



第五章 图像复原（恢复）



要点:

- 退化模型/复原过程模型
- 噪声模型
- 空间滤波复原（只存在噪声）
- 频域滤波复原（只存在噪声）
- 线性（位置）不变的退化
- 逆滤波
- 最小均方误差滤波（维纳滤波）
- 约束最小二乘滤波器



一、线性系统

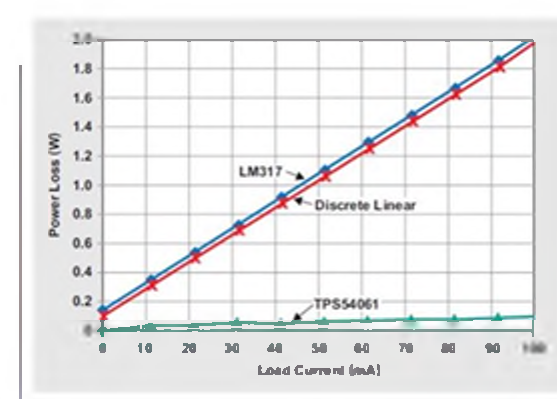
对于系统 $g(x,y)=H[f(x,y)]$ ，设两个输入信号 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ ，经过系统 H 的对应输出为 $g_1(x, y)$ 和 $g_2(x, y)$ ，且满足：

$$H[k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] = k_1 g_1(x, y) + k_2 g_2(x, y)$$

即满足所谓的齐次性和叠加性条件，则称系统 H 为线性系统。

若 $f_2(x, y)=0$ ，则系统具有均匀性：

$$H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)]$$





二、位置不变系统

对二维空间函数 $g(x,y)=H[f(x,y)]$ ，如果 H 还满足：

$$H[f(x-\alpha, y-\beta)] = g(x-\alpha, y-\beta)$$

则系统为线性空间（位置）不变系统，即系统在
某点的响应只与该点的值有关，而与其位置无关。



三、模型线性位置不变退化

根据二维冲激函数 $\delta(x, y)$ 的卷积取样特性，对线性系统 H :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ g(x, y) &= H[f(x, y)] \\ &= H\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \end{aligned}$$

点扩散
函数
(PSF)

令 $h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$; 此时该积分叫做第一类叠加积分，或 *Fredholm* 积分。
当 H 同时为空间不变时: $H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta)$



此时，退化系统可以表示为如下模型（即为卷积积分）：

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

当成像过程中还存在加性噪声时，可进一步表示为：

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + n(x, y)$$

且噪声和系统是独立的，也和位置无关。



对线性空间不变系统，可以用如下的函数式表示：
空间域：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

频率域：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

对这样的系统，图像恢复也称为图像解卷，而在恢复过程中所使用的滤波器也称为解卷滤波器。



退化参数:

点扩展函数 (PSF) (来源于光学部件对点光源的模糊作用): $h(x, y)$ (也称为降质算子)

加性噪声: $n(x, y)$

点扩展函数 (退化函数) 的确定

(通过估计退化函数的方法来进行图像恢复有时也叫盲解卷, 因为真正的退化函数很少能知道。)

一、运用先验知识建模:

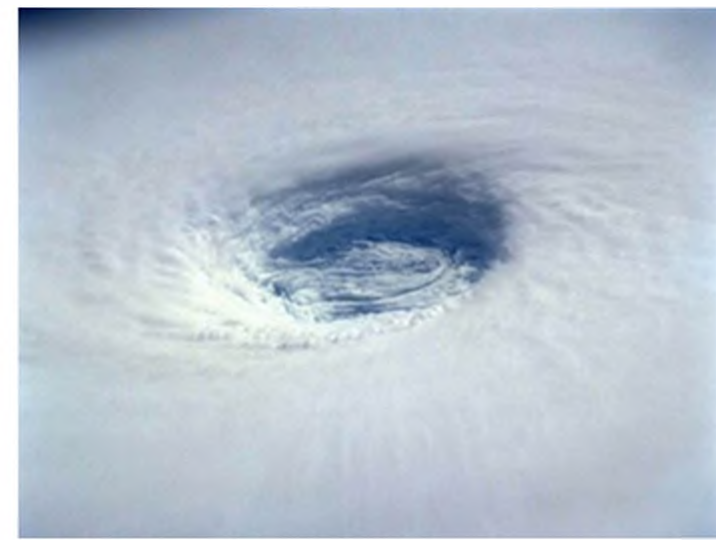
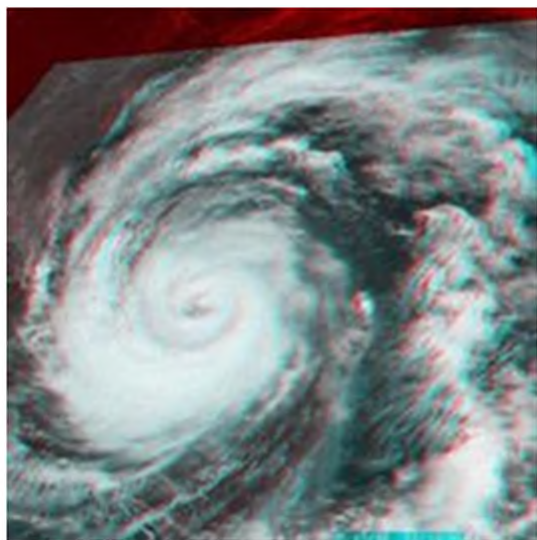
根据: 大气湍流、光学系统散焦、照相机与景物相对运动等导致模糊的物理过程 (先验知识) 来确定 $h(x, y)$ 或 $H(u, v)$ 。



(1) 长时间曝光下大气湍流造成的转移函数[Hufnagel and Stanley, 1964]

$$H(u, v) = \exp[-c(u^2 + v^2)^{5/6}]$$

C是与湍流性质有关的常数。





a b
c d

FIGURE 5.25

Illustration of the
atmospheric
turbulence model.

(a) Negligible
turbulence.

(b) Severe
turbulence.

$k = 0.0025$.

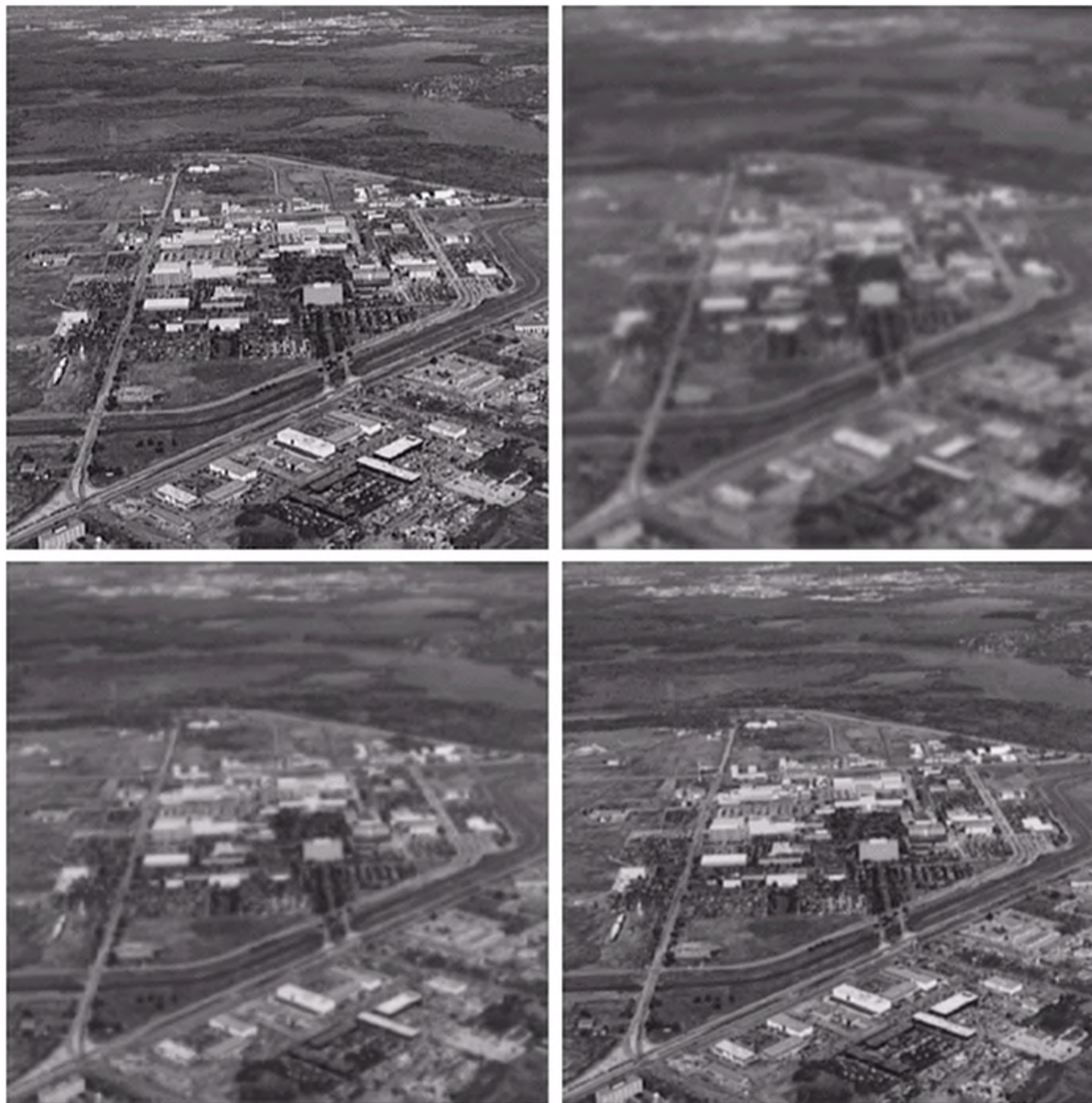
(c) Mild
turbulence.

