

# Protokoll

## Isentropenindex

Physikalisches Grundpraktikum  
Free University Berlin

Christoph Haaf - christoph.haaf@fu-berlin.de  
Zacharias V. Fisches - zacharias.vf@gmail.com  
Tutor: Dr. Stefan Mebs

2.12.2014

### Inhaltsverzeichnis

1	Physikalischer Hintergrund	2
	Wärmekapazität . . . . .	2
	Adiabengleichung . . . . .	2
	Kappa & Freiheitsgrade . . . . .	3
	Clemens-Desormes Methode . . . . .	3
2	Aufgaben	4
	Aufgabe 1 . . . . .	4
	Aufgabe 2 . . . . .	4
3	Geräteliste	4
4	Nennfehler und Literaturwerte	5
5	Messprotokoll	5
6	Auswertung	5
6.1	Aufgabe 1 . . . . .	5
	Fehlerbetrachtung . . . . .	6
6.2	Aufgabe 2 . . . . .	6
7	Fazit	7

# 1 Physikalischer Hintergrund

## Wärmekapazität

Die Wärmekapazität eines Körpers ist definiert als die Wärmemenge  $Q$ , die der Körper bei einer Temperaturänderung um  $\Delta T$  aufnimmt oder abgibt:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (1)$$

Diese Formel ist allerdings nur eine Durchschnittsgröße und die Wärmekapazität kann von der Temperatur abhängen, sodass im einzelnen ein Limes benutzt werden muss:

$$C(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta T}$$

Außerdem hängt die Energie  $Q$  im allgemeinen von Druck und Volumen ab, sodass man  $C_p$  und  $C_V$  als Wärmekapazität bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen definiert. Bezogen auf die Masse oder die Stoffmenge ergeben sich die *spezifische Wärmekapazität*:

$$c = \frac{C}{m}$$

und mit der Stoffmenge  $n$  die *molare Wärmekapazität*:

$$C_{mol} = \frac{C}{n}$$

Analog folgt  $c_p$  und  $c_V$  und wir definieren das Verhältnis als *Adiabatenexponent*:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} \quad (2)$$

## Adiabengleichung

Der *erste Hauptsatz der Thermodynamik* besagt, dass die einem System zugeführte Wärme  $\delta Q$  und Arbeit (hier: Volumenarbeit  $dW = -p \cdot dV$ ) die Zunahme seiner inneren Energie  $dU$  ausmacht:

$$dU = \delta Q - p \cdot dV \quad (3)$$

Für einen adiabatischen Prozess ist  $\delta Q = 0$  und für ein ideales Gas gilt  $dU = C_V dT$  und die *thermische Zustandsgleichung idealer Gase*:

$$p \cdot V = n \cdot R_m \cdot T, \quad (4)$$

wobei  $n$  die Stoffmenge und  $R_m$  die molare Gaskonstante ist. Durch einsetzen erhält man:

$$\frac{1}{T} dT = -\frac{n R_m}{C_V} \frac{1}{V} dV$$

Aufintegration beider Seiten und einsetzen von  $nR_m = C_p - C_V$  liefert sofort:

$$\ln T + \frac{C_p - C_V}{C_V} \ln V = \text{const}$$

und nach Einsetzen von  $\kappa$ :

$$\ln(TV^{\kappa-1}) = \text{const}$$

$$\implies TV^{\kappa-1} = \text{const}$$

Nochmaliges verwenden von (3) liefert die *Poisson Gleichung*:

$$\frac{pV}{nR_m} V^{\kappa-1} = \text{const}$$

$$\implies pV^\kappa = \text{const} \quad (5)$$

### Kappa & Freiheitsgrade

Aus dem Äquipartitionstheorem folgt, dass sich die Energie eines Gases gleich auf die Freiheitsgrade verteilt. Für ein einatomiges ideales Gas gilt daher:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Es kommen also drei Freiheitsgrade pro Atom vor, daher ist die mittlere Energie je Atom:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

