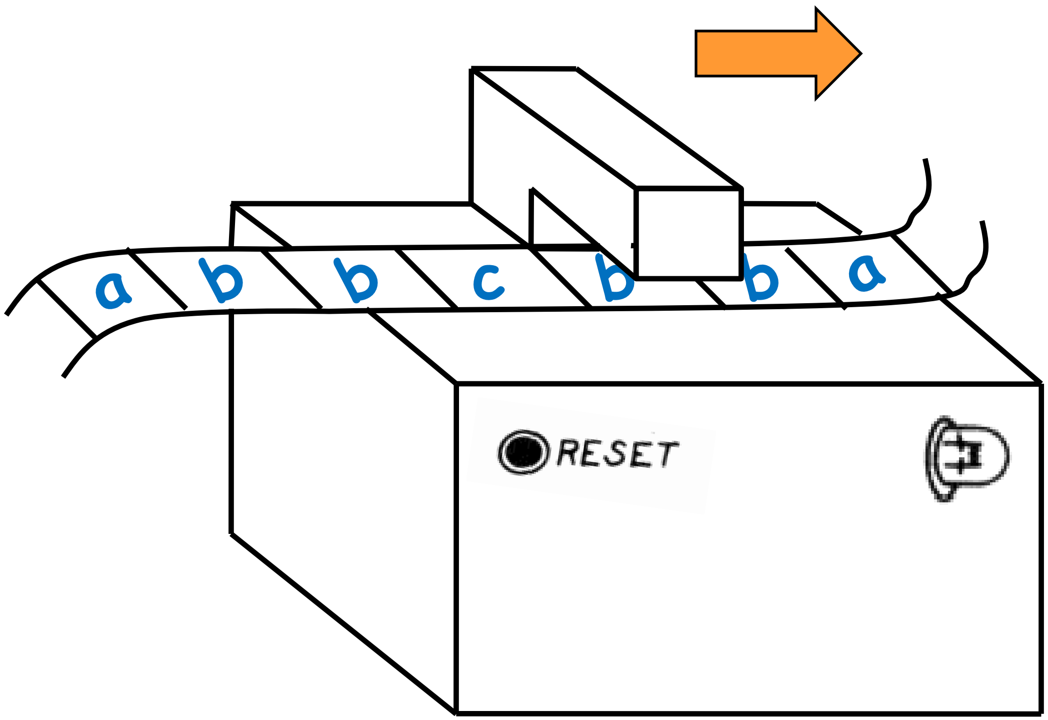
Fundamentos de Algoritmos y Computabilidad

* Alfabetos, palabras y lenguajes
* Operadores sobre palabras y lenguajes
* Lenguajes regulares
* Expresiones regulares

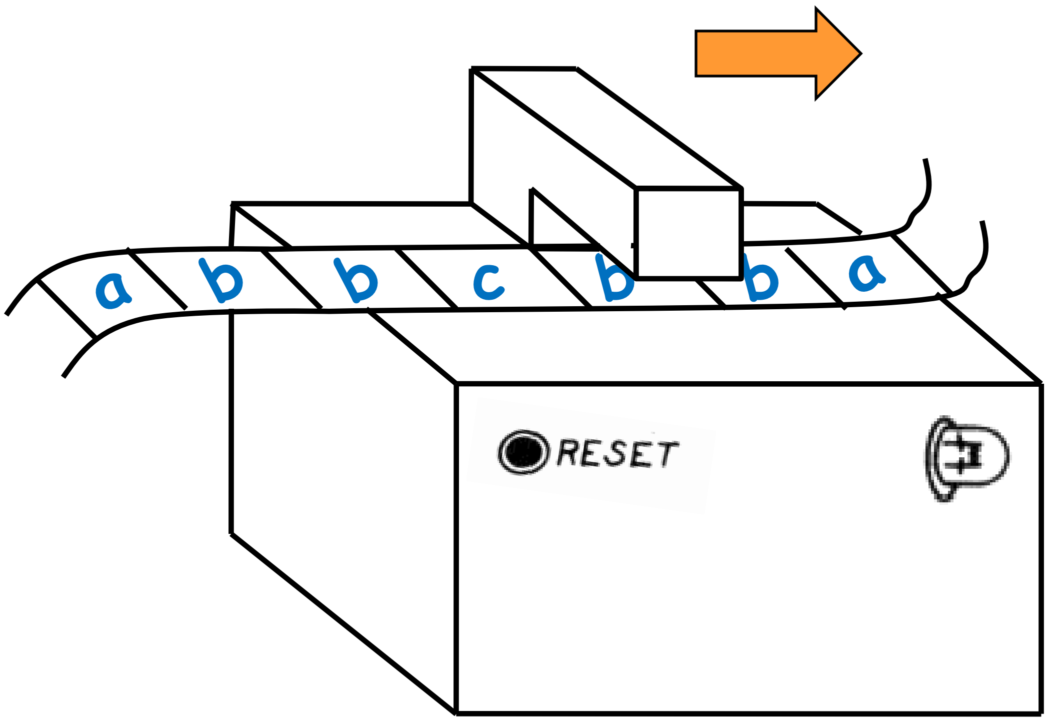
Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta$, $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares



