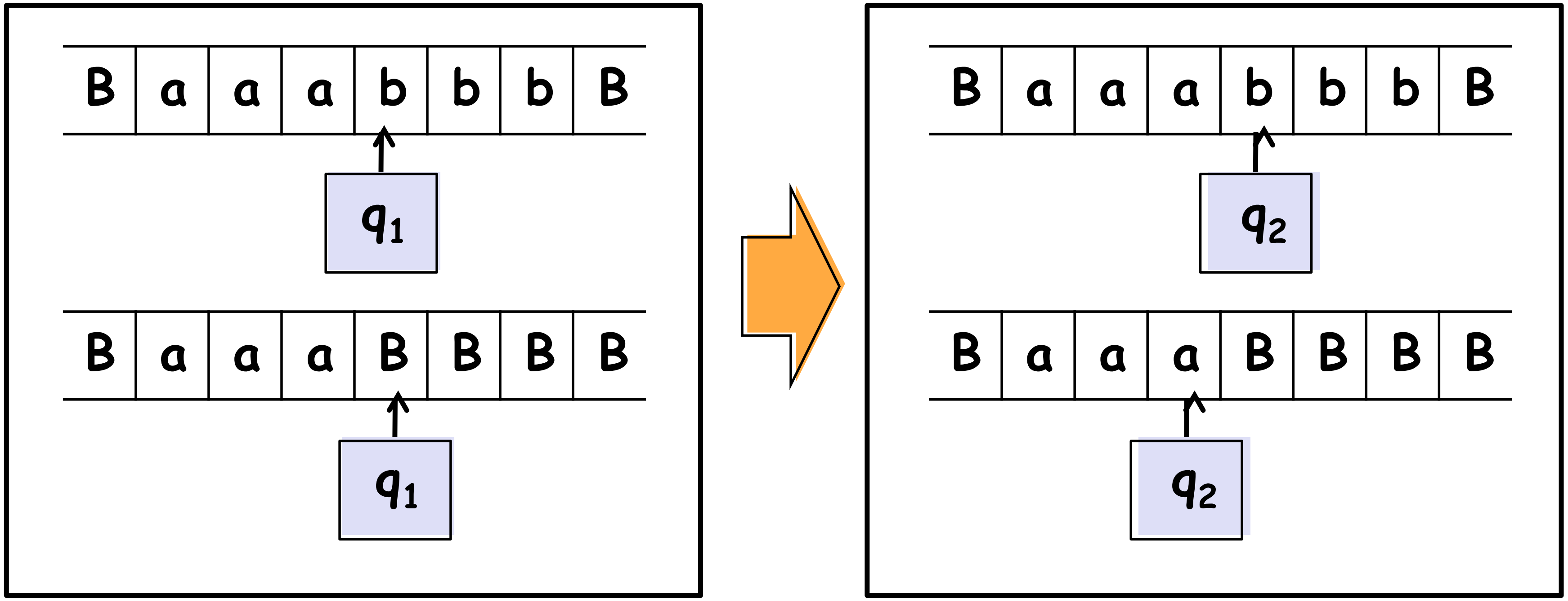
$\delta(q_1,(a,B)) = ?$



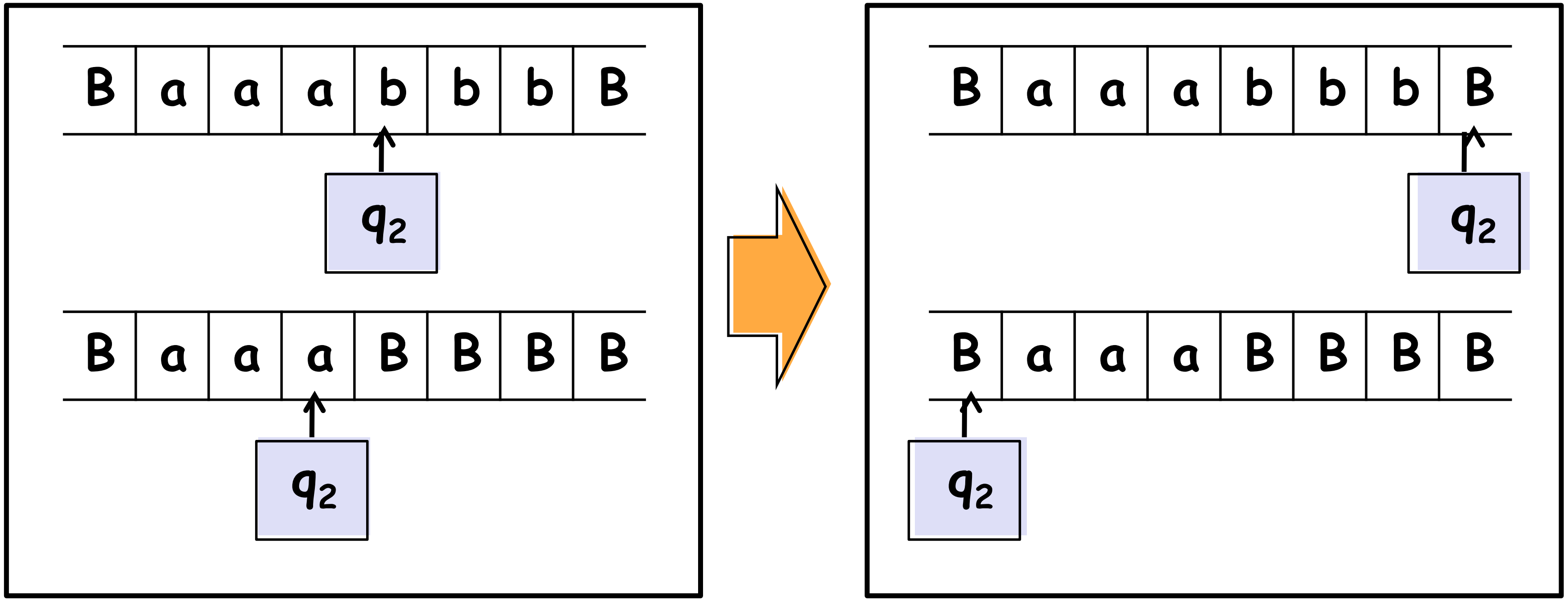
$$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$$



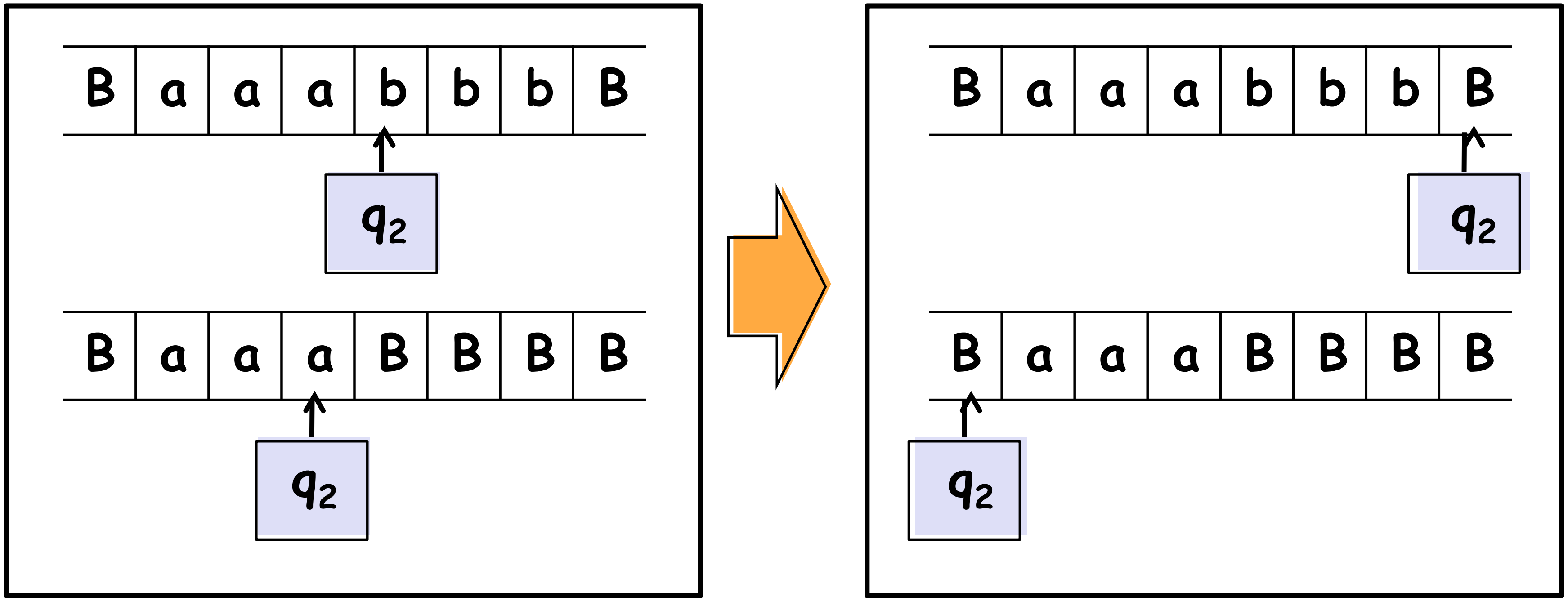
$\delta(q_1,(b,B)) = ?$



$$\delta(q_1,(b,B))=(q_2,(b,B),(S,L))$$



$\delta(q_2,(b,a))=?$
$\delta(q_2,(B,B))=?$



$$\delta(q_2,(b,a))=(q_2,(b,a),(R,L))$$
$$\delta(q_2,(B,B))=(q_3,(B,B),(S,S))$$

q_3 es un estado de aceptación

Máquinas de Turing

MT multicinta que acepte $a^n b^n$, $n \geq 1$

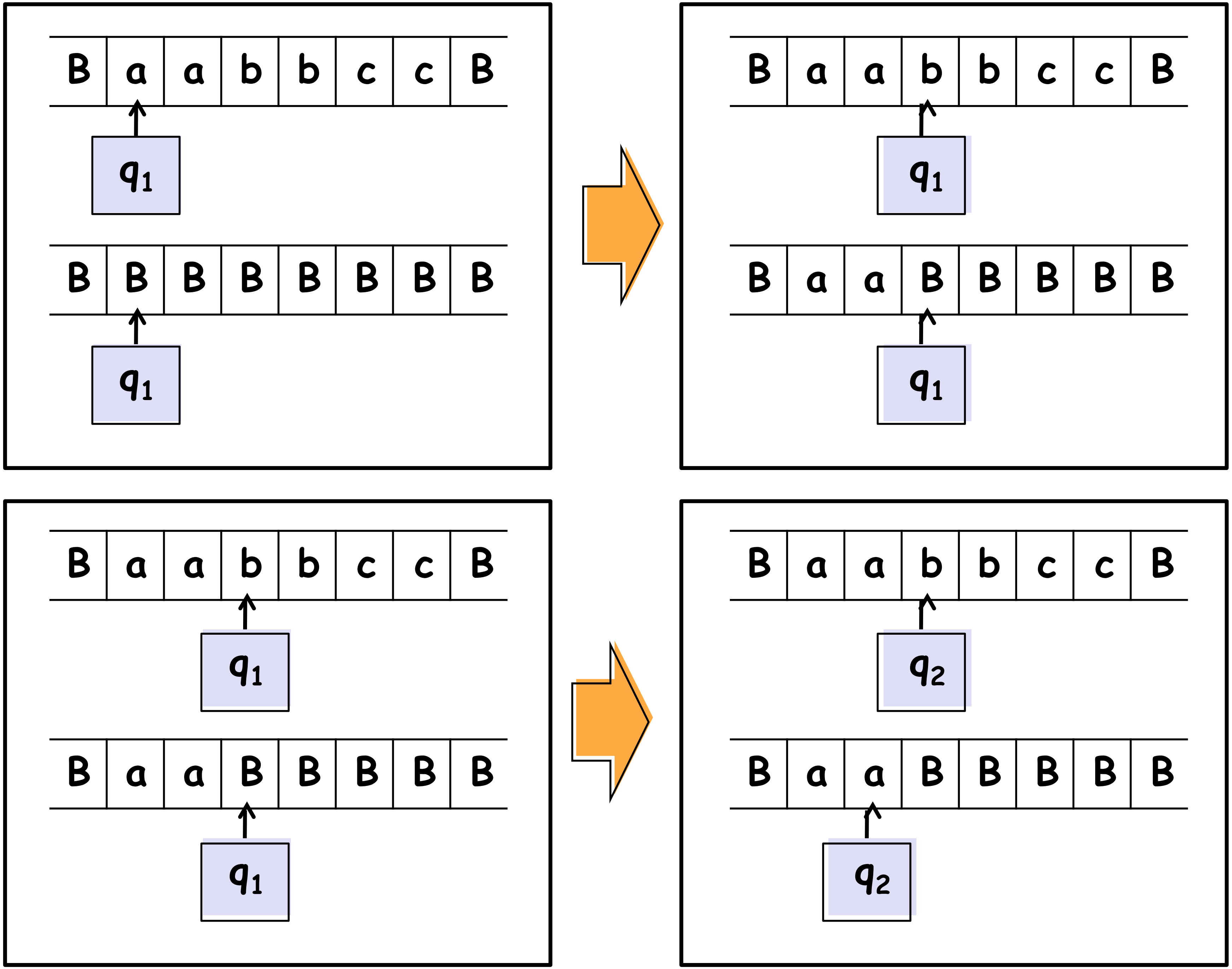
$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_2,(b,B),(S,L))$
$\delta(q_2,(b,a))=(q_2,(b,a),(R,L))$
$\delta(q_2,(B,B))=(q_3,(B,B),(S,S))$

q_3 es un estado de aceptación

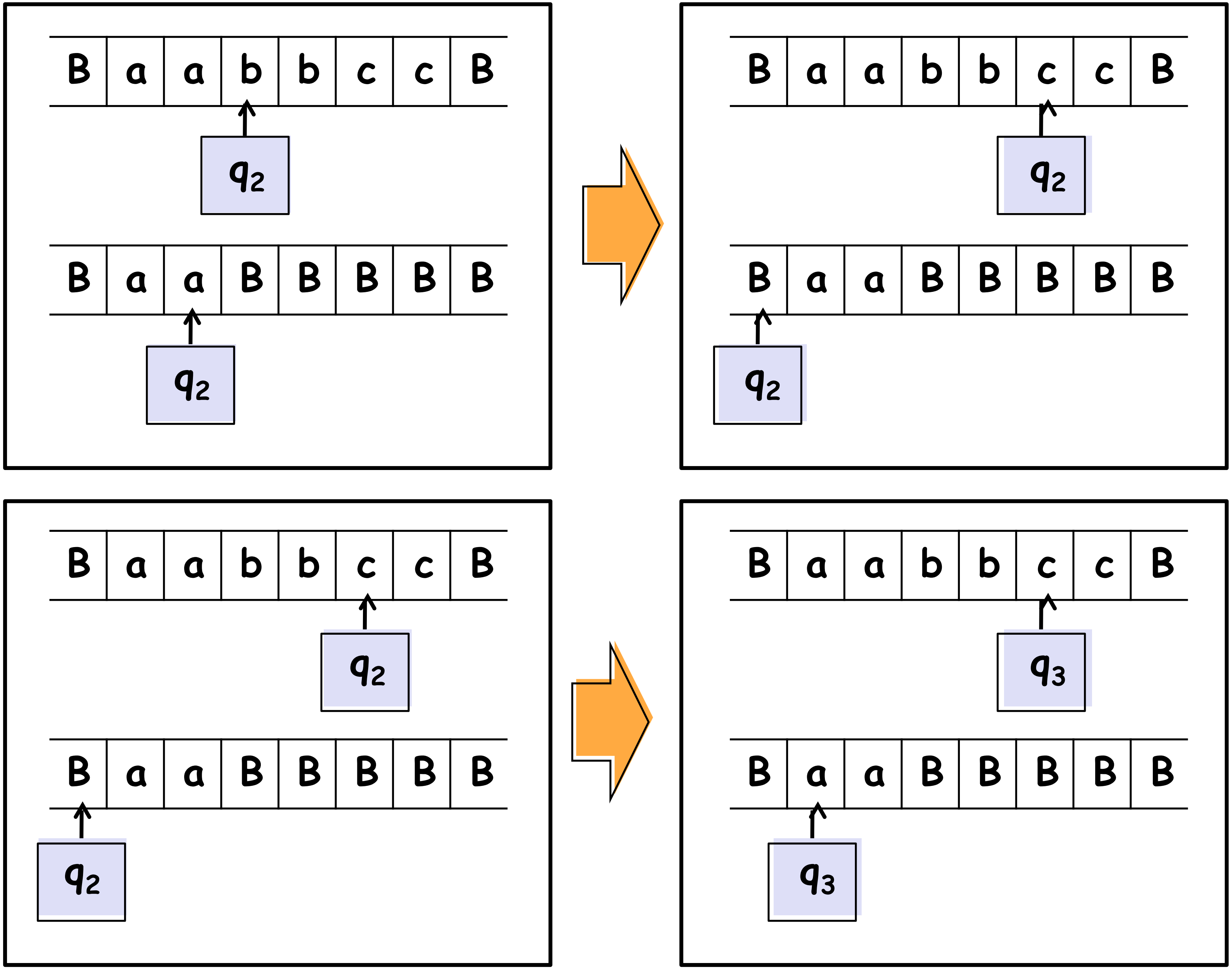
MT multicinta que acepte $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$

MT multicinta que acepte $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$

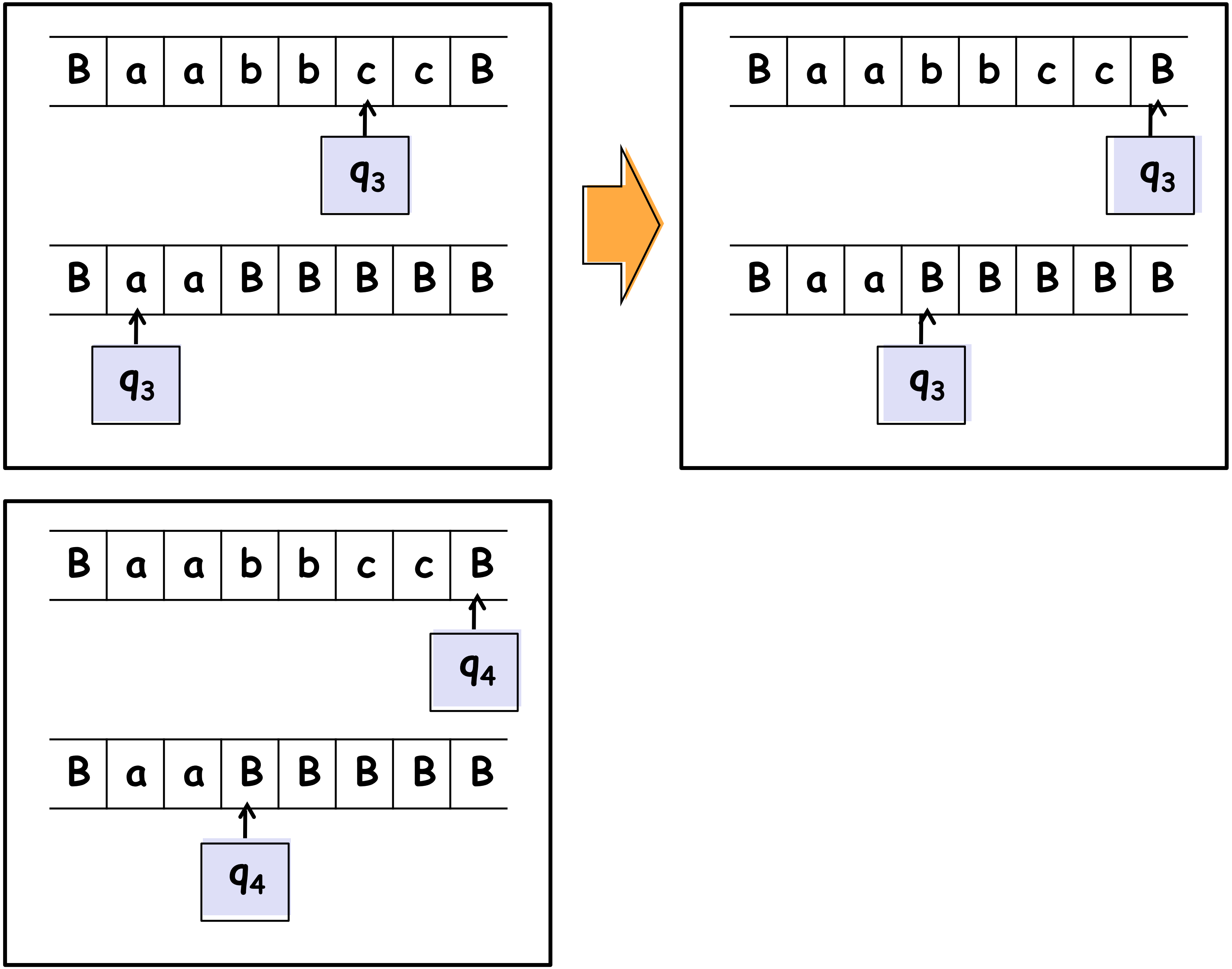
Idea: por cada a en la $cinta_1$ se escribe una a en la $cinta_2$. Cuando se llegue a la primera b, se desplaza hacia la derecha en la $cinta_1$ y hacia la izquierda en la $cinta_2$. Solamente se avanza si hay una b en la $cinta_1$ y una a en la $cinta_2$. Cuando se llegue a la primera c se avanza hacia la derecha en ambas cintas hasta que se llegue a un símbolo en blanco



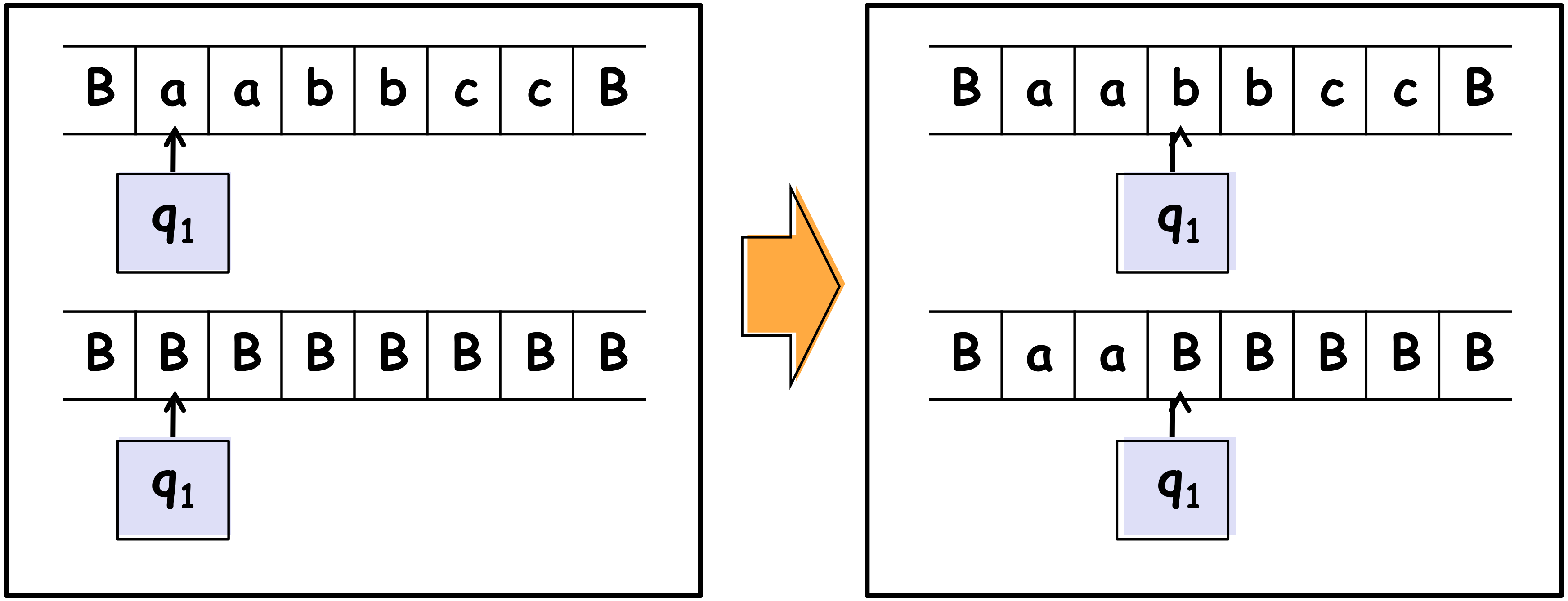
B a a b b c c B
q1
B B B B B B B B
q1
B a a b b c c B
q1
B a a B B B B B
q1
B a a b b c c B
q1
B a a B B B B B
q1
B a a b b c c B
q2
B a a B B B B B
q2



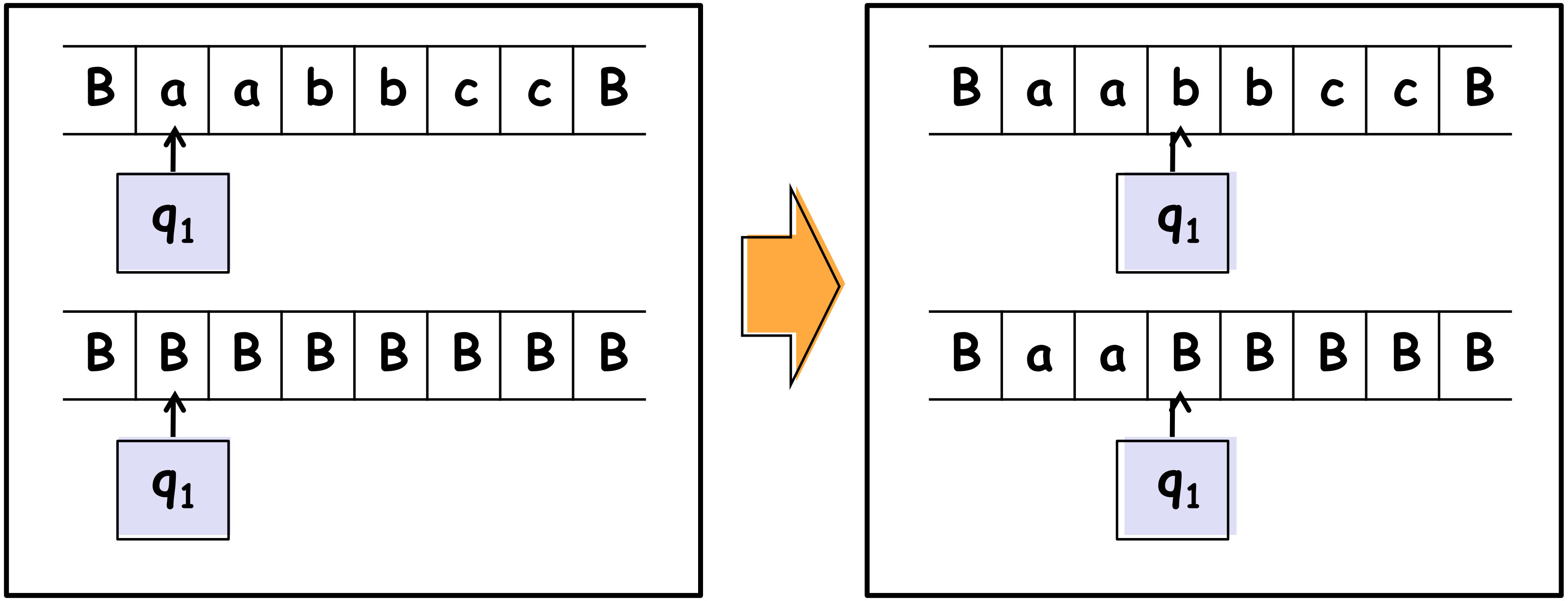
B a a b b c c B
q_2
B a a B B B B B
q_2
B a a b b c c B
q_2
B a a B B B B B
q_2
B a a b b c c B
q_2
B a a B B B B B
q_2
B a a b b c c B
q_3
B a a B B B B B
q_3



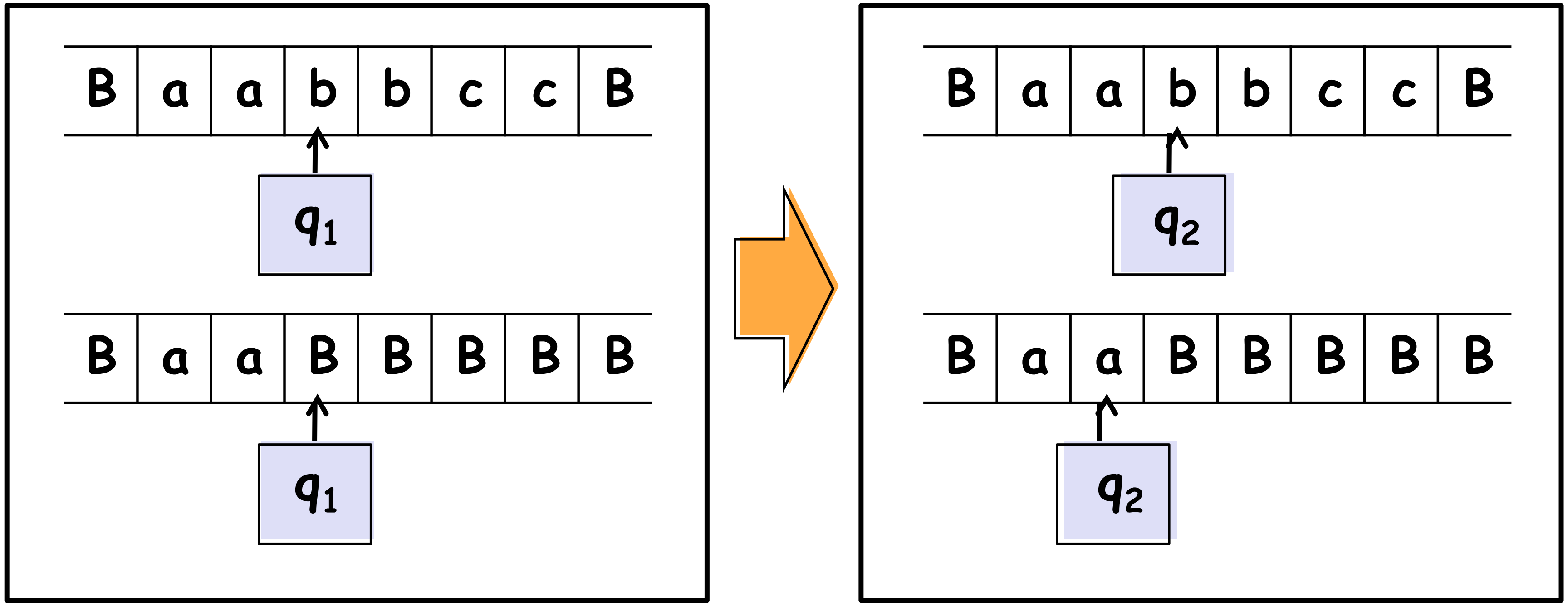
B a a b b c c B
q3
B a a B B B B B
q3
B a a b b c c B
q3
B a a B B B B B
q3
B a a b b c c B
q4
B a a B B B B B
q4