Daraus folgt nach Differentiation nach der Temperatur für ein Gas von  $N$  Teilchen:  $C_V = \frac{3}{2}Nk_B T$  und allgemein pro mol:

$$c_V = \frac{f}{2}N_A k_B \quad (6)$$

Wir verwenden weiterhin  $c_p - c_V = R$  und  $R = N_A k_B$ . Daraus folgt dann für  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{c_p}{c_V} = \frac{R + c_V}{c_V} \\ &= \frac{\frac{f}{2}N_A k_B + N_A k_B}{\frac{f}{2}N_A k_B} = \frac{\frac{f}{2}N_A k_B + \frac{2}{2}N_A k_B}{\frac{f}{2}N_A k_B} \\ \iff \kappa &= \frac{f + 2}{f} \end{aligned} \quad (7)$$

### Clemens-Desormes Methode

Die Methode dient der experimentellen Bestimmung von  $\kappa$  eines Gases. Die Idee ist, durch geschicktes Messen des Drucks eines Gases, die schwierige Messung von kleinen Tempera-

turänderungen vermeiden zu können. *Adiabatisch* und *reversible* Zustandsänderungen, d.h. solche, die thermisch isoliert und ohne Erzeugung von Entropie ablaufen werden durch die *Poisson Gleichungen* beschrieben:

$$p \cdot V^\kappa = \text{const} \quad (8)$$

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const} \quad (9)$$

Bei der Methode von Clemens-Desormes wird praktisch ein mit Gas bei einem Druck  $p_1 > p_A$  befüllter Behälter auf Zimmertemperatur ins thermische Gleichgewicht gebracht, wobei  $p_A$  der Umgebungsdruck ist. Danach wird der Druck durch Öffnen des Behälters schnell auf Außendruck  $p_A$  gebracht. Die Temperaturabsenkung wäre schwierig direkt zu messen, darum wird nun der Behälter verschlossen und das Gas bei gleichem Volumen (*isochor*) wieder ins thermische Gleichgewicht gebracht.

## 2 Aufgaben

### Aufgabe 1

Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen  $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$  für Luft nach der Methode von *Clemens-Desormes*.

### Aufgabe 2

Bestimmung des Wertes  $\kappa$  für ein einatomiges (Argon), ein zweiatomiges ( $N_2$ ) und ein dreiatomiges Gas ( $CO_2$ ) durch Messung der Eigenfrequenzen eines Gasoszillators. Vergleich der Ergebnisse untereinander und mit den erwarteten Werten aus der kinetischen Gastheorie für ein ideales Gas.

## 3 Geräteliste

- Handstoppuhr (1/100s)
- 3 x Gasoszillator-Apparatur für  $n_2$ ,  $CO_2$  und Ar mit Lichtschranke und Zähler
- Druckflaschen für  $n_2$ ,  $CO_2$  und Ar mit Redezierventil
- Netzgerät
- Apparatur nach Clement-Desormes

## 4 Nennfehler und Literaturwerte

Bezeichnung	Betrag	Fehler
Volumen V (gemittelt)	$1145 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$	$3 \cdot 10^{-6}$
Kolbenmasse m (gemittelt)	$4,53333 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	$0,06 \cdot 10^{-3}$
Kolbenquerschnittsfläche S(berechnet)	$111,22 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	$0,56 \cdot 10^{-6}$
Raumdruck p (abgelesen)	100800Pa	300Pa

## 5 Messprotokoll

Please see inserted pages.

## 6 Auswertung

### 6.1 Aufgabe 1

Drei Höhen wurden im Druckmanometer der Apparatur gemessen. Zunächst wurde der Druck im Volumen der Apparatur erhöht und das Manometer im thermischen Gleichgewicht abgelesen ( $h_1$ ). Danach wurde das Druck schnell auf einen beliebigen Wert abgelassen und schnell abgelesen ( $h_2$ ). Nachdem sich das thermische Gleichgewicht wieder eingestellt hatte wurde  $h_3$  abgelesen. zur Auswertung werden nur die relativen Höhen  $dh_1$  und  $dh_3$  benötigt.