$k = 0.001$.

(d) Low
turbulence.

$k = 0.00025$.

(Original image
courtesy of
NASA.)





(2) 光学散焦

$$H(u, v) = \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}$$
$$\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$$



d 是散焦点扩展函数的直径, $J_1(\cdot)$ 是第一类贝塞尔函数。



(3) 照相机与景物相对运动

设 T 为快门时间, $x_0(t)$, $y_0(t)$ 是位移的 x 分量和 y 分量

$$H(u, v) = \int_0^T \exp \{ -j2\pi (ux_0(t) + vy_0(t)) \} dt$$

如果假设: $x_0(t) = at / T$; $y_0(t) = bt / T$, 则有

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$



从退化图象本身来估计 $h(x, y)$ 。

(1) 若有把握断定原始景物某部位有一个清晰的点，于是使那个点退化的模糊图象就是 $h(x, y)$ 。

(2) 原景物含有明显的直线，从这些线条的退化图象得出 $h(x, y)$ 。

对这一类观察，令 $g_s(x, y)$ 是观察到的子图像， $f_s(x, y)$ 是所知道的原图像，则：

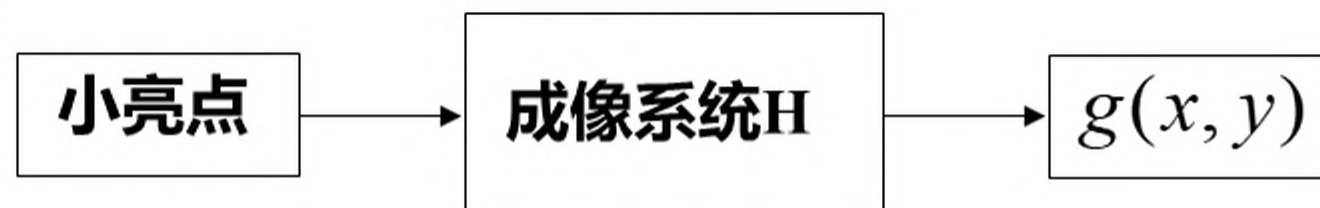
$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{F_s(u, v)}$$



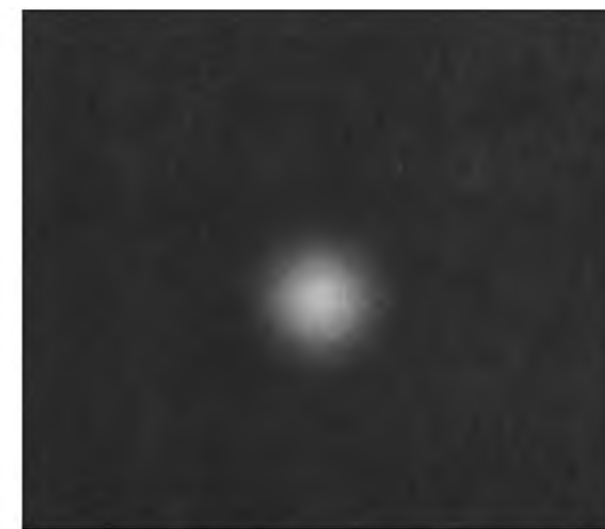
三、试验估计法

- 使用和被退化图像设备相似的装置，并得到一个脉冲的冲激响应，可以进行较准确的退化估计

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$



- 此处A是冲激的傅立叶变换，为一个常数，其它参数和前面一样
- 图为一个放大的亮脉冲以及退化的冲激





5.7 逆滤波复原

由 $g=Hf+n$ 可得:

$$n = g - Hf$$

逆滤波法是指在对 n 没有先验知识的情况下，可以依据这样的最优准则，即寻找一个 \hat{f} ，使得 $H\hat{f}$ 在最小二乘方误差的意义下最接近 g ，即使得 n 的模或范数（norm）最小：

$$\|n\|^2 = n^T n = \|g - H\hat{f}\|^2 = (g - H\hat{f})^T (g - H\hat{f})$$



式(11-26)的极小值为

$$L(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2$$

如果我们在求最小值的过程中，不做任何约束，
为非约束复原。由极值条件

$$\frac{\partial L(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 0 \Rightarrow H^T (g - H\hat{f}) = 0$$

解出 \hat{f} 为

$$\hat{f} = (H^T H)^{-1} H^T g = H^{-1} g$$

对上式做傅立叶变换，得：

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$



逆滤波复原

- 用退化函数 H 除退化图像的傅立叶变换
($G(u,v)$) 来计算原始图像的傅立叶变换
估计 $\hat{F}(u,v)$

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

随机函数

避免为零值,
限制滤波频
率使其接近
原点值。
当退化为零
或很小时,
 $N(u,v)/H(u,v)$
会变得很大

- 对上述式子求傅立叶逆变换就得到
复原后的图像



可见，如果知道 $g(x, y)$ 和 $h(x, y)$ ，也就知道了 $G(u, v)$ 和 $H(u, v)$ 。根据上式，即可得出 $F(u, v)$ ，再经过反傅立叶变换就能求出 $f(x, y)$ 。

逆滤波是最早应用于数字图像复原的一种方法。并用此方法处理过由漫游者、探索者等卫星探索发射得到的图像。



由式(11-30)进行图像复原时，由于 $H(u, v)$ 在分母上，当 $u-v$ 平面上的某引起点或区域 $H(u, v)$ 很小或等于零，即出现了零点时，就会导致不稳定解。因此，即使没有噪声，一般也不可能精确地复原 $f(x, y)$ 。如果考虑噪声项 $N(x, y)$ ，则出现零点时，噪声项将被放大，零点的影响将会更大，对复原的结果起主导地位，这就是无约束图像复原模型的病态性质。它意味着退化图像中小的噪声干扰在 $H(u, v)$ 取得很小值的那些频谱上将对恢复图像产生很大的影响。由简单的光学分析知道，在超出光学系统的绕射极限时， $H(u, v)$ 将很小或等于零，因此对多数图像直接采用逆滤波复原会遇到上述求解方程的病态性。

