28.11.2014

**Schwerependel**

Physikalische Grundlagen

von Zacharias Fisches u. Christoph Haaf

Begriffserklärung:

Drehbewegung starrer Körper

Eine Menge von Massepunkten, die fest miteinander verbunden sind (nicht verformbar), wird als starrer Körper bezeichnet. Die Drehbewegung (Rotation) wird durch die Winkelgeschwindigkeit beschrieben und ist Abhängig vom Drehwinkel ϕ und der Zeit t.

gleichförmige Drehbewegung

(1)

Drehmoment

Wenn eine Kraft auf einen Hebelarm wirkt, erzeugt dies ein Drehmoment

(2)

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment gibt an, wie träge ein drehbar gelagerter Körper gegenüber der Änderung seines Bewegungszustandes ist.

I = m·r2 (3)

Steinerscher Satz

Wenn der schwerpunkt nicht der Drehmittelpunkt ist kommt der sogenannte Steinaranteil dazu (d = Entfernung zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt)

Iges  = I + m·d2  (4)

Die bei einem Pendel auftretende Schwingung wird durch eine zur Auslenkung entgegengesetzte rücktreibende Kraft verursacht. Diese kann im Idealfall (mathematisches Pendel bei kleiner Auslenkung) als proportional zur Auslenkung angenommen werden, womit dann aus dem Kräftesatz

 (5)

eine zeitlich periodische Bewegung mit der Periodendauer

 (6)

als Lösung folgt.

Das physikalische Schwerependel (beliebiger starrer Körper) ist nun durch ein Trägheitsmoment I und den Schwerpunkt der Drehung gekennzeichnet. Hier gilt der Drehmomentansatz:

 (7)

weshalb die Differentialgleichung der Schwingung

I · (d² / dt²) + m · s · g · sin() = 0 (8)

ist.

Für kleine Auslenkungen  kann hier  genähert werden, woraus beim mathematischen Pendel eine harmonische Schwingung mit der Periodendauer

T0 = 2 · Wurzel(I / (m s g)) (9)

In Analogie zu (5) kann eine "reduzierte Pendellänge"  eingeführt werden, d.h. ein mathematisches Pendel der Länge  hätte nach (5) und (8) die gleiche Periodendauer.

Ein genauer Lösungsansatz von (2) liefert

 (10)

woraus die Näherung

 (11)

folgt.

Je größer die Amplitude  ist, desto schlechter wird die Bewegung also durch das Modell der harmonischen Schwingung beschrieben.

Um mit (3) Schwingungsdauer berechnen zu können, müssen Trägheitsmoment und Schwerepunktabstand bekannt sein. Ist beispielsweise der starre Körper in guter Näherung linear mit homogener Massenverteilung, so ist in einem Teilstück  die Masse enthalten, und das Trägheitsmoment ist

IS = m · s · g · T² / 4² (12)

Ist zudem die Drehachse um die Länge s gegenüber dem Schwerpunkt verschoben, so gilt nach dem Steinerschen Satz

I = IS + m · s² woraus sich T = 2 Wurzel(IS + m · s² / m · s · g) ergibt

Bei verschiedenen Abständen s ist im allgemeinen die Schwingungsdauer T0 verschieden.

Es kann jedoch der interessante Fall berechnet werden, dass T0 bei verschiedenen Abständen s1, s2 gleich ist (Methode des Reversionspendels). Es ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den Lösungen: s1 = s2 oder s1 = IS / m · s2

Die Schwingungszeiten sind bei unterschiedlichen Schwerepunktabständen , also genau dann gleich, wenn die Abstandssumme  gerade gleich der reduzierten Pendellänge  ist.

s1 + s2 = IS / m · s2 + s2 = IS + m · s2² / m · s2 = I / m · s = L