

# Een fysisch systeem voor de computer

Derk Rouwhorst en Harmen Stoppels

1 maart 2011

**Beste lezer, dit is nog niet af, wees gewaarschuwd**

Dit verslag is nog lang niet af, maar het is al wel een opzetje. Er moeten nog wel honderden plaatjes ter verduidelijking bij!

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Vectoren</b>	<b>3</b>
1.1	Notatie . . . . .	3
1.2	Norm van een vector . . . . .	3
1.3	Het inwendig product . . . . .	3
1.4	Eenheidsvector . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Tijdstippen van botsingen</b>	<b>5</b>
2.1	Cirkel tegen cirkel . . . . .	5
2.1.1	Formule . . . . .	5
2.1.2	Simulatie . . . . .	6
2.2	Cirkel tegen lijnstuk . . . . .	6
2.2.1	Tijdstippen van botsingen . . . . .	7
2.2.2	Punt op lijnstuk dichtste bij cirkel . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Gevolgen van botsingen</b>	<b>10</b>
3.1	Theorie van botsingen . . . . .	10
3.1.1	Elastische botsing . . . . .	10
3.1.2	Onelastische botsing . . . . .	10
3.1.3	De wet van behoud van impuls . . . . .	10
3.2	Berekening van de snelheden na de botsing . . . . .	11
3.2.1	Met behulp van de wet van behoud van energie en impuls	11
3.2.2	Met behulp van de gemeenschappelijke snelheid . . . . .	13
3.3	Experiment van botsende ballen . . . . .	15
3.3.1	Botsing tussen twee ballen . . . . .	15
3.3.2	Botsing tussen meer dan twee ballen . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Programmeren</b>	<b>17</b>
4.1	Andere eenheden . . . . .	17
4.2	Hoe de posities berekend worden . . . . .	17

# 1 Vectoren

We drukken in ons hele profielwerkstuk snelheden, posities en krachten uit in vectoren. Hiermee maken we het rekenwerk een stuk makkelijker en kunnen we formules veel korter opschrijven. We maken gebruik van tweedimensionale vectoren, die uit een x- en een y-component in het cartesisch coördinatenstelsel bestaan. In de voorbeelden en definities in dit onderdeel gebruiken we ook alleen tweedimensionale vectoren, ook al gelden veel ervan ook voor  $n$ -dimensionale vectoren.

## 1.1 Notatie

De namen van vectoren schrijven we dikgedrukt en de componenten boven elkaar met ronde haken eromheen. Een voorbeeld hiervan is  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Dit stelt een vector voor die 5 naar rechts is gericht en 3 naar onder.

## 1.2 Norm van een vector

De norm van een vector is de lengte of grootte. Deze wordt aangeduid met een dubbele verticale streep rondom de vector. Oftewel, de norm van vector  $\mathbf{v}$  is  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$

## 1.3 Het inwendig product

Het inwendig product van twee vectoren is de som van alle componenten met elkaar vermenigvuldigd. Een voorbeeld hiervan is:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 5 \times 4 - 3 \times 2 = 14$$

Het resultaat van die vermenigvuldiging en optelling is het best te zien als hoeveel de kortste vector van de twee in het domein van de langste zit. Deze eigenschap is handig te gebruiken bij het kijken of twee bewegende cirkels elkaar op een bepaald tijdsinterval raken.

Het bewijs voor deze eigenschap maakt gebruik van de cosinusregel. Gegeven de vectoren  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  met hetzelfde beginpunt en een onderlinge hoek  $\gamma$  en lijn  $c$  tussen beide uiteinden van de vectoren, geldt er:

$$c = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \wedge c^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}\right)^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
-2a_1b_1 - 2a_2b_2 &= -2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
-2(a_1b_1 + a_2b_2) &= -2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
-2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= -2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \gamma
\end{aligned} \tag{2}$$

Met het resultaat hiervan kunnen we later geometrische berekeningen doen, zonder de voor de computer “tijdrovende” functie cosinus of sinus te gebruiken.

## 1.4 Eenheidsvector

Een eenheidsvector is een vector waarvan de lengte 1 is. Het handige van zo’n vector is dat hij, vermenigvuldigd met een getal, zijn richting behoudt en de lengte van dat getal aanneemt. Stel, je hebt de richting waarin een voorwerp beweegt als eenheidsvector, dan geeft vermenigvuldiging met de snelheid, de snelheid als vector. De notatie van een eenheidsvector wordt gedaan met een dakje erop:  $\|\hat{\mathbf{a}}\| = 1$ .