Lenguajes regulares



El **alfabeto** es el **conjunto de símbolos** que podrán aparecer en la entrada de la máquina

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$$\Sigma=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma=\{a,b\}$$

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$\Sigma=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\Sigma=\{a,b\}$

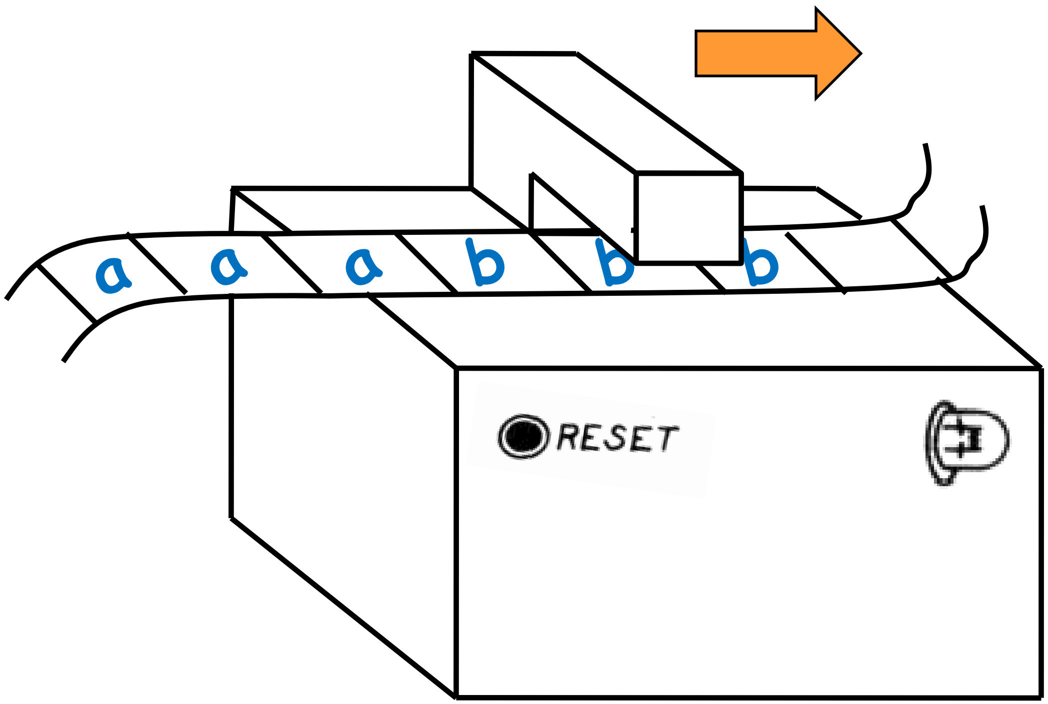
- **Alfabeto latino**:

$\Sigma=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,\tilde{n},o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

- **Alfabeto griego**:

$\Sigma=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...,\Psi,\Omega\}$

Lenguajes regulares



Las **palabras** o **cadenas** son secuencias finitas de símbolos

Lenguajes regulares

- Dado el alfabeto usado en español:

Σ={a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}

se pueden crear palabras:

colina

puente

dardo

fdkfjk

La noción de palabra no tiene asociada semántica

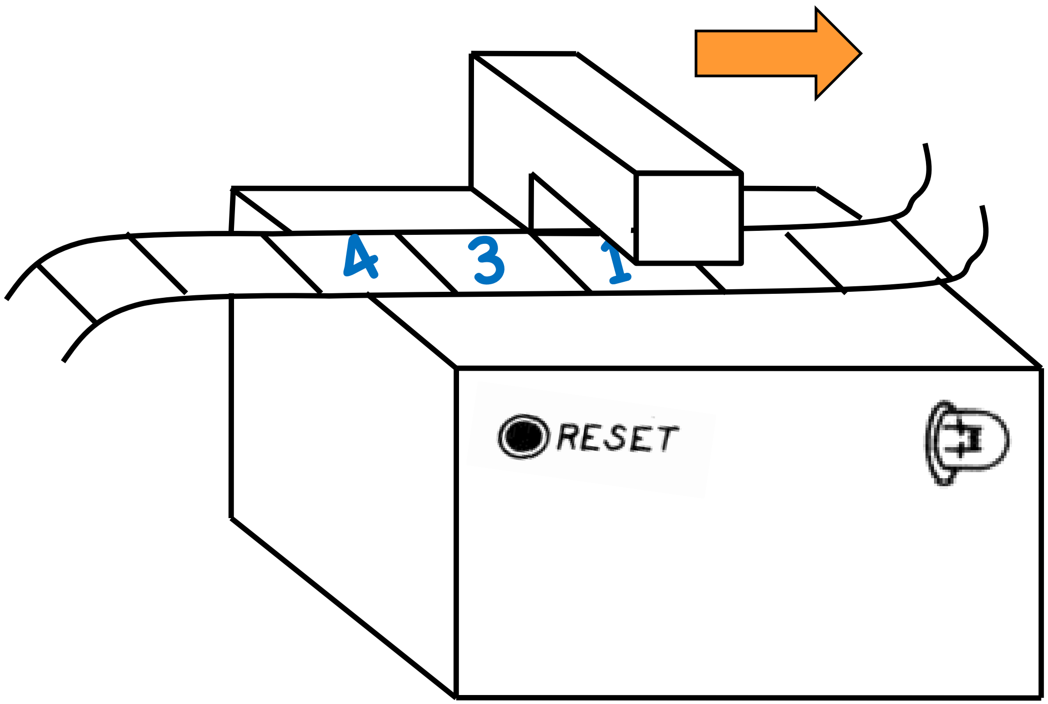
Lenguajes regulares

Cadena o palabra

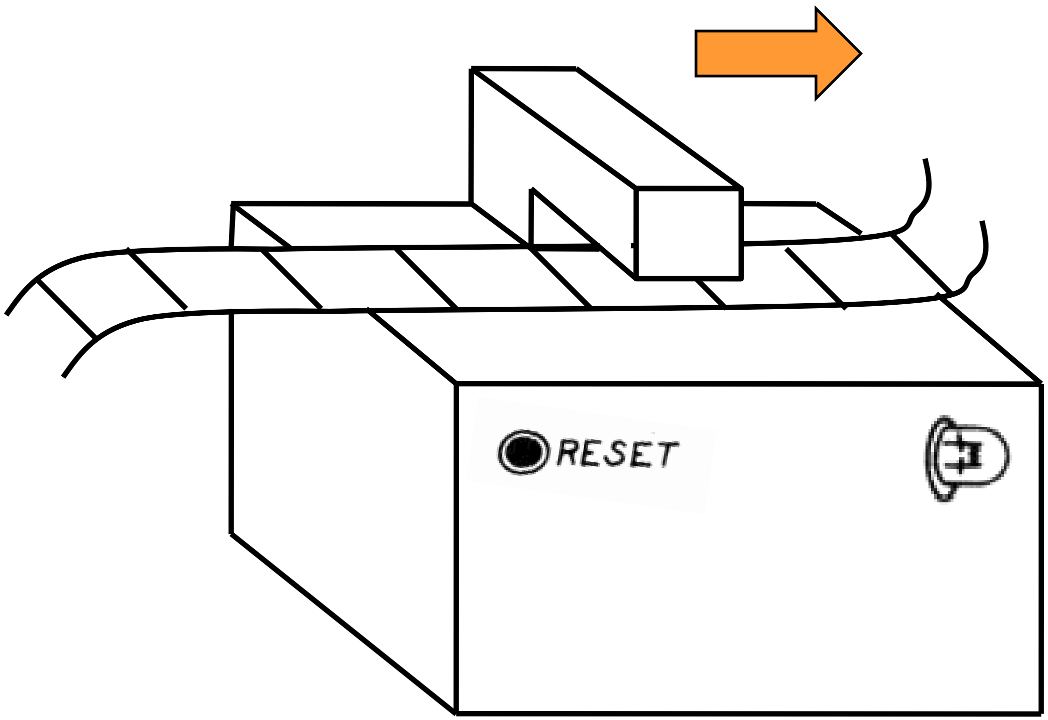
• Una palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto

- Si $\Sigma=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces 431, 021, ε, son palabras de Σ
- Si $\Sigma=\{a,b\}$, entonces ab, ba, aaab, ε, son palabras de Σ

