

# Een fysisch systeem voor de computer

Derk Rouwhorst en Harmen Stoppels

27 december 2010

# 1 Vectoren

We drukken in ons hele profielwerkstuk snelheden, posities en krachten uit in vectoren. Hiermee maken we het rekenwerk een stuk makkelijker en kunnen we formules veel korter opschrijven. We maken gebruik van tweedimensionale vectoren, die uit een x- en een y-component in het cartesisch coördinatenstelsel bestaan. In de voorbeelden en definities in dit onderdeel gebruiken we ook alleen tweedimensionale vectoren, ook al gelden veel ervan ook voor  $n$ -dimensionale vectoren.

## 1.1 Notatie

De namen van vectoren schrijven we dikgedrukt en de componenten van vectoren schrijven boven elkaar met ronde haken eromheen. Een voorbeeld hiervan is  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Dit stelt een vector voor die 5 naar rechts is gericht en 3 naar onder.

## 1.2 Norm van een vector

De norm van een vector is de lengte of grootte. Deze wordt aangeduid met een dubbele verticale streep rondom de vector. Oftewel, de norm van vector  $\mathbf{v}$  is  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

## 1.3 Het inwendig product

Het inwendig product van twee vectoren is de som van alle componenten met elkaar vermenigvuldigd. Een voorbeeld hiervan is:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 5 \times 4 - 3 \times 2 = -14$$

Het resultaat van die vermenigvuldigen en optelling is het best te zien als hoeveel de kortste vector van de twee in het domein van de langste zit. Deze eigenschap is handig te gebruiken bij het kijken of twee bewegende cirkels elkaar op een bepaald tijdsinterval raken.

Het bewijs voor deze eigenschap maakt gebruik van de cosinusregel. Gegeven de vectoren  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  met hetzelfde beginpunt en een onderlinge hoek  $\gamma$  en lijn  $c$  tussen beide uiteinden van de vectoren, geldt er:

$$\begin{aligned}
c^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
c &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\
(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
-2a_1b_1 - 2a_2b_2 &= -2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
-2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= -2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma
\end{aligned} \tag{1}$$

Met het resultaat hiervan kunnen we later geometrische berekeningen doen, zonder de voor de computer “tijdrovende” functie cosinus of sinus te gebruiken.

## 1.4 Eenheidsvector

Een eenheidsvector is een vector waarvan de lengte 1 is. Het handige van zo’n vector is dat hij vermenigvuldigd met een getal zijn richting behoudt en de lengte van dat getal aanneemt. Stel je hebt richting waarin een voorwerp beweegt als eenheidsvector, dan geeft vermenigvuldiging met de snelheid de snelheid als vector. De notatie van een eenheidsvector wordt gedaan met een dakje erop:  $\|\hat{\mathbf{a}}\| = 1$ .

## 2 Tijdstippen van botsingen

### 2.1 Cirkel tegen cirkel

Kijken of twee cirkels elkaar raken is theoretisch erg makkelijk te doen. Het komt er simpelweg op neer dat de cirkels elkaar raken als de som van de stralen groter of gelijk is aan de afstand tussen de middelpunten. Het wordt echter lastiger als de cirkels snel bewegen en elkaar tussen twee frames raken. Het probleem is dat het gros van de botsingen tussen cirkels juist tussen twee frames gebeurt.

Bij het berekenen van de nieuwe posities van de ballen in het volgende frame, moeten we dus als eerste kijken of ze ondertussen botsen, als tweede berekenen wanneer dat is en als derde uitvinden wat voor gevolg die botsing heeft.

Om de uiteindelijke vergelijking te versimpelen gaan wij ervan uit dat elk voorwerp tussen twee frames een constante snelheid heeft en over een rechte

lijn beweegt. Dit klopt niet met de realiteit, maar omdat de tijd tussen twee frames erg klein is, maakt het niet zo veel uit.

De cirkels kunnen elkaar op het tijdsinterval tussen twee frames hoogstens twee keer raken (als je geen rekening houdt met het effect van de botsing), namelijk wanneer ze voor het eerst tegen elkaar aankomen en wanneer ze door elkaar heen zijn gevlogen. De botsing die wij moeten vinden is de eerste, de tweede vindt natuurlijk nooit plaats.

Allereerst noemen we de tijd in het eerste frame  $t = 0$  en in het tweede frame  $t = 1$ . We zoeken een waarde van  $t$  waarvoor geldt dat  $0 \leq t < 1$  en waarbij de afstand tussen de middelpunten gelijk is aan de som van de stralen.

De posities van de ballen geven we aan met vectoren. De nieuwe positie bestaat uit de oude positie met daarbij opgeteld de snelheidsvector vermenigvuldigd met de tijd. Wat we krijgen is dus:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{v}t \quad (2)$$

Vul je  $t = 0$  in, dan krijg je de positie in frame 1; vul je  $t = 1$ , dan krijg je de positie in frame 2 (geen rekening gehouden met het effect van een mogelijke botsing).

We moeten nu een vergelijking opzetten en oplossen voor  $t$ , waarin we de relatieve afstand tussen twee ballen gelijkstellen aan de som van de stralen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_1 + \mathbf{v}_1 t - \mathbf{X}_2 - \mathbf{v}_2 t\| &= r_1 + r_2 \\ \|\mathbf{X}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} t\| &= r_1 + r_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Beide kanten kwadrateren geeft:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{rel}}^2 t^2 + 2\mathbf{X}_{\text{rel}} \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{X}_{\text{rel}}^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t^2 + 2(\mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t + \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} &= (r_1 + r_2)^2 \\ (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t^2 + 2(\mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t + \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} - (r_1 + r_2)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Deze vergelijking is een simpele ABC-formule, die ook in een iets alternatieve vorm kan worden geschreven om rekentijd te beperken:

$$\begin{aligned}
at^2 + 2bt + c &= 0 \\
t^2 + \frac{2b}{a}t &= -\frac{c}{a} \\
\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \\
t + \frac{b}{a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} \\
t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}
\end{aligned} \tag{5}$$

Vergelijking (5) kunnen we nu toepassen op vergelijking (4):

$$\begin{aligned}
a &= \mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \\
b &= \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \\
c &= \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} - (r_1 + r_2)^2
\end{aligned} \tag{6}$$

### 3 Gevolgen van botsingen