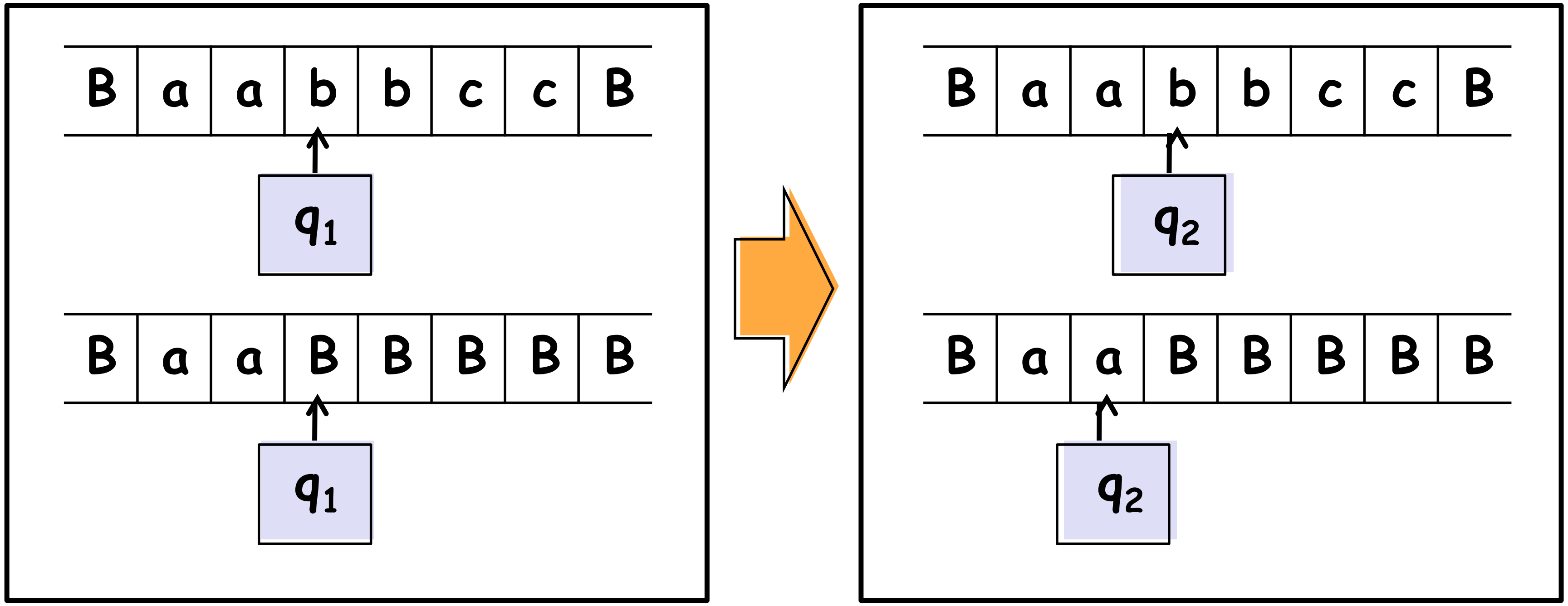
$\delta(q_1,(a,B))=\ ?$



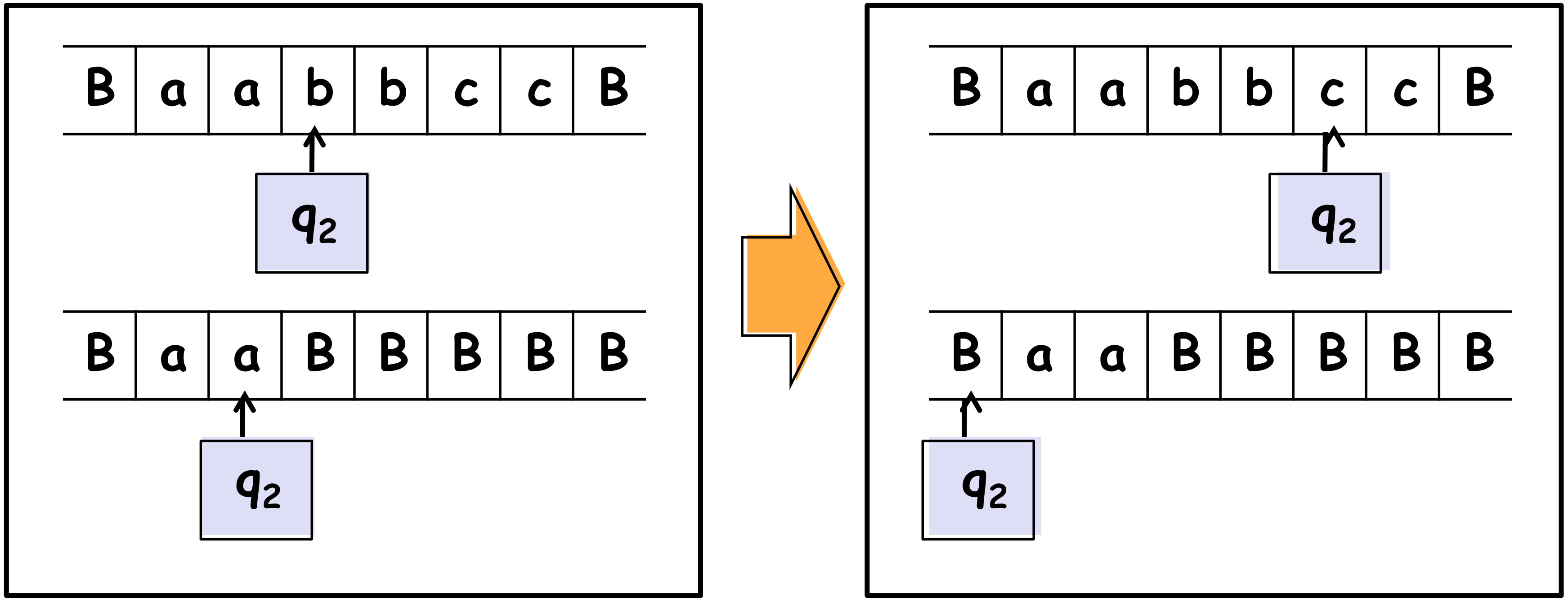
$$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$$



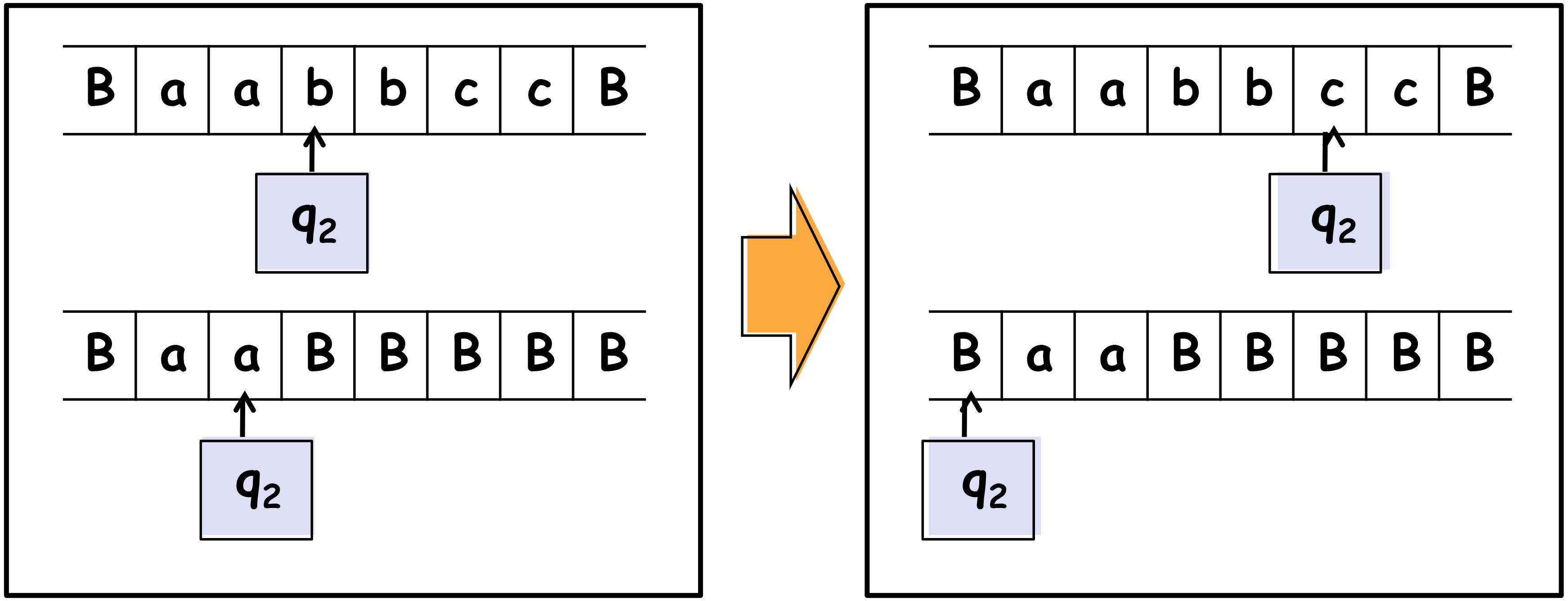
$$\delta(q_1,(b,B)) = ?$$



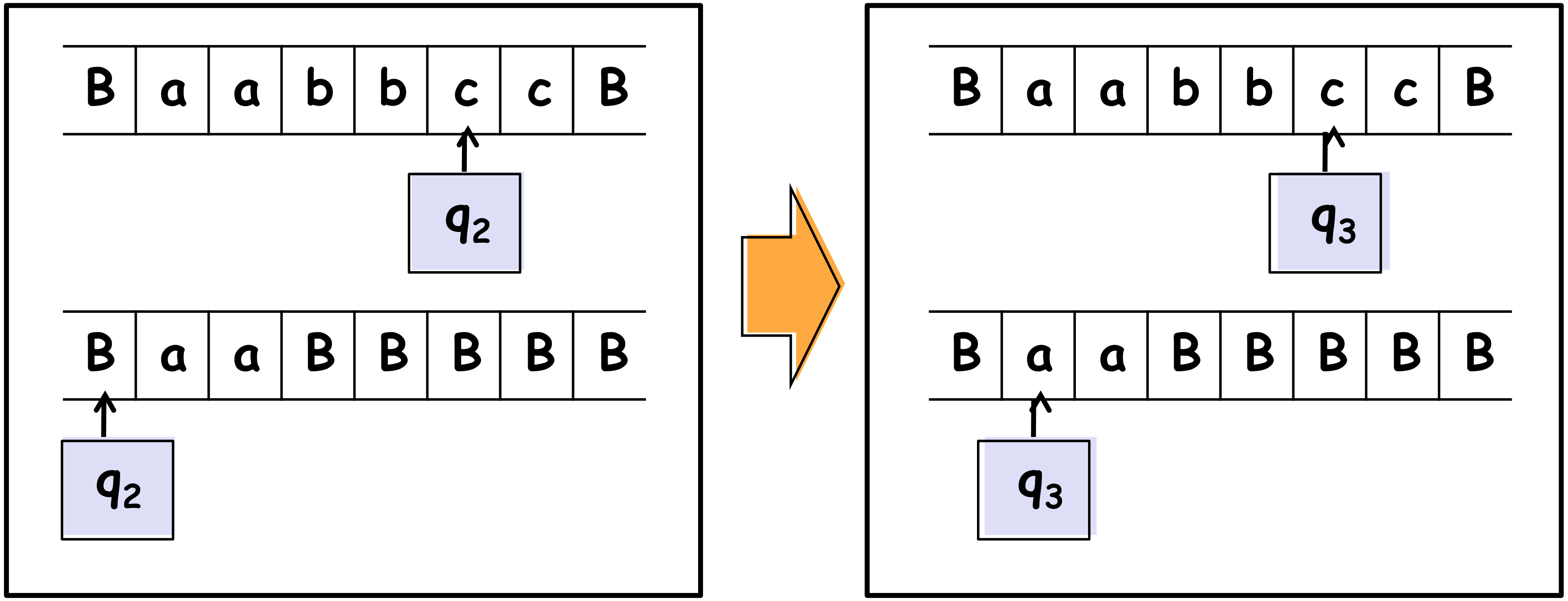
$$\delta(q_1,(b,B))=(q_2,(b,B),(S,L))$$



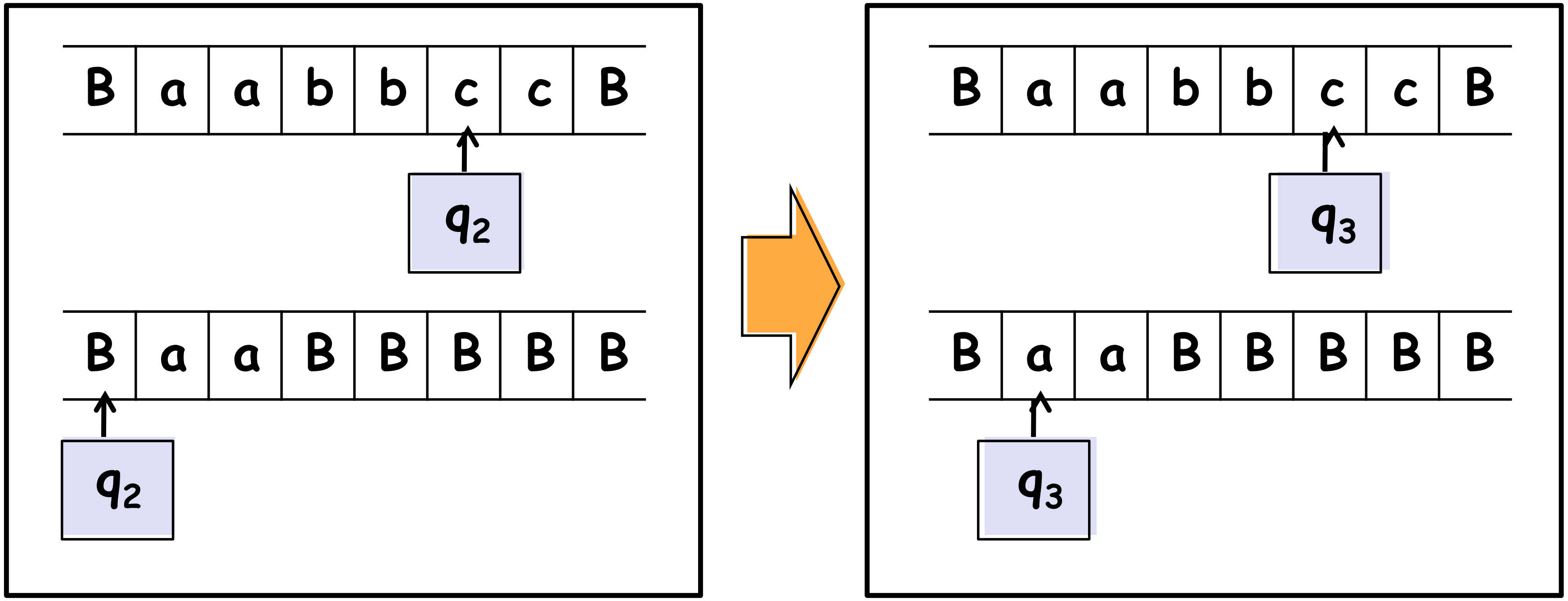
$\delta(q_2,(b,a))=\ ?$



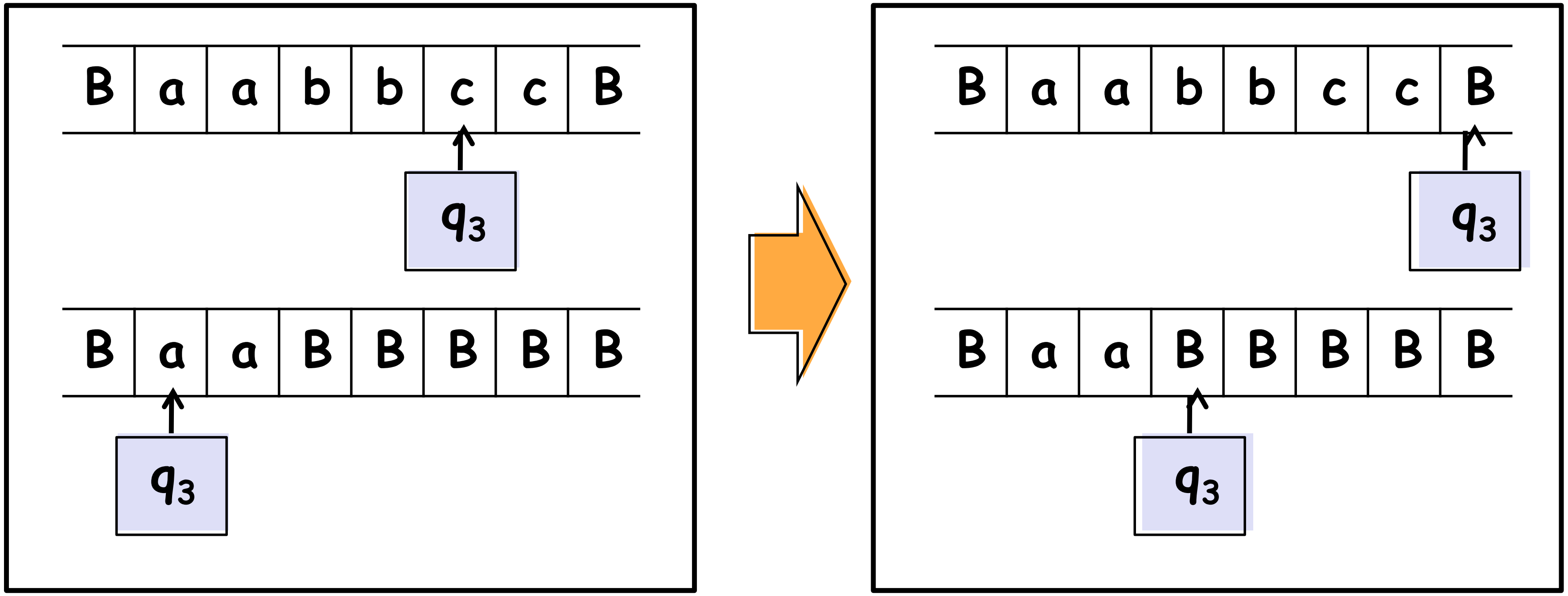
$$\delta(q_2,(b,a))=(q_2,(b,a),(R,L))$$



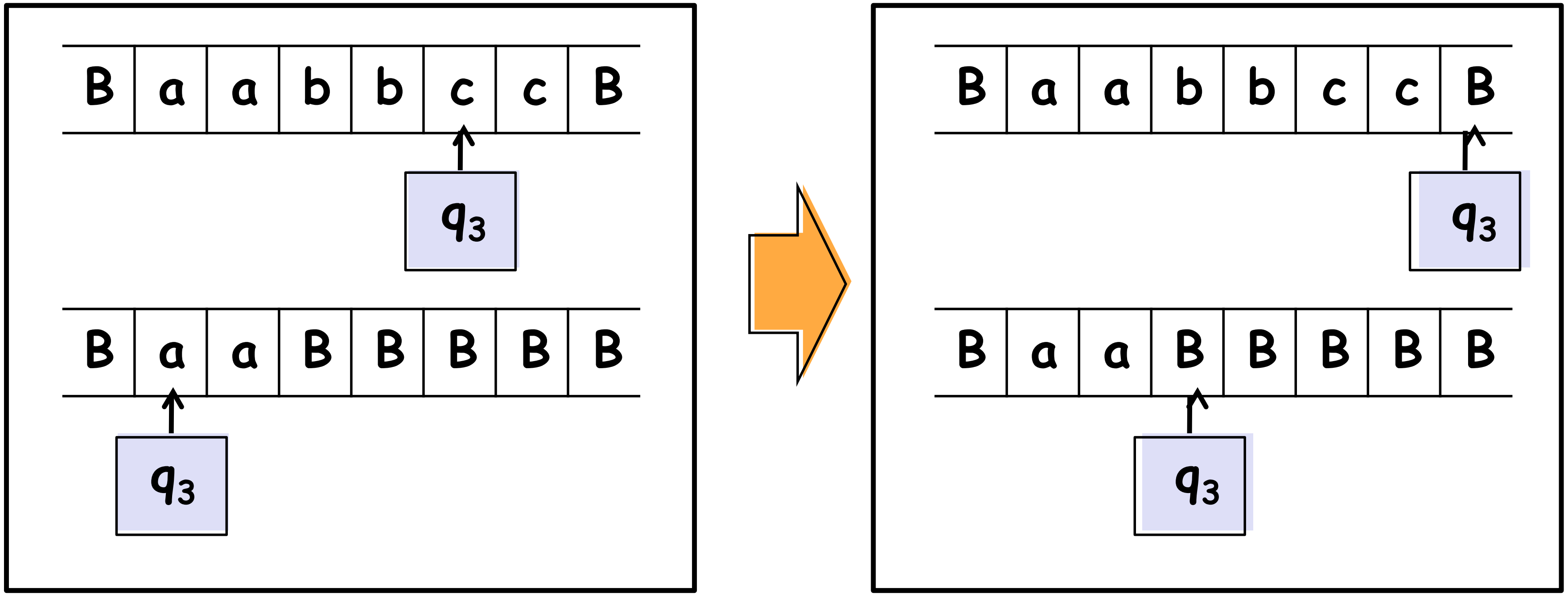
$\delta(q_2,(c,B))= ?$



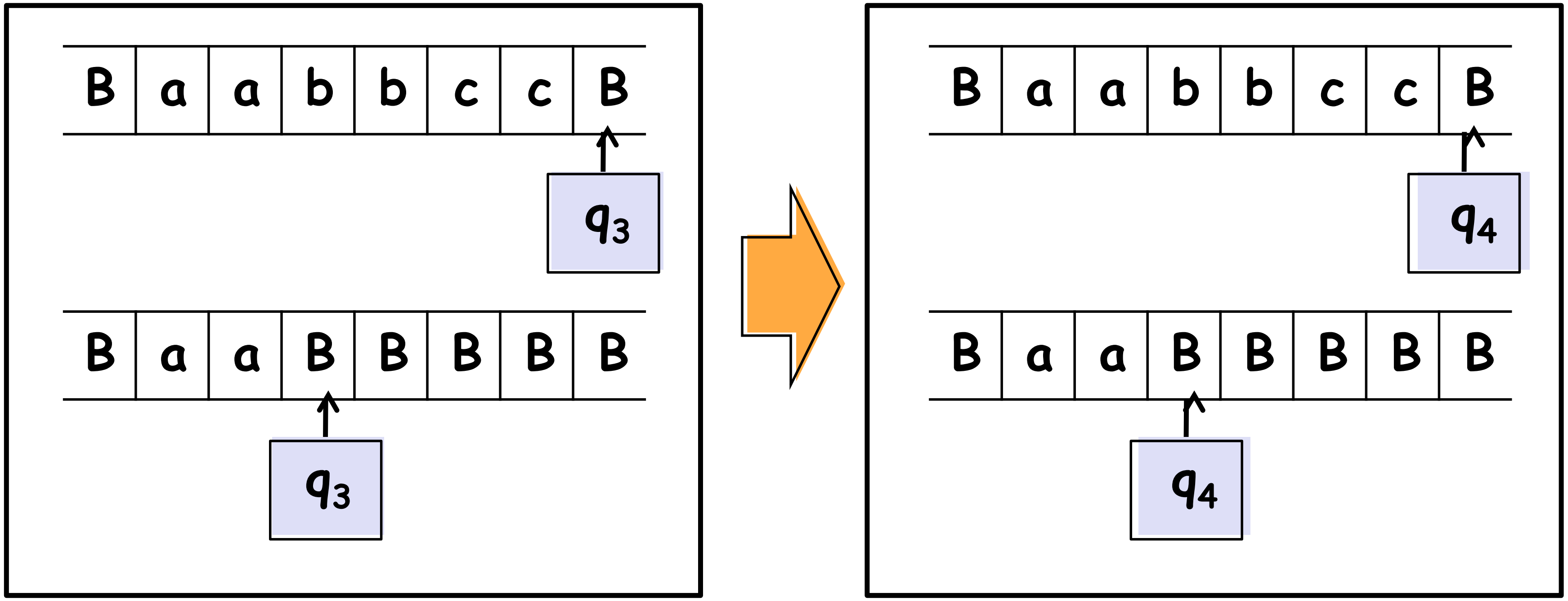
$$\delta(q_2,(c,B))=(q_3,(c,B),(S,R))$$



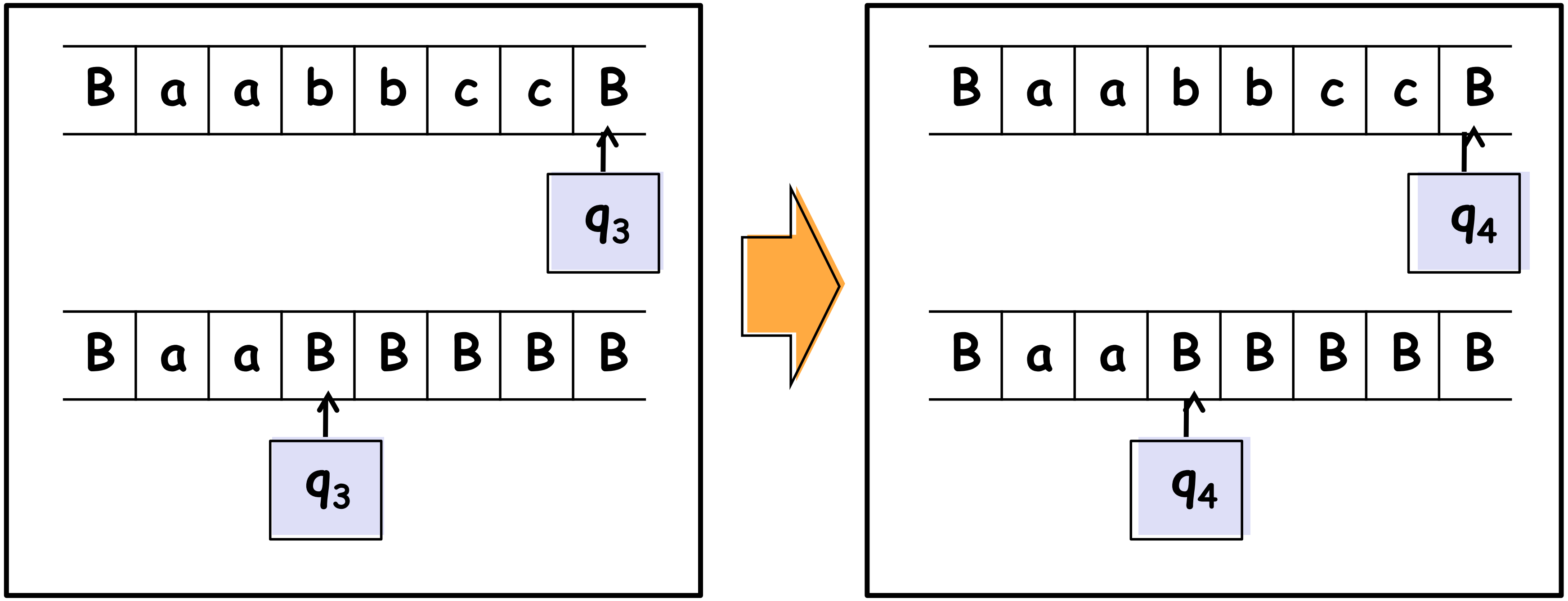
$$\delta(q_3,(c,a)) = \ ?$$



$$\delta(q_3,(c,a))=(q_3,(c,a),(R,R))$$



$\delta(q_3,(B,B))= ?$



$$\delta(q_3,(B,B))=(q_4,(B,B),(S,S))$$

MT multicinta que acepte $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$

$\delta(q_1,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_2,(b,B),(S,L))$
$\delta(q_2,(b,a))=(q_2,(b,a),(R,L))$
$\delta(q_2,(c,B))=(q_3,(c,B),(S,R))$
$\delta(q_3,(c,a))=(q_3,(c,a),(R,R))$
$\delta(q_3,(B,B))=(q_4,(B,B),(S,S))$

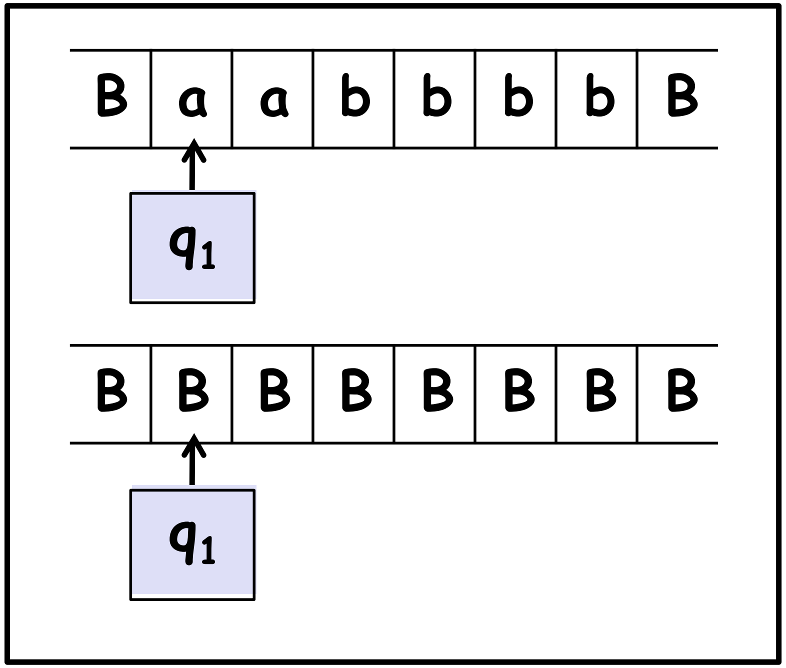
q_4 es un estado de aceptación

MT multicinta que acepte $a^n b^{2n}$, $n \geq 1$

MT multicinta que acepte a^nb^{2n}, $n\geq1$

Idea: por cada a en la $cinta_1$ se escribe una a en la $cinta_2$, se deja estacionaría la $cabeza_1$ y se escribe otra a en la $cinta_2$. Cuando se lean b's se avanza hacia la derecha en la $cinta_1$ y hacia la izquierda en la $cinta_2$

Máquinas de Turing



$\delta(q_1,(a,B))=(q_2,(a,a),(S,R))$
$\delta(q_1,(b,B))=(q_3,(b,B),(S,L))$
$\delta(q_2,(a,B))=(q_1,(a,a),(R,R))$
$\delta(q_3,(b,a))=(q_3,(b,a),(R,L))$
$\delta(q_3,(B,B))=(q_4,(B,B),(S,S))$

q_4 es un estado de aceptación

Máquinas de Turing

MT multicinta que acepte $L=\{wcw^I \mid w \in \{a,b\}^*\}$

MT multicinta que acepte $L=\{wcw \mid w \in \{a,b\}^* \}$

Máquinas de Turing

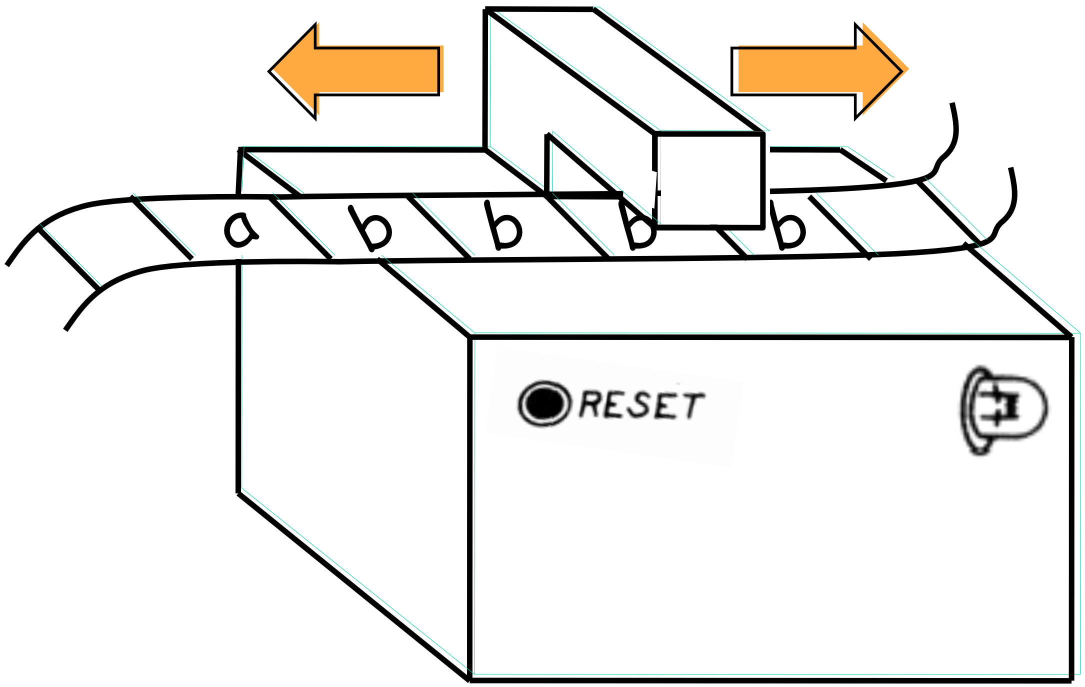
Modificaciones de las máquinas de Turing

- Máquina de Turing multicinta
- Máquina de Turing multipista

Máquina multipista

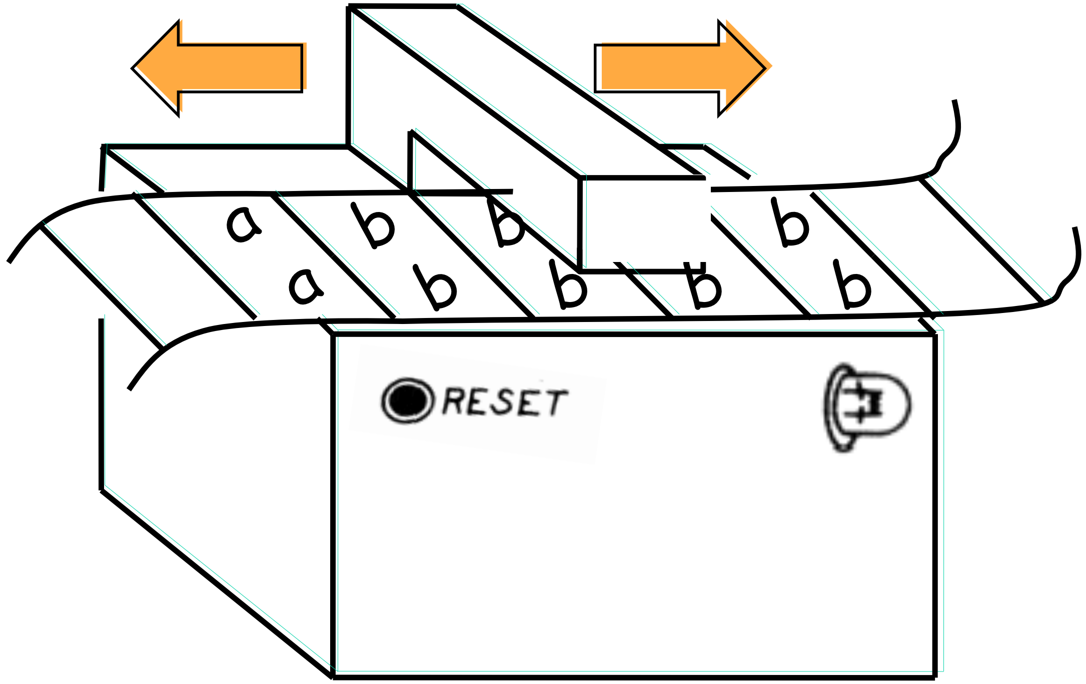
- La cinta está dividida en un número finito k de pistas sobre cada una de las cuales se pueden leer o escribir símbolos