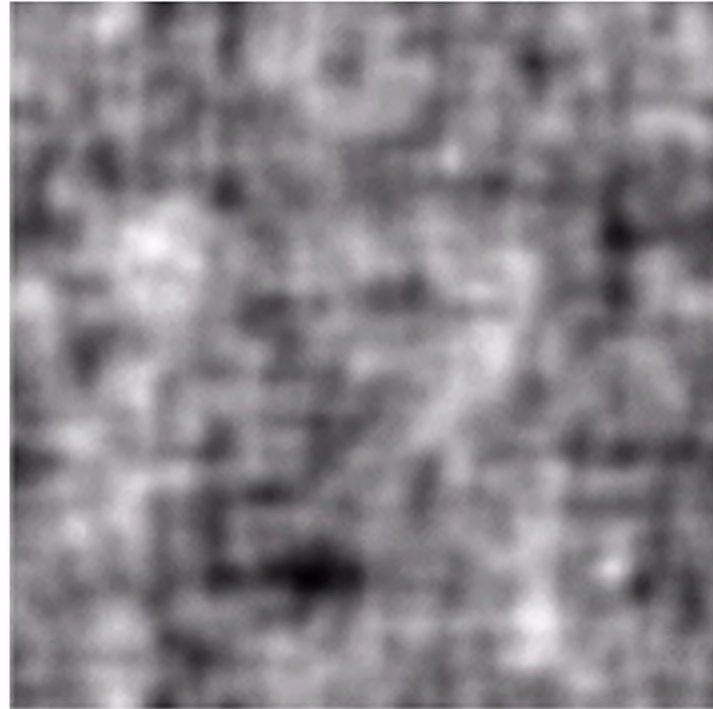


为了克服这种不稳定性，一方面可利用我们后面要讲的有约束图像复原；另一方面，可利用噪声一般在高频范围，衰减速度较慢，而信号的频谱随频率升高下降较快的性质，在复原时，只限制在频谱坐标离原点不太远的有限区域内运行，而且关心的也是信噪比高的那些频率位置。



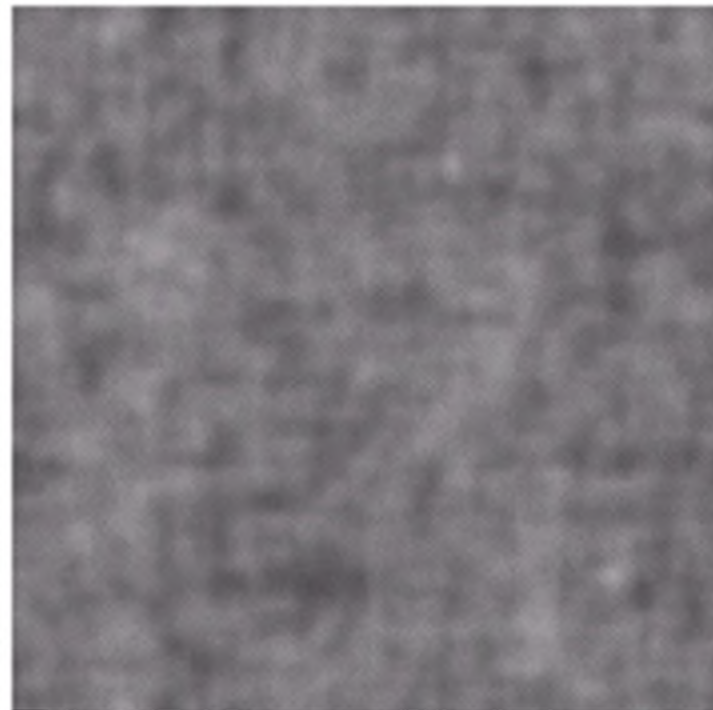
逆滤波复原

用全滤波的结果



半径为40
时截止H
的结果

半径为
80时的
结果



半径为
85时的
结果

逆滤波图像复原的缺点是H的：

- ☒ A 零点问题
- ☐ B 极值问题
- ☐ C 最大问题
- ☐ D 最小问题



逆滤波复原的缺点:

- 1、 $\|g - Hf\|$ 的最小化得到，其本身就不是十分合理；
- 2、 H 的零点问题。

如何解决？



- 逆滤波比较简单，但没有清楚地说明如何处理噪声，而维纳滤波综合了退化函数和噪声统计特性两个方面进行复原处理
- 目标是寻找一个滤波器，使得复原后图像 $\hat{f}(x,y)$ 与原始图像 $f(x,y)$ 的均方误差最小：

$$E\{[\hat{f}(x,y) - f(x,y)]^2\} = \min$$

- 因此维纳滤波器又称为最小均方误差滤波器



- 在频率中用下式表达

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v) \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)}} \right] G(u, v)$$

- $G(u, v)$ 是退化图像的傅立叶变换, $H(u, v)$ 是退化函数
- $|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$ 其中, $H^*(u, v)$ 是 $H(u, v)$ 的复共轭
- $S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ 为噪声的功率谱
- $S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ 为未退化图像的功率谱



采用维纳滤波器的复原过程步骤如下：

- (1) 计算图像 $g(x,y)$ 的二维离散傅立叶变换得到 $G(u,v)$ 。
- (2) 估计 $H(u,v)$;
- (3) 估算图像的功率谱密度 S_f 和噪声的谱密度 S_n 。
- (4) 计算图像的估计值 $\hat{F}(u,v)$ 。
- (5) 计算 $\hat{F}(u,v)$ 的逆付氏变换，得到恢复后的图像 $\hat{f}(x,y)$