Lenguajes regulares

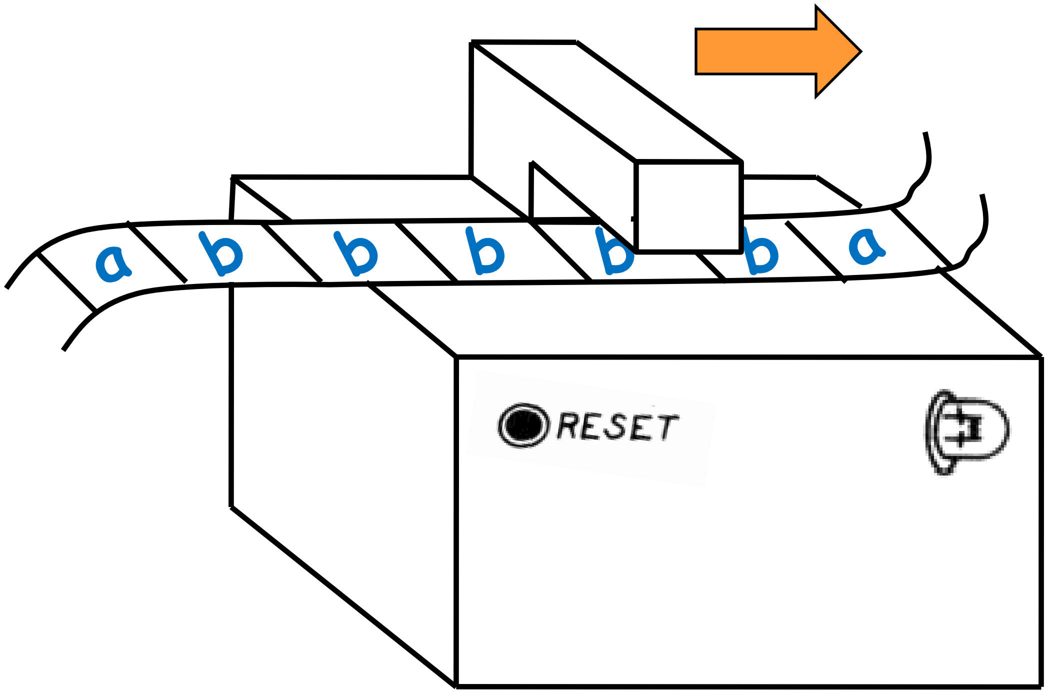


Lenguajes regulares



La **cadena vacía** ε representa una palabra que tiene 0 símbolos, esto es, una cinta vacía

Lenguajes regulares



Una máquina **acepta** un conjunto de palabras específico que se puede generar a partir de un alfabeto

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$

  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos
  - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos
  - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a
  - L_3: conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$

  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

  - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a

  - L_3: conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos

  - L_4: conjunto de todas las posibles palabras

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
- Muestre el lenguaje universal Σ^* para los siguientes alfabetos:
    - $\Sigma = \{a,b,c\}$
    - $\Sigma = \{1\}$

Lenguaje universal sobre Σ

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
  - Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \ldots\}$
  - Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111,\ldots\}$

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
  - Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \ldots\}$
  - Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111,\ldots\}$

ε siempre está en Σ^* porque la cadena vacía se puede obtener de cualquier alfabeto

Para cualquier alfabeto Σ, se tiene que Σ^* es infinito ya que Σ no puede ser vacío

Lenguaje

- Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^*, es decir, $L \subseteq \Sigma^*$

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

$\cdot$ es el operador concatenación

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3$

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3 = aab \cdot (aab)^2$

$= aab \cdot aab \cdot aab^1$

$= aab \cdot aab \cdot aab \cdot aab^0$

$= aab \cdot aab \cdot aab \cdot \varepsilon = aabaabaab$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Muestre

  - $a^3 \cdot (aba)^2$

  - $(ab)^2 \cdot (ba)^3$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

  $\quad\ \ a^1 \quad a^2 \quad\ a^3 \qquad a^4$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,...\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's
- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^nb^n \mid n\geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^n b^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^nb^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma=\{0,1\}$,

  $L=\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^nb^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma=\{0,1\}$,

  $L=\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001,\ldots\}=\{w\in\{0,1\}^* \mid$ tienen la misma cantidad de 0's que 1's$\}$, cadenas con igual cantidad de 0's que 1's

Longitud de una cadena

- Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L, su longitud se denota por |x| y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, \text{ si } x=\varepsilon \\ n, \text{ si } x=a_1a_2\ldots a_n \end{cases}$$

Longitud de una cadena

• Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L, su longitud se denota por |x| y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, \text{ si } x=\varepsilon \\ n, \text{ si } x=a_1a_2\ldots a_n \end{cases}$$

• $|\varepsilon|=0$

• $|ababaa|=6$

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B$

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B=\{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B=\{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$

$$=\{ab,ab^2,acb,ab^3,acb^2\}$$

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$
- $B \cdot A=?$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$
- $B \cdot A=\{ba,bab,bac,b^2a,b^2ab,b^2ac\}$

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$A^3=A\cdot A\cdot A=\{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$

$=\{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$

$=\{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Cadenas formadas usando 3 concatenaciones sobre A

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$A^3 = A \cdot A \cdot A = \{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$

$= \{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$

$= \{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$

Lenguajes regulares

Dado A={ab,ca,ad},

¿**abcaab** $\in A^3$?