## 2 Tijdstippen van botsingen

### 2.1 Cirkel tegen cirkel

Kijken of twee cirkels elkaar raken is theoretisch erg makkelijk te doen. Het komt er simpelweg op neer dat de cirkels elkaar raken als de som van de stralen groter of gelijk is aan de afstand tussen de middelpunten. Het wordt echter lastiger als de cirkels snel bewegen en elkaar tussen twee frames raken. Het probleem is dat het gros van de botsingen tussen cirkels juist tussen twee frames gebeurt.

#### 2.1.1 Formule

Bij het berekenen van de nieuwe posities van de ballen in het volgende frame, moeten we dus als eerste kijken of ze ondertussen botsen, als tweede berekenen wanneer dat is en als derde uitvinden wat voor gevolg die botsing heeft.

Om de uiteindelijke vergelijking te versimpelen gaan wij ervan uit dat elk voorwerp tussen twee frames een constante snelheid heeft en over een rechte lijn beweegt. Dit klopt niet met de realiteit, maar omdat de tijd tussen twee frames erg klein is, maakt het niet zo veel uit.

De cirkels kunnen elkaar op het tijdsinterval tussen twee frames hoogstens twee keer raken (als je geen rekening houdt met het effect van de botsing), namelijk wanneer ze voor het eerst tegen elkaar aankomen en wanneer ze door elkaar heen zijn gevlogen. De botsing die wij moeten vinden is de eerste, de tweede vindt natuurlijk nooit plaats.

Allereerst noemen we de tijd in het eerste frame  $t = 0$  en in het tweede frame  $t = 1$ . We zoeken een waarde van  $t$  waarvoor geldt dat  $0 \leq t < 1$  en waarbij de afstand tussen de middelpunten gelijk is aan de som van de stralen.

De posities van de ballen geven we aan met vectoren. De nieuwe positie bestaat uit de oude positie met daarbij opgeteld de snelheidsvector vermenigvuldigd met de tijd. Wat we krijgen is dus:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{v}t \tag{3}$$

Vul je  $t = 0$  in, dan krijg je de positie in frame 1; vul je  $t = 1$ , dan krijg je de positie in frame 2 (geen rekening gehouden met het effect van een mogelijke botsing).

We moeten nu een vergelijking opzetten en oplossen voor  $t$ , waarin we de relatieve afstand tussen twee ballen gelijkstellen aan de som van de stralen:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_1 + \mathbf{v}_1 t - \mathbf{X}_2 - \mathbf{v}_2 t\| &= r_1 + r_2 \\ \|\mathbf{X}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} t\| &= r_1 + r_2\end{aligned}\tag{4}$$

Beide kanten kwadrateren geeft:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{rel}}^2 t^2 + 2\mathbf{X}_{\text{rel}} \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{X}_{\text{rel}}^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t^2 + 2(\mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t + \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} &= (r_1 + r_2)^2 \\ (\mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t^2 + 2(\mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}}) t + \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} - (r_1 + r_2)^2 &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

Deze vergelijking is een eenvoudige vierkantsvergelijking, die ook in een iets alternatieve vorm kan worden geschreven om rekentijd te beperken:

$$\begin{aligned}at^2 + 2bt + c &= 0 \\ t^2 + \frac{2b}{a}t &= -\frac{c}{a} \\ \left(t + \frac{b}{a}\right)^2 &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \\ t + \frac{b}{a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} \\ t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\end{aligned}\tag{6}$$

Vergelijking (6) kunnen we nu toepassen op vergelijking (5):

$$\begin{aligned}a &= \mathbf{v}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ b &= \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ c &= \mathbf{X}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{X}_{\text{rel}} - (r_1 + r_2)^2\end{aligned}\tag{7}$$

### 2.1.2 Simulatie

We hebben deze formule omgezet naar een simulatie in Geogebra, om te kijken of de formule klopte; zie de bijlage met de bestandsnaam Bal-Bal.ggb. Zowel de verplaatsingsvectoren, beginposities en de stralen van beide cirkels zijn aan te passen, en als er binnen het begin- en eindpunt een botsing is, worden de cirkels opnieuw gestippeld getekend op de plaats van de botsing.