有时，也经常使用下面的方法进行近似：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$



华南理工大学

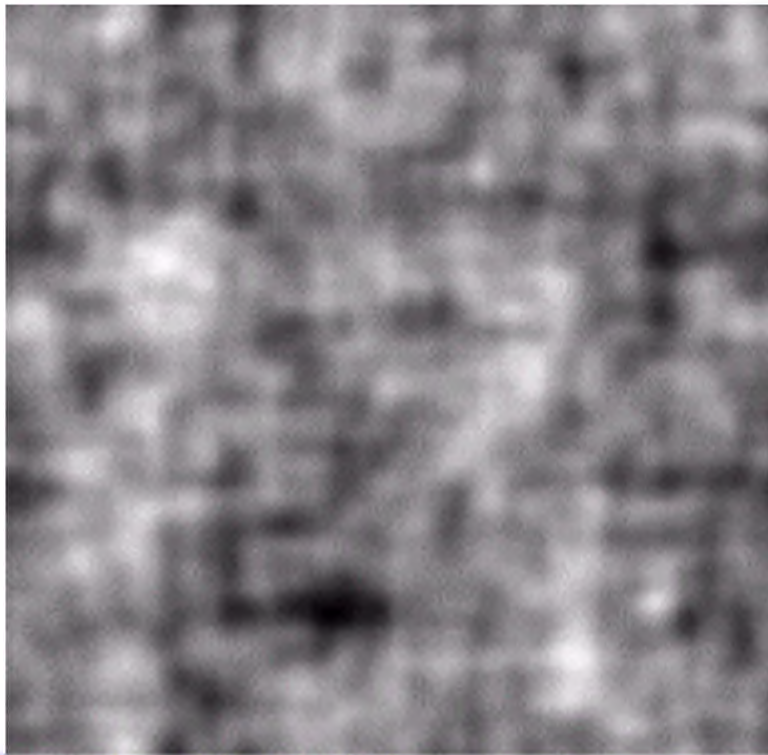
逆滤波和维纳滤波的比较



模糊图像



原始图像



全逆滤波



半径受限的逆滤波



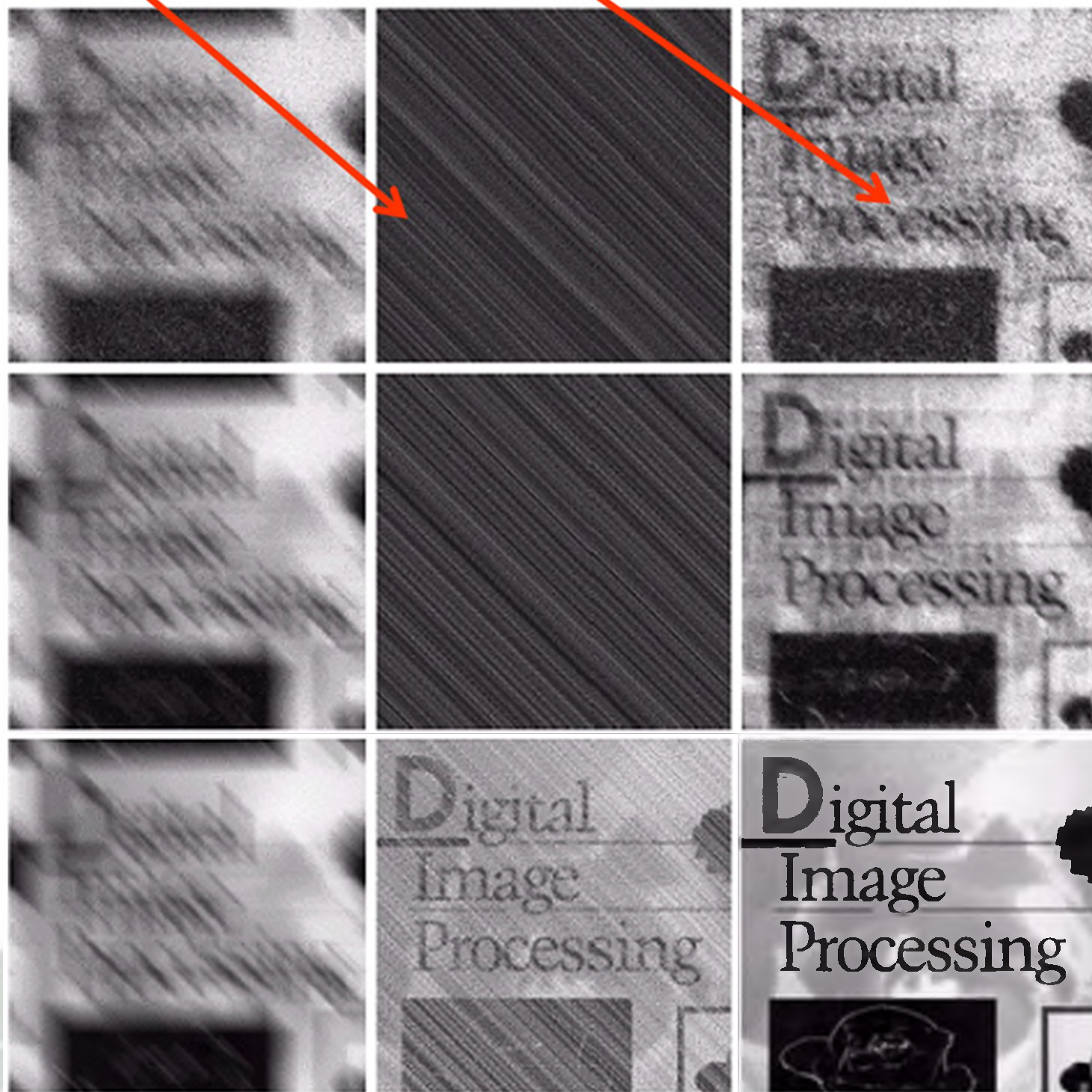
维纳滤波



逆滤波和维纳滤波的比较

- (a) 运动模糊及均值为0方差为650的加性高斯噪声污染的图像
- (b) 逆滤波的结果
- (c) 维纳滤波的结果
- (d)-(f) 噪声幅度的方差比(a)小1个数量级
- (g)-(i) 噪声幅度的方差比(a)小5个数量级

a	b	c
d	e	f
g	h	i







在获取图像过程中，由于景物和摄像机之间的**相对运动**，往往造成图像的模糊。其中由均匀直线运动所造成的模糊图像的恢复问题更具有**一般性和普遍意义**。因为变速的、非直线的运动在某些条件下可以看成是均匀的、直线运动的合成结果。

设图像 $f(x,y)$ 有一个平面运动，令 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别为在 x 和 y 方向上运动的变化分量。 t 表示运动的时间。记录介质的总曝光量是在快门打开到关闭这段时间的积分。则模糊后的图像为

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

其中 $g(x,y)$ 为模糊后的图像。上式就是由目标物或摄像机相对运动造成图像模糊的模型。



令 $G(u,v)$ 为模糊图像 $g(x,y)$ 的傅立叶变换，对上式两边傅立叶变换得

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \right\} \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \end{aligned}$$

改变积分次序，则有

$$G(u, v) = \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \right\} dt$$

由傅立叶变换的位移性质，可得

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_0^T F(u, v) \exp\{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]\} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T \exp\{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]\} dt \end{aligned}$$



去除由匀速运动引起的模糊

$$H(u, v) = \int_0^T \exp\{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]\} dt$$

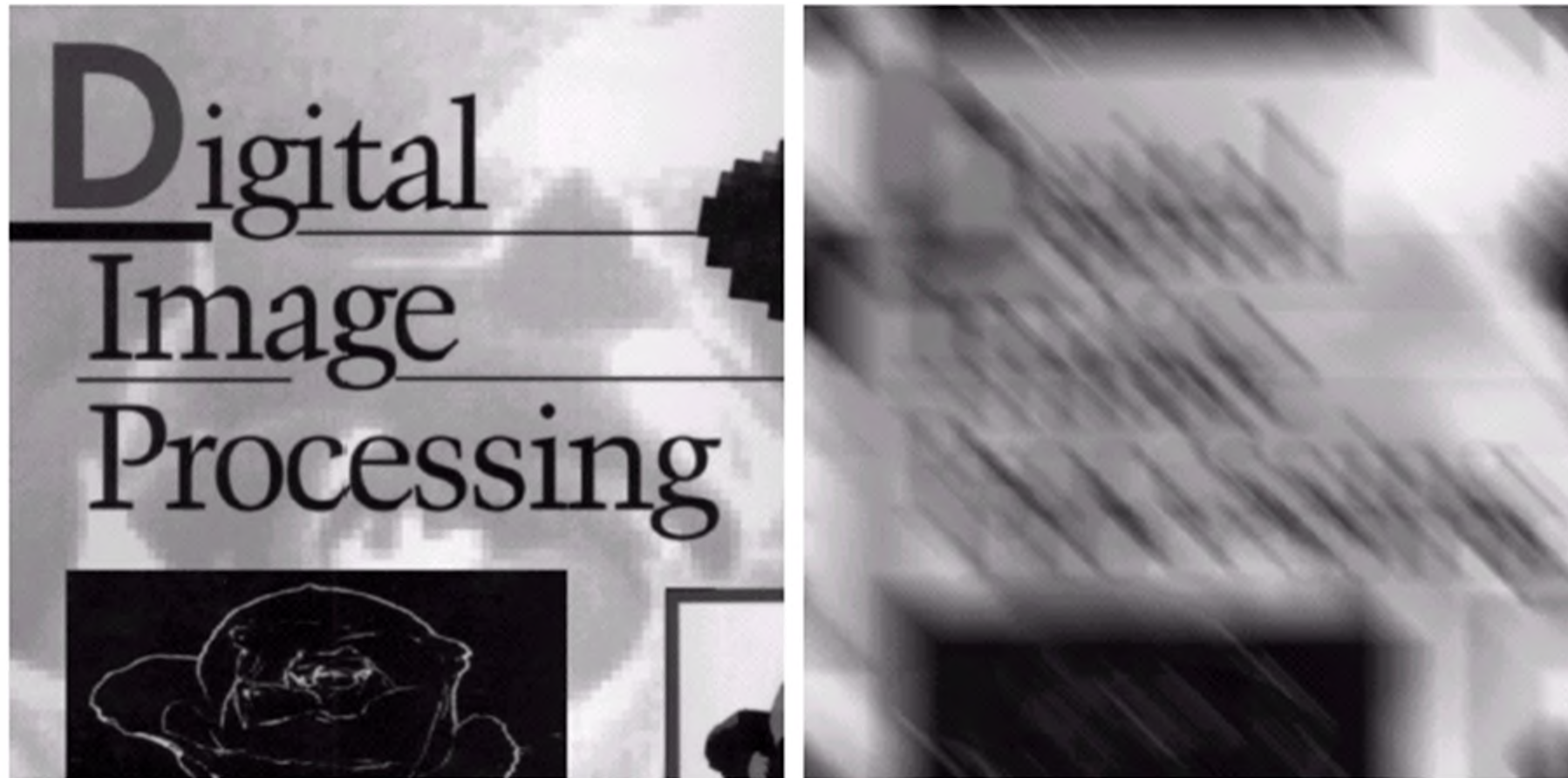
可得 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$

这是已知退化模型的傅立叶变换式。若 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的性质已知，传递函数可直接求出，因此， $f(x, y)$ 可以恢复出来。

$$H(u, v) = \int_0^T \exp\{-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))\} dt$$

如果假设： $x_0(t) = at/T$ ； $y_0(t) = bt/T$ ，则有

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$



a b

FIGURE 5.26 (a) Original image. (b) Result of blurring using the function in Eq. (5.6-11) with $a = b = 0.1$ and $T = 1$.