¿**adca** $\in A^2$?

¿**caba** $\in A^2$?

¿**abcaaa** $\in A^3$?

¿**adcaab** $\in A^3$?

Lenguajes regulares

Dado A={ab, c, ac},

¿**accab**$\in A^3$?

¿**abacca**$\in A^3$?

¿**abcc**$\in A^3$?

¿**abcba**$\in A^3$?

Lenguajes regulares

Dado $A=\{a,b,ab\}$ calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

Lenguajes regulares

Dado $A=\{a,b,ab\}$ calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

- $A^0=\{\varepsilon\}$

- $A^1=A=\{a,b,ab\}$

- $A^2=A \cdot A=\{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Por lo tanto $A^0 \cup A^1 \cup A^2=\{\varepsilon,a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Cerradura de Kleene

- La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

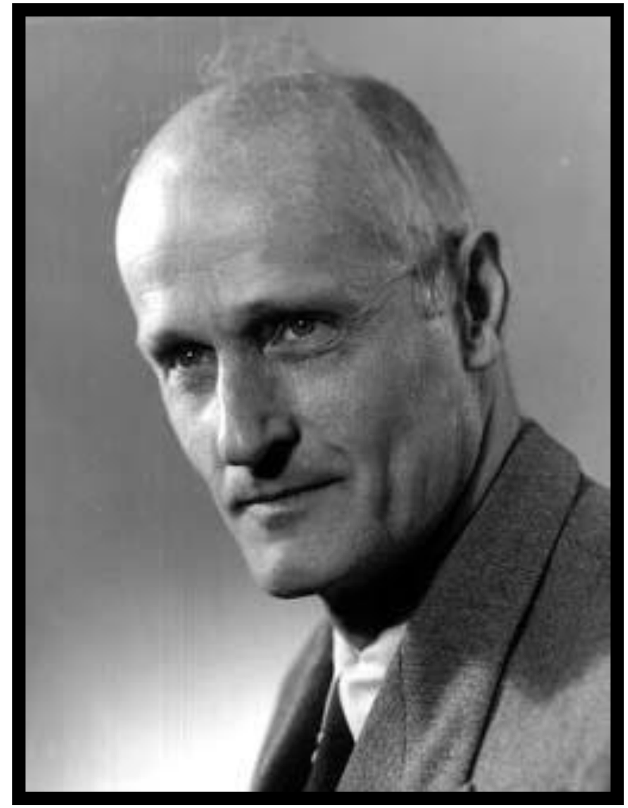
- También se conoce como **cerradura estrella**
- A^* es el conjunto de posibles concatenaciones sobre A

Lenguajes regulares

Stephen Kleene

• Creador de las expresiones regulares

• Enunció la cerradura de Kleene, A*



(1909 - 1994)

Cerradura de Kleene

- Calcule A^* para $A=\{a, ab\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

  $A^0=\{\varepsilon\}$

  $A^1=\{a,ab\}$

  $A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

  . . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,\ldots\}$

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

  $A^0=\{\varepsilon\}$

  $A^1=\{a,ab\}$

  $A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

  . . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,\dots\}$

¿**ababab** $\in A^*$?

¿**abbbbb** $\in A^*$?

¿**abaaaaaa** $\in A^*$?

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

$A^0=\{\varepsilon\}$

$A^1=\{a,ab\}$

$A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

. . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,\ldots\}$

- ¿Qué relación tiene A^* con Σ^*?
- Calcule Σ^* sobre $\Sigma=\{a,b\}$

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

  $A^0=\{\varepsilon\}$

  $A^1=\{a,ab\}$

  $A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

  . . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,\ldots\}$

$\Sigma^*=\{\varepsilon,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,\ldots\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ
- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ

- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

$A=\{a, ab\}$ está definido sobre $\Sigma=\{a,b\}$

$$A^* = \{\varepsilon,a,ab,aa,aab,aba,abab,\ldots\}$$

$$\Sigma^* = \{\varepsilon,a,b,aa,bb,ab,ba,aaa,aab,aba,\ldots\}$$

- **En general se cumple que $A^* \subseteq \Sigma^*$**

Cerradura positiva de Kleene A^+

• La cerradura positiva de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias sin incluir $A^0=\{\varepsilon\}$,