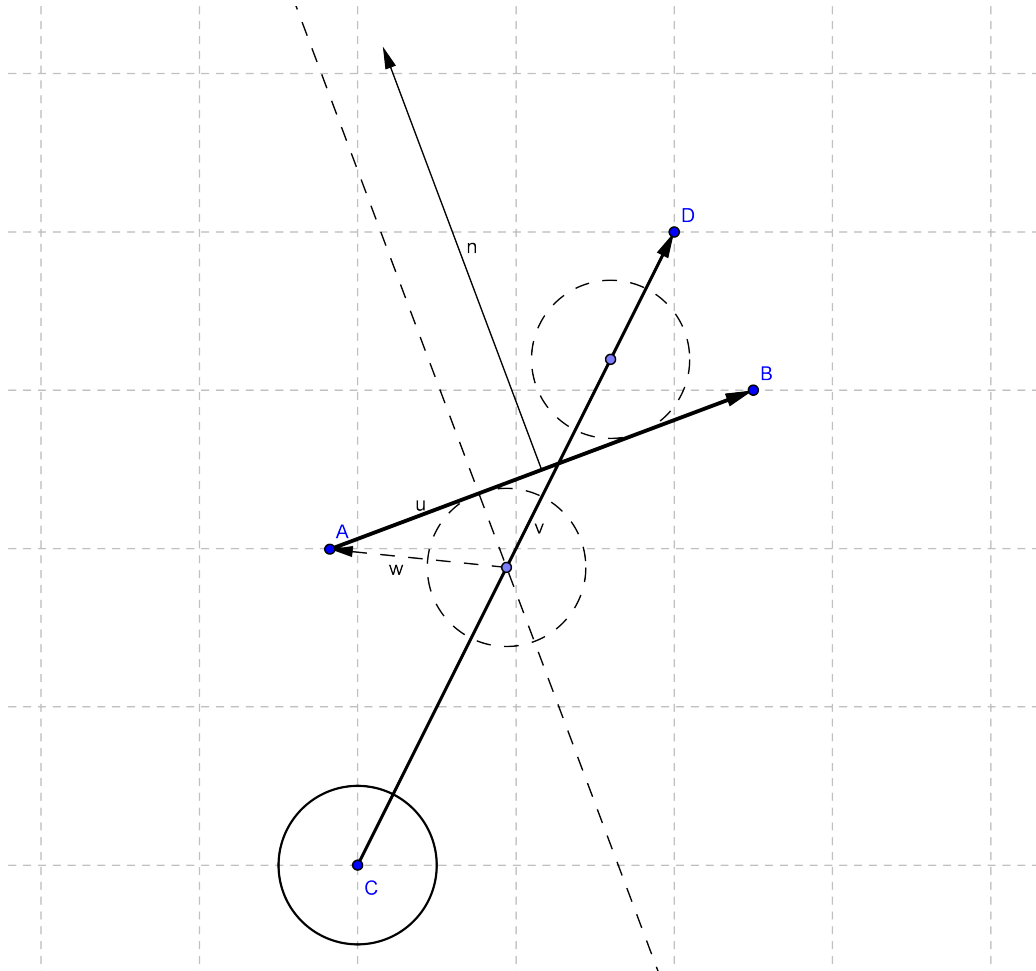
## 2.2 Cirkel tegen lijnstuk

Om erachter te komen of een cirkel een lijnstuk raakt binnen een tijdinterval, gebruiken we een formule die het punt op het lijnsegment geeft dat het dichtst bij het midden van de cirkel ligt.

### 2.2.1 Tijdstippen van botsingen

Gegeven is een lijnstuk  $AB$  en een cirkel die met constante snelheid over lijnstuk  $CD$  beweegt. De cirkel heeft straal  $r$  en botst tijdens zijn beweging misschien tegen lijnstuk  $AB$ . Op tijdstip  $t = 0$  bevindt het middelpunt van de cirkel zich op  $C$ , op tijdstip  $t = 1$  bevindt het zich op  $D$ . We zoeken dus naar de eerste waarde voor  $t$  tussen 0 en 1 waarop de cirkel lijnstuk  $AB$  raakt.

Om dit probleem op te lossen gebruiken een vergelijking voor de afstand van een punt tot een lijn, en die afstand moet gelijk zijn aan de straal van de cirkel. Als  $AB$  en  $CD$  niet parallel lopen, krijgen we twee oplossingen voor onze vergelijking. De eerste is de botsing, de tweede oplossing geeft het tijdstip aan waarop de cirkel door  $AB$  is gevlogen en het lijnstuk dan raakt.