Máquina de Turing



Se tiene una cinta con una sola **pista**

Máquina de Turing multipista



Se tiene una cinta que está dividida en **dos pistas**

Máquinas de Turing

MT como calculadora de funciones

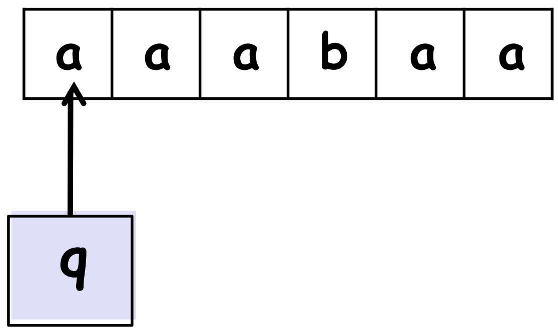
Como las máquinas de Turing pueden transformar las cadenas de entrada, se pueden utilizar como mecanismos para calcular funciones

MT como calculadora de funciones

- Diseñar una máquina de Turing que represente la función suma **f(n,m)=n+m**

MT como calculadora de funciones

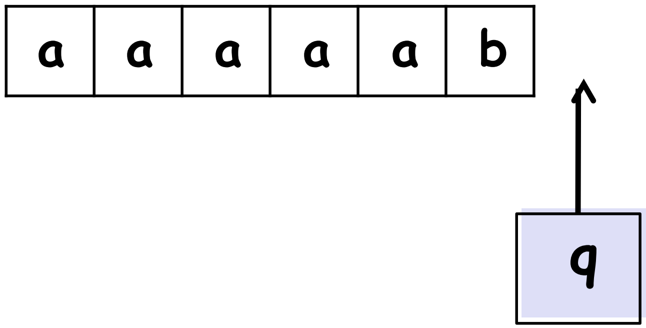
- Se coloca en la cinta la cadena $a^m b a^n$, indicando que se quiere sumar m+n



sumar(3,2)

MT como calculadora de funciones

- La máquina de Turing debe transformar la cinta de entrada en la cadena $a^{m+n}b$



a^5b indica que es resultado es 5

MT como calculadora de funciones

- Cada entero n se representa como a^n
- La función suma se define mediante la siguiente transformación:

$$a^n b a^m = a^{n+m} b$$

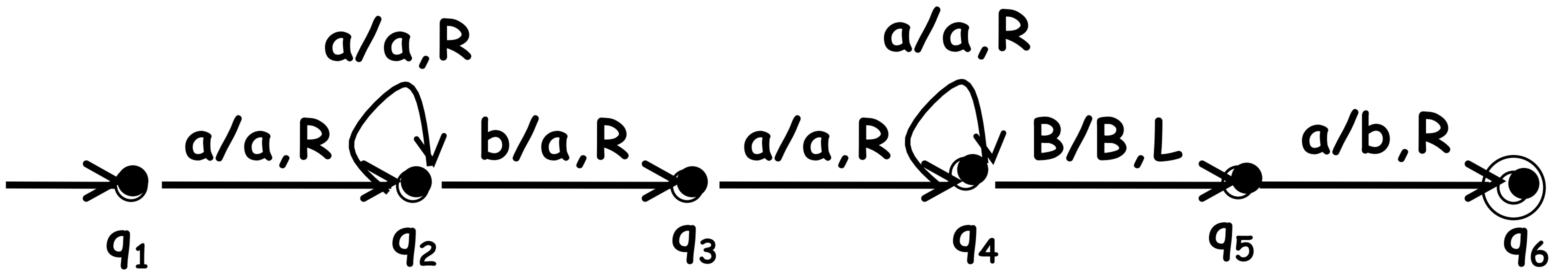
por ejemplo, si la entrada es a^3ba^2, la salida de la máquina será a^5b. El símbolo b se utiliza como **punto de referencia** para separar los dos números

MT que acepte la transformación $a^n b a^m$ en $a^{n+m}b$, $m,n \geq 1$

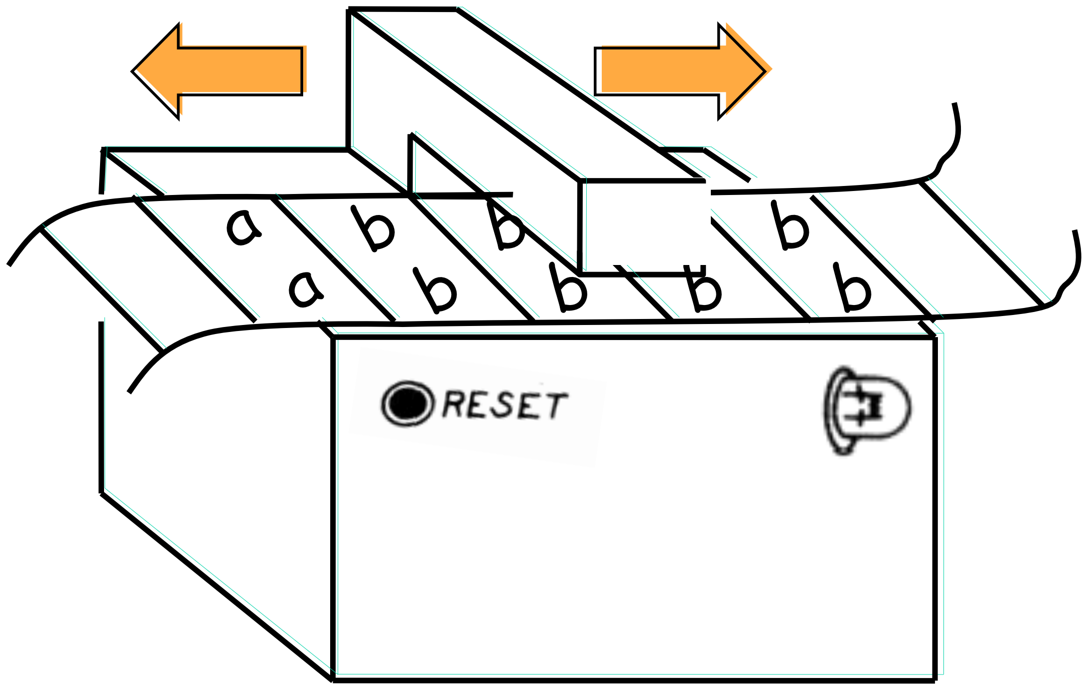
MT que acepte la transformación $a^n b a^m$ en $a^{n+m} b$, $m,n \geq 1$

Idea: se desplaza por la cadena, una vez llega a la b, se reemplaza por una a. Se llega hasta el final de la cadena y se reemplaza la a que está al final por una b

Máquinas de Turing

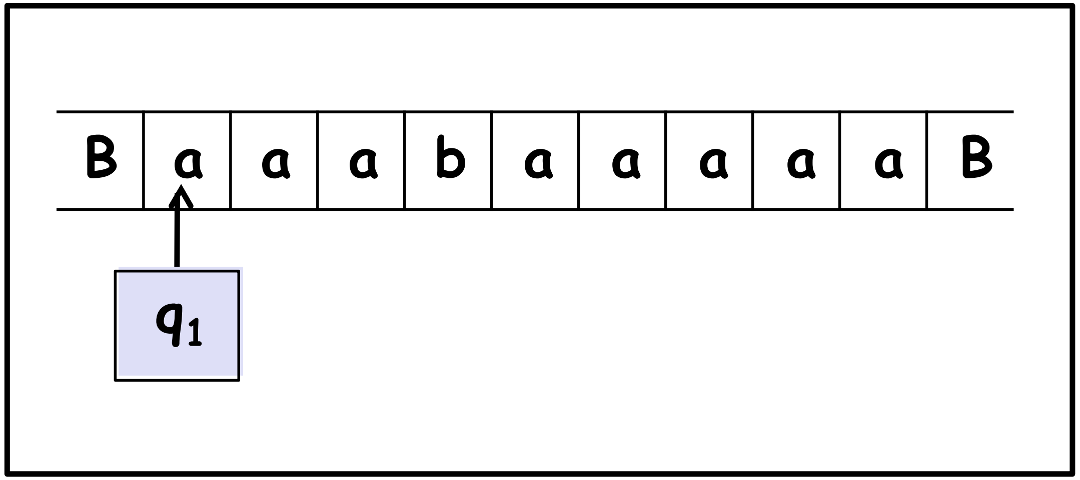


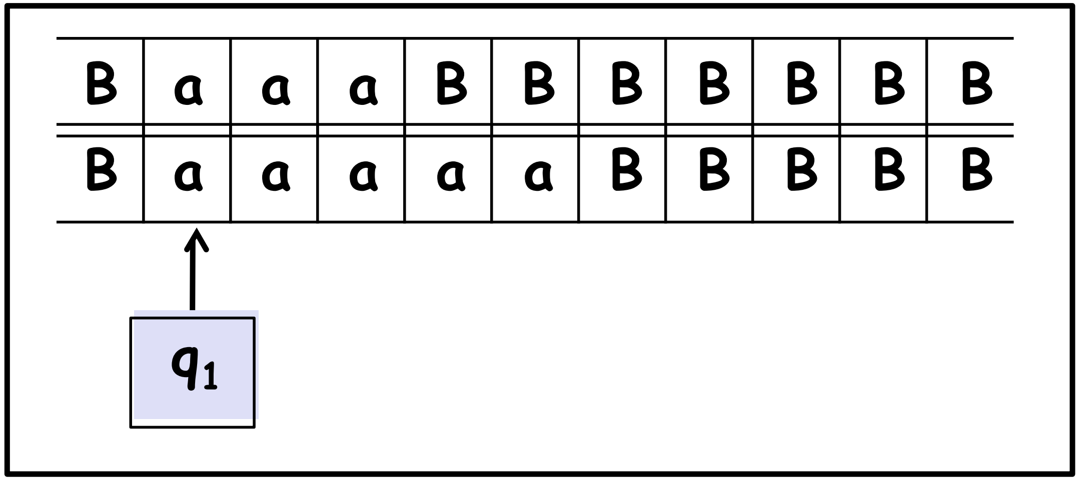
Máquina de Turing multipista



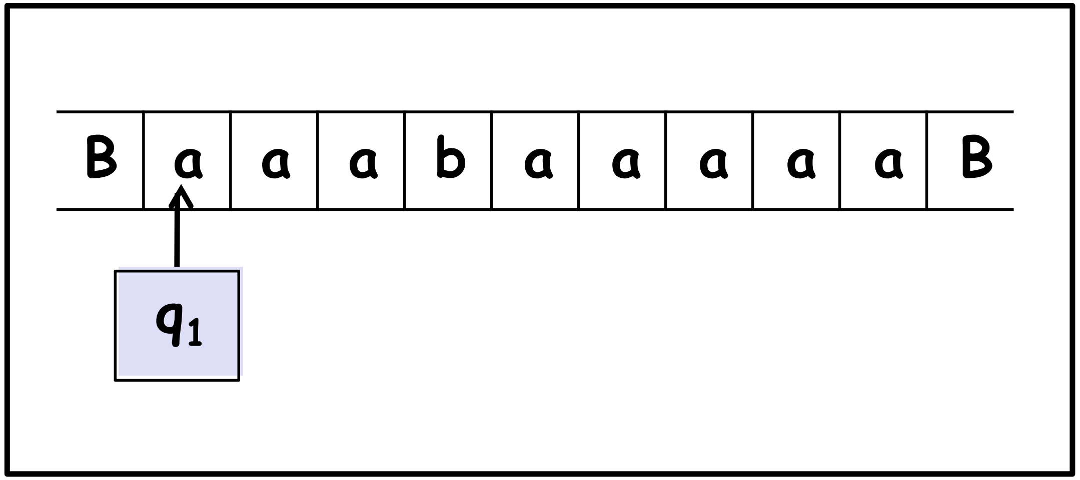
Se tiene una cinta que está dividida en **dos pistas**

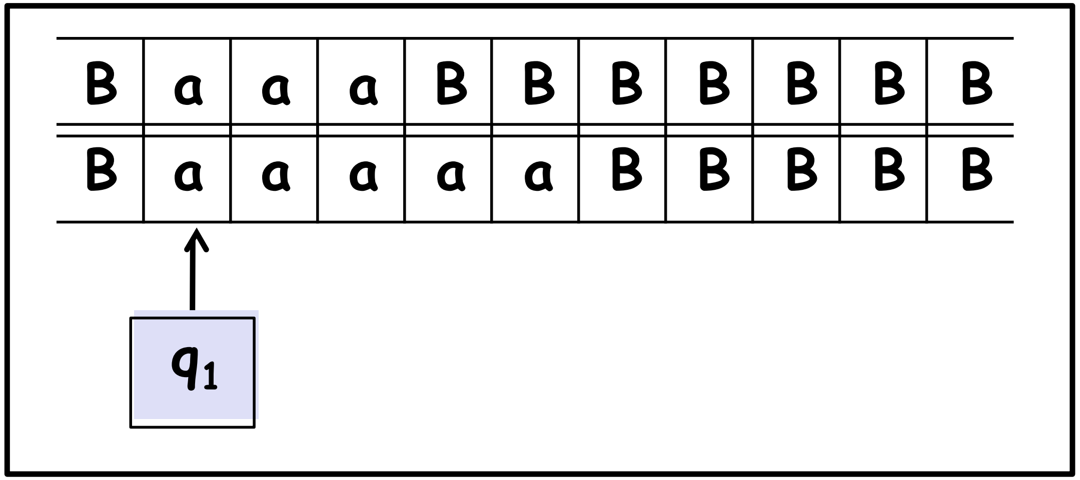
Máquina de Turing multipista





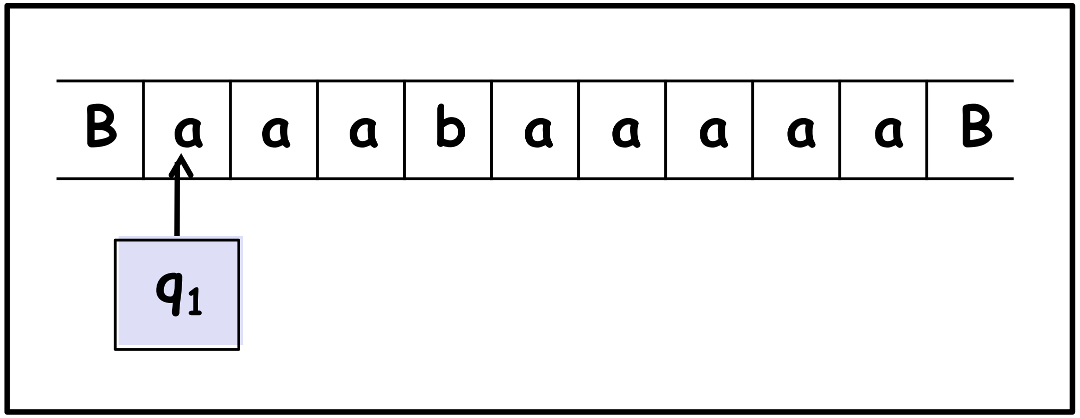
Máquina de Turing multipista

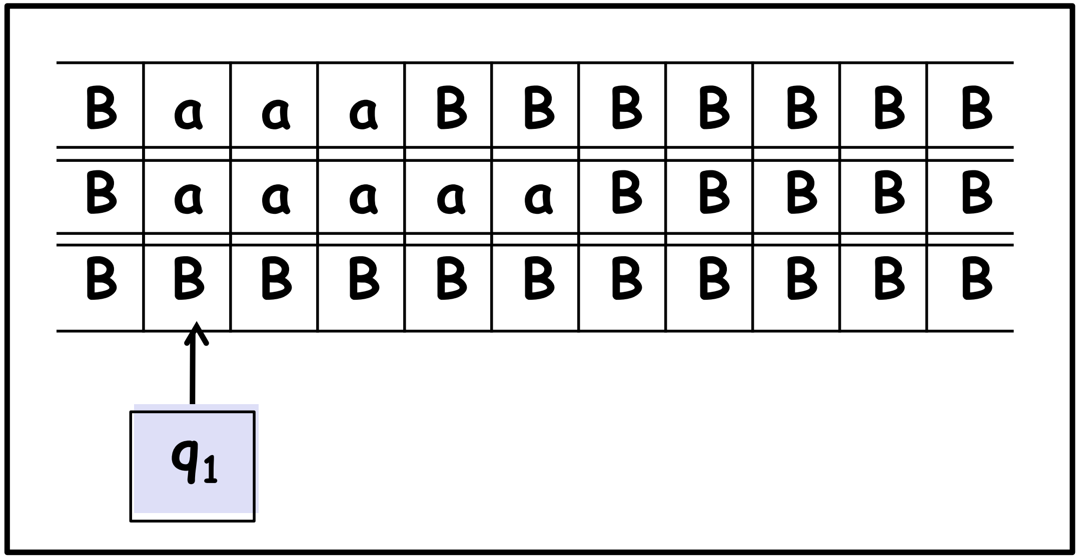




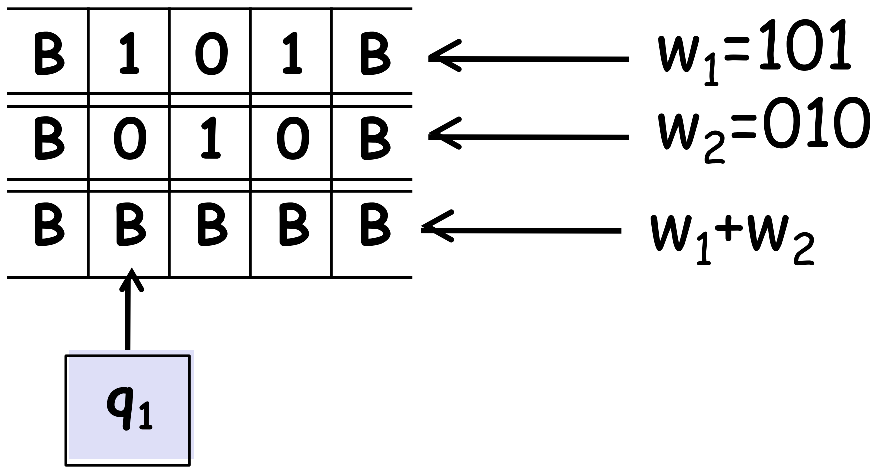
¿En dónde se escribe la salida?

Máquina de Turing multipista

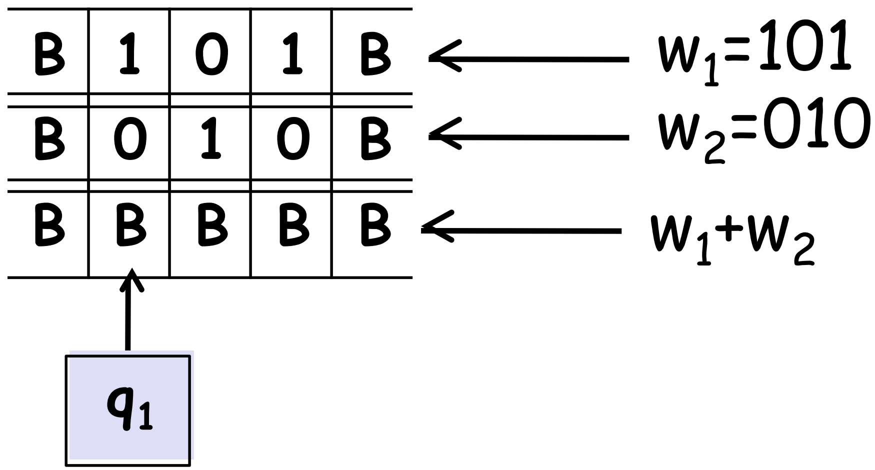




MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



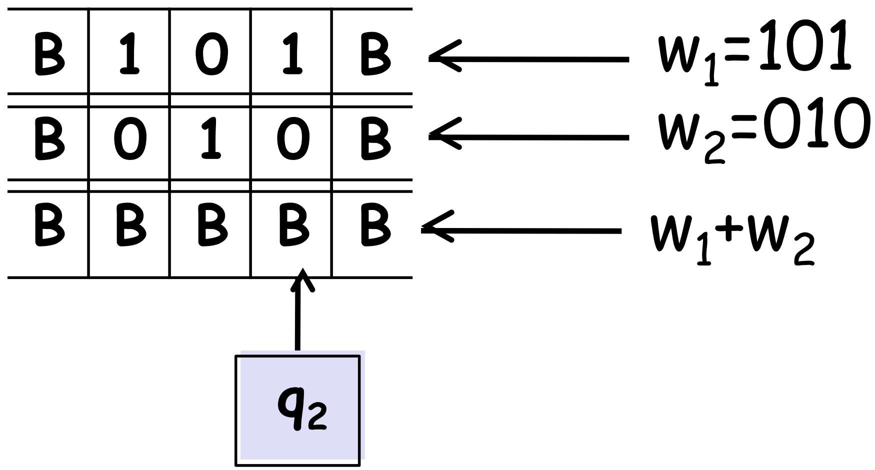
MT multipista que genera en la $pista_3$ la suma de los números binarios contenidos en la $pista_1$ y la $pista_2$



$\delta(q_1,(1,0,B))=(q_1,(1,0,B),R)$
$\delta(q_1,(0,1,B))=(q_1,(0,1,B),R)$
$\delta(q_1,(0,0,B))=(q_1,(0,0,B),R)$
$\delta(q_1,(1,1,B))=(q_1,(1,1,B),R)$
$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),L)$

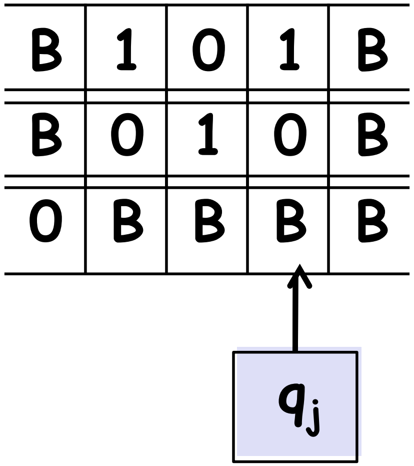
Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$\delta(q_1,(1,0,B))=(q_1,(1,0,B),R)$
$\delta(q_1,(0,1,B))=(q_1,(0,1,B),R)$
$\delta(q_1,(0,0,B))=(q_1,(0,0,B),R)$
$\delta(q_1,(1,1,B))=(q_1,(1,1,B),R)$
$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),L)$

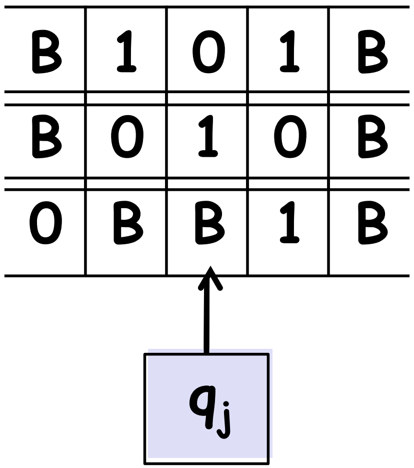
MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$\delta(q_j,(1,0,B))=$?

Máquinas de Turing

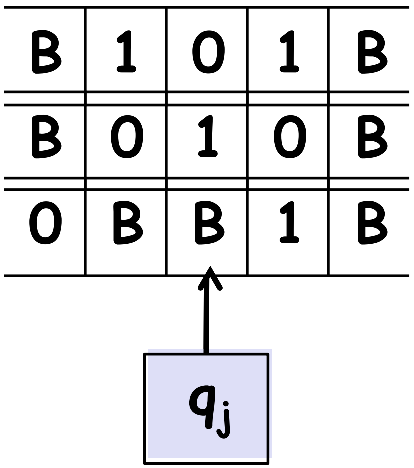
MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$$\delta(q_j,(1,0,B))=(q_j,(1,0,1),L)$$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$\delta(q_j,(0,1,B))= ?$

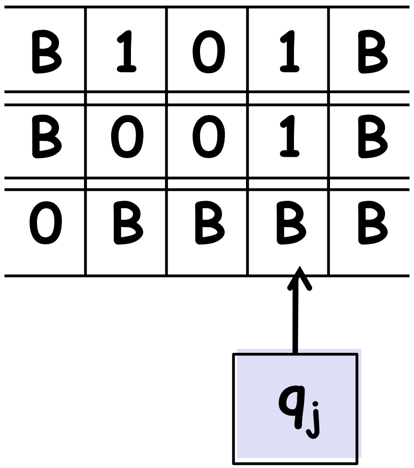
MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

B	1	0	1	B
B	0	1	0	B
0	B	1	1	B

q_j

$$\delta(q_j,(0,1,B))=(q_j,(0,1,1),L)$$

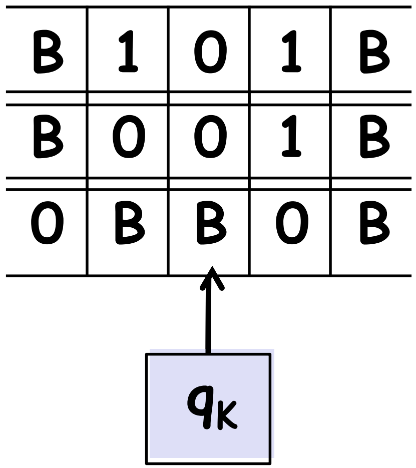
MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$\delta(q_j,(1,1,B))= ?$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$$\delta(q_j,(1,1,B))=(q_k,(1,1,0),L)$$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

B	1	0	1	B
B	0	0	1	B
0	B	B	0	B

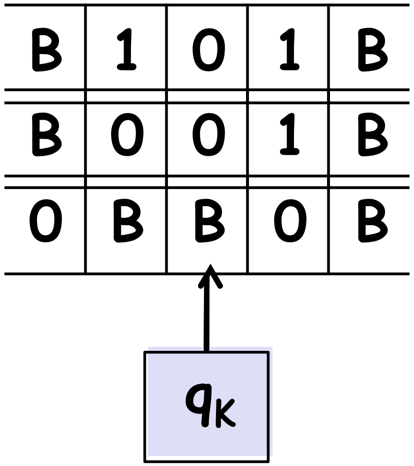
q_K

$$\delta(q_j,(1,1,B))=(q_k,(1,1,0),L)$$

q_k representa un estado donde hay acarreo

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



$\delta(q_K,(0,0,B))= ?$

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

B	1	0	1	B
B	0	0	1	B
0	B	1	0	B

q_j

$$\delta(q_K,(0,0,B))=(q_j,(0,0,1),L)$$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

B	1	0	1	B
B	0	0	1	B
0	B	1	0	B

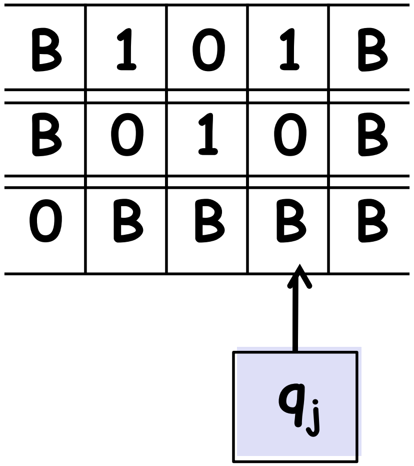
q_j

$\delta(q_K,(0,0,B))=(q_j,(0,0,1),L)$

q_j indica que ahora no hay acarreo

Máquinas de Turing

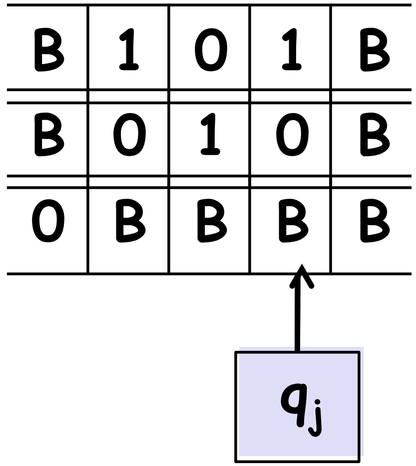
MT multipista que genera en la $pista_3$ la suma de los números binarios contenidos en la $pista_1$ y la $pista_2$



q_j es un estado donde no hay acarreo
q_k es un estado donde hay acarreo

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$



q_j es un estado donde no hay acarreo
q_k es un estado donde hay acarreo

$\delta(q_j,(0,0,B))= ?$
$\delta(q_j,(1,0,B))= ?$
$\delta(q_j,(0,1,B))= ?$
$\delta(q_j,(1,1,B))= ?$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la $pista_3$ la suma de los números binarios contenidos en la $pista_1$ y la $pista_2$

B	1	0	1	B
B	0	1	0	B
0	B	B	B	B

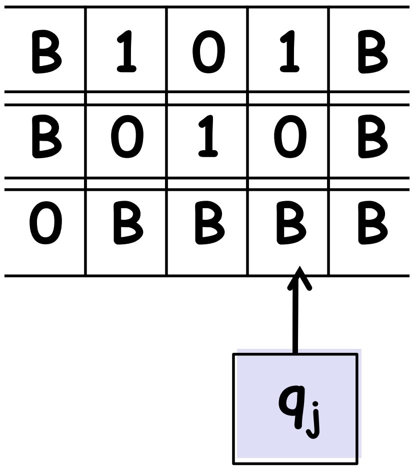
q_j

q_j es un estado donde no hay acarreo
q_k es un estado donde hay acarreo

$$\delta(q_j,(0,0,B))=(q_j,(0,0,0),L)$$
$$\delta(q_j,(1,0,B))=(q_j,(1,0,1),L)$$
$$\delta(q_j,(0,1,B))=(q_j,(0,1,1),L)$$
$$\delta(q_j,(1,1,B))=(q_k,(1,1,0),L)$$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la $pista_3$ la suma de los números binarios contenidos en la $pista_1$ y la $pista_2$



q_j es un estado donde no hay acarreo
q_k es un estado donde hay acarreo

$\delta(q_k,(0,0,B))=$?
$\delta(q_k,(1,0,B))=$?
$\delta(q_k,(0,1,B))=$?
$\delta(q_k,(1,1,B))=$?