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

Lenguajes regulares

Cerradura positiva Σ^+

- Es el conjunto de palabras que se pueden formar sobre Σ sin incluir la cadena vacía

Lenguajes regulares

- Sea $A=\{a,b,ab\}$, muestre A^* y A^+. Indique si $abba \in A^*$, $bbaa \in A^*$
- Sea $A=\{a,aa,ac\}$ y $B=\{b,ba\}$, muestre $A \cdot B$, $B \cdot A$ y B^*

- **Sea $A=\{a,b,ab\}$, muestre A^* y A^+**

$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

$= \{\varepsilon\} \cup \{a,b,ab\} \cup \{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\} \cup \ldots$

$= \{\varepsilon,a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab,\ldots\}$

$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

$= \{a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab,\ldots\}$

- **Sea $A=\{a,aa,ac\}$ y $B=\{b,ba\}$, muestre $A \cdot B$, $B \cdot A$ y B^***

$A \cdot B=\{ab,aba,aab,aaba,acb,acba\}$

$B \cdot A=\{ba,baa,bac,baa,baaa,baac\}$

$B^*=\{\varepsilon,b,ba,bba,bab,bbba,babb, \ldots\}$

Lenguajes regulares

• Muestre cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes. Indique si la cadena vacía ε pertenece a los lenguajes y exprese de forma general (en palabras) el tipo de cadenas que pertenecen a cada uno.

- $L_1=\{w_1cw_2 \mid |w_1|=|w_2|$ donde $w_1,w_2\in\Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b\}\}$
- $L_2=\{a^nb^m \mid n\neq m,\ n,m\geq 0\}$
- $L_3=\{a^nb^{2n}c^n \mid n\geq 1\}$

- **$L_1=\{w_1cw_2 \mid |w_1|=|w_2|$ donde $w_1,w_2 \in \Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b\}\}$**

aca, acb,bca,abbbabcaaaaaa

En general, cadenas que tienen una c en el medio, tal que las subcadenas a sus lados tienen la misma longitud. $\varepsilon \notin L_1$

- **$L_2=\{a^nb^m \mid n \neq m,\ n,m \geq 0\}$**

abb,aab,aabbb,aaabb

En general, cadenas que tienen distinta cantidad de a's que b's donde están a la izquierda las a's de las b's. $\varepsilon \notin L_2$

- **$L_3=\{a^nb^{2n}c^n \mid n \geq 0\}$**

abbc, aabbbbcc, aaabbbbbbccc

En general, cadenas que tienen el doble de b's que a's y que c's donde aparecen de izquierda a derecha las a's, b's y luego c's. $\varepsilon \in L_3$

Lenguajes regulares

- Exprese de manera formal los siguientes lenguajes:

  - L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a

  - L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$

- **L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a**

$L_1=\{aw_1a \mid w_1\in\Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b,c\}\}$

- **L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$**

$L_2=\{w_i \mid |w_i|=2k$, donde existe $k\geq 1$, $w_i\in\Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b\}\}$