华南理工大：去除由匀速运动引起的模糊



沿水平方向匀速运动造成的模糊图像的恢复处理例子。
(a) 是模糊图像，(b) 是恢复后的图像。



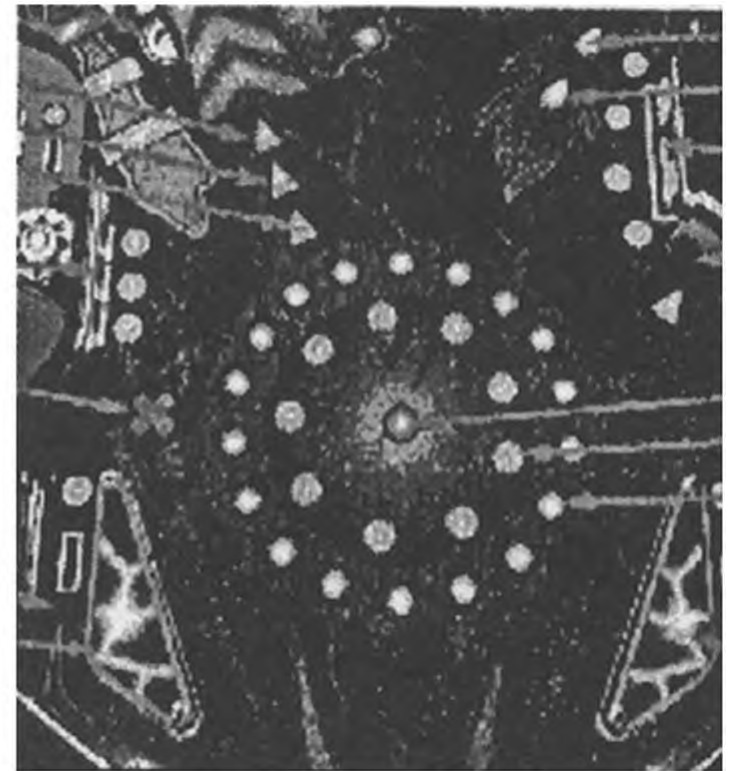
华南理工大：去除由匀速运动引起的模糊



(a) 原始图像



(b) 模糊图像



(c) 复原图像





华南理工大学 5.9 约束最小二乘方滤波

建立基于平滑测度上的最优准则，设 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处的二阶微分为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\approx [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y)$$

其模板为：

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



最优化准则:

$$\min \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right]^2$$

约束为:

$$\| \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} \|^2 = \| \mathbf{n} \|^2$$

约束能否改为: $[\hat{f}(x, y) - f(x, y)]^2$?



最优

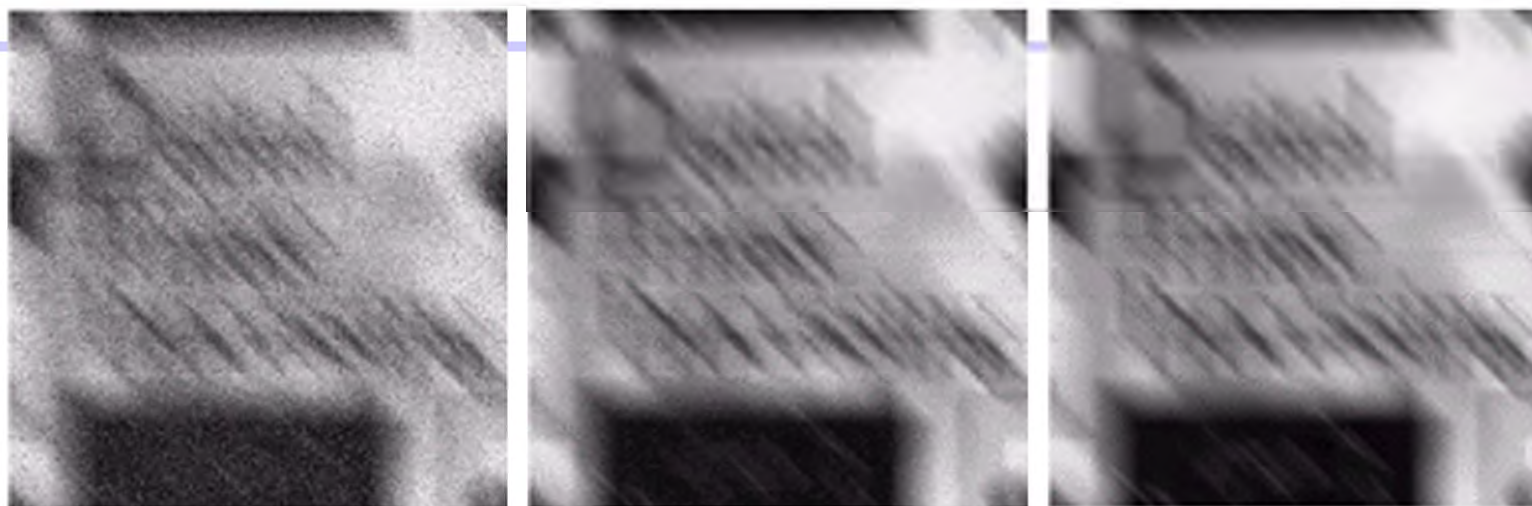
$$\begin{aligned}\hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |-(u^2 + v^2)|^2} \right] G(u, v)\end{aligned}$$

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(u, v) = -(u^2 + v^2)$$



运动模糊加不同噪声



最小平方恢复的结果



维纳滤波恢复的结果





5.10 几何变换（校正）

数字图像在获取过程中，由于成像系统的非线性，成像后的图像与原景物图像相比，会产生比例失调，甚至扭曲，我们把这类图像退化现象称之为几何畸变。典型的几何失真如图11-4所示。

按照一幅标准图像 $g(u,v)$ 或一组基准点去校正另一幅几何失真图像 $f(x,y)$ ，称为**空间几何变换**





广角畸变



近距离畸变-明星也一样



长焦畸变



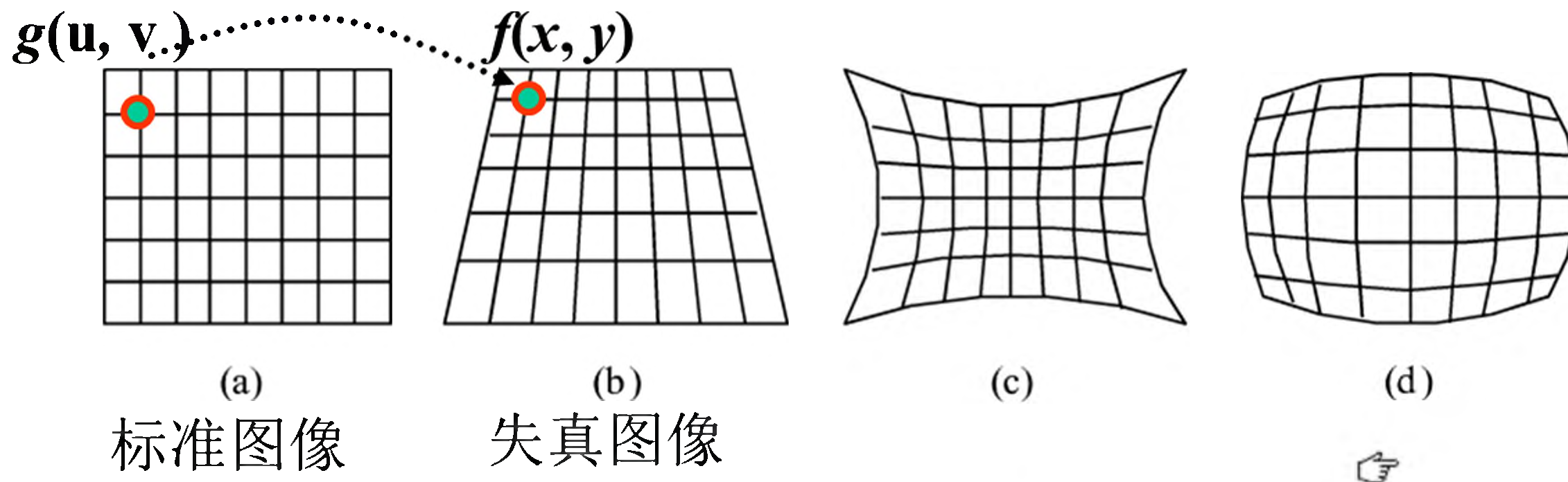


图11-4 几种典型的几何失真
(a) 原图像; (b) 梯形失真; (c) 枕形失真; (d) 桶形失真

失真模型:

$$x=r(u, v)$$

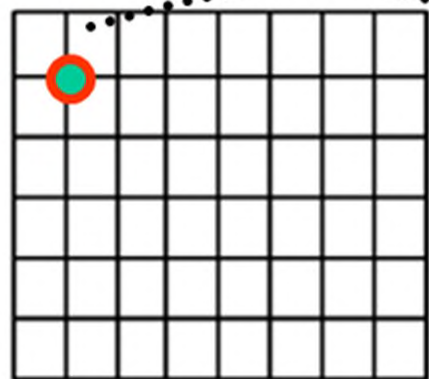
$$y=s(u, v)$$

怎么做?