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

B	1	0	1	B
B	0	1	0	B
0	B	B	B	B

q_j

q_j es un estado donde no hay acarreo
q_k es un estado donde hay acarreo

$\delta(q_k,(0,0,B))=(q_j,(0,0,1),L)$
$\delta(q_k,(1,0,B))=(q_k,(1,0,0),L)$
$\delta(q_k,(0,1,B))=(q_k,(0,1,0),L)$
$\delta(q_k,(1,1,B))=(q_k,(1,1,1),L)$

Máquinas de Turing

MT multipista que genera en la pista$_3$ la suma de los números binarios contenidos en la pista$_1$ y la pista$_2$

$\delta(q_1,\sigma)=(q_1,\sigma,R)$, si $\sigma\neq(B,B,B)$
$\delta(q_1,\sigma)=(q_2,\sigma,L)$, si $\sigma=(B,B,B)$

$\delta(q_2,(0,0,B))=(q_2,(0,0,0),L)$
$\delta(q_2,(0,1,B))=(q_2,(0,1,1),L)$
$\delta(q_2,(1,0,B))=(q_2,(1,0,1),L)$
$\delta(q_2,(1,1,B))=(q_3,(1,1,0),L)$
$\delta(q_2,(B,B,B))=(q_4,(B,B,B),S)$

$\delta(q_3,(0,0,B))=(q_2,(0,0,1),L)$
$\delta(q_3,(0,1,B))=(q_3,(0,1,0),L)$
$\delta(q_3,(1,0,B))=(q_2,(1,0,0),L)$
$\delta(q_3,(1,1,B))=(q_3,(1,1,1),L)$
$\delta(q_3,(B,B,B))=(q_4,(B,B,B),S)$

q_2, es el estado sin acarreo
q_3, es el estado con acarreo
q_4, es el estado de aceptación

- **Considere la siguiente MT multipista:**

$$\delta(q_1,(a,a,B))=(q_1,(x,x,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,b,B))=(q_1,(y,y,b),R)$$
$$\delta(q_1,(a,b,B))=(q_1,(x,y,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,a,B))=(q_1,(y,a,b),R)$$
$$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),S)$$

- **Muestre el estado final para la siguiente cinta:**

B	a	a	b	b	B
B	b	b	a	a	B
B	B	B	B	B	B

q_1

Máquinas de Turing

- **Considere la siguiente MT multipista:**

$$\delta(q_1,(a,a,B))=(q_1,(x,x,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,b,B))=(q_1,(y,y,b),R)$$
$$\delta(q_1,(a,b,B))=(q_1,(x,y,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,a,B))=(q_1,(y,a,b),R)$$
$$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),S)$$

- **Muestre el estado final para la siguiente cinta:**

B	x	x	y	y	B
B	y	y	a	a	B
B	a	a	b	b	B

q_2

Máquinas de Turing

- **Considere la siguiente MT multipista:**

$$\delta(q_1,(a,a,B))=(q_1,(x,x,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,b,B))=(q_1,(y,y,b),R)$$
$$\delta(q_1,(a,b,B))=(q_1,(x,y,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,a,B))=(q_1,(y,a,b),R)$$
$$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),S)$$

- **Muestre el estado final para la siguiente cinta:**

B	a	b	b	a	B
B	a	b	a	b	B
B	B	B	B	B	B

q_1

Máquinas de Turing

- **Considere la siguiente MT multipista:**

$$\delta(q_1,(a,a,B))=(q_1,(x,x,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,b,B))=(q_1,(y,y,b),R)$$
$$\delta(q_1,(a,b,B))=(q_1,(x,y,a),R)$$
$$\delta(q_1,(b,a,B))=(q_1,(y,a,b),R)$$
$$\delta(q_1,(B,B,B))=(q_2,(B,B,B),S)$$

- **Muestre el estado final para la siguiente cinta:**

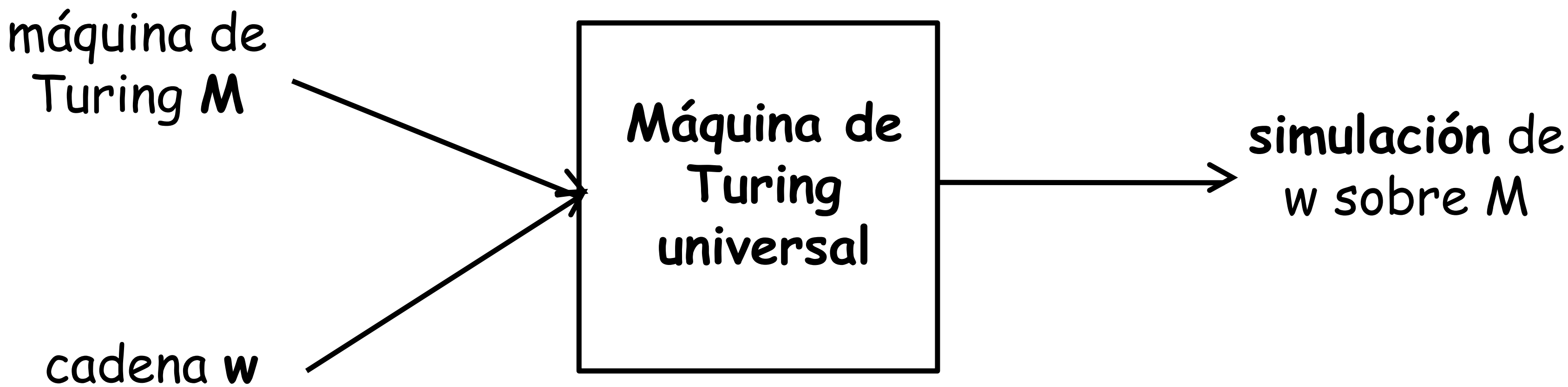
B	x	y	y	x	B
B	x	y	a	y	B
B	a	b	b	a	B

q_2

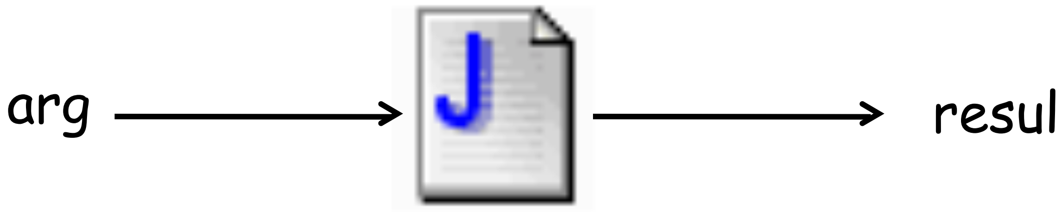
Máquinas de Turing

Máquina de Turing universal M_u

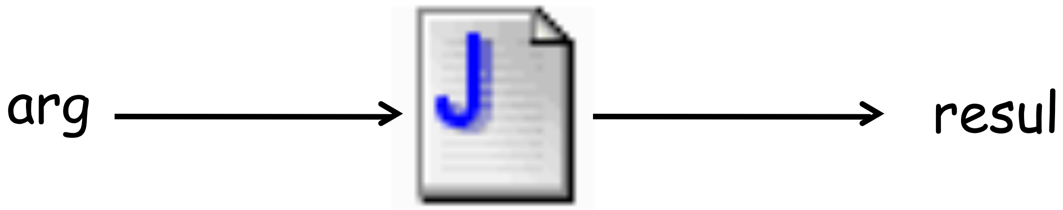
• Una máquina de Turing universal M_u tiene como entrada una máquina de Turing M y una cadena w, y simula el comportamiento de w en M



Máquinas de Turing

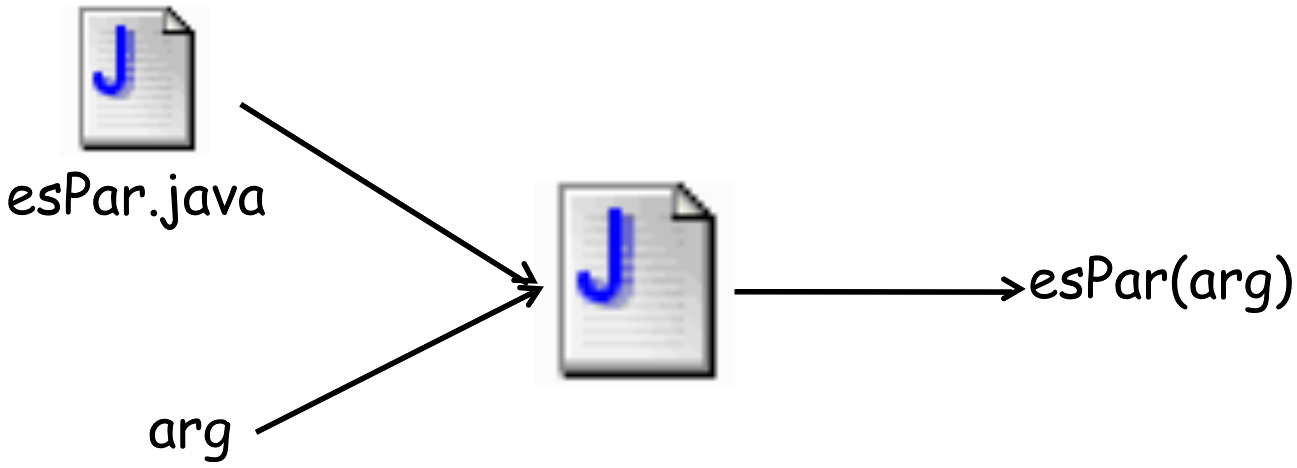


Máquinas de Turing

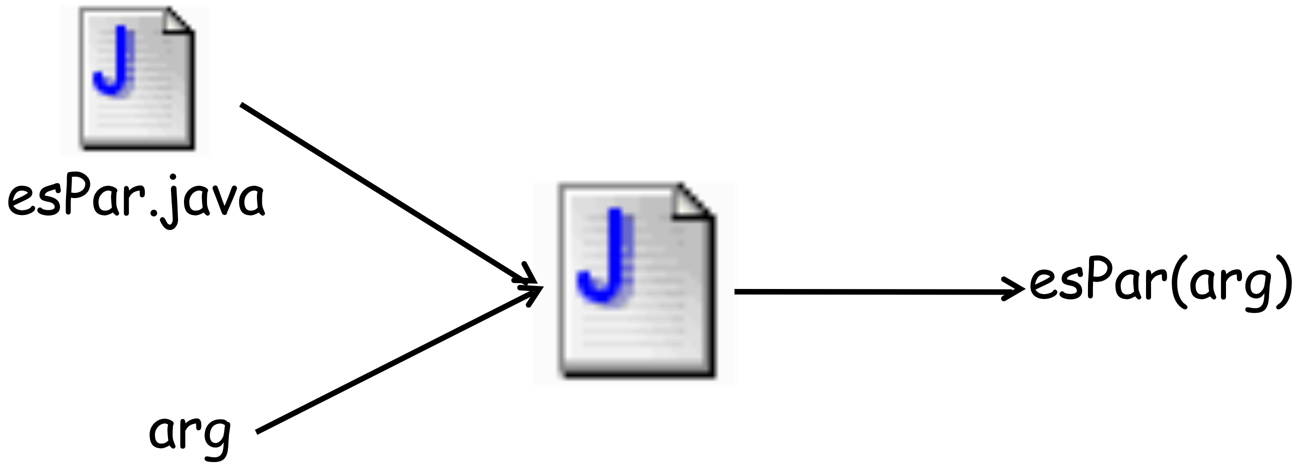



```
public String esPar(int arg){
   if (arg%2==0)
     return "YES";
   else
     return "NO";
}
```

Máquinas de Turing

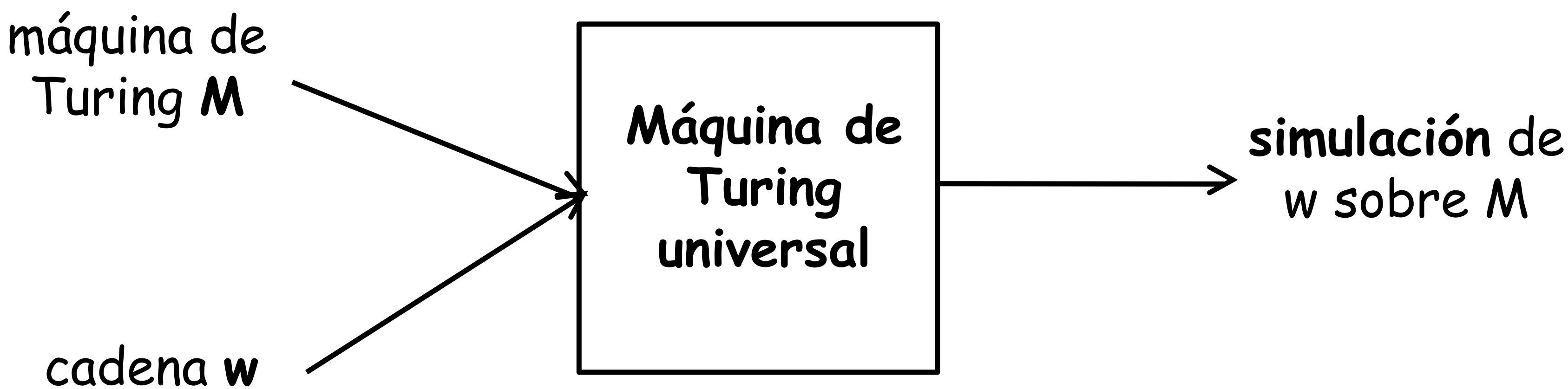


Máquinas de Turing

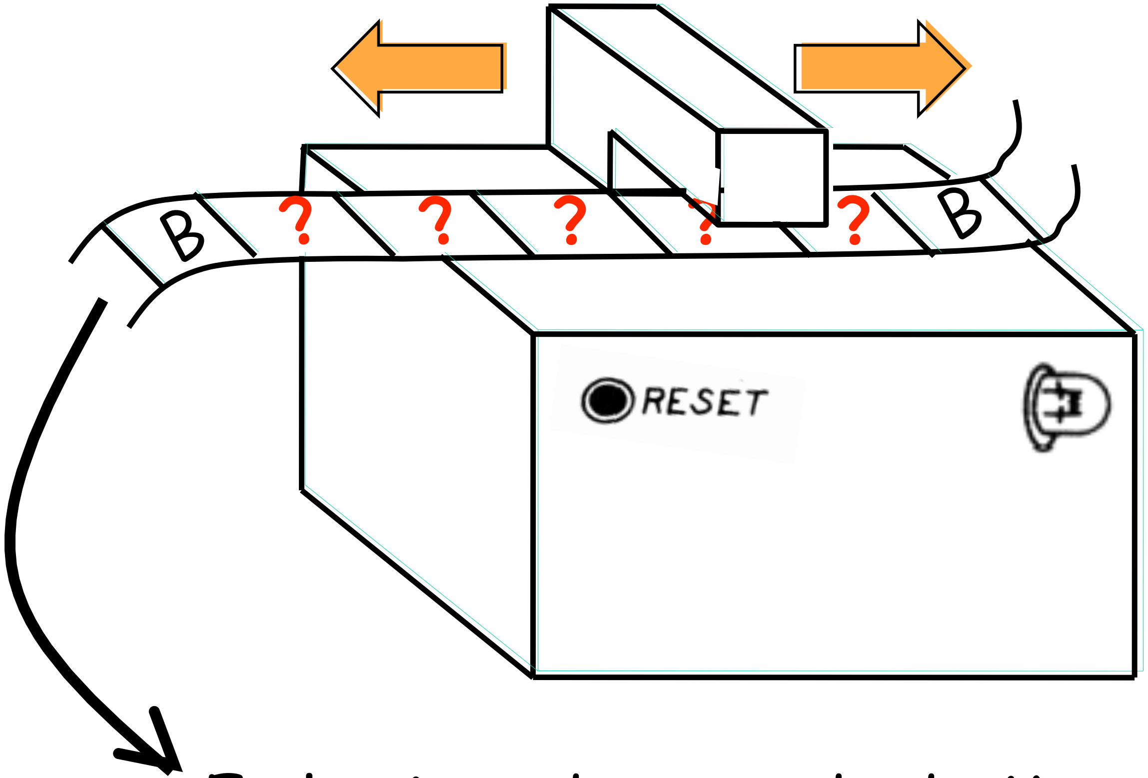



```
public void simular(Programa p, int arg){
  String linea=p.readline();
  if (p.equals("if"))
     ...



}
```

Máquina de Turing universal M_u



Máquina de Turing universal M_u



En la cinta de entrada de M_u va a estar otra **máquina** y una **cadena w**

Máquinas de Turing

Como la entrada M se debe colocar en una máquina de Turing M', es decir, en la cinta de M', se debe tener una forma de representar cualquier máquina dada, para esto se utiliza una **codificación**

Codificación de una máquina de Turing

- Se transforma M en una máquina que tenga un sólo estado de aceptación, para esto, se crea un transición entre cada estado de aceptación **p** y un nuevo estado **p'**

Codificación de una máquina de Turing

- Cada **estado** de $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ se codifica por medio de 1's así:

$$q_1=1,\ q_2=11,\ q_3=111,\ \ldots\ ,\ q_n=11..1 \text{ con n unos}$$

donde q_1 es el estado inicial y q_2 es el único estado de aceptación

Codificación de una máquina de Turing

• Cada **símbolo** de la máquina $\Gamma=\{\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_m\}$ se codifica por medio de 1's así:

$$\sigma_1=1,\ \sigma_2=11,\ \sigma_3=111,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \sigma_n=11..1 \text{ con n unos}$$

donde σ_1 es el símbolo en blanco

Codificación de una máquina de Turing

- Γ={B,a,b,X,Y} se codifica por medio de 1's así:

  B=1, a=11, b=111, X=1111, Y=11111

Codificación de una máquina de Turing

- Para indicar la **dirección** de la cabeza se tiene:

  L=1, R=11, S=111

Codificación de una máquina de Turing

• Se codifican las transiciones. Cada elemento que define una transición se separa por un 0

• Así mismo, el 0 se utiliza para hacer la separación entre una transición y otra

Codificación de una máquina de Turing

• Se codifican las transiciones. Cada elemento que define una transición se separa por un 0

• Así mismo, el 0 se utiliza para hacer la separación entre una transición y otra

• Si $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$ y $\Gamma=\{B,a,b,c\}$, la transición $\delta(q_3,a)=(q_4,c,L)$ se codifica como:

Codificación de una máquina de Turing

- Se codifican las transiciones. Cada elemento que define una transición se separa por un 0

- Así mismo, el 0 se utiliza para hacer la separación entre una transición y otra

- Si $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$ y $\Gamma=\{B,a,b,c\}$, la transición $\delta(q_3,a)=(q_4,c,L)$ se codifica como:

  1110110111101111101

Codificación de una máquina de Turing

- Si $Q=\{q_1,q_2\}$ y $\Gamma=\{B,a\}$, codifique la máquina con las siguientes dos transiciones:

$$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$$

$$\delta(q_1,B)=(q_2,B,L)$$

Máquinas de Turing

Codificación de una máquina de Turing

- Si $Q=\{q_1,q_2\}$ y $\Gamma=\{B,a\}$, codifique la máquina con las siguientes dos transiciones:

$$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$$

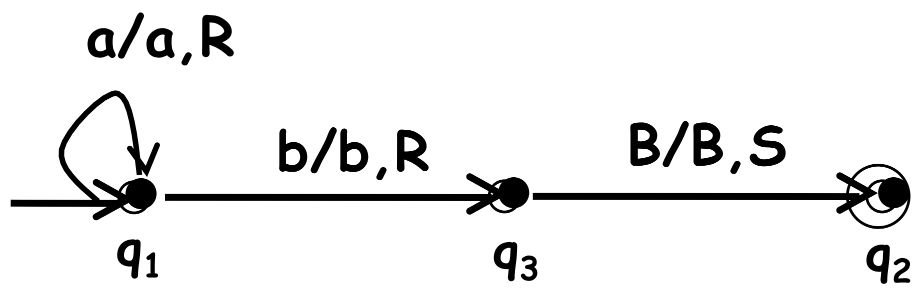
$$\delta(q_1,B)=(q_2,B,L)$$

$$\underbrace{101101011011}_{\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)}0\underbrace{1010110101}_{\delta(q_1,B)=(q_2,B,L)}$$

Máquinas de Turing

Codificar la siguiente MT:

$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$
$\Gamma=\{B,a,b\}$
$D=\{L,R,S\}$



MT que reconoce a*b

Máquinas de Turing

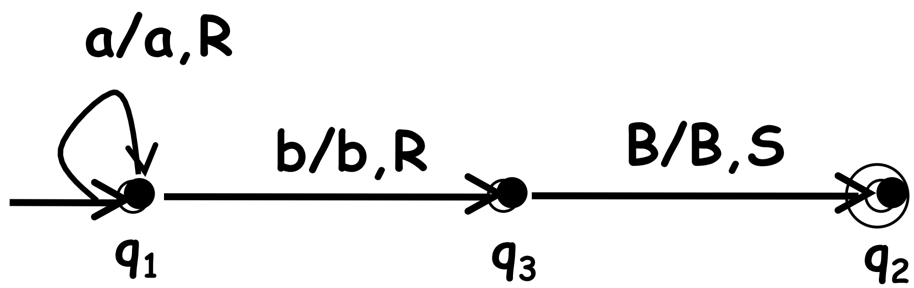
$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$

$\Gamma=\{B,a,b\}$

$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$

$\delta(q_1,b)=(q_3,b,R)$

$\delta(q_3,B)=(q_2,B,S)$



MT que reconoce a*b

10110101101101011101110110111011011101011010111

$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$ $\quad$ $\delta(q_1,b)=(q_3,b,R)$ $\quad$ $\delta(q_3,B)=(q_2,B,S)$

Máquinas de Turing

Siendo Γ={B,a,b}, decodificar la siguiente MT:

- Muestre el diagrama de transición

10110101101101011101011101101010110101

Máquinas de Turing

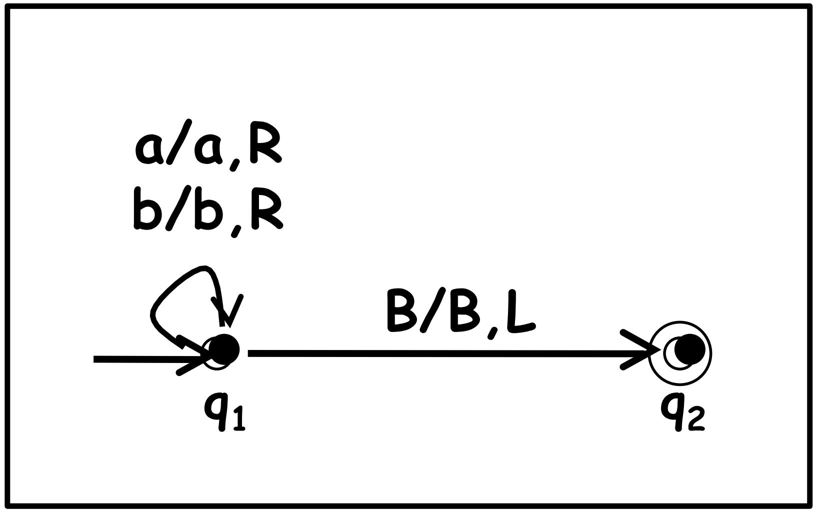
$Q=\{q_1,q_2\}$

$\Gamma=\{B,a\}$

$\delta(q_1,a)=(q_1,a,R)$

$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$

$\delta(q_1,B)=(q_2,B,L)$

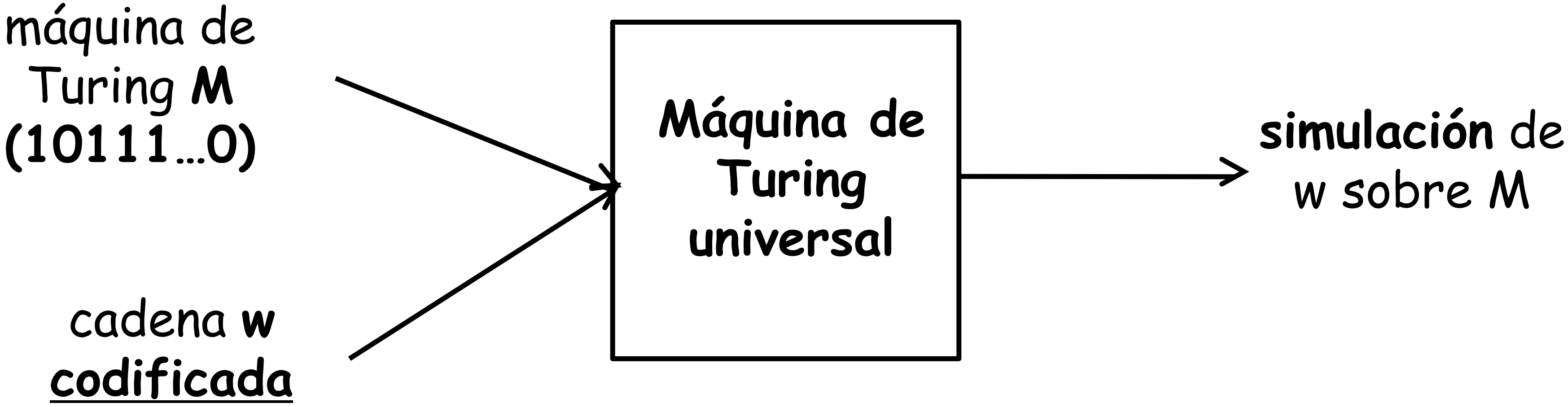


1011010110110101110101110110101010110101

Máquinas de Turing

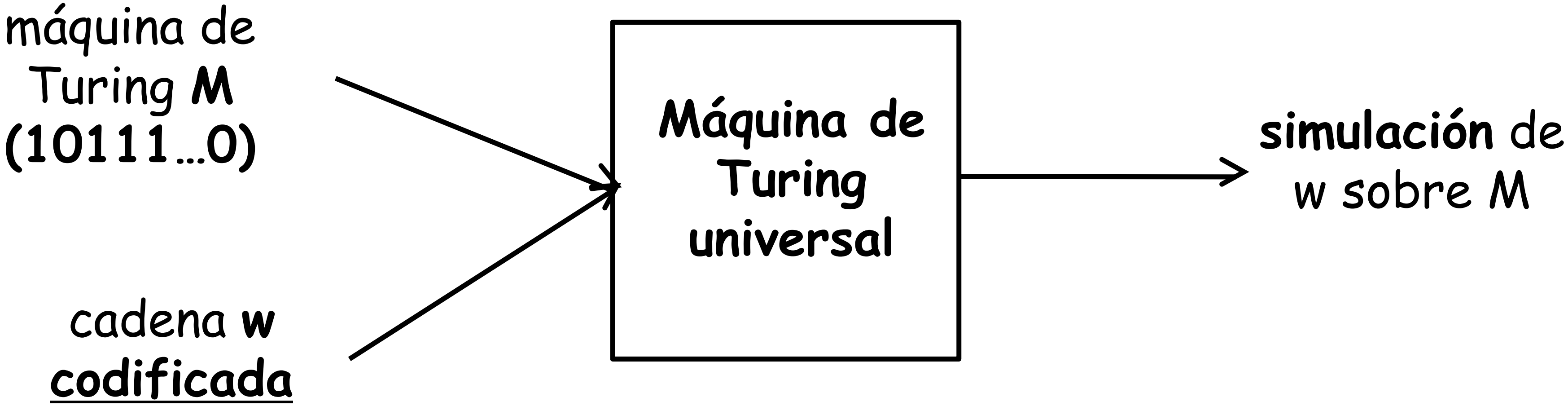
Máquina de Turing universal M_u

• Una máquina de Turing universal M_u tiene como entrada una máquina de Turing M y una cadena w, y simula el comportamiento de w en M

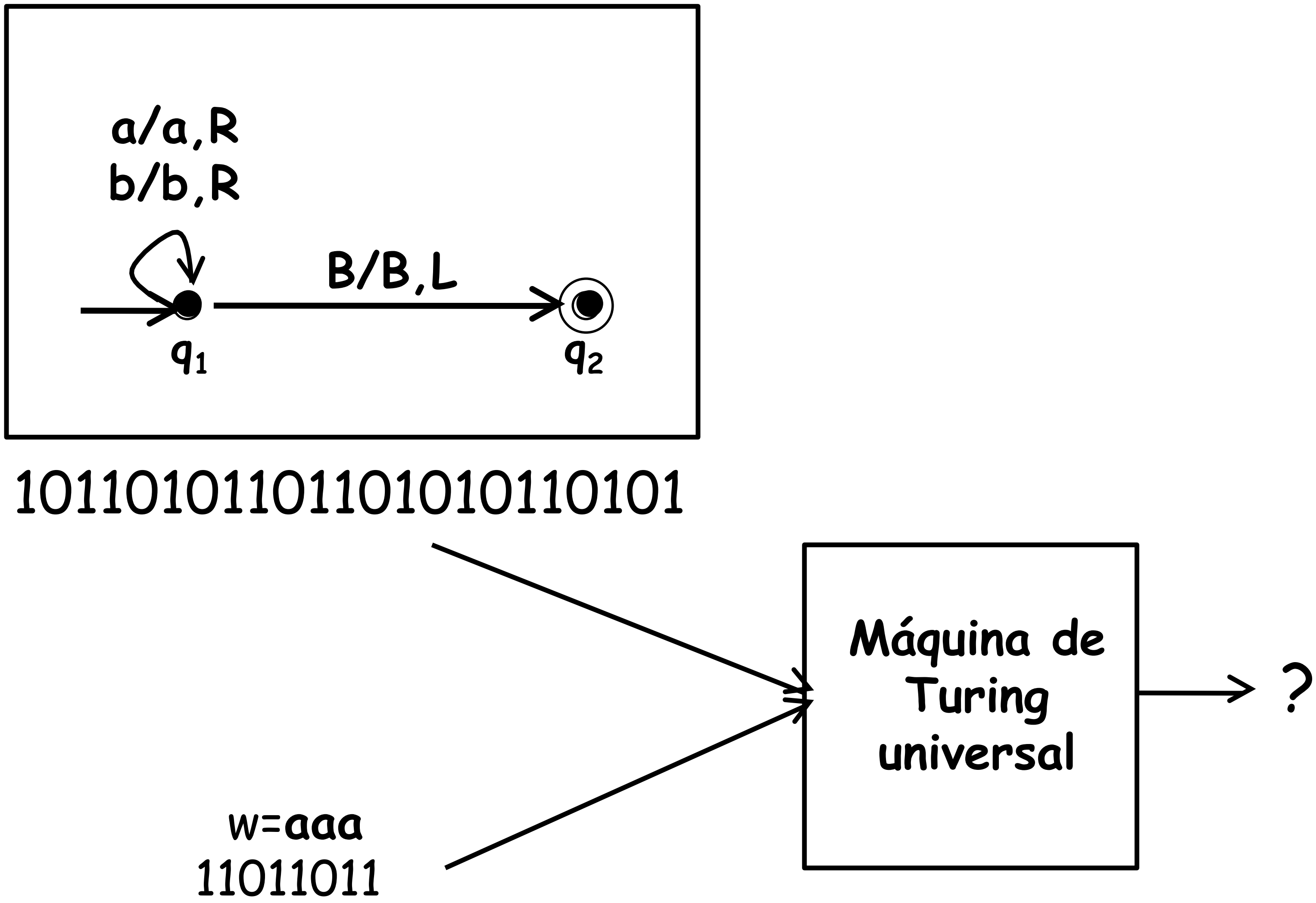


Máquina de Turing universal M_u

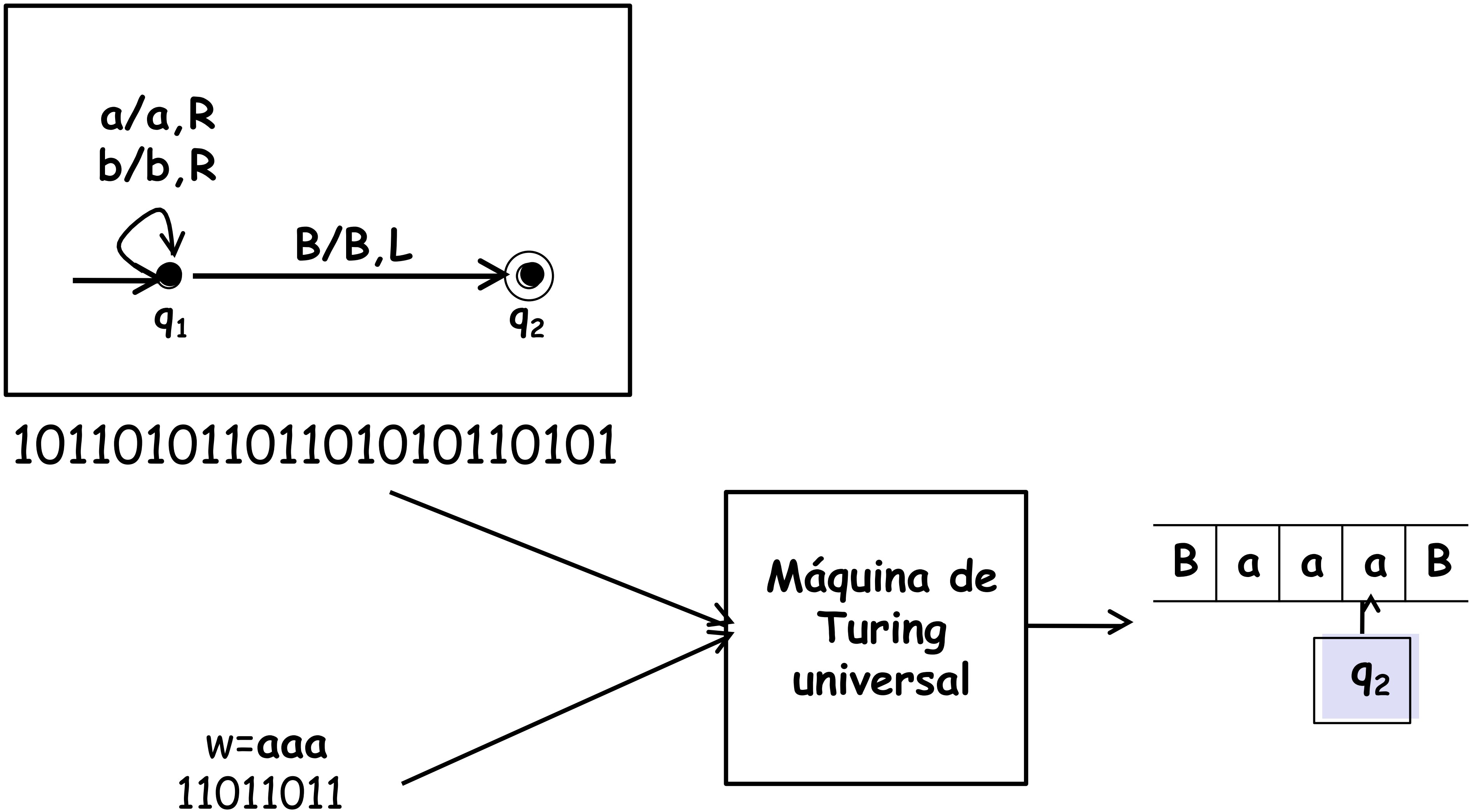
• Una máquina de Turing universal M_u tiene como entrada una máquina de Turing M y una cadena w, y simula el comportamiento de w en M