Figuur 1: Botsing tussen een bal en een lijnstuk



Eerst definiëren we  $\mathbf{n}$  als de normaalvector van  $AB$ . Daarna vinden we de afstand van een punt tot een lijnstuk door middel van de eigenschappen van het inproduct van twee vectoren:

$$\cos\gamma = \frac{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\|} \quad (8)$$

Verder geldt in het driehoekje met zijden  $\mathbf{w}$  en  $r$ :

$$\cos\gamma = \frac{r}{\|\mathbf{w}\|} \quad (9)$$

Samenvoeging van (8) en (9) geeft:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\|\mathbf{w}\|} &= \frac{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\|} \\ r &= \frac{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \\ r \|\mathbf{n}\| &= |\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}| \\ \pm r \|\mathbf{n}\| &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (10)$$

Vector  $\mathbf{w}$  begint in het middelpunt van de cirkel op  $CD$  en gaat naar punt  $A$ , en is dus als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{a} - (\mathbf{c} + t(\mathbf{d} - \mathbf{c})) \quad 0 \leq t \leq 1 \\ &= \mathbf{a} - \mathbf{c} - t(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (11)$$

Als je  $t = 0$  invult krijg je  $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$  en als je  $t = 1$  invult krijg je  $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \mathbf{d}$ .

Nu kun je (11) invullen in (10) en kun je  $t$  uitdrukken in andere variabelen:

$$\begin{aligned} \pm r \|\mathbf{n}\| &= (\mathbf{a} - \mathbf{c} - t(\mathbf{d} - \mathbf{c})) \cdot \mathbf{n} \\ \pm r \|\mathbf{n}\| &= (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} - t(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} \\ t(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} &= \pm r \|\mathbf{n}\| + (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} \\ t &= \frac{\pm r \|\mathbf{n}\| + (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}} \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.2.2 Punt op lijnstuk dichtste bij cirkel

DIT STUKJE IS NU VERGELIJKBAAR MET HET VORIGE. HET MOET OPNIEUW GESCHREVEN WORDEN.

Omdat we met vectoren werken is het heel makkelijk om te bepalen welk punt op een lijnstuk het dichtst bij het middelpunt van een cirkel ligt. Voor

het gemak noemen we de uiteinden van het lijnstuk  $A$  en  $B$ , het middelpunt van de cirkel  $C$ , en we definiëren  $P$  als het punt op het lijnstuk het dichtste bij  $C$ .  $P$  is dus een loodrechte projectie van  $C$  op  $AB$ . Verder stellen we het lijnstuk voor als een vector  $\mathbf{v}$  vanuit punt  $A$  en tekenen we een vector  $\mathbf{w}$  vanuit  $A$  naar  $C$ . Eerder bleek al dat geldt (2):

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \cos \gamma \\ \cos \gamma &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}\end{aligned}\tag{13}$$

Verder geldt in driehoek  $\triangle ACP$ , waarbij  $AC = \mathbf{w}$ :

$$\cos \gamma = \frac{AP}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{x}{\|\mathbf{w}\|}\tag{14}$$

We zijn nu op zoek naar de verhouding tussen  $x$  en  $\mathbf{w}$ . Dat geeft een indicatie van hoever punt  $P$  op het lijnstuk ligt. Is die verhouding kleiner dan 0, of groter dan 1, dan ligt het punt dat het dichtste bij  $C$  ligt, voorbij het lijnstuk. Ligt het ertussen, dan ligt het punt ergens tussen  $A$  en  $B$ . Combineer je (13) en (14), dan krijg je:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\|\mathbf{w}\|} &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} \\ x &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|} \\ \frac{x}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \\ \frac{x}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\end{aligned}\tag{15}$$

We hebben dit ook in Geogebra gesimuleerd, zie in de bijlage het bestand Bal-Lijn.ggb. Variabelen zijn hierbij het de positie van het de begin- en eindpunten van het lijnstuk (dat is meteen al vector  $\mathbf{v}$  geworden) en de positie van de cirkel.

## 3 Gevolgen van botsingen

In de natuurkunde is een botsing elke interactie tussen deeltjes of voorwerpen die dicht genoeg bij elkaar komen om energie uit te wisselen.