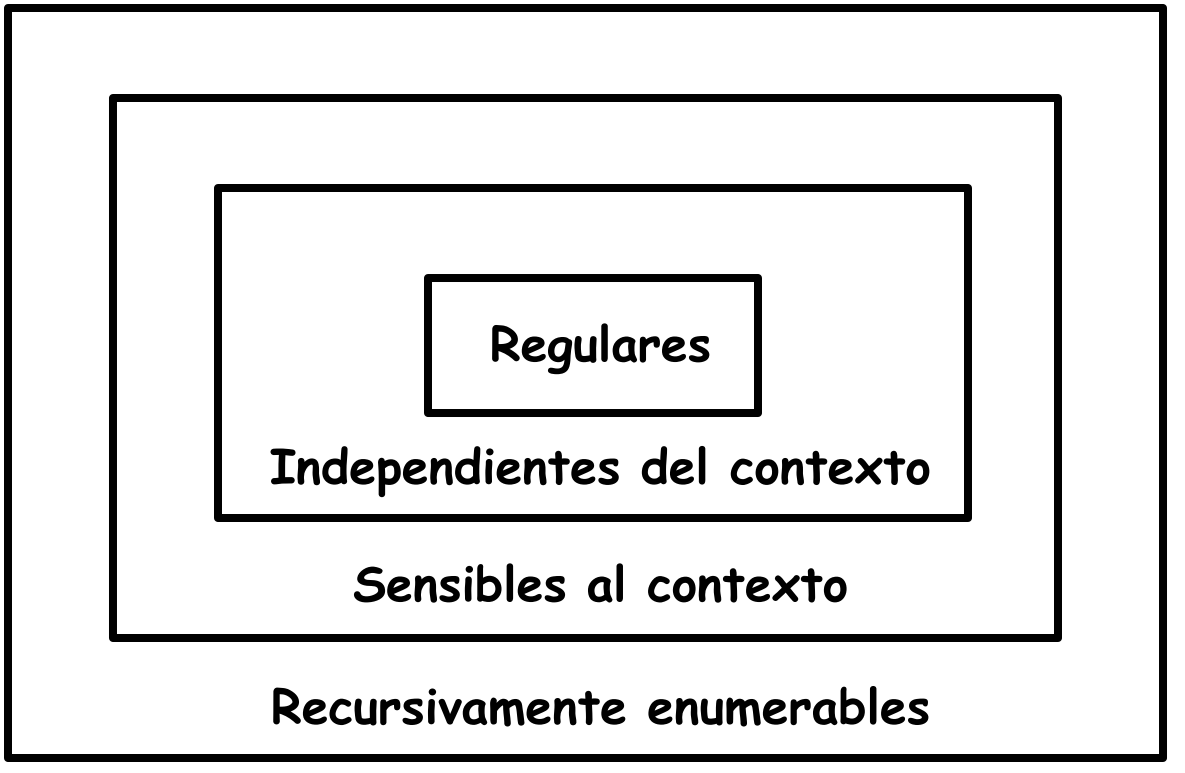
Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta$, $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Lenguajes Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares

Jerarquía de Chomsky



Lenguajes regulares

Noam Chomsky

• Definió las gramáticas independientes del contexto

• Creador de la jerarquía de Chomsky. 1956

• Definió la forma normal de Chomsky. 1979

(1928 -)

Lenguajes regulares

Dado un alfabeto Σ, los lenguajes regulares **sobre tal alfabeto** se definen recursivamente como:

- $\emptyset$ es un lenguaje regular
- $\{\varepsilon\}$ es un lenguaje regular
- Para todo símbolo $a \in \Sigma$, $\{a\}$ es un lenguaje regular
- Si A y B son lenguajes regulares, entonces

  $A \cup B$, $A \cdot B$ y A^* son lenguajes regulares
- Ningún otro lenguaje es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, las siguientes afirmaciones son correctas:

- $\emptyset$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares
- $\{a\}$ y $\{b\}$ son lenguajes regulares
- $\{a,b\}$ es regular porque es la unión de $\{a\}$ y $\{b\}$
- $\{ab\}$ es regular porque es la concatenación de $\{a\}$ y $\{b\}$
- $\{a,ab,b\}$ es regular porque es la unión de dos lenguajes regulares
- $\{a^n | n \geq 0\}$ es regular
- $\{a^m b^n | m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$ es regular
- $\{(ab)^n | n \geq 0\}$ es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{a^n b^n | n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n | l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2n} | n \geq 0\}$, no es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{a^n b^n | n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n | l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2n} | n \geq 0\}$, no es regular

- $\{a^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$
- $\{b^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, b, bb, bbb, \ldots\}$

$aab \in \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\} \cdot \{\varepsilon, b, bb, bb, \ldots\}$

pero no cumple $a^n b^n$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^{+}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

$\{abc,ab,a\}^*=\{\varepsilon,abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

$\{abc,ab,a\}^*=\{\varepsilon,abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a\}^*\cdot\{abc,ab,a\}$

- En general se cumple que $A^+=A^*\cdot A$

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{ab^n a \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n,m \geq 0\}$
- $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$
- $\{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{ab^na \mid n \geq 0\}$
- $\{a^nb^mc^{n+m} \mid n,m \geq 0\}$
- $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$
- $\{w \in \{a,b\}^* \mid\ |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$