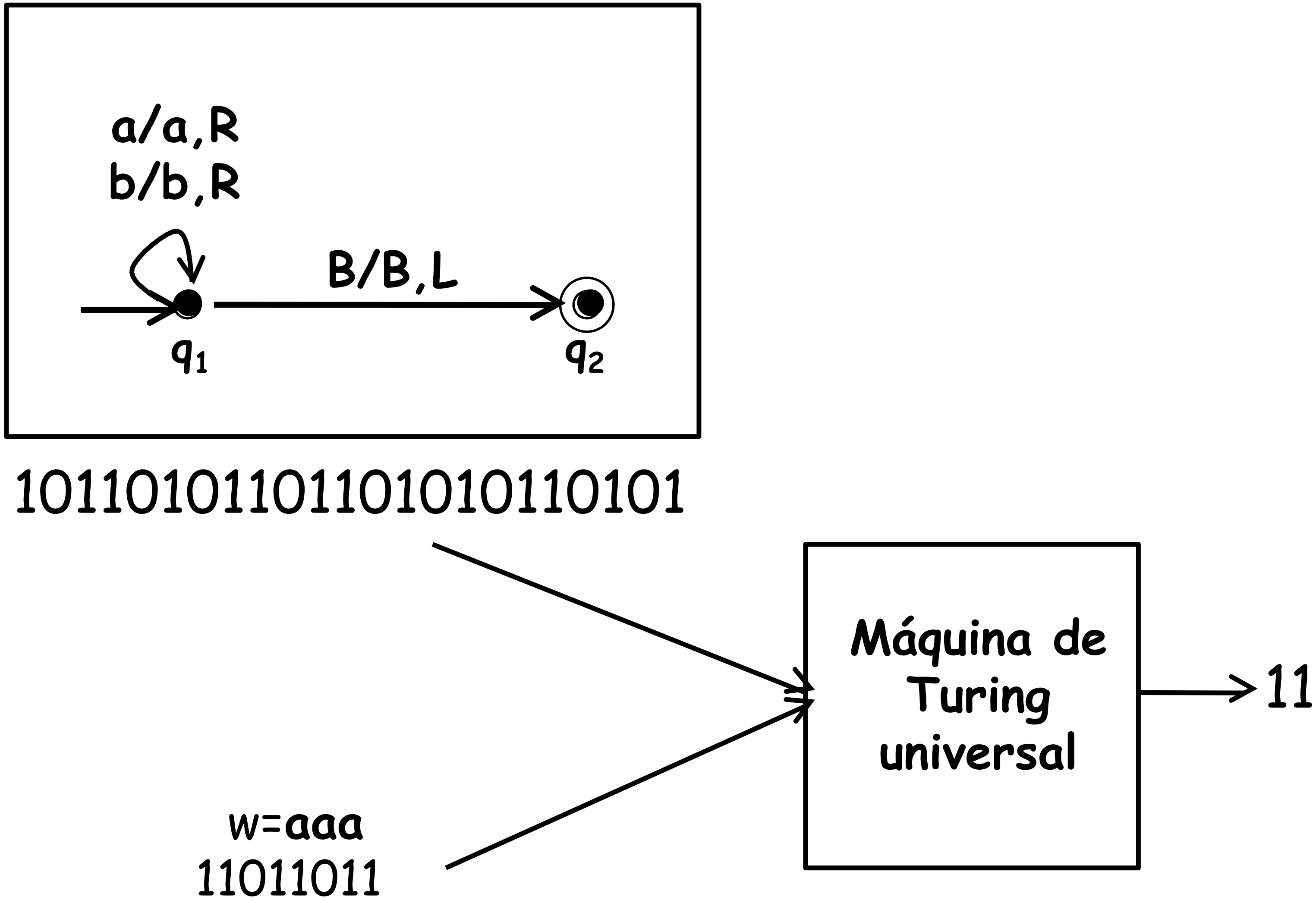
Las cadenas se codifican según el orden en Γ={B,a,b,c}, por ejemplo, w=**ac** se codifica como 1101111



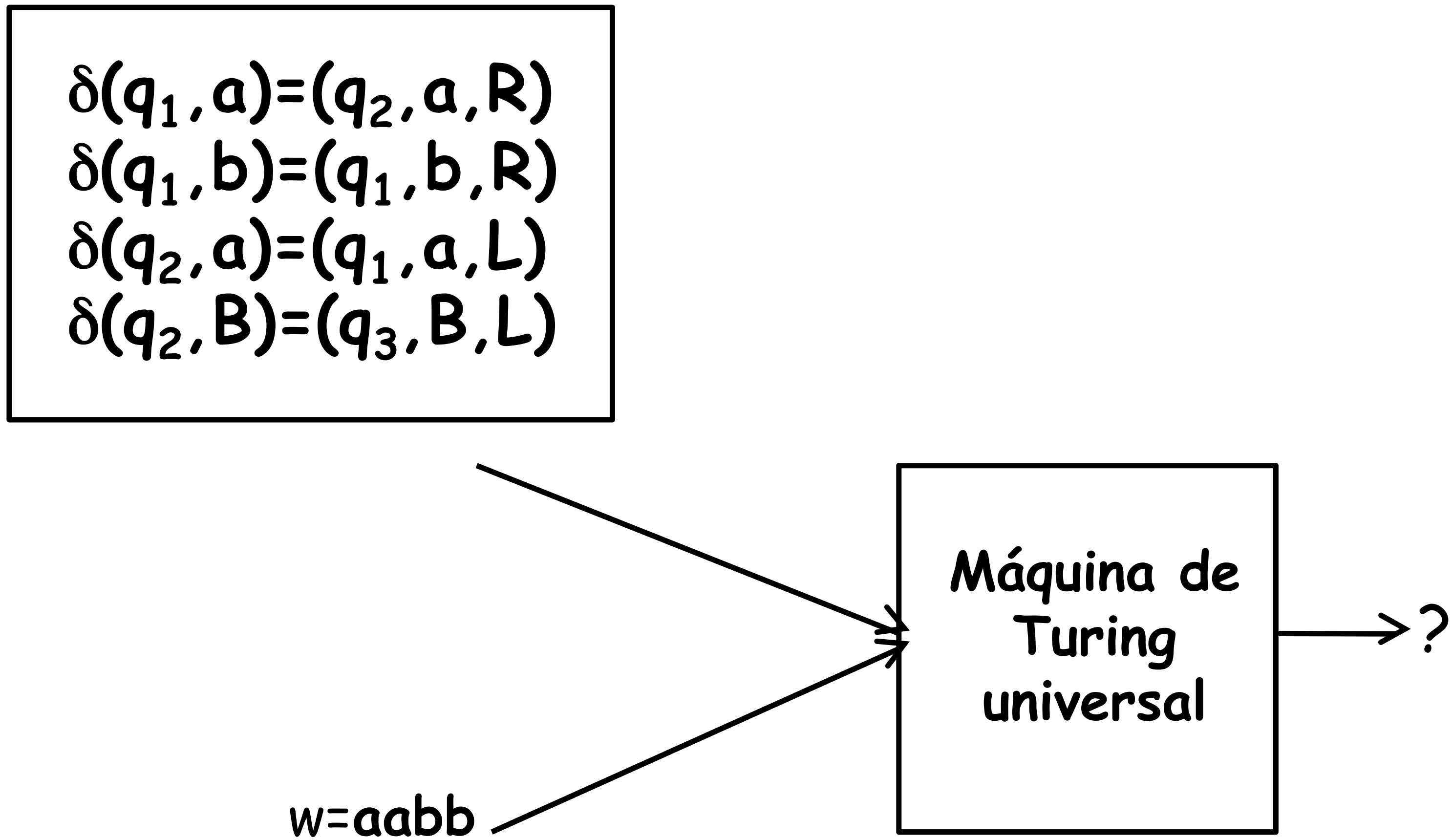
a/a,R
b/b,R
B/B,L
q1
q2
10110101101101010110101
Máquina de Turing universal
?
w=aaa
11011011



Se quiere conocer el estado final del cómputo



• La salida también está codificada y corresponde a uno de los estados $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ si la máquina **termina**


δ(q1,a)=(q2,a,R)
δ(q1,b)=(q1,b,R)
δ(q2,a)=(q1,a,L)
δ(q2,B)=(q3,B,L)
w=aabb
Máquina de Turing universal
?

$$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$$
$$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$$
$$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$$
$$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$$

w=**aabb**

Máquina de Turing universal

- La máquina de Turing universal se queda en un **bucle infinito**

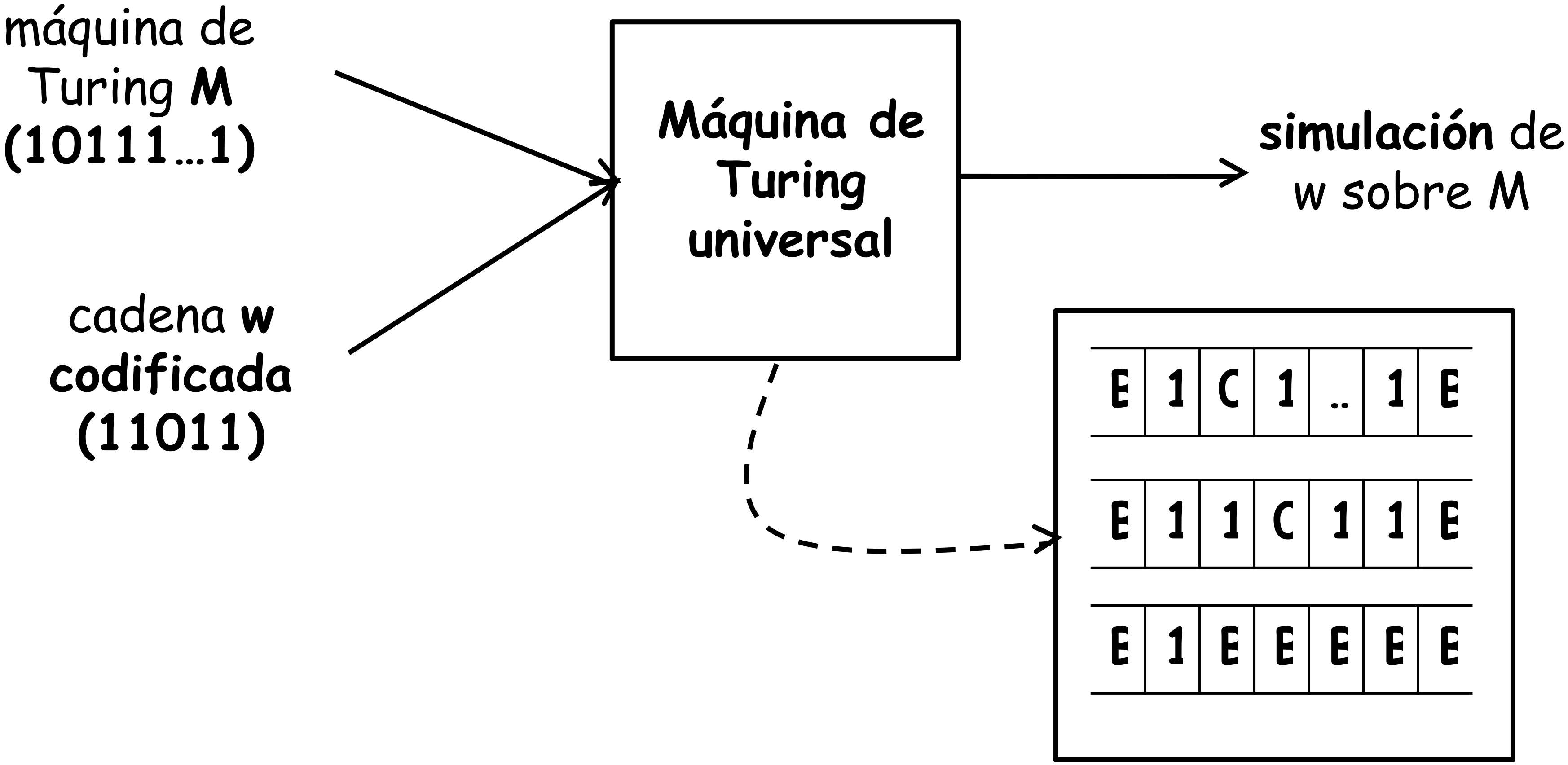
Máquina de Turing universal M_u

M_u tiene 3 cintas:

- En la $cinta_1$ se coloca la codificación de **M**
- En la $cinta_2$ se coloca la codificación de **w**
- En la $cinta_3$ se mantiene la codificación del **estado** actual de la máquina. Inicialmente será 1, que corresponde a q_1

Máquinas de Turing

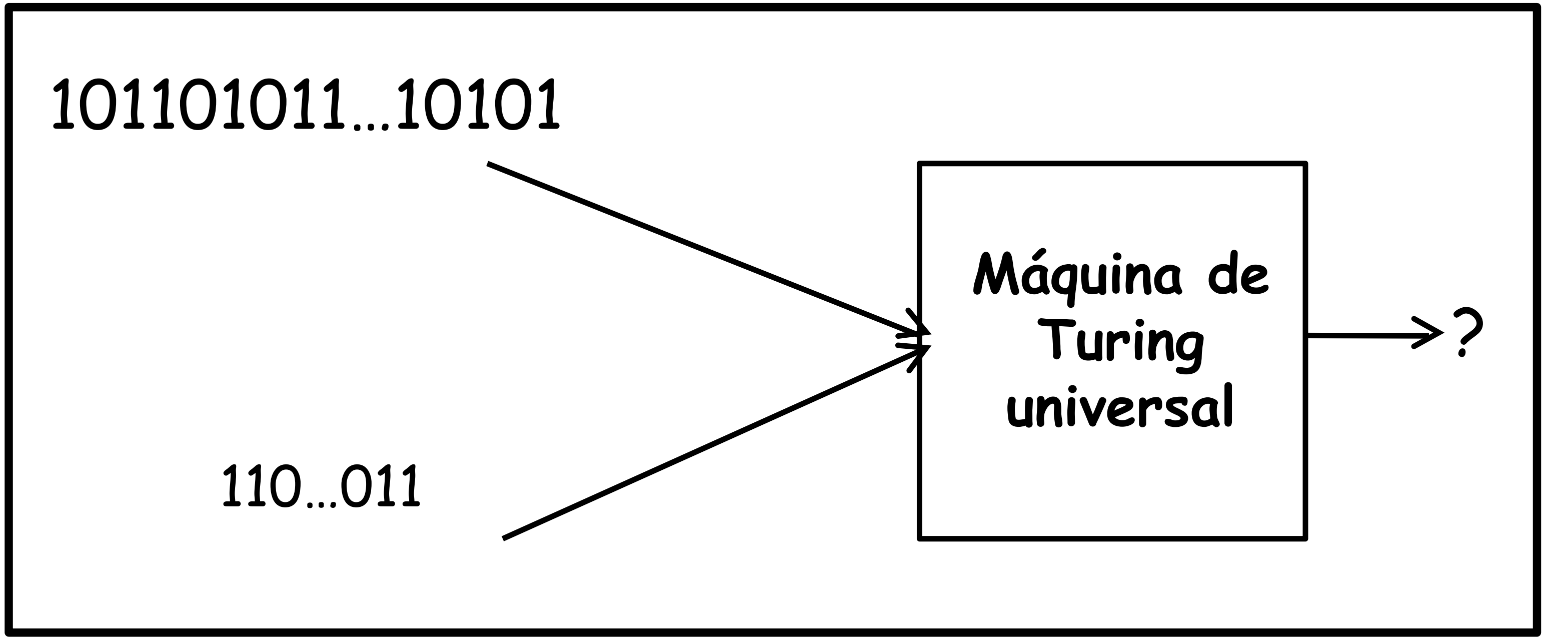
Máquina de Turing universal M_u



Máquina de Turing universal M_u

• Dado el estado en la $cinta_3$ y la cadena en la $cinta_2$ se busca la transición en la $cinta_1$ y se verifica que se genere la cadena en la $cinta_2$

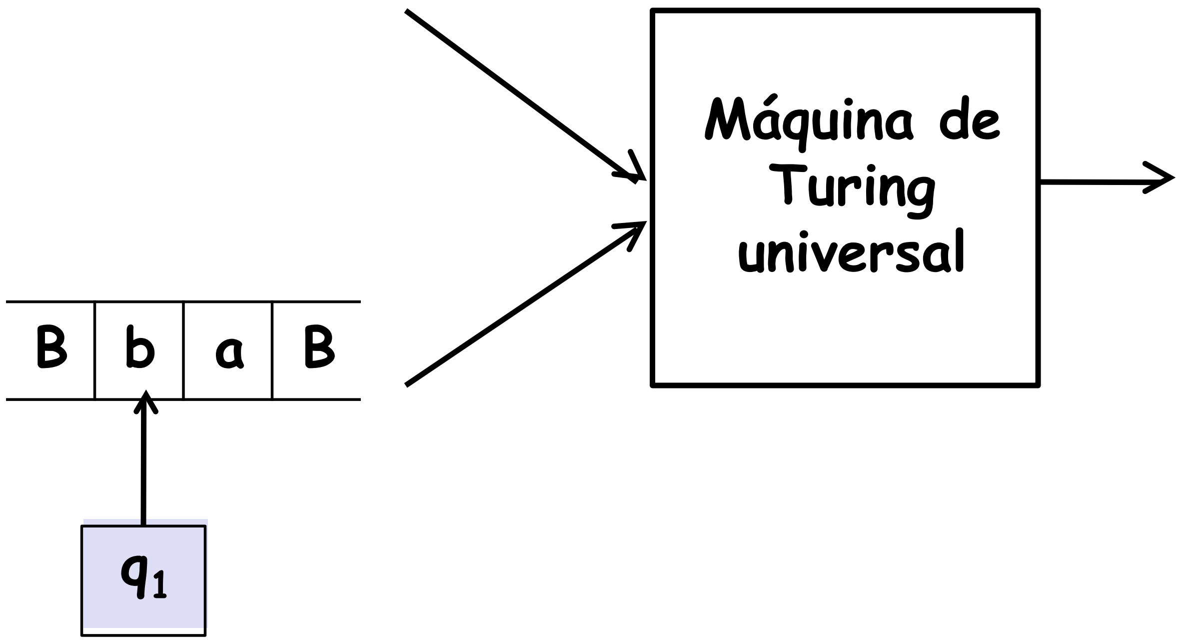
• Si no se encuentra una transición que permita generar la cadena correspondiente, M_u parará, como debería hacer M, en otro caso, M_u se comporta como lo haría M



¿Qué tipos de salida se pueden obtener en una M_u?

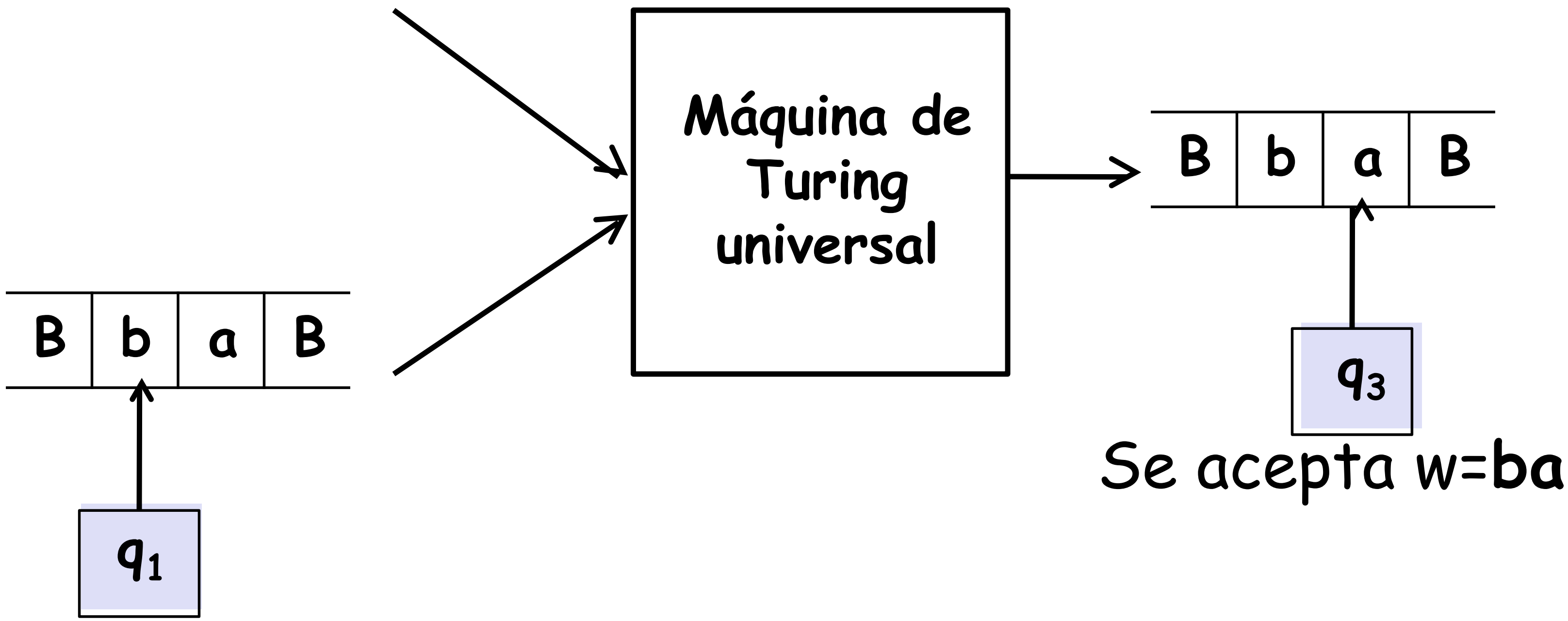
Máquinas de Turing

$\delta(q_1, a) = (q_2, a, R)$
$\delta(q_1, b) = (q_1, b, R)$
$\delta(q_2, a) = (q_1, a, L)$
$\delta(q_2, B) = (q_3, B, L)$



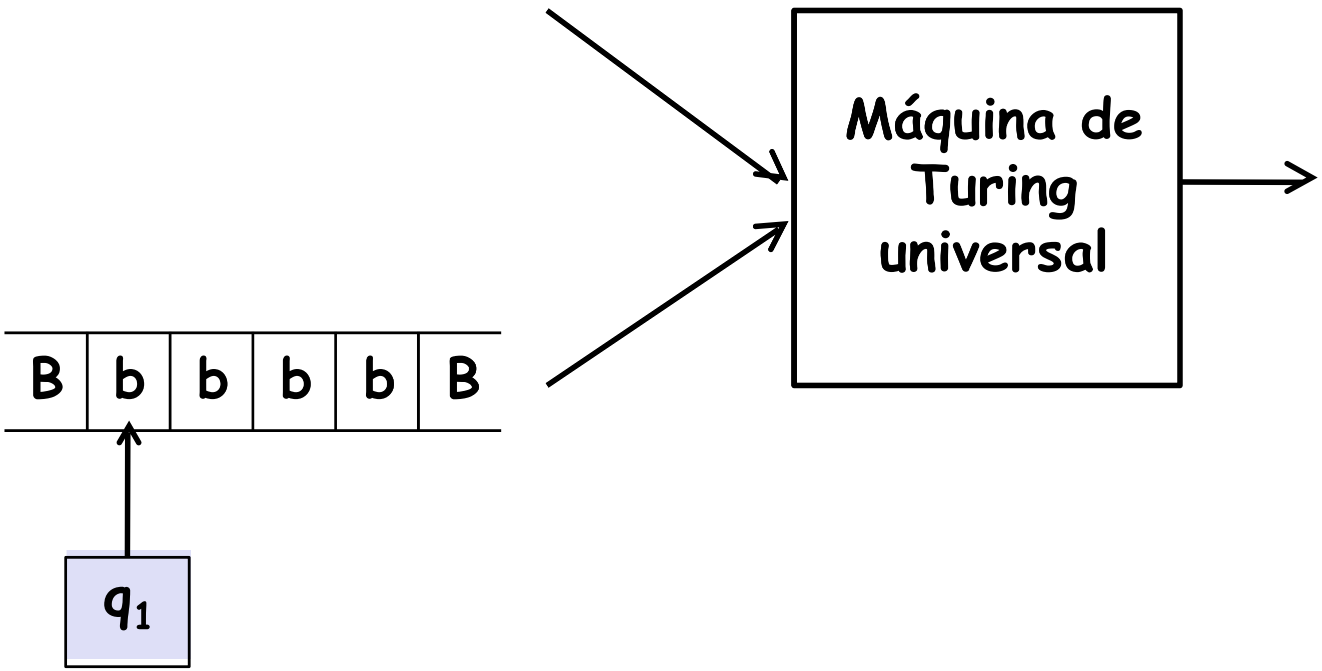
Máquinas de Turing

$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



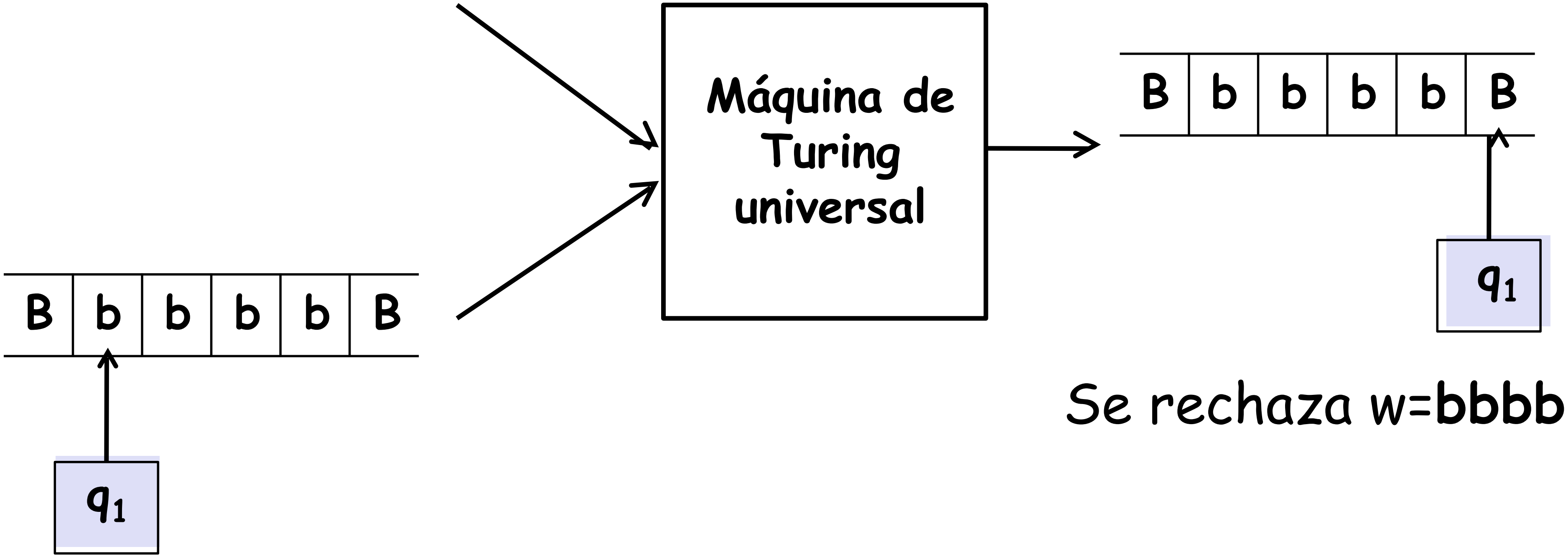
Máquinas de Turing

$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



Máquinas de Turing

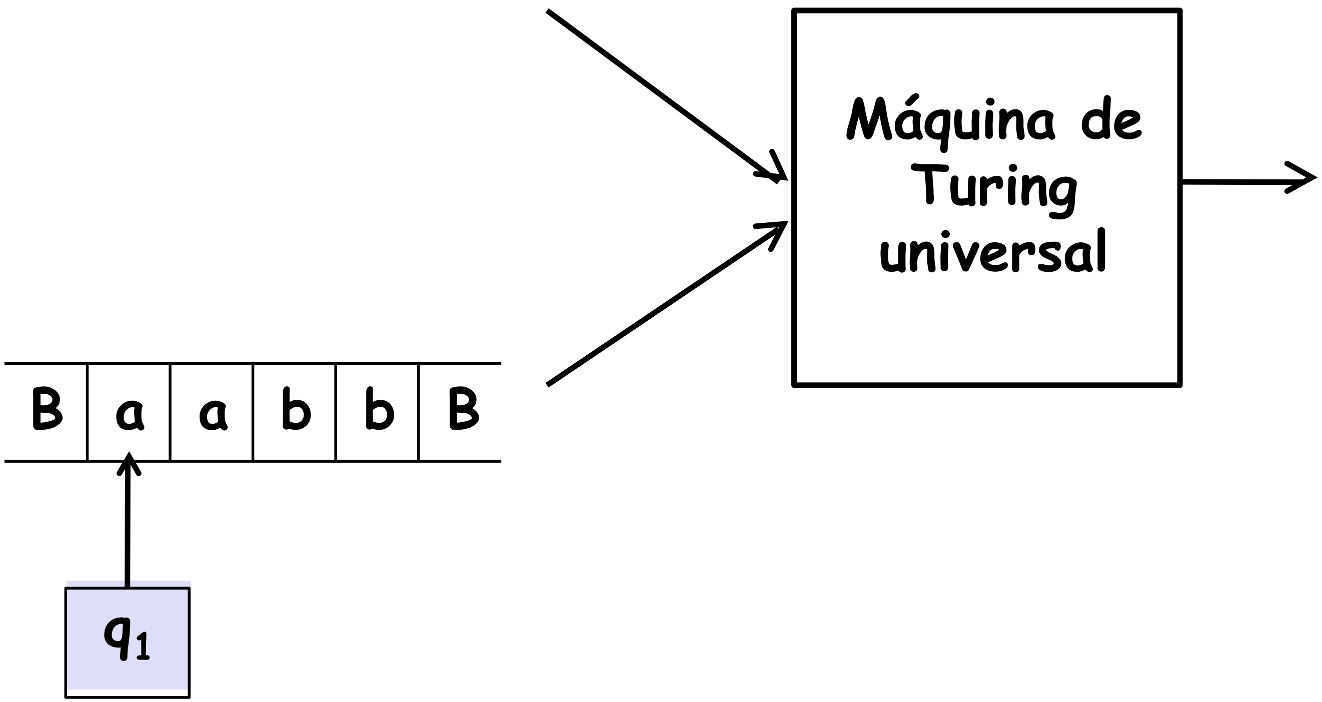
$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