### 3.1 Theorie van botsingen

Bij een botsing tussen twee lichamen (voorwerpen) zullen er van het moment van eerste aanraking af vormveranderingen optreden, waardoor veerkrachten worden opgewekt. Als deze veerkrachten groot genoeg zijn, zullen de lichamen zich na de botsing weer van elkaar verwijderen. In het algemeen zijn de snelheden van beide lichamen voor en na de botsing verschillend, zodat overdracht van kinetische energie (bewegingsenergie) heeft plaatsgevonden.

#### 3.1.1 Elastische botsing

Als twee biljartballen met elkaar botsen, treedt er slechts een tijdelijke vormverandering op; aan het eind van de botsing krijgen de ballen hun oude vorm weer terug. Dit heet dan van een volkomen elastische (veerkrachtige) botsing, waarvoor de wet van behoud van bewegingsenergie geldig is.

#### 3.1.2 Onelastische botsing

Wordt er bijvoorbeeld een kogel in een zandzak geschoten en blijft de kogel daarin steken, dan bewegen beide lichamen zich als één geheel verder. Bij deze volkomen onelastische botsing treedt een blijvende vormverandering op, zodat de wet van behoud van bewegingsenergie niet geldig is, omdat een deel van de bewegingsenergie verbruikt is voor deze vervorming.

Tussen deze twee voorbeelden in liggen gedeeltelijke veerkrachtige botsingen.

#### 3.1.3 De wet van behoud van impuls

Omdat voor elke botsing geldt dat de krachten die de lichamen op elkaar uitoefenen, even groot zijn, tegengesteld gericht zijn en even lang werken, is de stoot van de botsingskrachten nul:

$$\int_0^t \sum F_1 dt = 0 \quad (16)$$

De verandering van de impuls van de beide lichamen samen is dus nul, met andere woorden voor elk type botsing geldt de wet van behoud van impuls. Voor de gevolgen van een botsing is het ook belangrijk hoe de twee

lichamen elkaar treffen. Als je aanneemt dat de beide lichamen in één plat vlak bewegen, dan kunnen de beide snelheidsvectoren samenvallen met de verbindingslijn tussen de beide zwaartepunten. Dit heet een centrale botsing (analoog met een frontale botsing tussen auto's). Maken deze vectoren hoeken met deze verbindingslijn, dan spreekt men van een niet-centrale botsing (bijvoorbeeld een botsing tussen twee auto's op een straathoek).

### 3.2 Berekening van de snelheden na de botsing

In de meeste gevallen zijn de snelheden van de ballen na de botsing, anders dan de snelheden van de ballen voor de botsing. Deze snelheden kunnen berekend worden met behulp van de snelheden vóór de botsing en de massa's van beide ballen. We berekenen het op twee manieren, bij de eerste manier gebruiken we de wet van behoud van energie en de wet van behoud van impuls, bij de tweede manier gebruiken we alleen de wet van behoud van impuls en de gemeenschappelijke snelheid.

#### 3.2.1 Met behulp van de wet van behoud van energie en impuls

Omdat we te maken hebben met elastische botsingen geldt de wet van behoud van energie (17) en de wet van behoud van impuls (18). Met deze twee wetten kunnen we de snelheden van de ballen na de botsing berekenen.

$$\frac{1}{2}m_1o_1^2 + \frac{1}{2}m_2o_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (17)$$

$$m_1o_1 + m_2o_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (18)$$

Waarbij:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{massa van lichaam 1} \\ m_2 &= \text{massa van lichaam 2} \\ o_1 &= \text{snelheid van lichaam 1 voor de botsing} \\ o_2 &= \text{snelheid van lichaam 2 voor de botsing} \\ v_1 &= \text{snelheid van lichaam 1 na de botsing} \\ v_2 &= \text{snelheid van lichaam 2 na de botsing} \end{aligned} \quad (19)$$

We hebben nu twee vergelijkingen met twee onbekenden, namelijk  $v_1$  en  $v_2$ . We kunnen  $v_2$  uit beide vergelijkingen elimineren, en daarna de vergelijkingen aan elkaar gelijk stellen, zodat we als onbekende alleen  $v_1$  over houden.