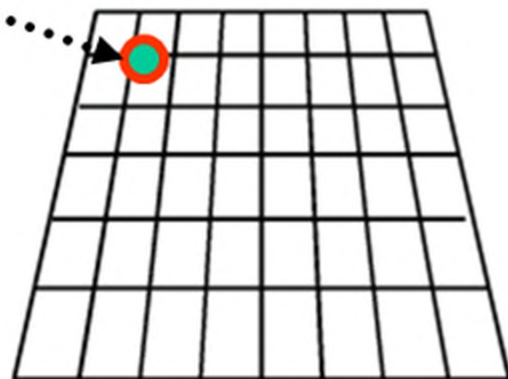
$g(u, v)$

$f(x, y)$



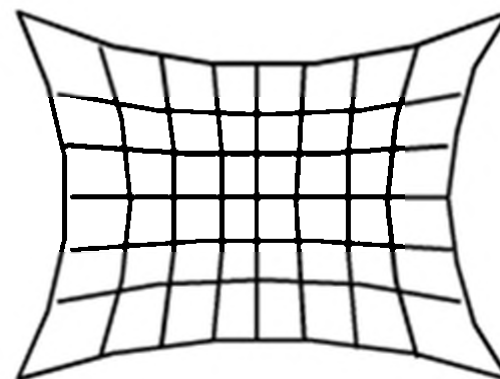
(a)

校正空间

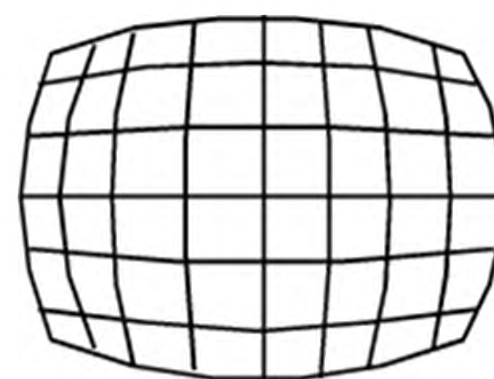


(b)

失真空间



(c)



(d)



图11-4 几种典型的几何失真

(a) 原图像; (b) 梯形失真; (c) 枕形失真; (d) 桶形失真

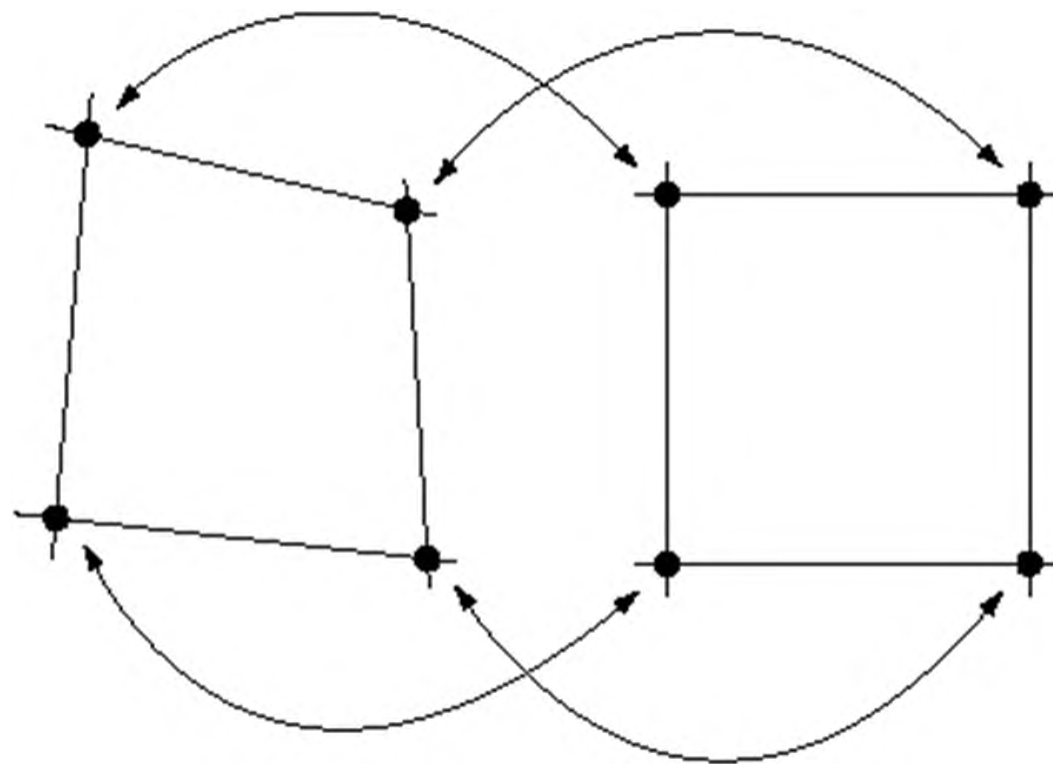
几何畸变校正步骤:

- 1、利用标准图像（或一些控制点），求解几何失真模型；
- 2、图像空间坐标变换；
- 3、确定校正空间各像素点的灰度值。



1、求解失真模型

按照一幅标准图像 $g(u, v)$ 或一组基准点去校正另一幅几何失真图像 $f(x, y)$ ，称之为空间几何坐标变换。根据两幅图像的一些已知对应点对(也称为控制点对)建立起函数关系式，将失真图像的 x - y 坐标系变换到标准图像 u - v 坐标系，从而实现失真图像按标准图像的几何位置校正，使 $f(x, y)$ 中的每一像点都可在 $g(u, v)$ 中找到对应像点。



标准图像

失真图像

FIGURE 5.32
Corresponding
tiepoints in two
image segments.



2. 三角形线性法

图像的几何失真虽然是非线性的，但在一个局部小区域内可近似认为是线性的，基于这一假设，将标准图像和被校正图像之间的对应点对划分成一系列小三角形区域，三角形顶点为三个控制点，在三角形区内满足以下线性关系：

$$\begin{cases} x = au + bv + c \\ y = du + ev + f \end{cases} \quad (11-64)$$



若三对控制点在两个坐标系中的位置分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 和 (u_1, v_1) 、 (u_2, v_2) 、 (u_3, v_3) ，则可建立两级方程组：

$$\begin{cases} x_1 = au_1 + bv_1 + c \\ x_2 = au_2 + bv_2 + c \\ x_3 = au_3 + bv_3 + c \end{cases} \quad (11-65a)$$

$$\begin{cases} y_1 = du_1 + ev_1 + f \\ y_2 = du_2 + ev_2 + f \\ y_3 = du_3 + ev_3 + f \end{cases} \quad (11-65b)$$





解方程组(11-65), 可求出 a, b, c, d, e, f 六个系数。用式(11-64)可实现该三角形区内其他像点的坐标变换。对于不同的三角形控制区域, 这六个系数的值是不同的。

三角形线性法简单, 能满足一定的精度要求, 这是因它是以局部范围内的线性失真去处理大范围内的非线性失真, 所以选择的控制点对越多, 分布越均匀, 三角形区域的面积越小, 则变换的精度越高。但是控制点过多又会导致计算量的增加, 因此需要综合考虑。



3. 灰度值的确定

图像经几何位置校正后，在校正空间中各像点的灰度值等于被校正图像对应点的灰度值。一般校正后的图像某些像素点可能挤压在一起，或者分散开，不会恰好落在坐标点上，因此常采用内插法来求得这些像素点的灰度值。经常使用的方法有如下两种。

1) 最近邻点法

最近邻点法是取与像素点相邻的4个点中距离最近的邻点灰度值作为该点的灰度值。如图11-5所示。显然，最近邻点法计算简单，但精度不高，同时校正后的图像亮度有明显的不连续性。