Se rechaza w=**bbbb**

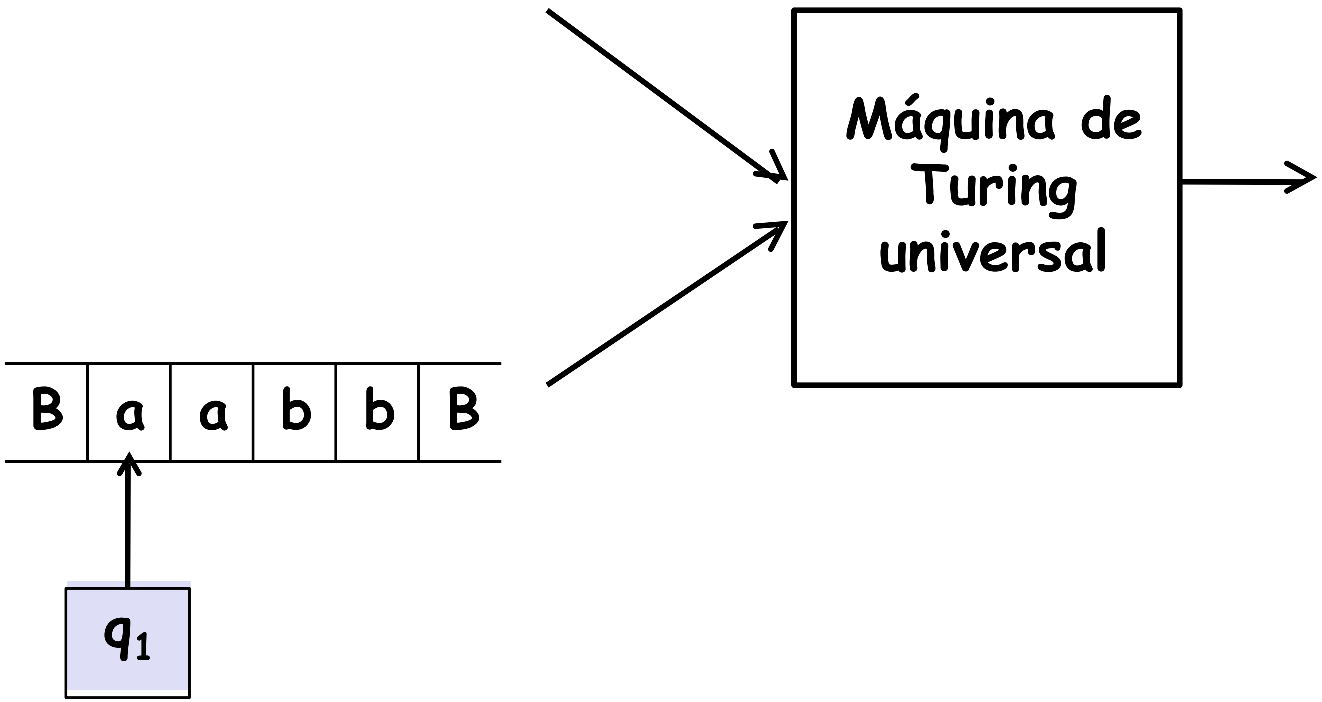
Máquinas de Turing

$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



Máquinas de Turing

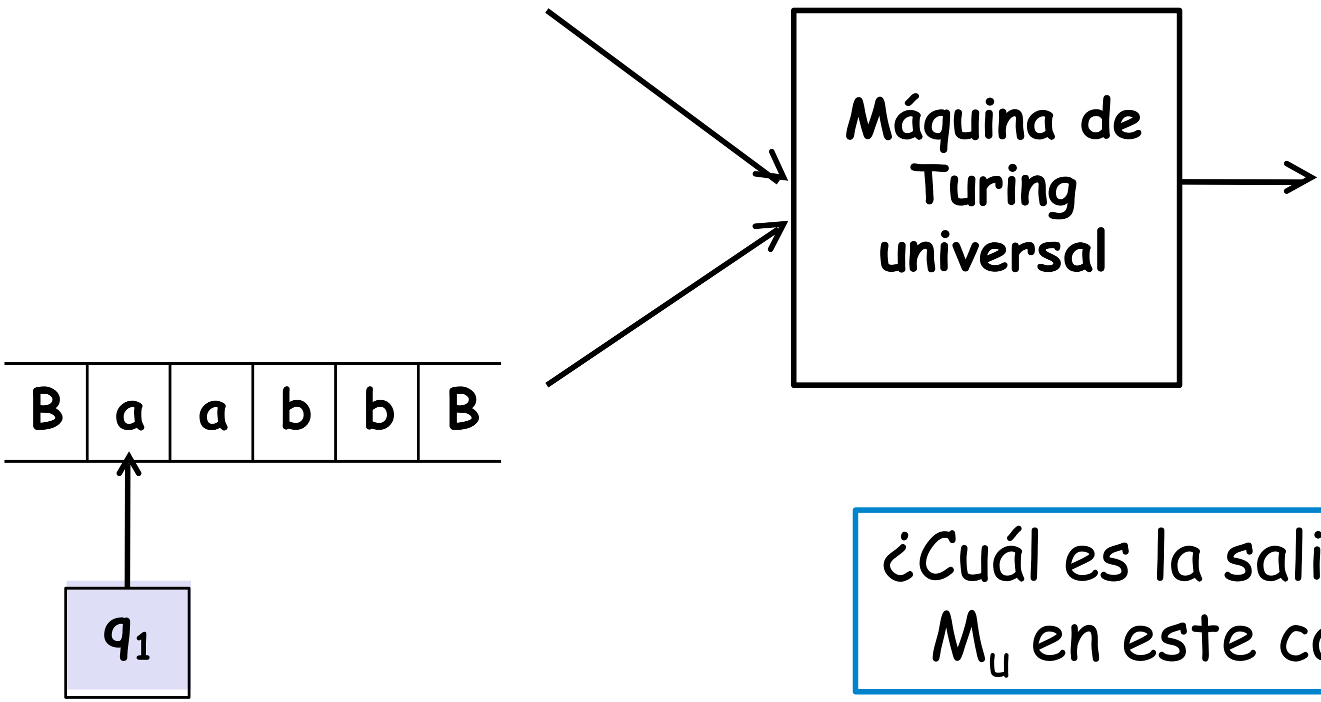
$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



La MT no se detiene. Se queda en un **bucle infinito**

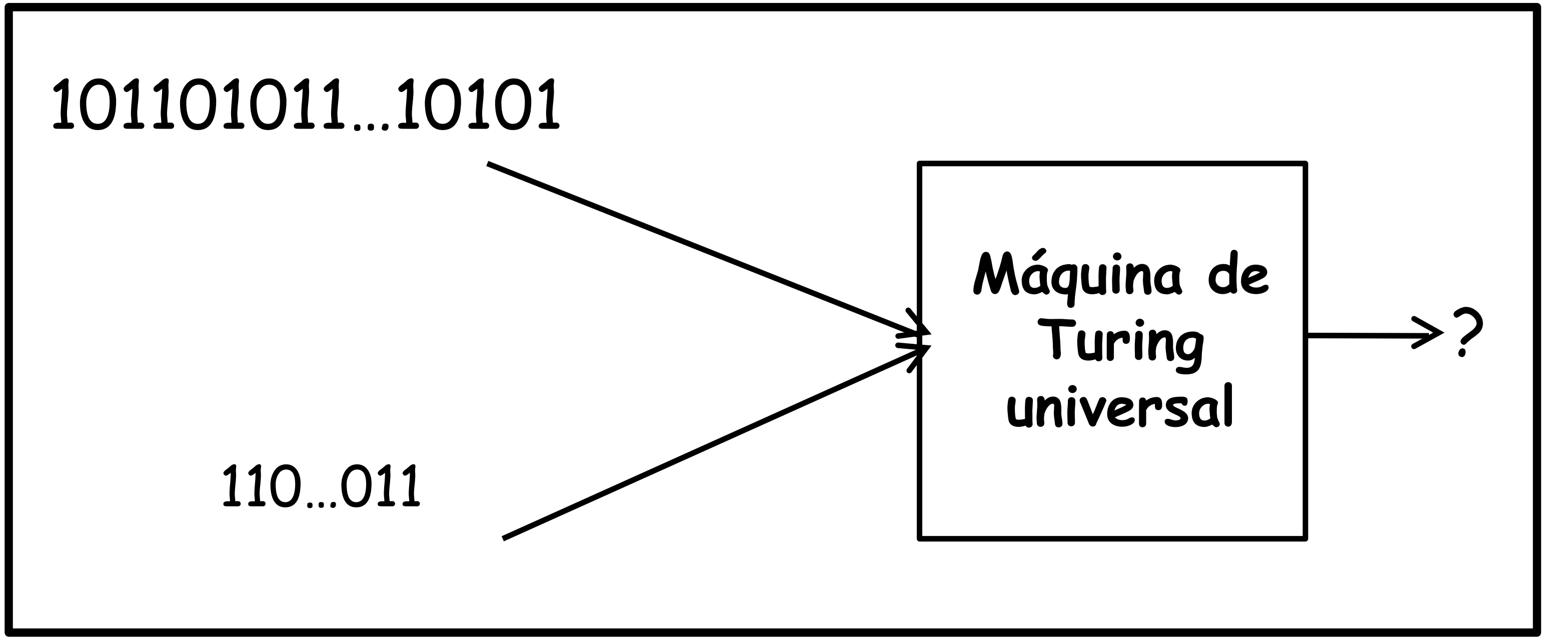
Máquinas de Turing

$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$



La MT no se detiene. Se queda en un **bucle infinito**

¿Cuál es la salida de M_u en este caso?



Para una entrada w, en la simulación puede ocurrir:

- La máquina se detenga y w se acepte
- La máquina se detenga y w se rechace
- La máquina no se detenga, se quede en un bucle infinito

Máquinas de Turing

Las máquinas de Turing originan las siguientes clases de lenguajes:

- Lenguajes recursivamente enumerables (LRE)
- Lenguajes recursivos (LR)

Máquinas de Turing

Las máquinas de Turing originan las siguientes clases de lenguajes:

- Lenguajes recursivamente enumerables (LRE)
- Lenguajes recursivos (LR)

La máquina se detiene para cualquier w

La máquina puede no detenerse para alguna entrada w

Máquinas de Turing

Las máquinas de Turing originan las siguientes clases de lenguajes:

- Lenguajes recursivamente enumerables (LRE)
- Lenguajes recursivos (LR)

La máquina se detiene para cualquier w (así pertenezca, o no, al lenguaje)

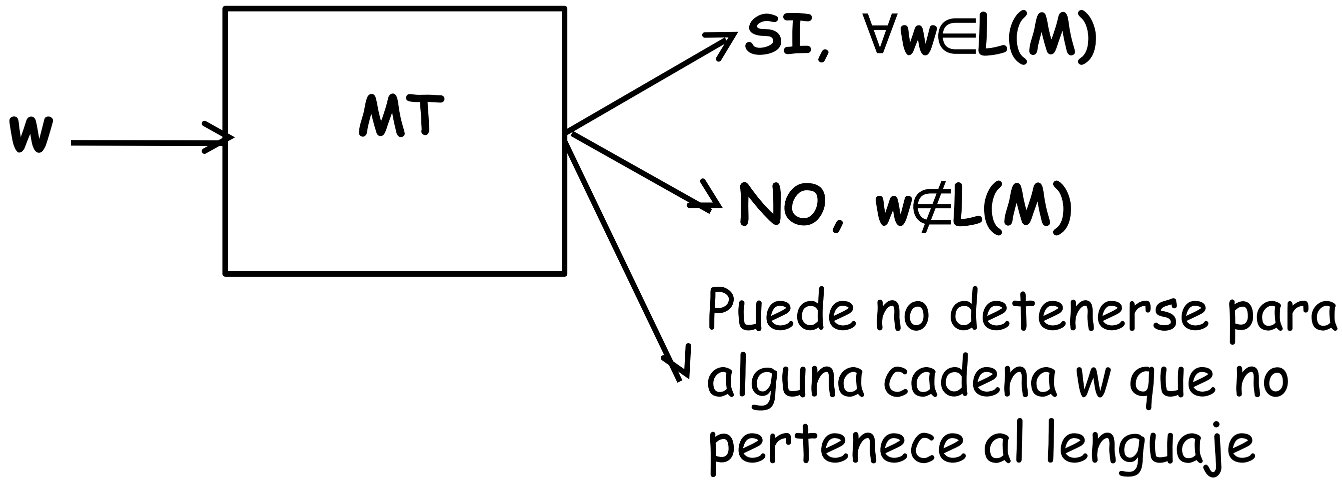
La máquina puede no detenerse para alguna entrada w (w que no pertenece al lenguaje)

Máquinas de Turing

Lenguaje recursivamente enumerable

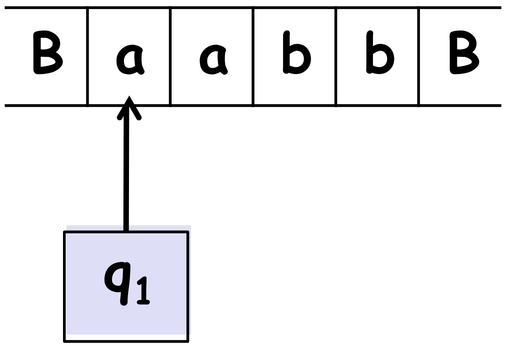
Sea M una máquina de Turing, L(M) es LRE si:

- $\forall w \in L$, M se detiene en $q \in F$
- $\forall w \notin L$, M se detiene en $q \notin F$ o puede no parar



Máquinas de Turing

$\delta(q_1, a) = (q_2, a, R)$
$\delta(q_1, b) = (q_1, b, R)$
$\delta(q_2, a) = (q_1, a, L)$
$\delta(q_2, B) = (q_3, B, L)$



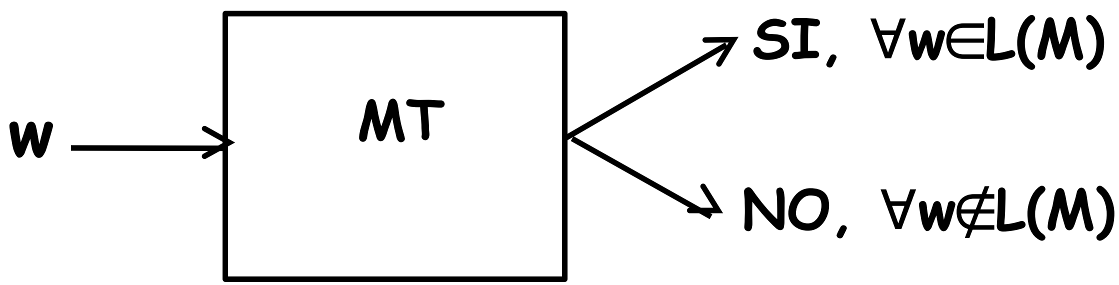
La máquina no se detiene para la entrada **aabb**

Por lo tanto, el lenguaje generado por la máquina es **recursivamente enumerable**

Lenguaje recursivo

Sea M una máquina de Turing, L(M) es recursivo si:

- $\forall w \in L$, M se detiene en $q \in F$
- $\forall w \notin L$, M se detiene en $q \notin F$



Máquinas de Turing

Las máquinas de Turing originan las siguientes clases de lenguajes:

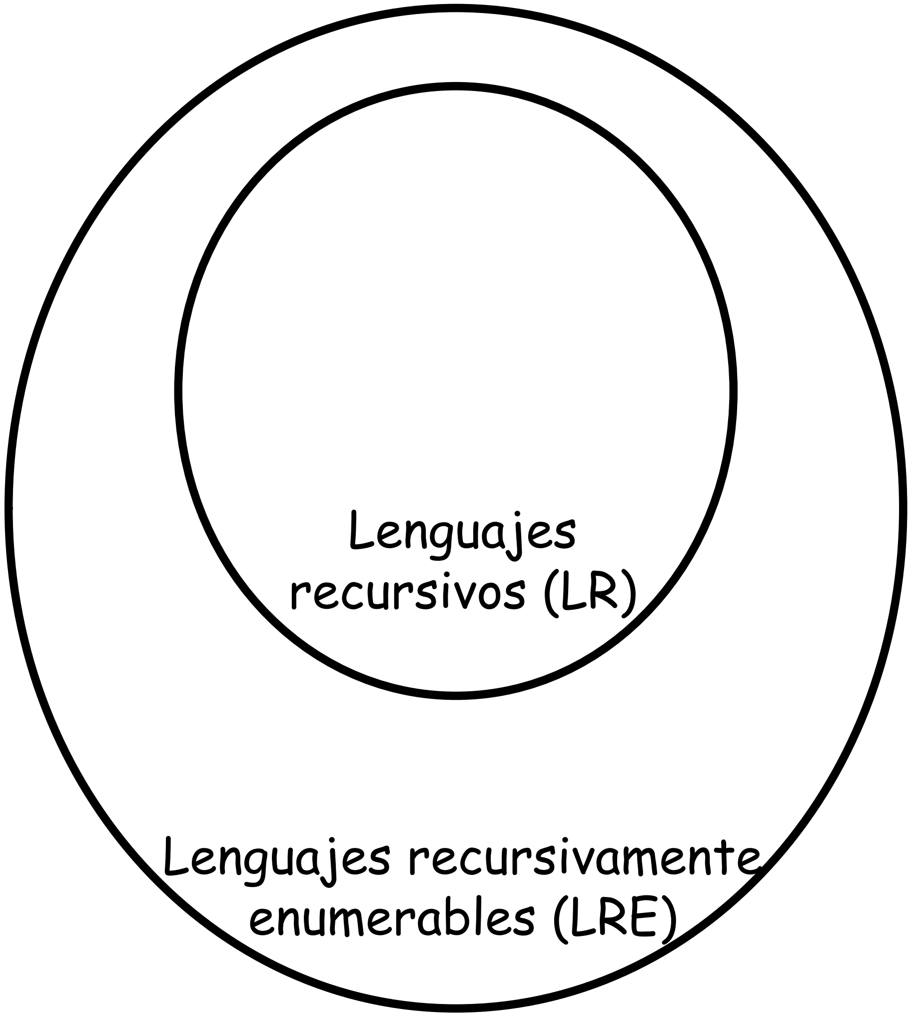
- Lenguajes recursivamente enumerables (LRE)
- Lenguajes recursivos (LR)

La máquina se detiene para cualquier w (así pertenezca, o no, al lenguaje)

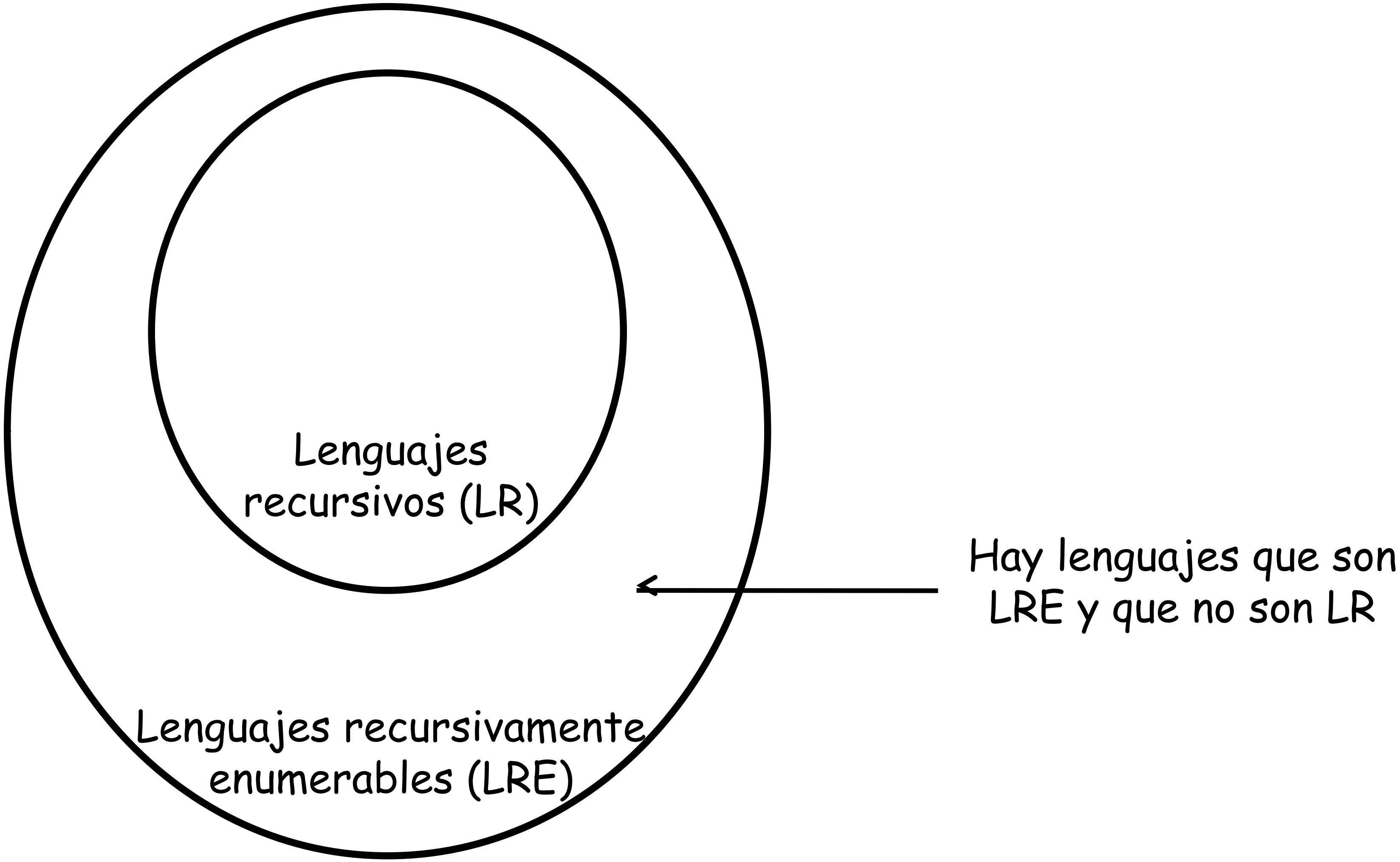
La máquina puede no detenerse para alguna entrada w (w que no pertenece al lenguaje)

¿Entre LRE y LR, cuál conjunto es más grande?

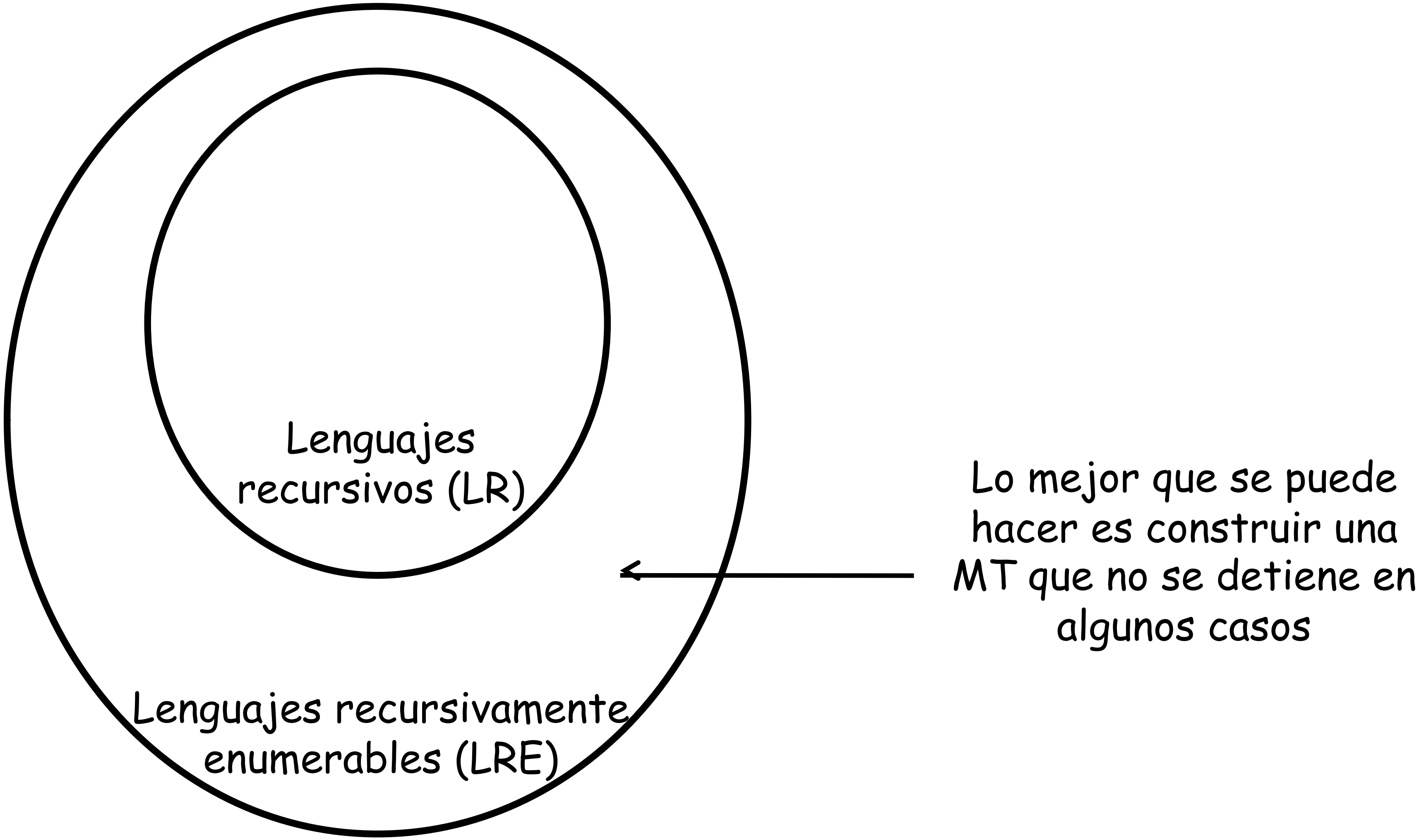
Máquinas de Turing



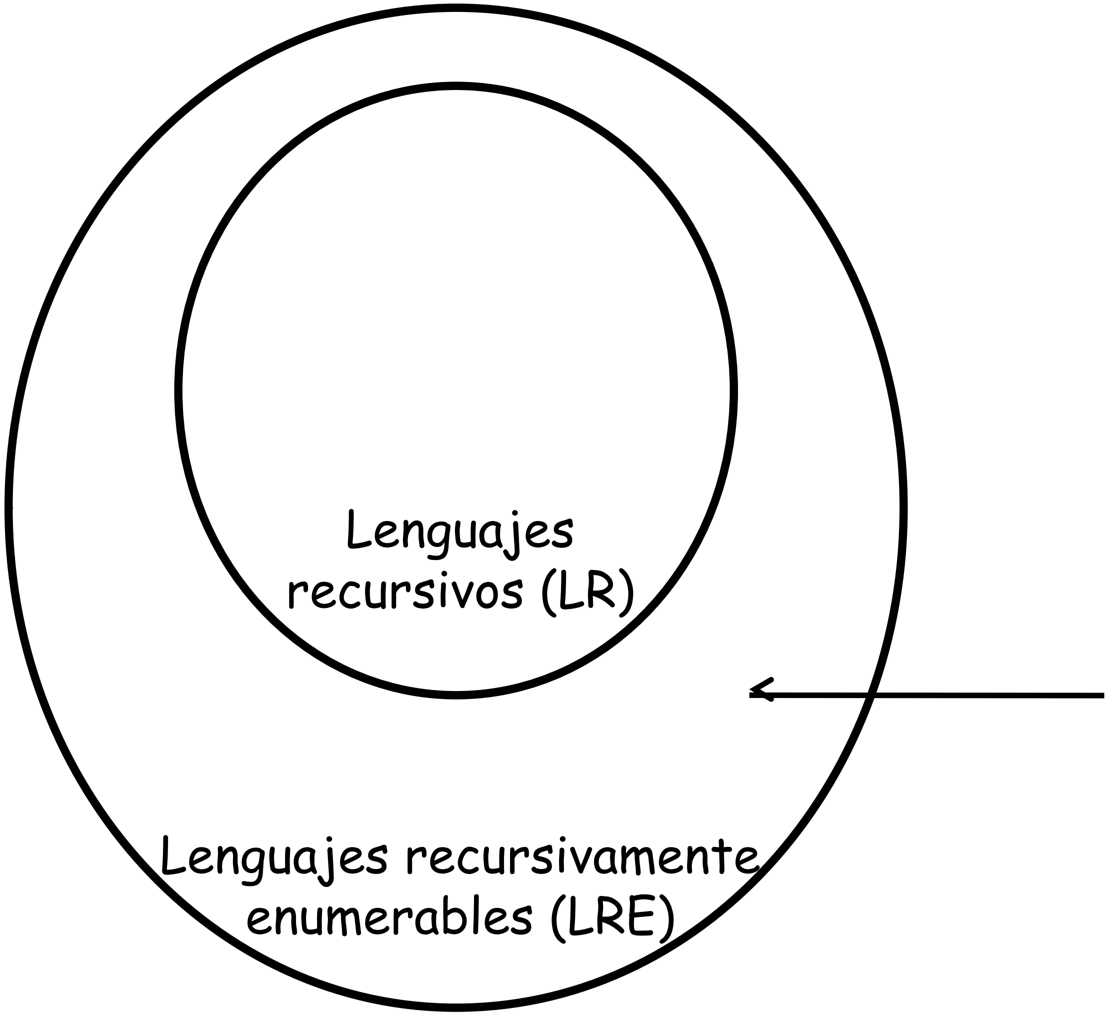
Máquinas de Turing



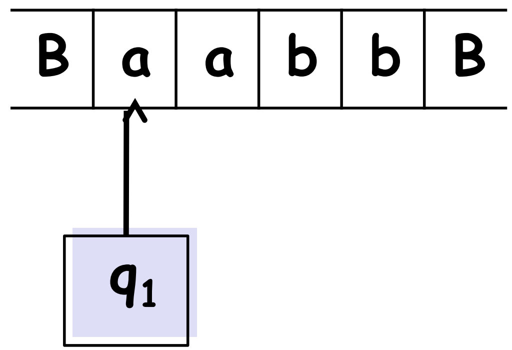
Máquinas de Turing



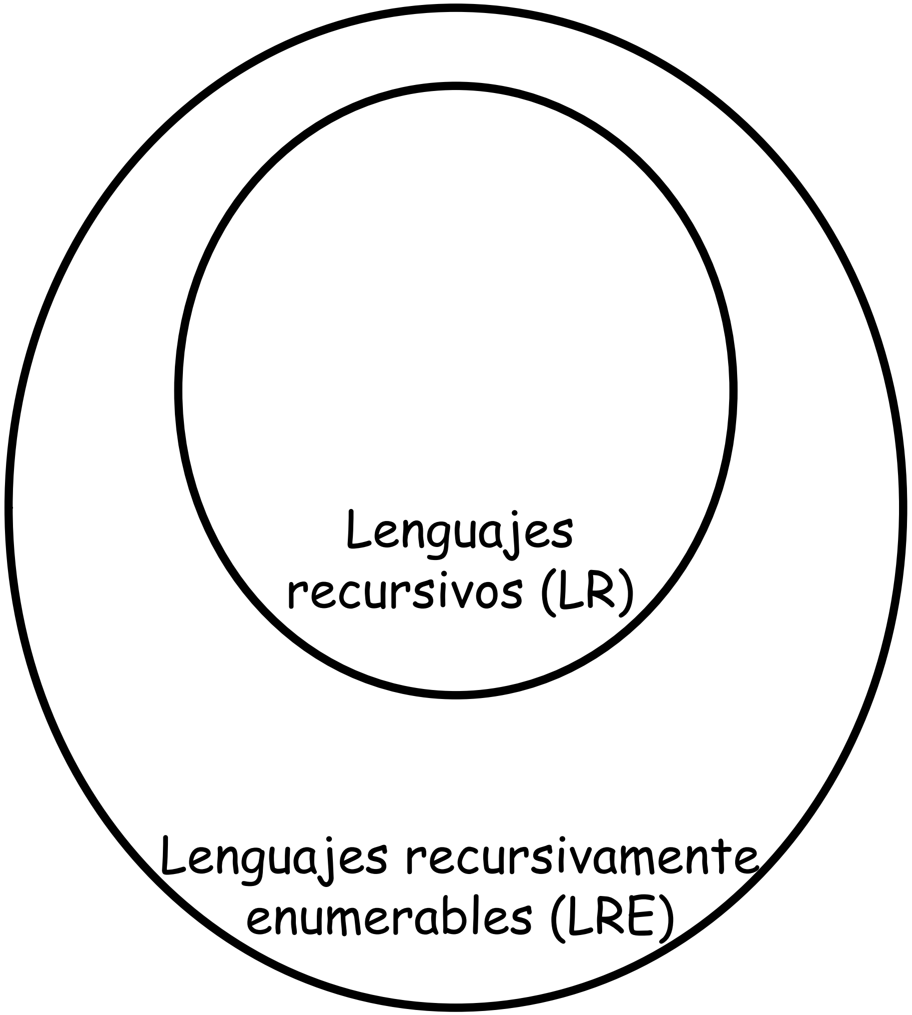
Máquinas de Turing



$$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$$
$$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$$
$$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$$
$$\delta(q_2,B)=(q_3,B,L)$$

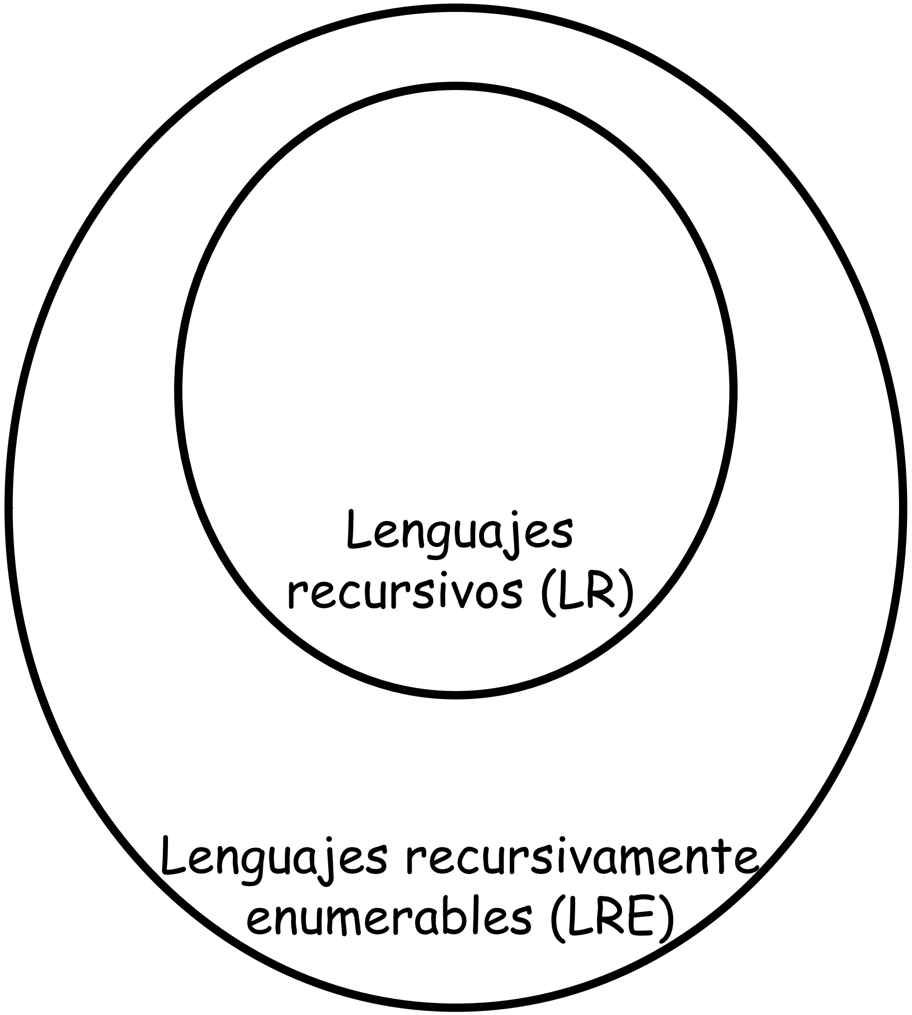


Máquinas de Turing



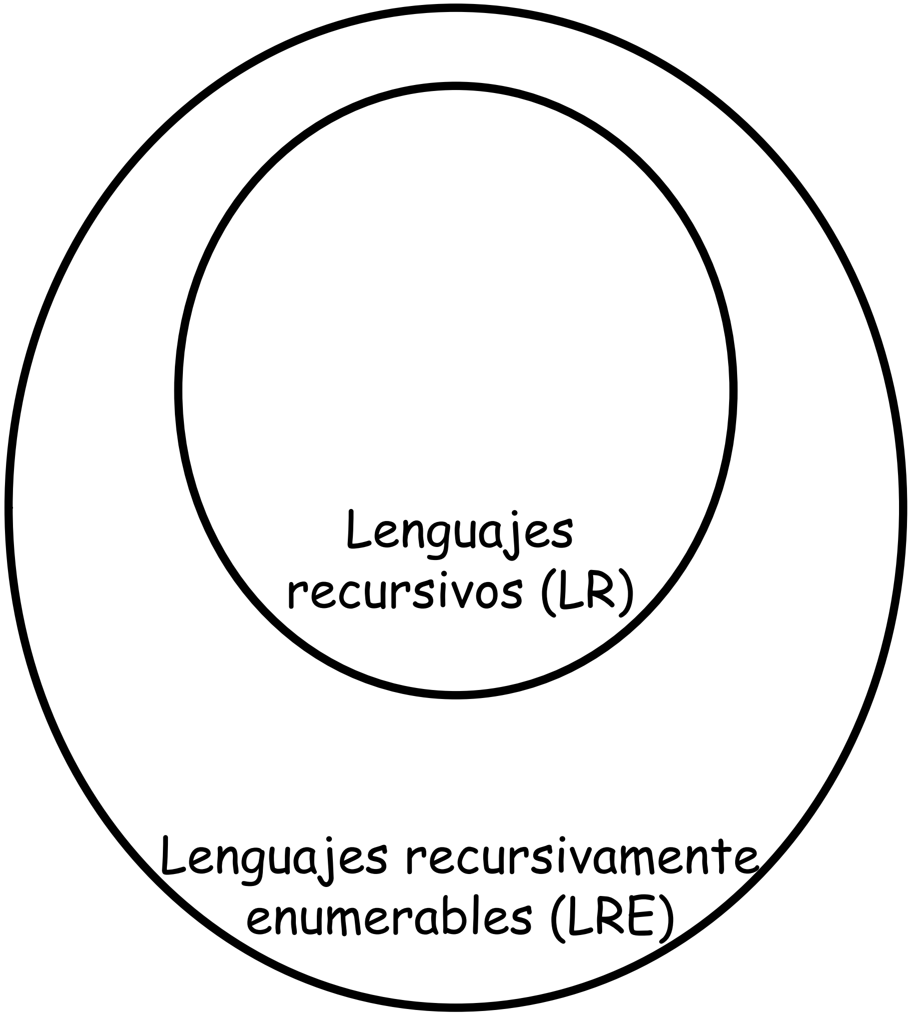
a*b*, ¿qué es lo mejor
que se puede hacer?