Als eerste de vergelijking van de wet van behoud van energie:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1o_1^2 + \frac{1}{2}m_2o_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\
m_1o_1^2 + m_2o_2^2 &= m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \\
m_1o_1^2 + m_2o_2^2 - m_1v_1^2 &= m_2v_2^2 \\
\frac{m_1o_1^2 + m_2o_2^2 - m_1v_1^2}{m_2} &= v_2^2
\end{aligned} \tag{20}$$

Dan de vergelijking van de wet van behoud van impuls:

$$\begin{aligned}
m_1o_1 + m_2o_2 &= m_1v_1 + m_2v_2 \\
m_1o_1 + m_2o_2 - m_1v_1 &= m_2v_2 \\
\frac{m_1o_1 + m_2o_2 - m_1v_1}{m_2} &= v_2 \\
\left( \frac{m_1o_1 + m_2o_2 - m_1v_1}{m_2} \right)^2 &= v_2^2
\end{aligned} \tag{21}$$

De uitkomsten van (21) en (20) aan elkaar gelijk stellen geeft:

$$\begin{aligned}
\frac{m_1o_1^2 + m_2o_2^2 - m_1v_1^2}{m_2} &= \left( \frac{m_1o_1 + m_2o_2 - m_1v_1}{m_2} \right)^2 \\
&= \frac{(m_1^2o_1^2 + m_2^2o_2^2 + m_1^2v_1^2) + (2m_1m_2o_1o_2 - 2m_1^2o_1v_1 - 2m_1m_2o_2v_1)}{m_2^2}
\end{aligned} \tag{22}$$

Deze vergelijking oplossen, zodat je een vierkantsvergelijking krijgt:

$$\begin{aligned}
m_1^2o_1^2 + m_2^2o_2^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2o_1o_2 - 2m_1^2o_1v_1 - 2m_1m_2o_2v_1 &= m_1m_2o_1^2 \\
m_1^2o_1^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2o_1o_2 - 2m_1^2o_1v_1 - 2m_1m_2o_2v_1 &= m_1m_2o_1^2 \\
m_1^2o_1^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2o_1o_2 - 2m_1^2o_1v_1 - 2m_1m_2o_2v_1 - m_1m_2o_1^2 + m_1m_2v_1^2 &= 0 \\
(m_1^2 + m_1m_2)v_1^2 + (-2m_1^2o_1 - 2m_1m_2o_2)v_1 + (m_1^2o_1^2 + 2m_1m_2o_1o_2 - m_1m_2o_1^2) &= 0
\end{aligned} \tag{23}$$

De oplossingen worden gegeven door:  $v_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , waarbij:

$$\begin{aligned}
a &= m_1^2 + m_1m_2 \\
b &= -2m_1^2o_1 - 2m_1m_2o_2 \\
c &= m_1^2o_1^2 + 2m_1m_2o_1o_2 - m_1m_2o_1^2
\end{aligned} \tag{24}$$

We berekenen  $-b$ ,  $b^2$ ,  $4ac$  en  $b^2 - 4ac$  apart:

$$\begin{aligned} -b &= -(-2m_1^2 o_1 - 2m_1 m_2 o_2) \\ &= 2m_1^2 o_1 + 2m_1 m_2 o_2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} b^2 &= (-2m_1^2 o_1 - 2m_1 m_2 o_2)^2 \\ &= 4m_1^4 o_1^2 + 8m_1^3 m_2 o_1 o_2 + 4m_1^2 m_2^2 o_2^2 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 4ac &= 4(m_1^2 + m_1 m_2)(m_1^2 o_1^2 + 2m_1 m_2 o_1 o_2 - m_1 m_2 o_1^2) \\ &= 4m_1^4 o_1^2 + 8m_1^3 m_2 o_1 o_2 + 8m_1^2 m_2^2 o_1 o_2 - 4m_1^2 m_2^2 o_1^2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4m_1^4 o_1^2 + 8m_1^3 m_2 o_1 o_2 + 4m_1^2 m_2^2 o_2^2 - 4(m_1^2 + m_1 m_2)(m_1^2 o_1^2 + 2m_1 m_2 o_1 o_2 - m_1 m_2 o_1^2) \\ &= m_1^2 m_2^2 (2o_2 - 2o_1)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

De vierkantsvergelijking kan nu worden ingevuld:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(2m_1^2 o_1 + 2m_1 m_2 o_2) \pm \sqrt{m_1^2 m_2^2 (2o_2 - 2o_1)^2}}{2(m_1^2 + m_1 m_2)} \\ &= \frac{(m_1 o_1 + m_2 o_2) + m_2 (o_2 - o_1)}{(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (29)$$