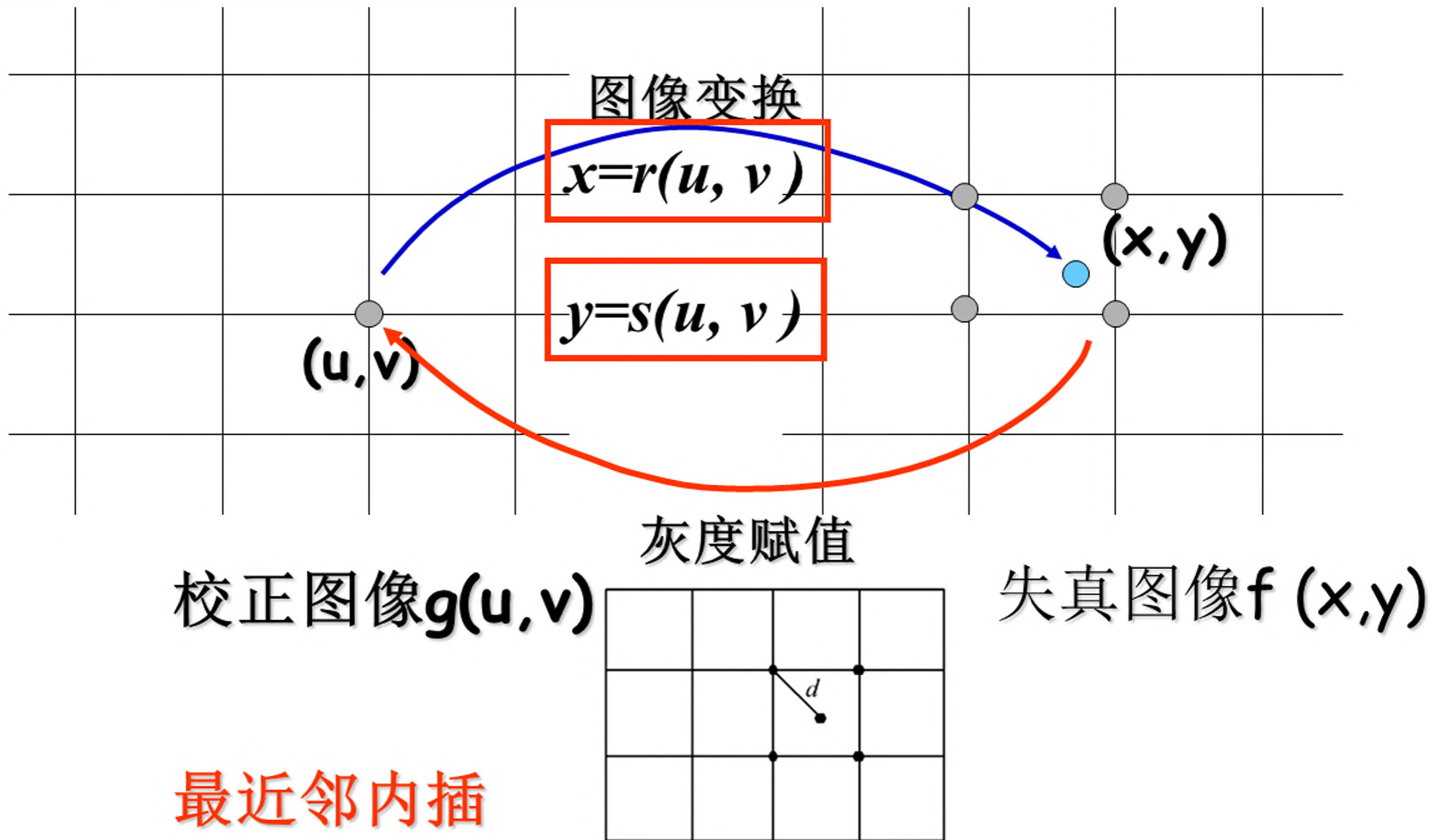


图11-5 最近邻点法



2) 内插法

用像素点周围 4 个邻点的灰度值加权内插作为 $g(u_0, v_0)$ ，如图11-6所示，设像素点 (x_0, y_0) 周围 4 个点为 (x_1, y_1) , (x_1+1, y_1) , (x_1, y_1+1) , (x_1+1, y_1+1) ，则校正值为

$$\begin{aligned} g(u_0, v_0) = & (1-\alpha)(1-\beta)f(x_1, y_1) + \alpha(1-\beta)f(x_1+1, y_1) \\ & + (1-\alpha)\beta f(x_1, y_1+1) + \alpha\beta f(x_1+1, y_1+1) \end{aligned} \quad (11-66)$$