Máquinas de Turing



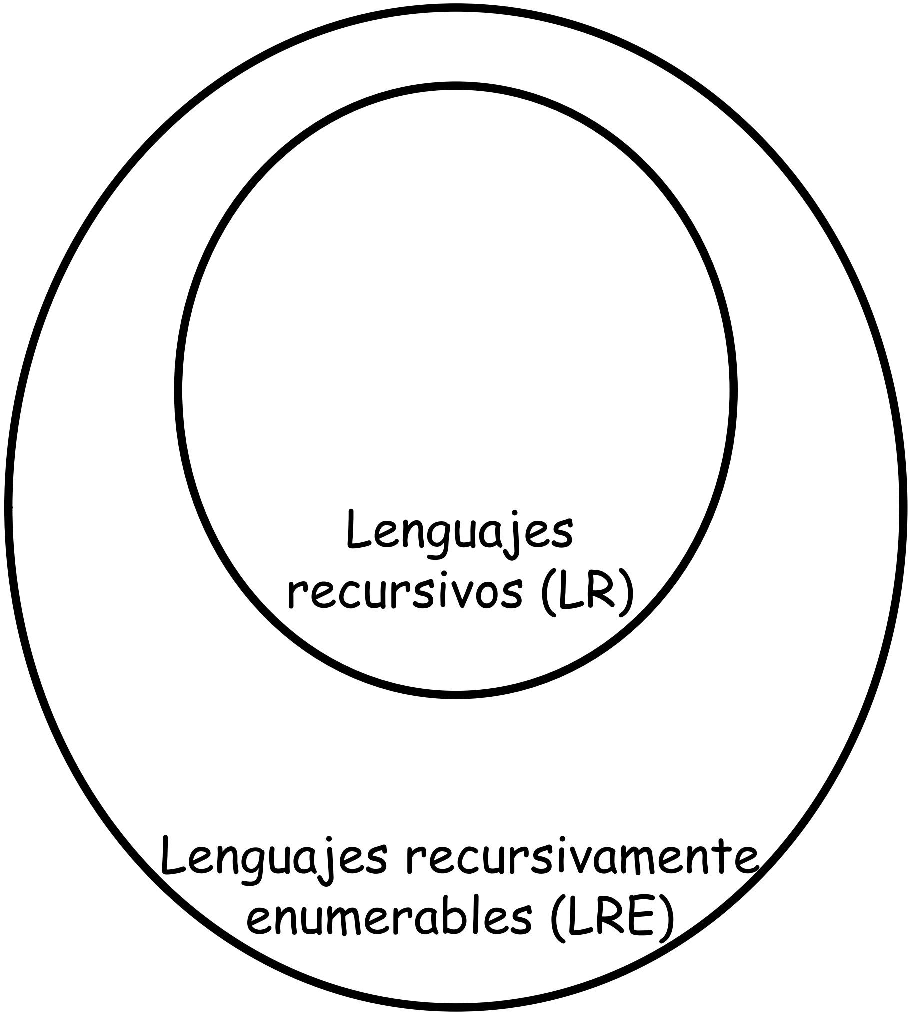
Se puede construir una MT que se detiene en todos los casos, entonces **a*b*** es un lenguaje recursivo

Máquinas de Turing



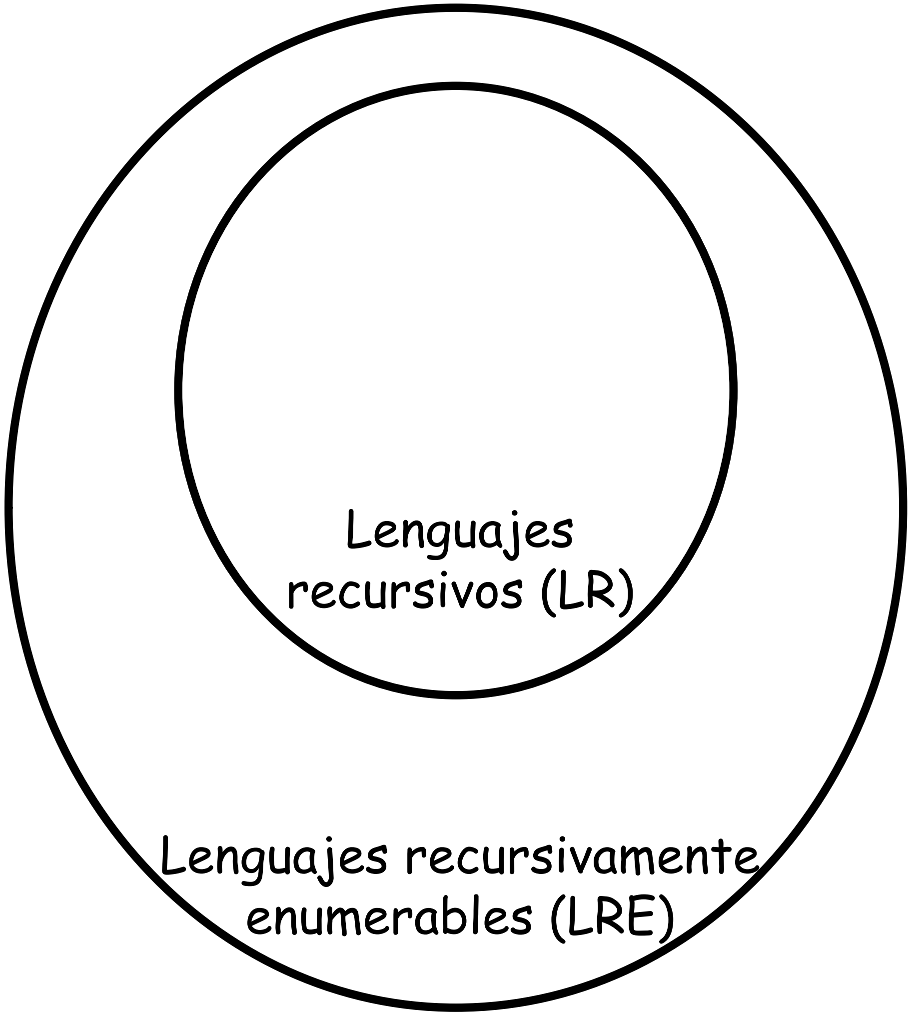
$a^n b^n$, ¿qué es lo mejor que se puede hacer?

Máquinas de Turing



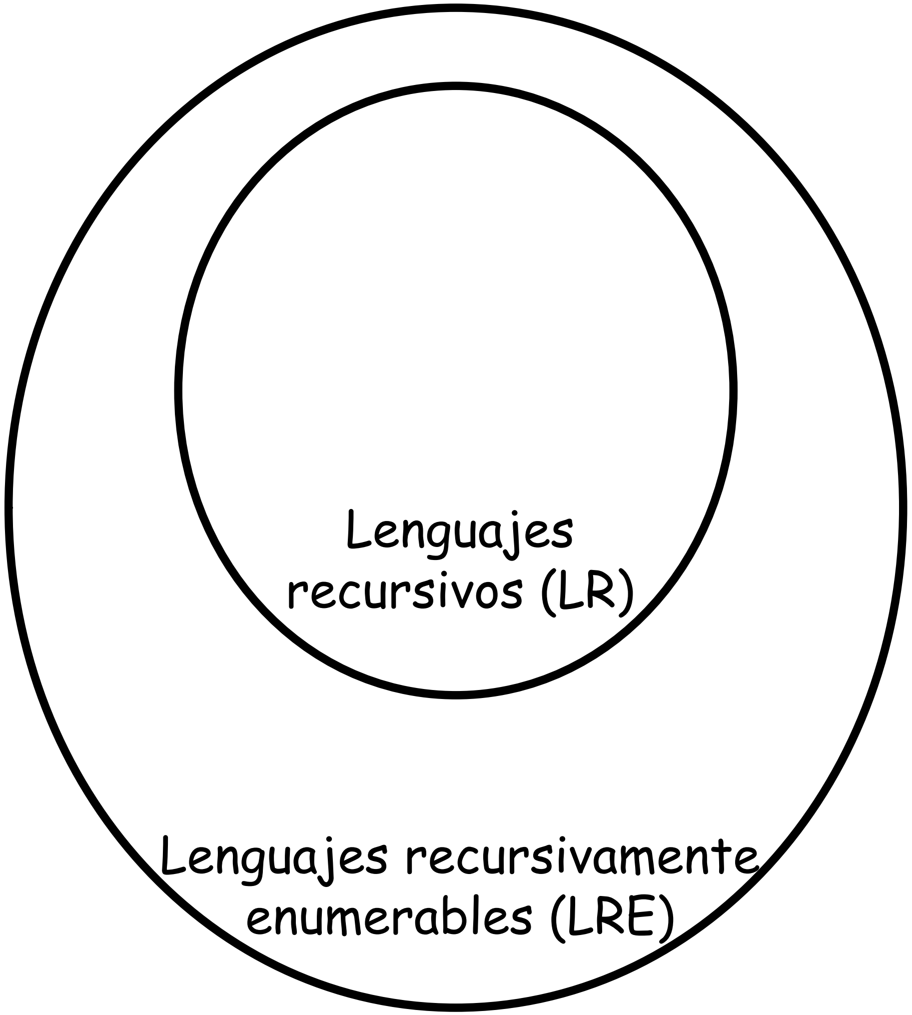
Se puede construir una MT que se detiene en todos los casos, entonces $\mathbf{a^n b^n}$ es un lenguaje recursivo

Máquinas de Turing



Máquina de Turing universal **Mu**, ¿qué es lo mejor que se puede hacer?

Máquinas de Turing



Lo mejor que se puede hacer es una MT que no se detiene en algunos casos.

L_u={M0w|M acepta w∈Σ*}

Máquinas de Turing

- Dado un autómata finito $M=(Q,\Sigma,s,F,\delta)$ se puede construir una MT $M'=(Q',\Sigma',\Gamma,s',B,F',\delta')$ tal que $L(M)=L(M')$.
- M' se detiene ante cualquier entrada w

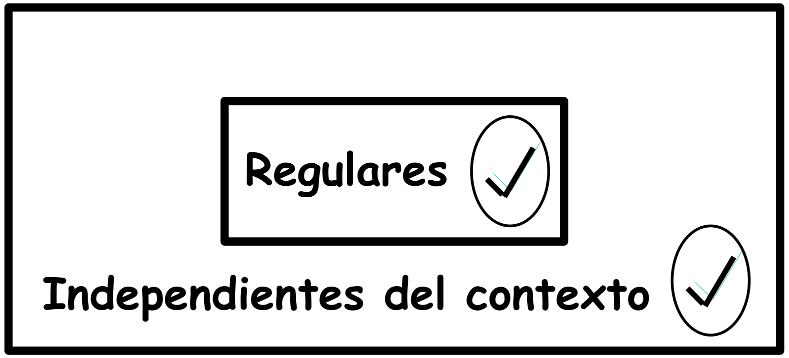
Por lo tanto, **todo lenguaje regular es recursivo** porque se puede construir una MT que acepta cualquier palabra de $L(M)$ y siempre para

Máquinas de Turing

- Dado un <u>autómata de pila</u> M se puede construir una MT $M'=(Q',\Sigma',\Gamma,s',B,F',\delta')$ tal que $L(M)=L(M')$.
- M' se detiene ante cualquier cadena w
- Por lo tanto, **todo lenguaje independiente del contexto es recursivo** porque se puede construir una MT que acepta cualquier palabra de L(M) y siempre para

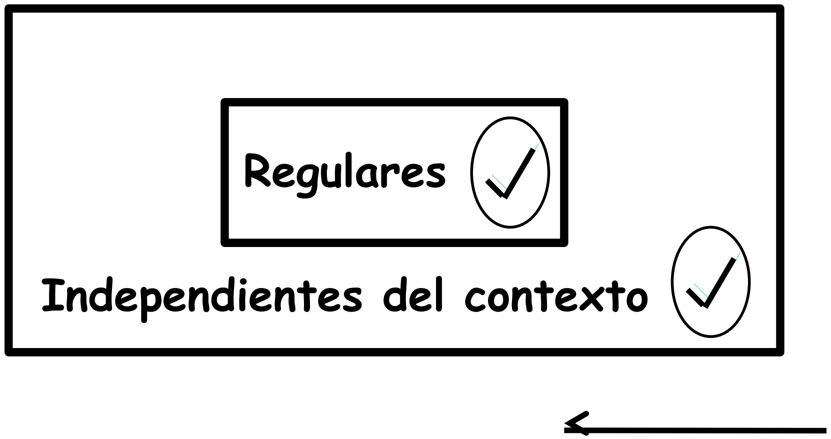
Máquinas de Turing

Los lenguajes regulares y los independientes del contexto son recursivos, es decir, se puede construir una máquina de Turing que se detenga para cualquier entrada w



Máquinas de Turing

Los lenguajes regulares y los independientes del contexto son recursivos, es decir, se puede construir una máquina de Turing que se detenga para cualquier entrada w



¿Hay lenguajes recursivos acá, es decir, ni regulares ni independientes del contexto?

Máquinas de Turing

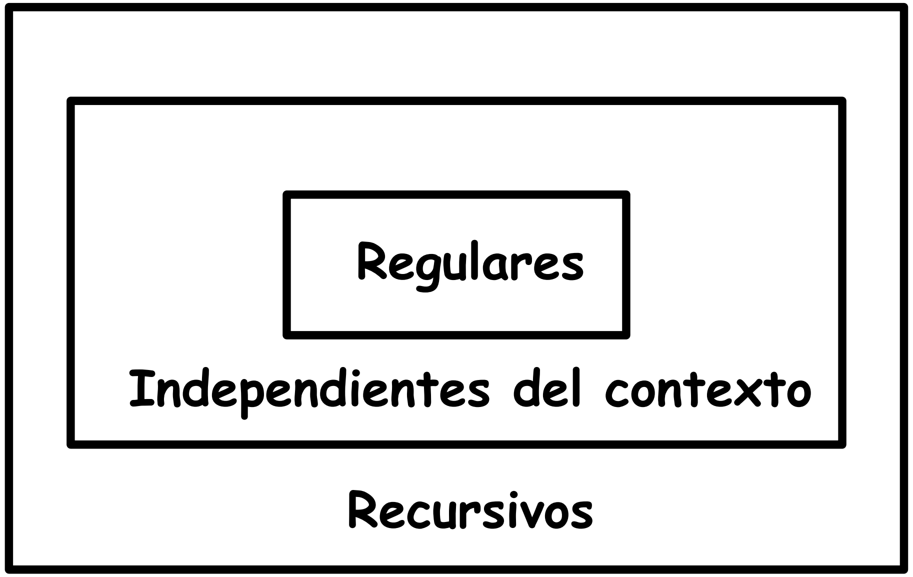
Hay lenguajes recursivos que no son ni regulares ni LIC

Máquinas de Turing

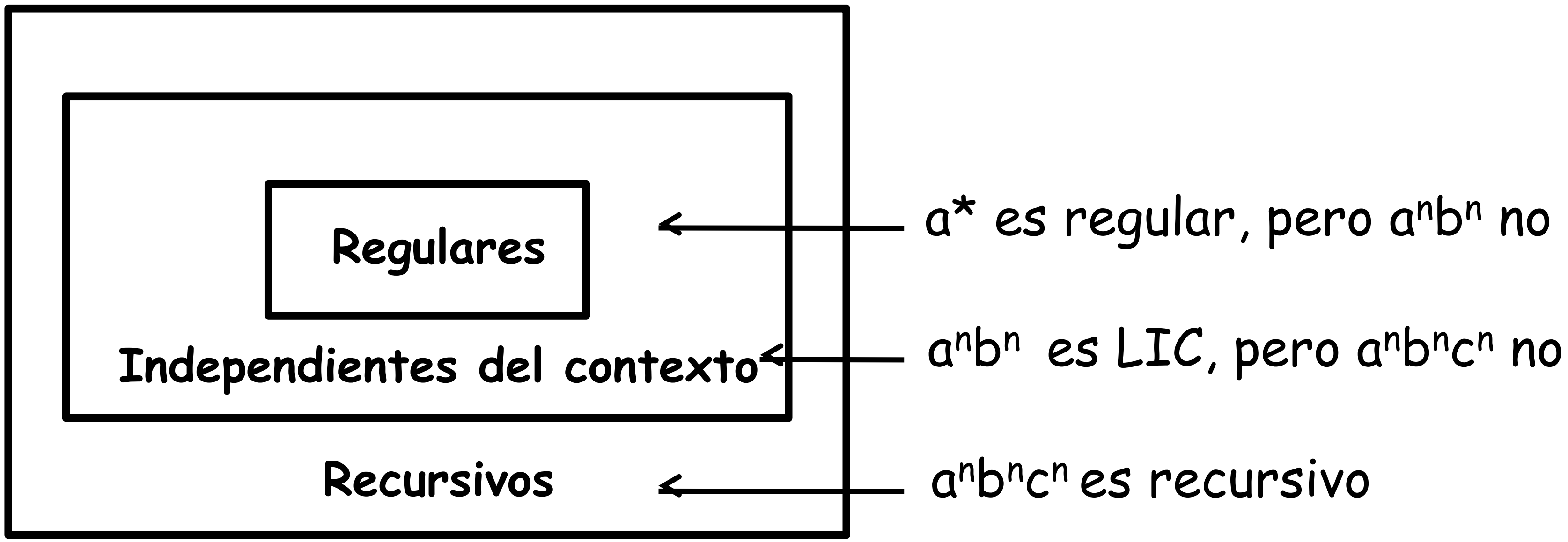
Hay lenguajes recursivos que no son ni regulares ni LIC, por ejemplo, $a^n b^n c^n$

Se puede construir una MT que se detiene en todos los casos y además $a^n b^n c^n$ no es regular ni LIC

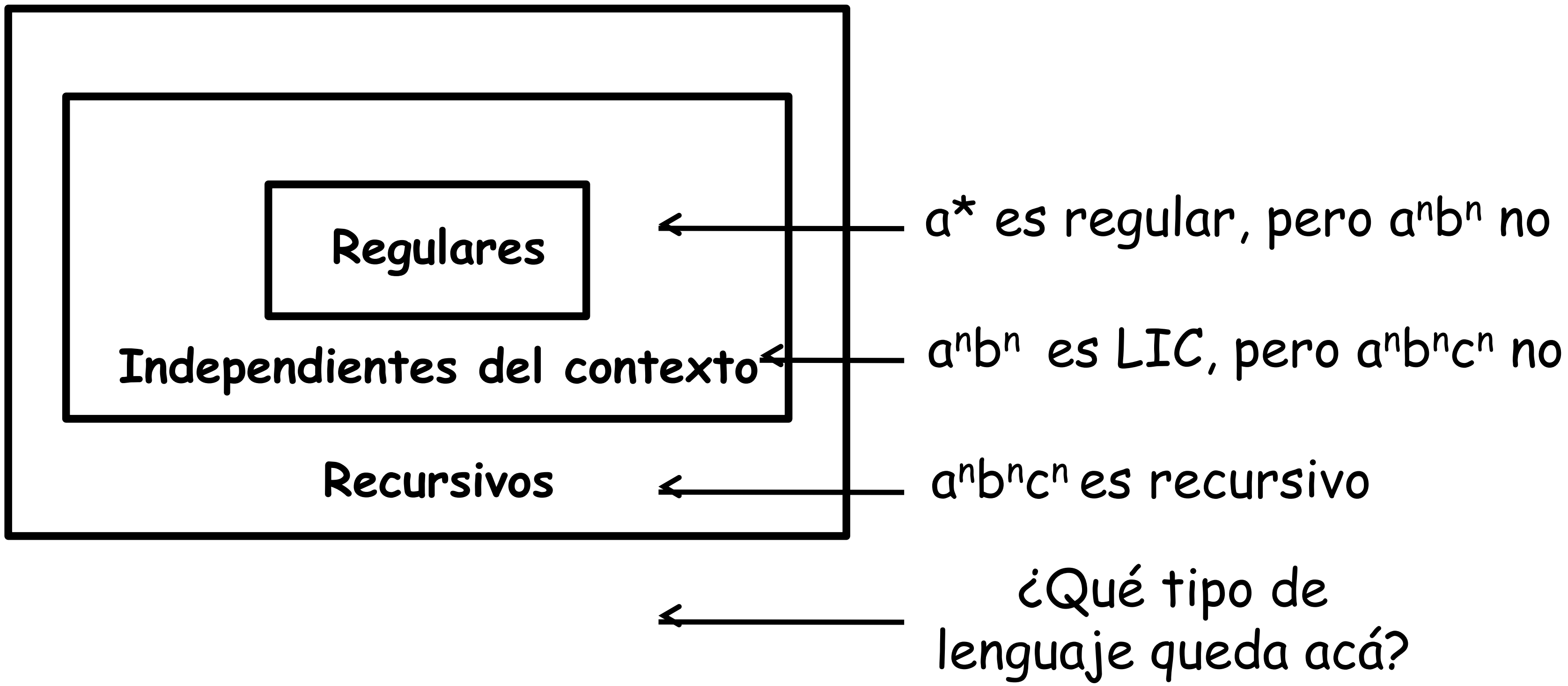
Máquinas de Turing



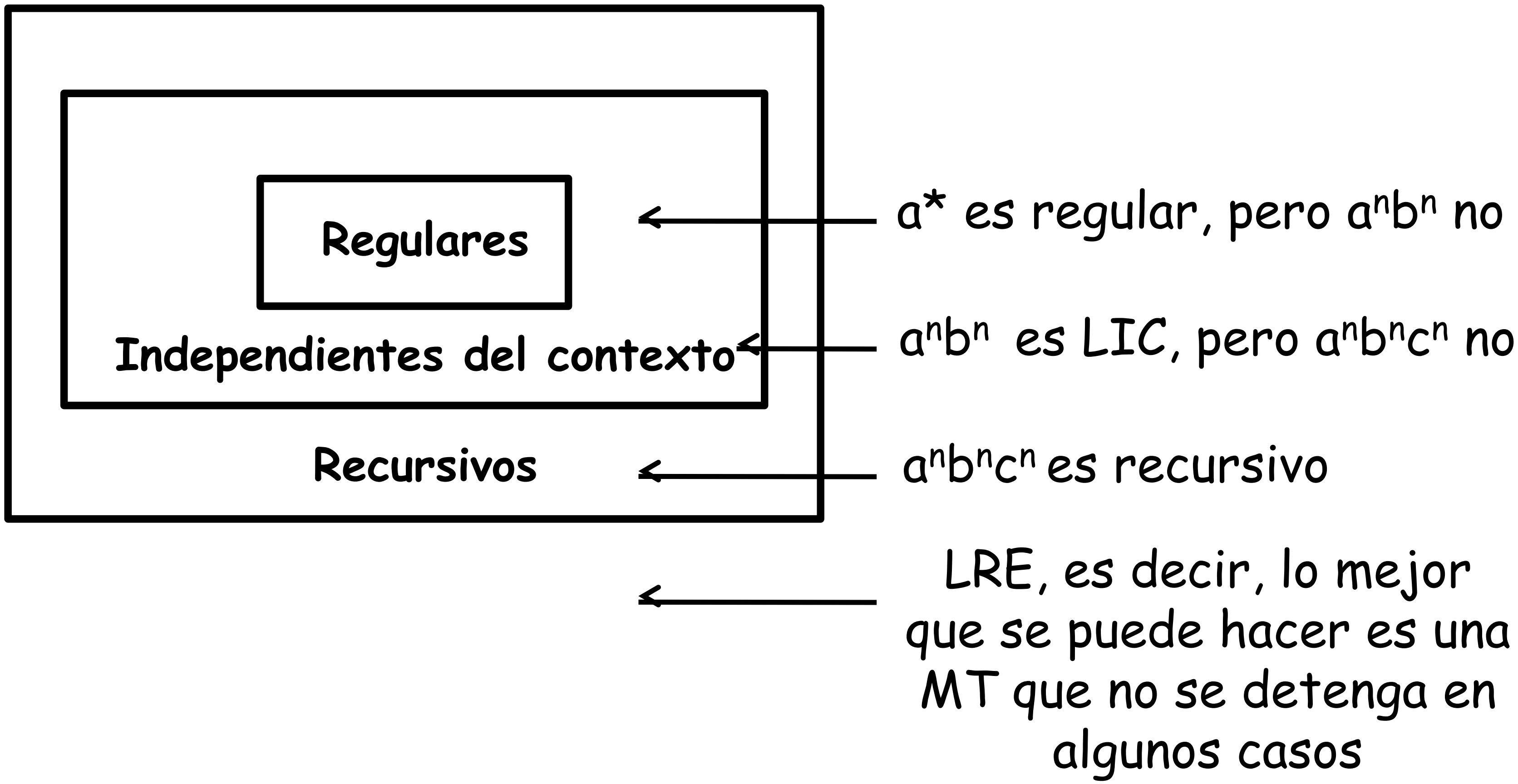
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Hay lenguajes recursivamente enumerables que no son recursivos

Máquinas de Turing

Hay lenguajes recursivamente enumerables que no son recursivos

L_u={M0w | M acepta una cadena $w \in \Sigma^*$}

Máquinas de Turing

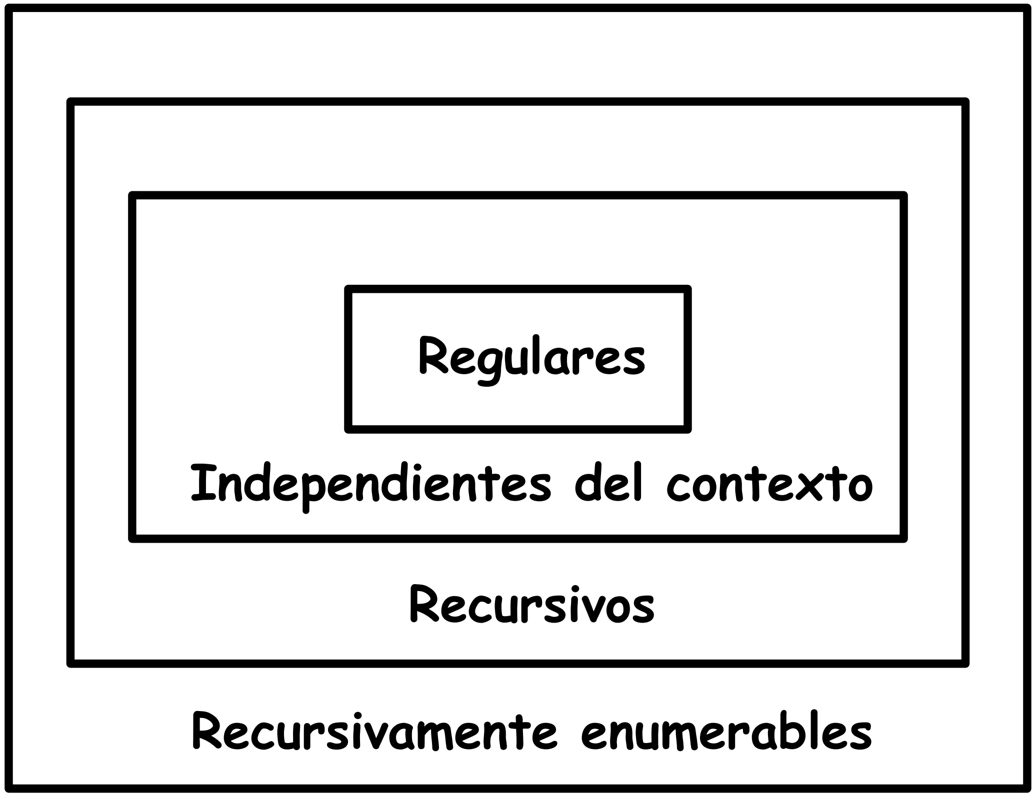
Hay lenguajes recursivamente enumerables que no son recursivos