  $\{aa, ab, ba, bb\}^*$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{abc,ab,a\}^+$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0,\ m \geq 0\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^*\cup\{b\}^*$ ¿$ab\in\{a\}^*\cup\{b\}^*$?
- $\{a\}^*\cdot\{b\}^*$ ¿$bbb\in\{a\}^*\cdot\{b\}^*$?, ¿$baa\in\{a\}^*\cdot\{b\}^*$?
- $\{a,bc\}^*$ ¿$bcbca\in\{a,bc\}^*$?, ¿$baaa\in\{a,bc\}^*$?
- $\{abc,ab,a\}^+$
- $\{a\}\cdot\{b,c,ab\}$
- $\{(ab)^i|i\geq 0\}$
- $\{a^nb^m|n\geq 0, m\geq 0\}$
- $\{a^lb^mc^n|l\geq 0,m\geq 0,n\geq 0\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,aaaa,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cup\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots\}\cup\{\varepsilon,b,bb,bbb,\ldots\}=\{\varepsilon,a,b,aa,bb,aaa,bbb,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cdot\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots,ab,aab,aaab,\ldots,b,b,bbb,\ldots\}$
- $\{a,bc\}^*=\{\varepsilon,a,bc,aa,abc,bca,bcba,aaa,\ldots\}$
- $\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$
- $\{a\}\cdot\{b,c,ab\}=\{ab,ac,aab\}$
- $\{(ab)^i \mid i\geq 0\}=\{\varepsilon,ab,abab,ababab,\ldots\}$
- $\{a^n b^m \mid n\geq 0,\ m\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,ab,aab,abb,aaab,\ldots\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l\geq 0,m\geq 0,n\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,c,ab,bc,abc,aa,aab,aac,\ldots\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,aaaa,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cup\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots\}\cup\{\varepsilon,b,bb,bbb,\ldots\}=\{\varepsilon,a,b,aa,bb,aaa,bbb,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cdot\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots,ab,aab,aaab,\ldots,b,b,bbb,\ldots\}$
- $\{a,bc\}^*=\{\varepsilon,a,bc,aa,abc,bca,bcba,aaa,\ldots\}$
- $\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$
- $\{a\}\cdot\{b,c,ab\}=\{ab,ac,aab\}$
- $\{(ab)^i\,|\,i\geq 0\}=\{\varepsilon,ab,abab,ababab,\ldots\}$
- $\{a^nb^m\,|\,n\geq 0,\ m\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,ab,aab,abb,aaab,\ldots\}$
- $\{a^lb^mc^n\,|\,l\geq 0,m\geq 0,n\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,c,ab,bc,abc,aa,aab,aac,\ldots\}$

Note que el orden importa y que pueden haber cualquier cantidad de a's o de b's

Lenguajes regulares

Discuta la pertenencia de las siguientes cadenas dado $L=\{a,bc\}^*\cup\{ad,d\}^*$

- ¿**bcabc**$\in$L?
- ¿**aabcad**$\in$L?
- ¿**adbc**$\in$L?
- ¿**adad**$\in$L?
- ¿**adddd**$\in$L?

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cup \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$\mathbf{L = \{a\}^* \cup \{b\}^*}$$

Cadenas que tienen a's o b's. Estos símbolos no aparecen mezclados

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$\mathbf{L = \{a\}^* \cdot \{b\}^*}$$

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$\mathbf{L = \{a\}^{*} \cdot \{b\}^{*}}$$

Cadenas que tienen cero o más a's seguidas de cero o más b's

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{b\}^{*}\cdot\{a\}\cdot\{b\}^{*}$$

- Desarrolle el lenguaje

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

$$B = \{b\}\cdot\{\{a\}\cup\{b\}\}^*$$

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

Lenguajes regulares

Dado Σ={a,b}, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

$$C = \{\{a\}\cup\{b\}\}^{*}\cdot\{ba\}\cdot\{\{a\}\cup\{b\}\}^{*}$$

Expresión regular

Una expresión regular es una forma simplificada de representar un lenguaje regular

Lenguaje regular	Expresión regular
$\{ab\}$	ab
$\{a\}^*$	a^*
$\{a\}^+$	a^+
$\{a\} \cup \{b\}$	$a \cup b$

Expresión regular

Algunas expresiones regulares:

- b^*
- $b(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^* ba (a \cup b)^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a

$$b(a \cup b)^*a$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen exactamente dos a's

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen exactamente dos a's

  b*ab*ab*

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen un número par de a's

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen un número par de a's

$$b^*(ab^*ab^*)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud par

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud par

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud impar

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud impar

$$a(aa\cup ab\cup ba\cup bb)^* \cup b(aa\cup ab\cup ba\cup bb)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

$$a^*b(a\cup b)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

$$(b \cup c)^*(a \cup bc^*)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

$$(a \cup b)^* a (a \cup b)$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

$$(a\cup b)^*a(a\cup b)(a\cup b)$$

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $\underline{r \cup s = s \cup r}$
2. $r \cup \varnothing = r = \varnothing \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \varnothing = \varnothing \cdot r = \varnothing$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

$\boxed{\{a\} \cup \{bc\} = \{bc\} \cup \{a\} = \{a, bc\}}$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $\underline{(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*}$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$