Die erhaltenen Größen werden zur Auswertung in die Messgleichung zur Bestimmung von  $\kappa$  eingesetzt:

$$\kappa = \frac{dp_a}{dp_a + dp_i} \approx \frac{dh_1}{dh_1 - dh_3} \quad (10)$$

Dabei bezeichnet  $dh_i$  die relativen Messgrößen bezeichnet:

$$dh_1 = h_1 - h_2$$

$$dh_3 = h_3 - h_2$$

Durch bilden des mit den Fehlern gewichteten Mittelwertes der Messreihen ergibt sich  $\kappa$  zu:

$$\kappa = 1,23 \pm 0,02 \quad (11)$$

### Fehlerbetrachtung

Wir schätzen Ablesefehler auf der Höhenskala ab mit:

$$\Delta h_1 = \Delta h_3 = 1mm$$

$$\Delta h_2 = 2mm$$

Somit ergeben sich die Fehler der *relativen Höhen* zu:

$$\Delta dh = \Delta dh_1 = \Delta dh_2 = \sqrt{(\Delta h_1)^2 + (\Delta h_2)^2}$$

Der Fehler der Messgleichung ergibt sich nach Gauß zu:

$$\Delta \kappa = \Delta dh \frac{\sqrt{dh_1^2 + dh_3^2}}{(dh_1 - dh_3)^2} \quad (12)$$

Der Fehler für Kappa wurde ebenfalls über die Messreihen gemittelt.

$$\implies \Delta\kappa = 0,2$$

## 6.2 Aufgabe 2

Es wurden Schwingungszeiten der Kolben nach der *Methode nach Flammersfeld-Rüchert* für verschiedene Gase gemessen. Messreihen von jeweils 100 Perioden  $\tau$  wurden aufgezeichnet und zur Bestimmung von  $\kappa$  in die Messgleichung eingesetzt:

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{mV}{pS^2} \quad (13)$$

Dabei ist  $S$  die Querschnittsfläche des Kolbens,  $p$  der Umgebungsdruck und  $\tau$  die Schwingungsdauer. Die Werte für die verschiedenen Gase wurden über die Messdaten gemittelt. Für  $CO_2$  wurden drei verschiedene Messreihen gemacht, wobei die Stoppuhr nach verschiedenen Methoden und von verschiedenen Personen bedient wurde. Es wird die Messreihe der Methode mit kleinster Streuung der Messdaten verwendet und die anderen zwei Messreihen nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Der Fehler von  $\kappa$  ergibt sich nach Gauß zu:

$$\Delta\kappa = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} \frac{V}{pS^2} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau^2} \frac{m}{pS^2} \Delta V\right)^2 + \left(\frac{-1}{\tau^2} \frac{mV}{p^2 S^2} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{-2}{\tau^2} \frac{mV}{pS^3} \Delta S\right)^2 + \left(\frac{-2}{\tau^3} \frac{mV}{pS^2} \Delta \tau\right)^2} \quad (14)$$

Die Ergebnisse sind in der Tabelle aufgeführt, wobei der Fettgedruckte Wert der oben erwähnte Beste ist, der die kleinste Streuung in  $\tau$  aufweist:

Gas	$\kappa$
$CO_2$	$1,29 \pm 0.02$
$CO_2$	<b><math>1,276 \pm 0.007</math></b>
$CO_2$	$1,279 \pm 0.007$
$N$	$1,366 \pm 0,007$
$Ar$	$1,53 \pm 0.01$

## 7 Fazit

$CO_2 = 1,29$  bei Raumtemperatur  $N_2 = 1.4$  bei Raumtemperatur  $Ar = 1.67$  bei Raumtemperatur