L_u={M0w | M acepta una cadena w$\in\Sigma$*}

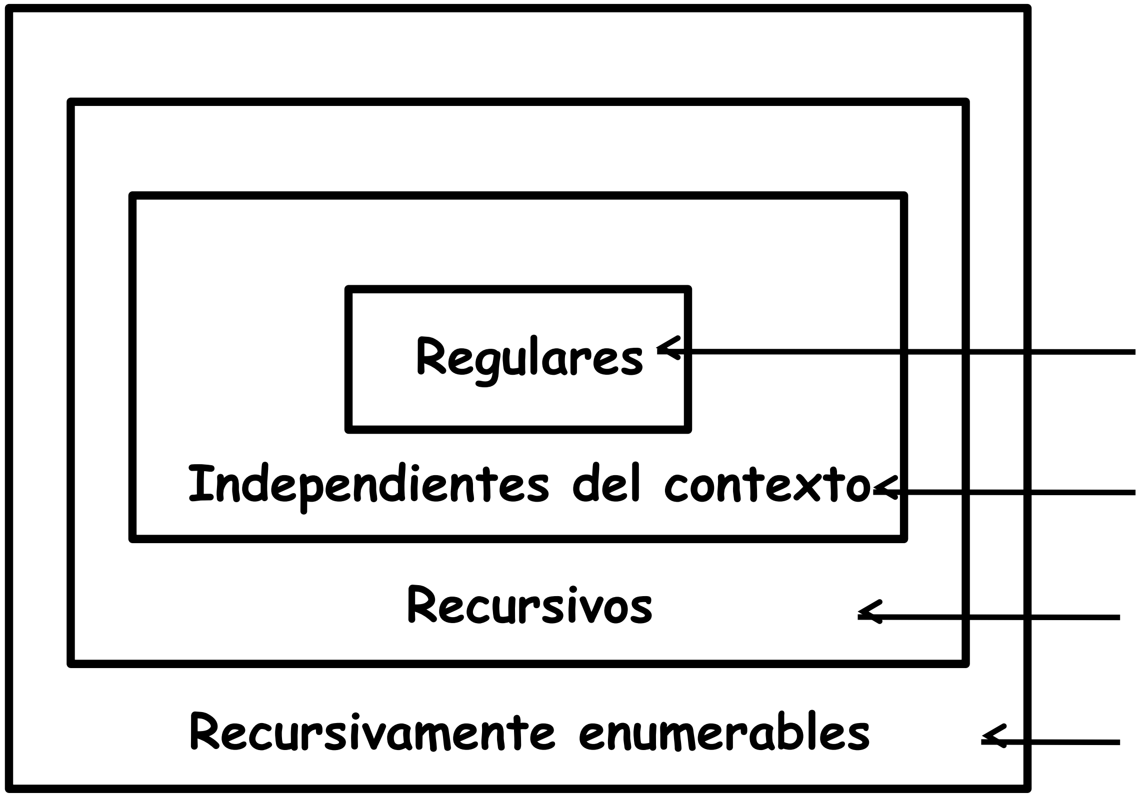
- M0w es recursivamente enumerable porque si M no se detiene, M0w tampoco

- No es posible construir una MT que se detenga en todos los casos, por lo tanto es LRE

Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



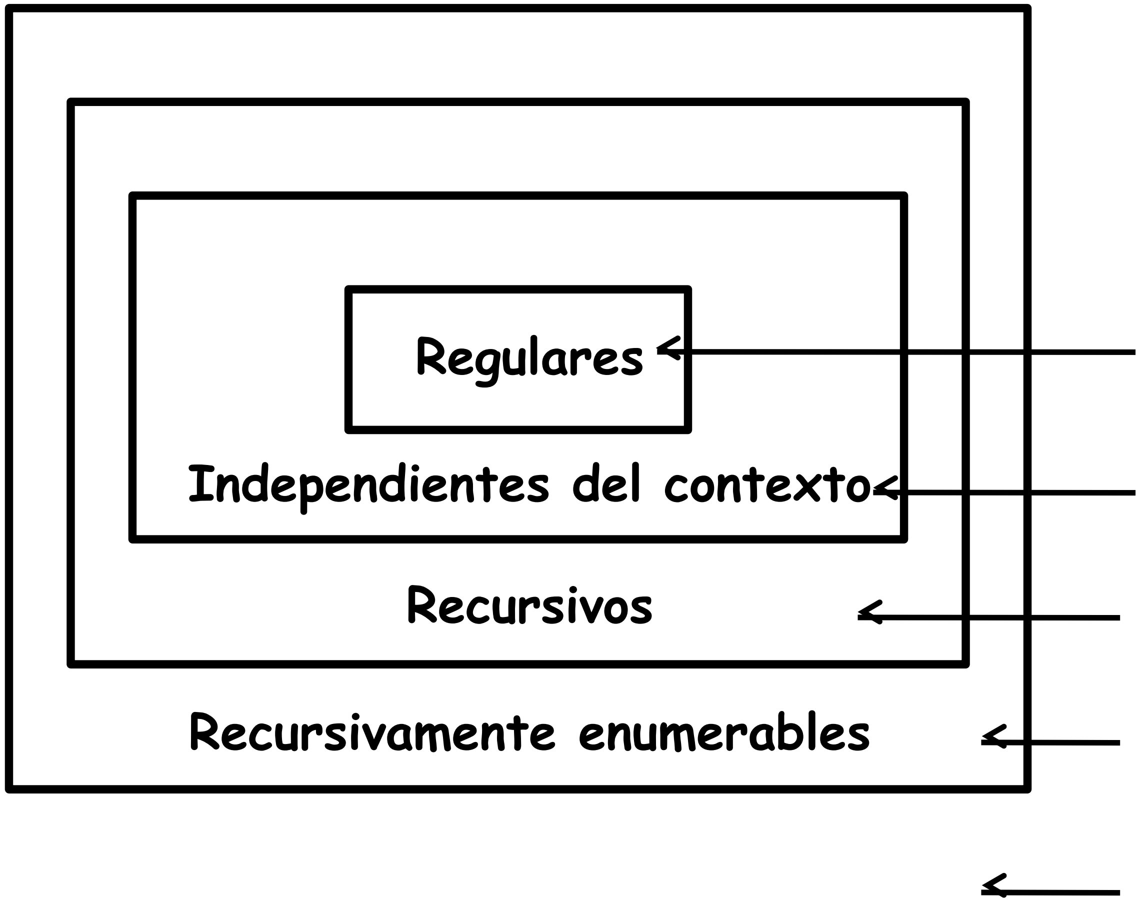
a^* si, pero $a^n b^n$ no

$a^n b^n$ si, pero $a^n b^n c^n$ no

$a^n b^n c^n$ si, pero $L_u = \{M0w \mid M$ acepta una cadena $w \in \Sigma^*\}$ no

L_u

Máquinas de Turing



a^* si, pero $a^n b^n$ no

$a^n b^n$ si, pero $a^n b^n c^n$ no

$a^n b^n c^n$ si, pero $L_u = \{M0w \mid M$ acepta una cadena $w \in \Sigma^*\}$ no

L_u

¿Hay algún lenguaje que esté acá?

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

En los LRE la máquina puede que no se detenga en cadenas que no pertenecen al lenguaje.

Hay lenguajes en los que no se puede hacer ni siquiera esto

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

En los LRE la máquina puede que no se detenga en cadenas que no pertenecen al lenguaje

Hay lenguajes en los que en cadenas que si pertenecen al lenguaje, la MT no se detiene. En ese caso se dice que no se puede construir una máquina

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

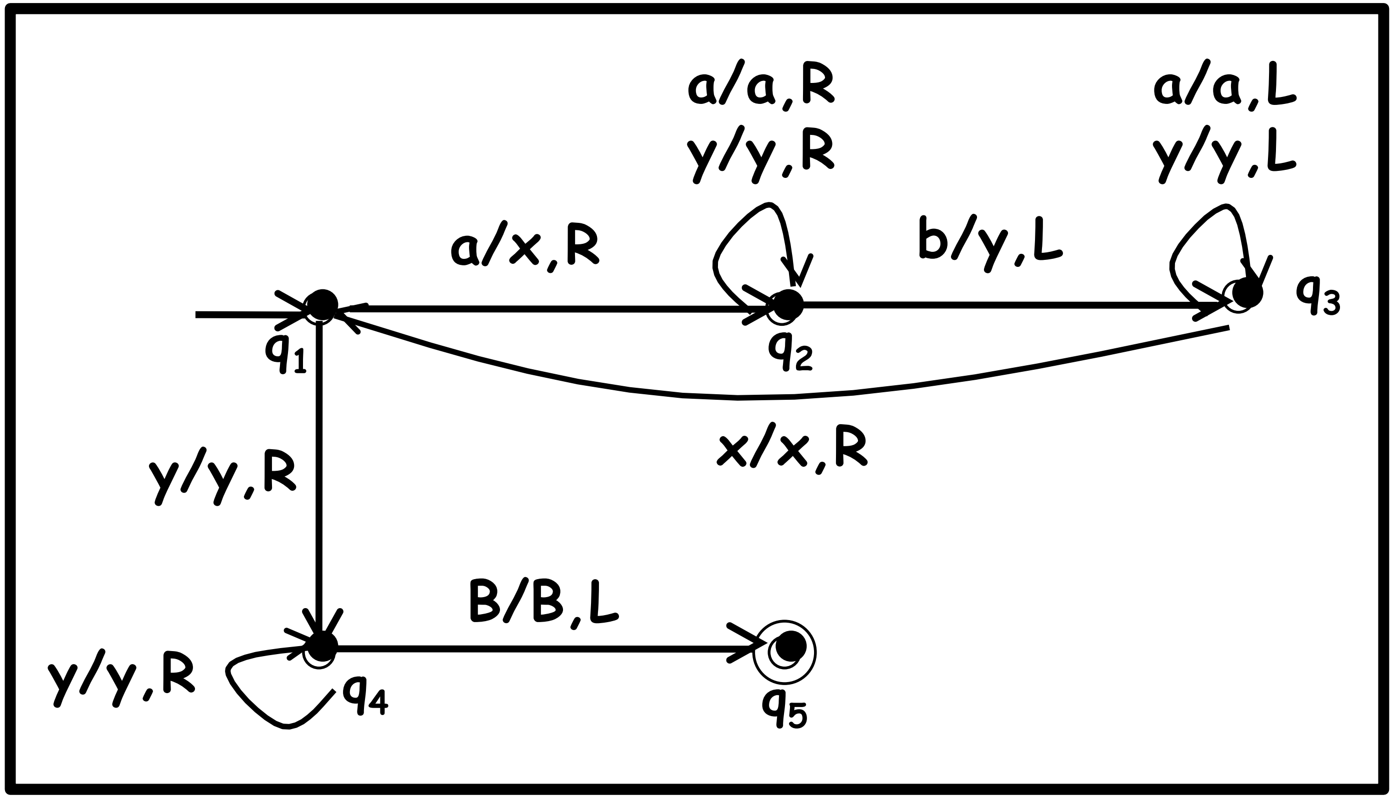
L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

M_d es la máquina que acepta $a^n b^n$

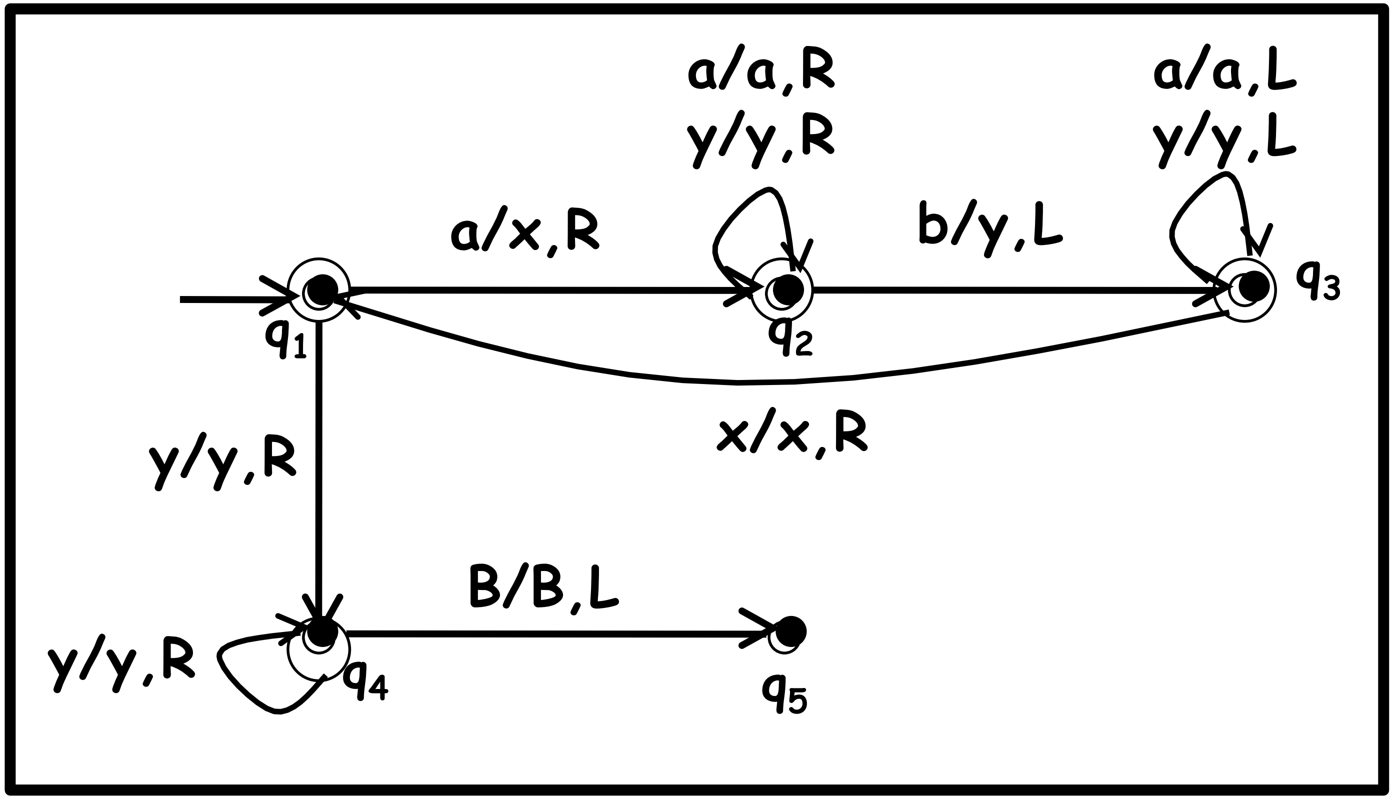
L_d={aab, abb, aaabb, aab, b, bab, bbba, ...}

Máquinas de Turing

MT que acepte $L=\{a^n b^n,\ n \geq 1\}$



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

M_d es la máquina que acepta $a^n b^n$

L_d={aab, abb, aaabb, aab, b, bab, bbba, ...}

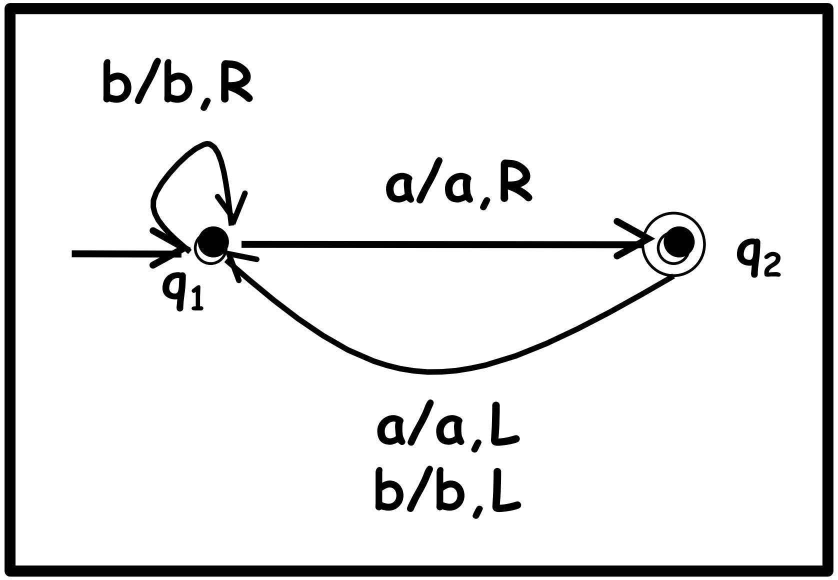
En general no es posible construir una máquina que acepte L_d

Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

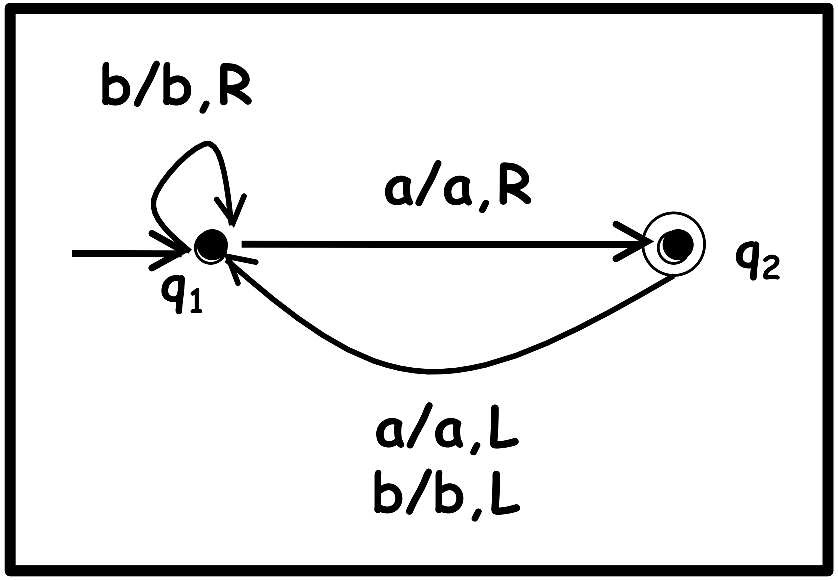
L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

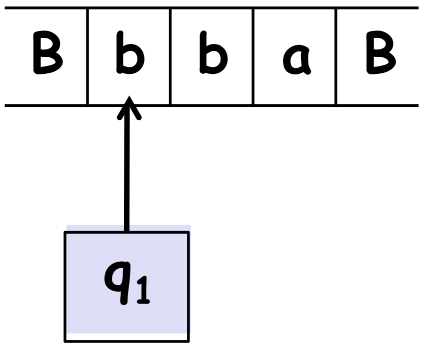
M_d es la siguiente máquina:



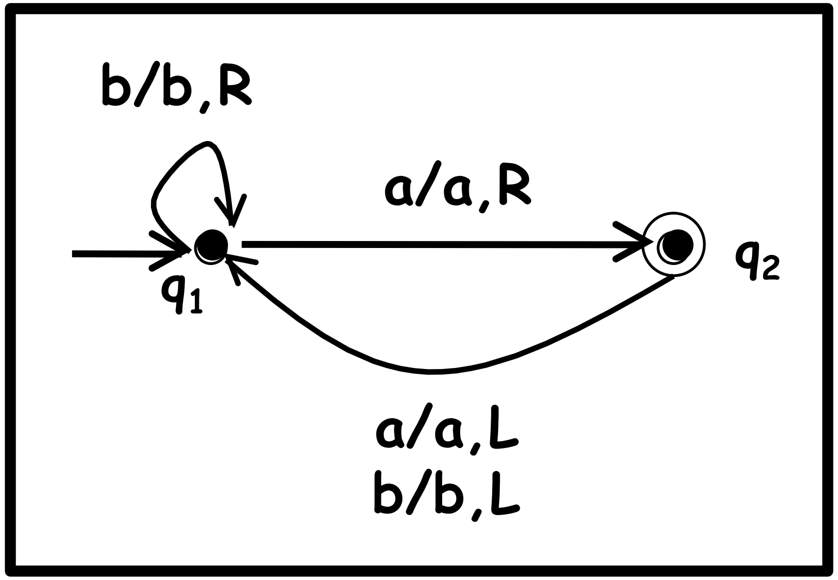
$\delta(q_1,a)=(q_2,a,R)$
$\delta(q_1,b)=(q_1,b,R)$
$\delta(q_2,a)=(q_1,a,L)$
$\delta(q_2,b)=(q_1,b,L)$

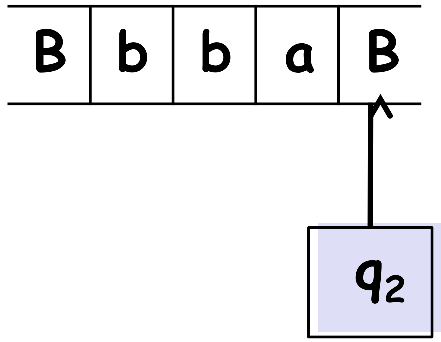
Máquinas de Turing

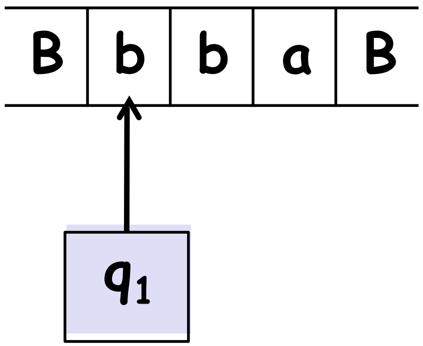




Máquinas de Turing

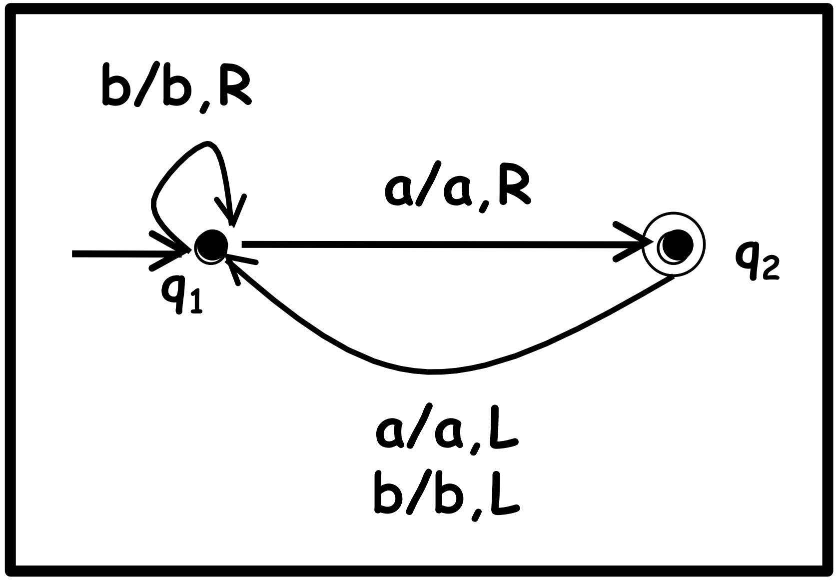


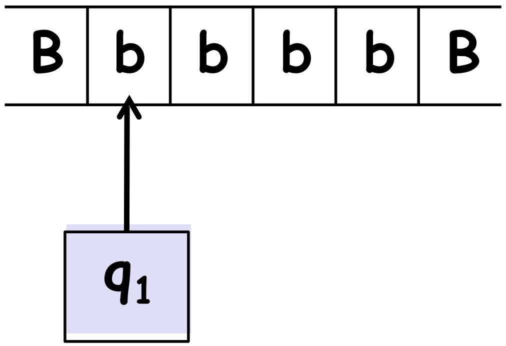




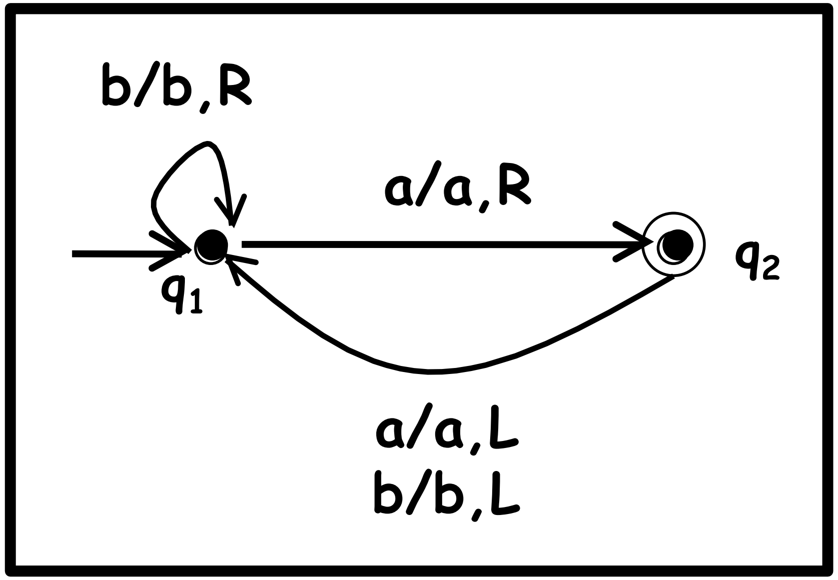
Se acepta w=**bba**

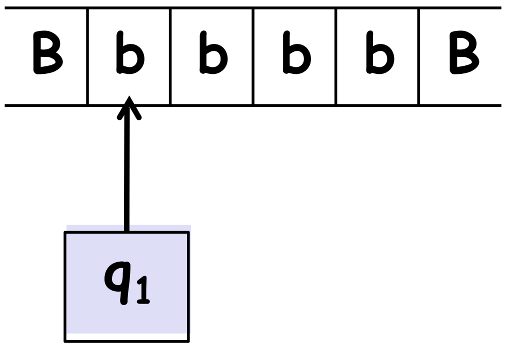
Máquinas de Turing

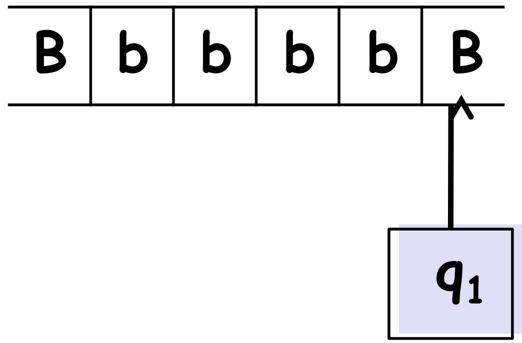




Máquinas de Turing

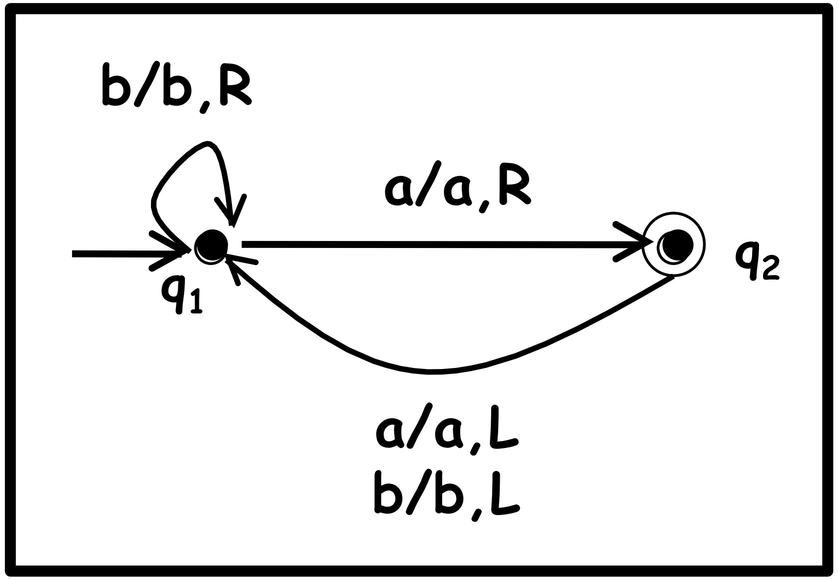


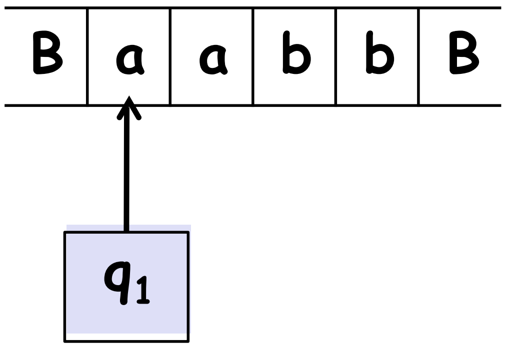




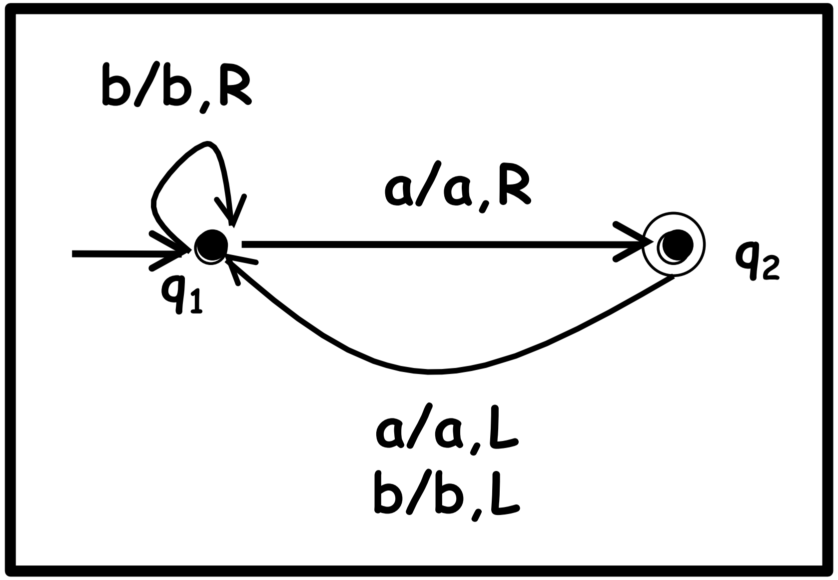
Se rechaza w=**bbbb**

Máquinas de Turing

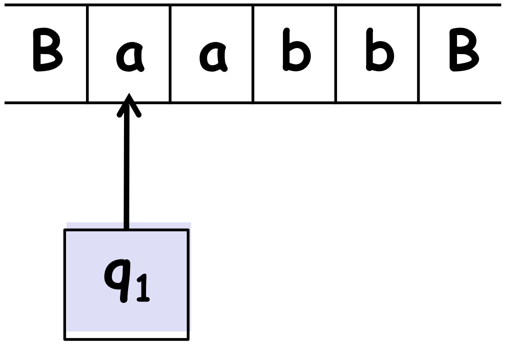




Máquinas de Turing



- La MT no se detiene
- **aabb** no se acepta por la MT



Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

M_d es la siguiente máquina:

L_d={bbbb,aabb,....}

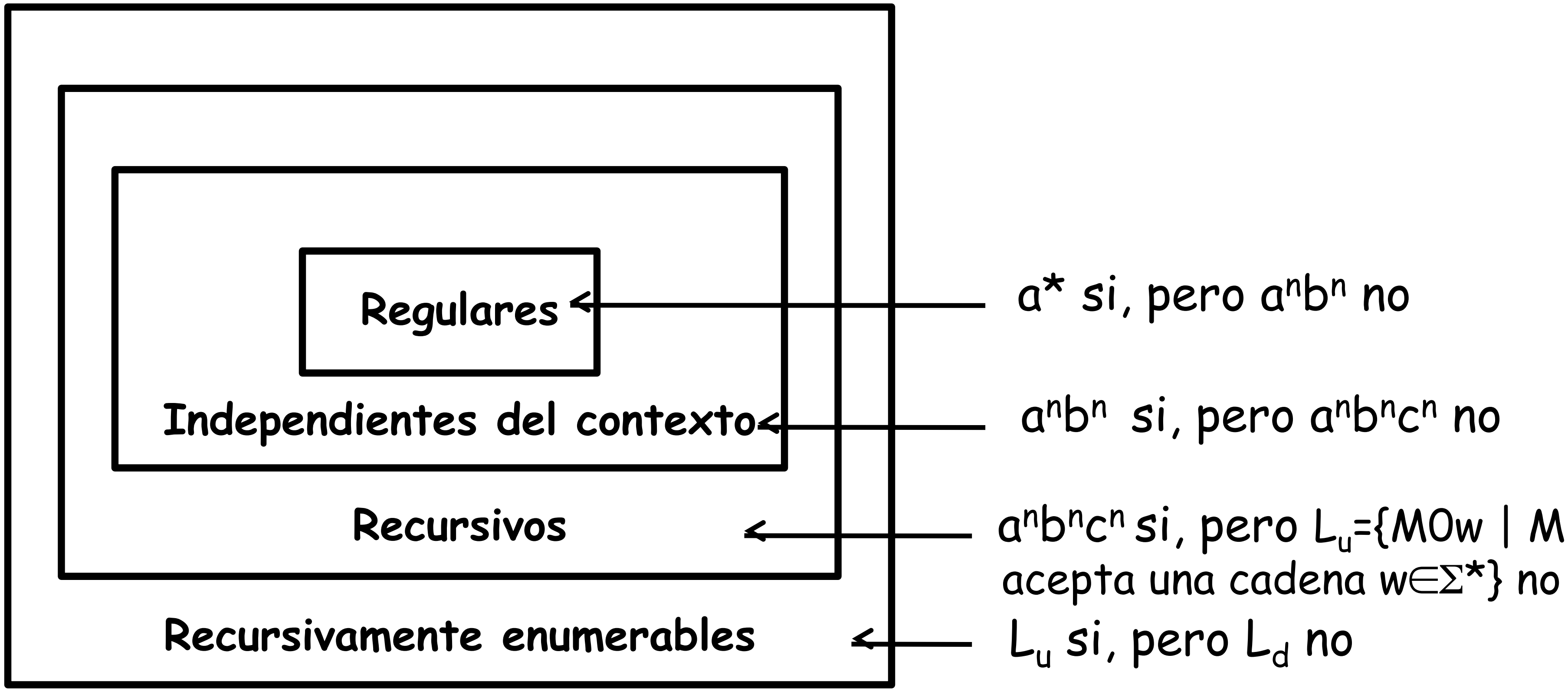
Máquinas de Turing

Hay lenguajes que no son recursivamente enumerables

L_d={w | w no es aceptada por una máquina M_d}

- L_d tiene las palabras que no acepta una máquina dada M_d
- Como algunas de esas palabras son las que pueden quedar en un ciclo, no es posible hacer una MT que las reconozca

Máquinas de Turing



$L_d = \{w_i | w_i$ no es aceptada por $M_i\}$