Je kunt  $v_2$  op een zelfde soort manier berekenen. Dus  $v_1$  en  $v_2$  zijn:

$$v_1 = \frac{(m_1 o_1 + m_2 o_2) + m_2 (o_2 - o_1)}{(m_1 + m_2)} \wedge v_2 = \frac{(m_2 o_2 + m_1 o_1) + m_1 (o_1 - o_2)}{(m_2 + m_1)} \quad (30)$$

### 3.2.2 Met behulp van de gemeenschappelijke snelheid

Net zoals bij de vorige manier gebruiken we de wet van behoud van impuls (21), omdat bij botsingen alleen onderlinge krachten werken. We definiëren  $v_g$  als de gemeenschappelijke snelheid aan het eind van de eerste periode van de centrale botsing. Dan geldt er:

$$m_1 o_1 + m_2 o_2 = m_1 v_g + m_2 v_g \quad (31)$$

Waarbij:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{massa van lichaam 1} \\ m_2 &= \text{massa van lichaam 2} \\ o_1 &= \text{snelheid van lichaam 1 voor de botsing} \\ o_2 &= \text{snelheid van lichaam 2 voor de botsing} \end{aligned} \tag{32}$$

Daaruit volgt:

$$v_g = \frac{m_1 o_1 + m_2 o_2}{m_1 + m_2} \tag{33}$$

Bij een volkomen onelastische botsing is de gemeenschappelijke snelheid  $v_g$  van beide voorwerpen gelijk aan (33). Bij een volkomen elastische centrale botsing is de snelheidsverandering van elk voorwerp gedurende de tweede periode van de botsing (op grond van de definitie van een elastische botsing) gelijk aan de snelheidsverandering gedurende de eerste periode van de botsing. Is  $v$  de snelheid na de botsing, dan geldt dus:

$$\begin{aligned} v - v_g &= v_g - o \\ v &= 2v_g - o \end{aligned} \tag{34}$$

Voor de snelheden  $o_1$  en  $o_2$  van de twee voorwerpen na de botsing geldt dus:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_g + (v_g - o_1) = 2v_g - o_1 \\ v_2 &= v_g + (v_g - o_2) = 2v_g - o_2 \end{aligned} \tag{35}$$

Wanneer we (33) substitueren in (35) krijgen we de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2 \left( \frac{m_1 o_1 + m_2 o_2}{m_1 + m_2} \right) - o_1 \wedge v_2 = 2 \left( \frac{m_1 o_1 + m_2 o_2}{m_1 + m_2} \right) - o_2 \\
v_1 &= \frac{2(m_1 o_1 + m_2 o_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{2(m_1 o_1 + m_2 o_2)}{m_1 + m_2} - v_2 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \\
v_1 &= \frac{2(m_1 o_1 + m_2 o_2) - v_1(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{2(m_1 o_1 + m_2 o_2) - v_2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \\
v_1 &= \frac{2m_1 o_1 + 2m_2 o_2 - m_1 o_1 - m_2 o_1}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{2m_1 o_1 + 2m_2 o_2 - m_1 o_2 - m_2 o_2}{m_1 + m_2} \\
v_1 &= \frac{m_1 o_1 + 2m_2 o_2 - o_1 m_2}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{2m_1 o_1 + m_2 o_2 - o_2 m_1}{m_1 + m_2} \\
v_1 &= \frac{m_1 o_1 + m_2 o_2 + m_2 o_2 - o_1 m_2}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{m_1 o_1 + m_2 o_2 + m_1 o_1 - o_2 m_1}{m_1 + m_2} \\
v_1 &= \frac{(m_1 o_1 + m_2 o_2) + m_2(o_2 - o_1)}{m_1 + m_2} \wedge v_2 = \frac{(m_1 o_1 + m_2 o_2) + m_1(o_1 - o_2)}{m_1 + m_2}
\end{aligned} \tag{36}$$

De uitkomst van (36) komt overeen met de uitkomst van (30).

### 3.3 Experiment van botsende ballen

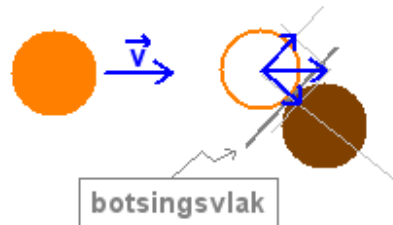
Wij werken alleen met botsingen in het platte vlak. Omdat we werken met harde houten ballen, die vergelijkbaar zijn met biljartballen, hebben we enkel en alleen te maken met volkomen elastische botsingen.

