13 Strömkretsen

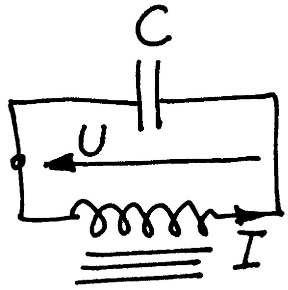
En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen U_0. Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans: $L = L_0/\left(1 + I^2\right)$.

Vid tiden $t = 0$ sluts kretsen och strömmen bestäms sedan av två samband:

Spänningen över induktansen: $\quad U = L\dfrac{dI}{dt}$

Strömmen genom kondensatorn: $\quad I = -C\dfrac{dU}{dt}$

Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första



uttrycket):

$$\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{2I}{1+I^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 - \frac{I\left(1+I^2\right)}{L_0C}$$

Vid tiden $t = 0$ gäller $I = 0$ och $dI/dt = U_0/L_0$. Gällande data är $L_0 = 1\,\mathrm{H}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Lösningen $I(t)$ till differentialekvationen är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur U_0-värdet väljs. Visa, t.ex. genom att derivera uttrycket E, att för lösningen till begynnelsevärdesproblemet gäller att $E(t) = U(t)^2 + \log(1 + I(t)^2) = const.$

Några olika värden på U_0 ska prövas, dels spänningen 240 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, dels två höga spänningsvärden 1200 V och 2400 V då strömkurvan inte blir särskilt sinuslik längre.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden. Det är lätt att räkna ut frekvensen och svängningstiden för en krets med konstant C och konstant $L = L_0$.

Använd `ode45` för att beräkna och rita strömkurvorna (standardtoleransen i ode45 duger inte, en relativ tolerans som är flera tiopotenser mindre kan vara nödvändig). Som jämförelse ska du även utnyttja en egen RK4 för strömkurveberäkningarna.

Fundera ut en bra algoritm för att bestämma strömmens toppvärde $I_{\max}$ och för att med mycket god precision beräkna svängningstiden T. Tillförlitlighetsbedömning av $I_{\max}$ och T krävs.

Fourieranalys – anpassning med trigonometriskt polynom

Programmet ska göra en Fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna a_k i fourierutvecklingen av $I(t)$:

$$I(t) = a_1 \sin\omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \cdots, \quad \text{där } \omega = 2\pi/T$$

Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen $I(t)$ är udda.

För koefficienterna i formeln gäller:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin(k\omega t) \mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vid valet av numerisk integrationsmetod bör du tänka på att integranden är en periodisk funktion. Se sidan 61 i Numeriska algoritmer med Matlab av Gerd Eriksson. Beräkna de 14 första fourierkoefficienterna. Om strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla fjorton finns med.

Frivillig del

1. Det kommer ett krav att strömmen i kretsen inte får överstiga 10 A. Beräkna med en effektiv lösningsmetod det spänningsvärde $U_0 = {U_0}^*$ som ger $I_{max} = 10$ A. Man har möjlighet att variera spolens L_0-värde och vill därför för en krets som uppfyller kravet $I_{\max} = 10$ undersöka beroendet mellan ${U_0}^*$ och L_0. Beräkna och markera i ett diagram ${U_0}^*$ för $L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 2.0$ H.

2. Sambanden $U = L\frac{dI}{dt}, L = L_0/(1+I^2), I = -C\frac{dU}{dt}$ bildar direkt ett system av två första ordningens ODE för strömmen $I(t)$ och spänningen $U(t)$. Det leder till en alternativ beräkningsmetod för att rita upp ström- och spänningskurvorna och för att bestämma $I_{\max}$ och svängningstiden T. Genomför detta för vår svängningskrets. Fourieranalysen och utvidgning 1 behöver inte vara med här.