#### 3.3.1 Botsing tussen twee ballen

Er zijn twee soorten botsingen te onderscheiden: een centrale botsing en een niet-centrale botsing. De verwachting bij een centrale botsing is, dat de richting van de snelheid van de ballen na de botsing precies tegenovergesteld is aan de richting van de snelheid van de ballen voor de botsing, en dat de snelheden van de ballen verwisseld zijn. De verwachting bij een niet-centrale botsing waarvan een bal geen snelheid heeft is, dat de ballen onder een hoek van 90 uitelkaar gaan na de botsing.

Op deze twee afbeeldingen heeft bal 2 aanvankelijk geen snelheid. Na de botsing zal een deel van de snelheid van bal 1 “overgedragen” zijn aan bal 2, en gaan de ballen onder een hoek van 90 uit elkaar.





Figuur 2: Een niet-centrale botsing

### 3.3.2 Botsing tussen meer dan twee ballen

In de werkelijkheid zal het nauwelijks voorkomen dat een botsing tussen meer dan twee ballen plaats vindt. Als dit wel zo lijkt zijn het meestal meerdere botsingen vlak na elkaar. Maar in theorie is het best mogelijk dat drie ballen elkaar exact op hetzelfde ogenblik raken. Wij verwachten dat deze botsing te schrijven is als de som van twee botsingen tussen twee ballen. Het maximale aantal ballen, dat elkaar tegelijk in het platte vlak kunnen raken is drie. Het maximale aantal ballen, dat een andere bal tegelijkertijd kunnen raken is zes. Als drie ballen elkaar kunnen raken, is de hoek bal bal bal  $60^\circ$ . Er kunnen dus  $360/60 = 6$  ballen om een andere bal heen liggen. Waarschijnlijk zijn deze botsingen te schrijven is als de som van meerdere botsingen tussen twee ballen.

## 4 Programmeren

### 4.1 Andere eenheden

Een computermodel gebruikt andere eenheden dan in de realiteit worden gebruikt, dus we definiëren hier nieuwe eenheden. Als eerste werkt een animatie met een hoeveelheid beeldjes per seconde, of in het Engels: *frames per seconde* (fps). We proberen een snelheid van ongeveer 80fps te bereiken; hoe hoger het aantal frames per seconde, hoe betrouwbaarder de simulatie. De snelheid van de voorwerpen geven we vervolgens in pixels per frame, of het aantal beeldpuntjes per frame. Dus komen we tot de volgende definities:

<i>grootheid</i>	<i>symbool</i>	<i>eenheid</i>	<i>symbool</i>
Interval tussen frames	$T$	seconden	$s$
Frames per seconde	$f$	hertz	$\text{Hz} = s^{-1}$
Snelheid	$v$	pixels per interval	$\text{px } T^{-1}$
Versnelling	$a$	pixels per intervalkwadraat	$\text{px } T^{-2}$
Kracht	$F$	newton.... .hoehiervolgt.	?

### 4.2 Hoe de posities berekend worden

In onze simulatie nemen we steeds een stapje  $T$  verder in de tijd. Elke keer als we een stapje verder gaan doen we de volgende stappen:

- 1 Ga alle voorwerpen bij langs
  - 1 Bereken de nieuwe positie: Tel de snelheidsvector bij de huidige positie op
  - 2 Bereken welke de richting en grootte van alle krachten op het voorwerp
  - 3 Bereken met behulp van de som van alle krachten de nieuwe versnelling
  - 4 Tel de versnelling bij de snelheid op

We doen dus alsof elk voorwerp met een constante snelheid in het interval  $T$  beweegt. Dit klopt niet met de realiteit, maar als we het tijdsinterval tussen twee frames steeds kleiner maken, benadert het wel de werkelijkheid. Stel dat  $T$  naar 0 nadert, dus  $T = \Delta t$ , dan geldt allereerst voor de positie van een voorwerp:

$$\mathbf{x} =: \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \Delta t \quad (37)$$

En voor de snelheid geldt dan:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \\ \mathbf{v} \cdot \Delta t &= \Delta \mathbf{x}\end{aligned}\tag{38}$$

Invullen van (38) in (37) geeft dan:

$$\mathbf{x} =: \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}\tag{39}$$

Waarmee bewezen is dat je de snelheid van een voorwerp als constant mag zien in een minuscule tijdsinterval.