式中： $\alpha = |x_0 - x_1|$, $\beta = |y_0 - y_1|$

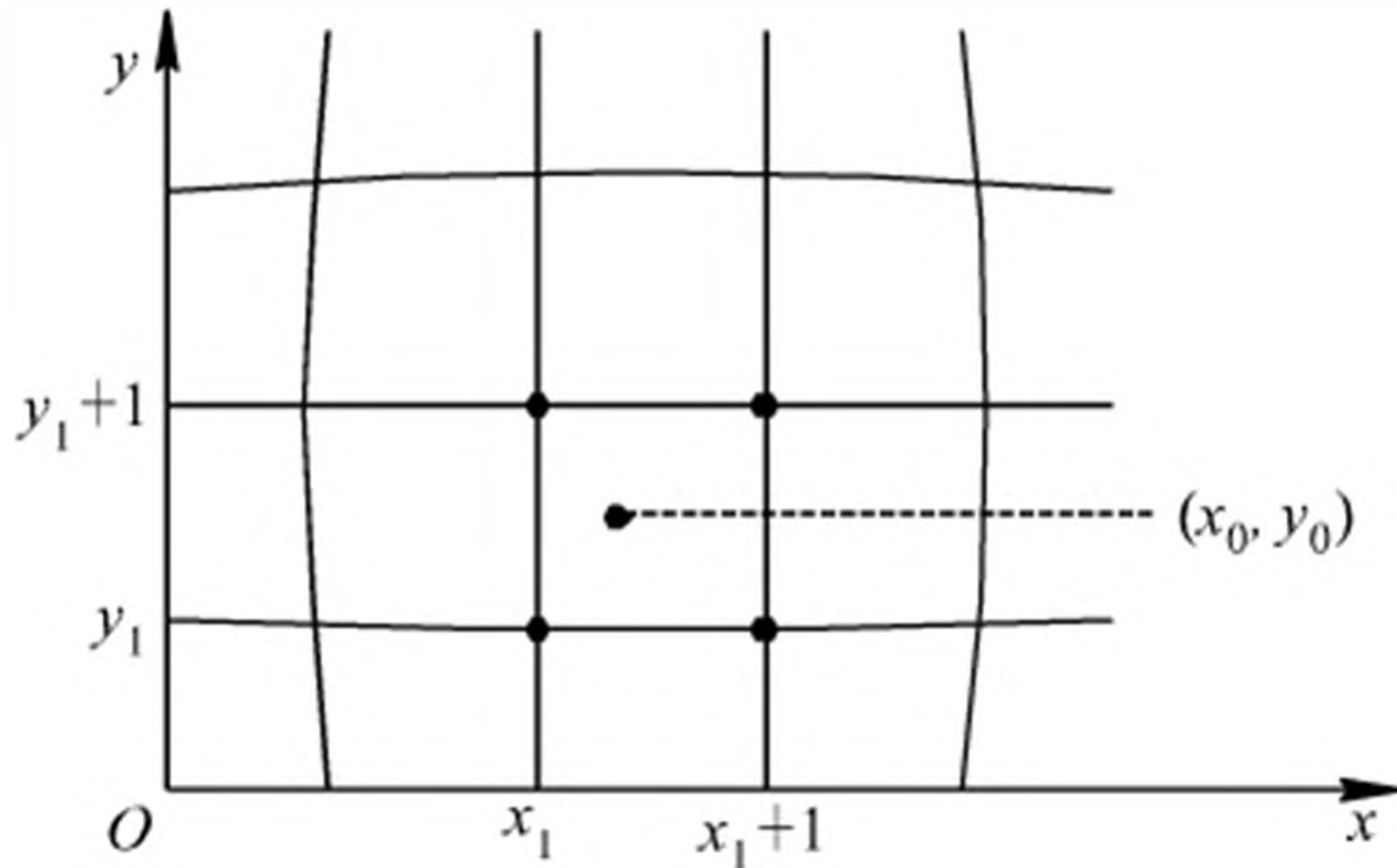
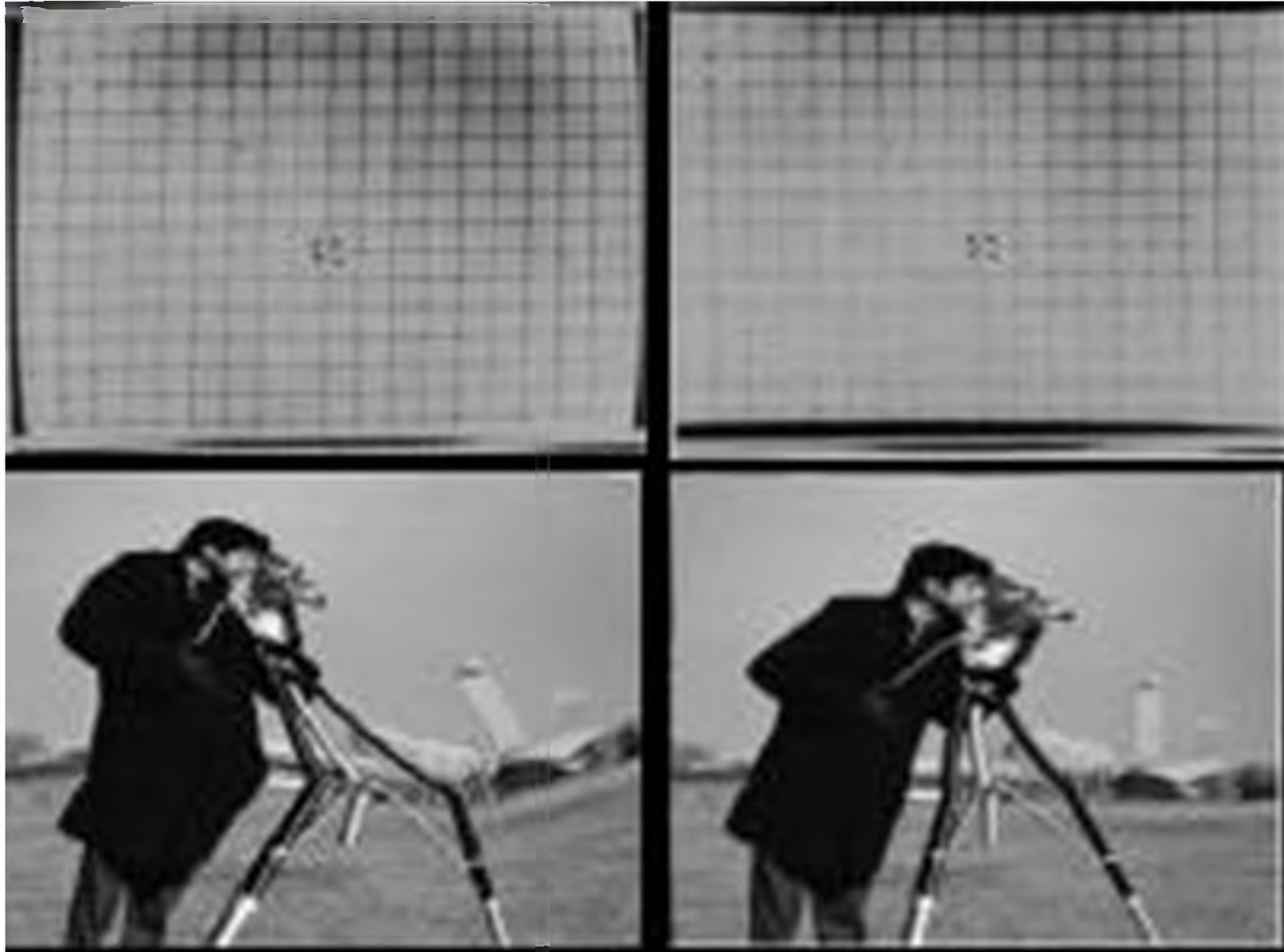


图11-6 内插法几何校正



变形图像

几何校正后的图像





鱼眼图像校正



鱼眼图片相对于普通图片来说具有更宽广的视域, 使用2~4张鱼眼图片即可覆盖水平和垂直方向360度的场景



鱼眼摄像头可以用半球面来模拟，摄像机的拍摄方向为其光轴，平面 OXZ 为成像平面，如图2.4所示，设摄像头的半球面方程为^[31]：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (z \geq 0, r \geq 0) \quad (2.14)$$

对空间场景上的任意一点 P_0 ，连结 OP_0 交于半球面于点 P_1 ，过点 P_1 作光轴 OY 的平行线，交成像平面 OXZ 于点 P_2 ，则点 P_2 就是空间点 P_0 成像平面 OXZ 上所成的像。于是，对鱼眼图像来

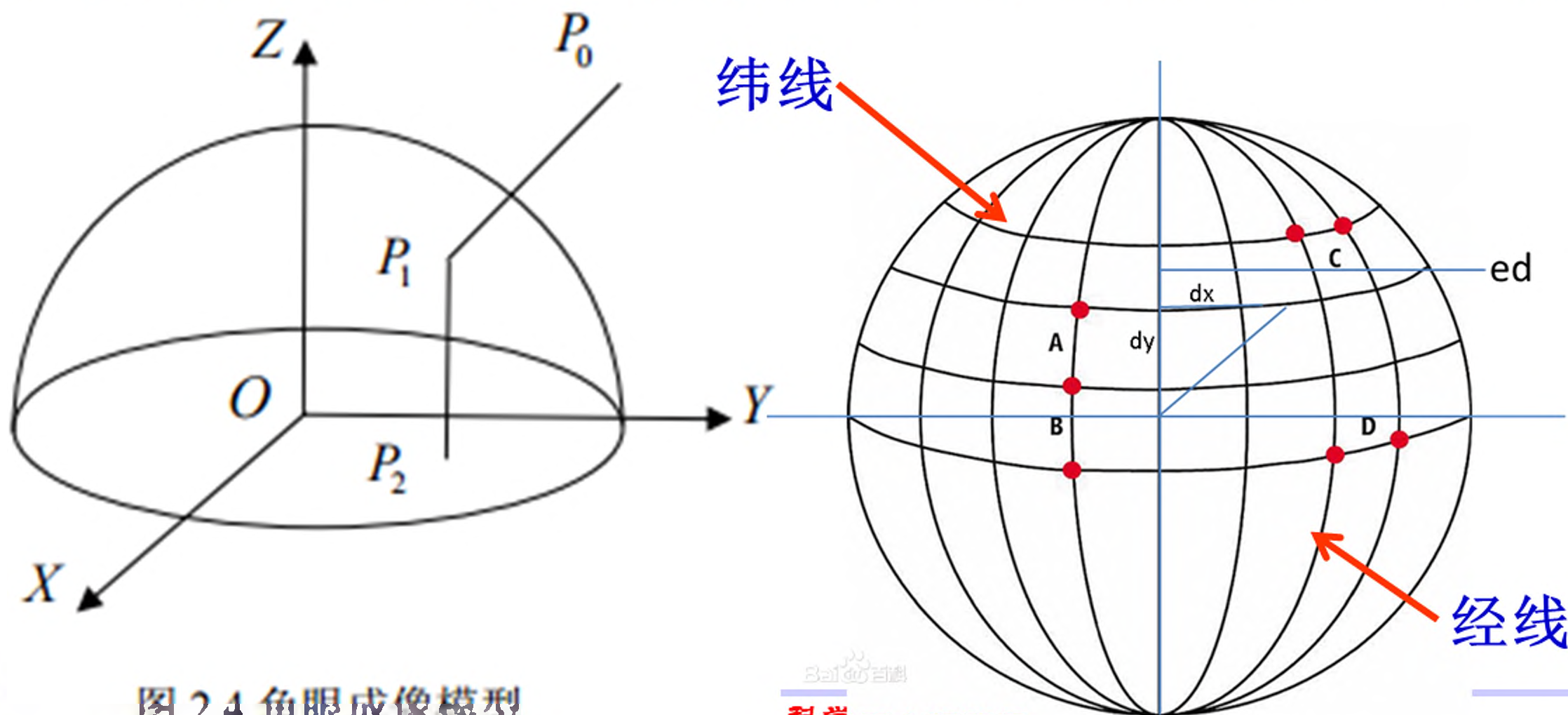


图 2.4 鱼眼成像模型



鱼眼图像校正公式

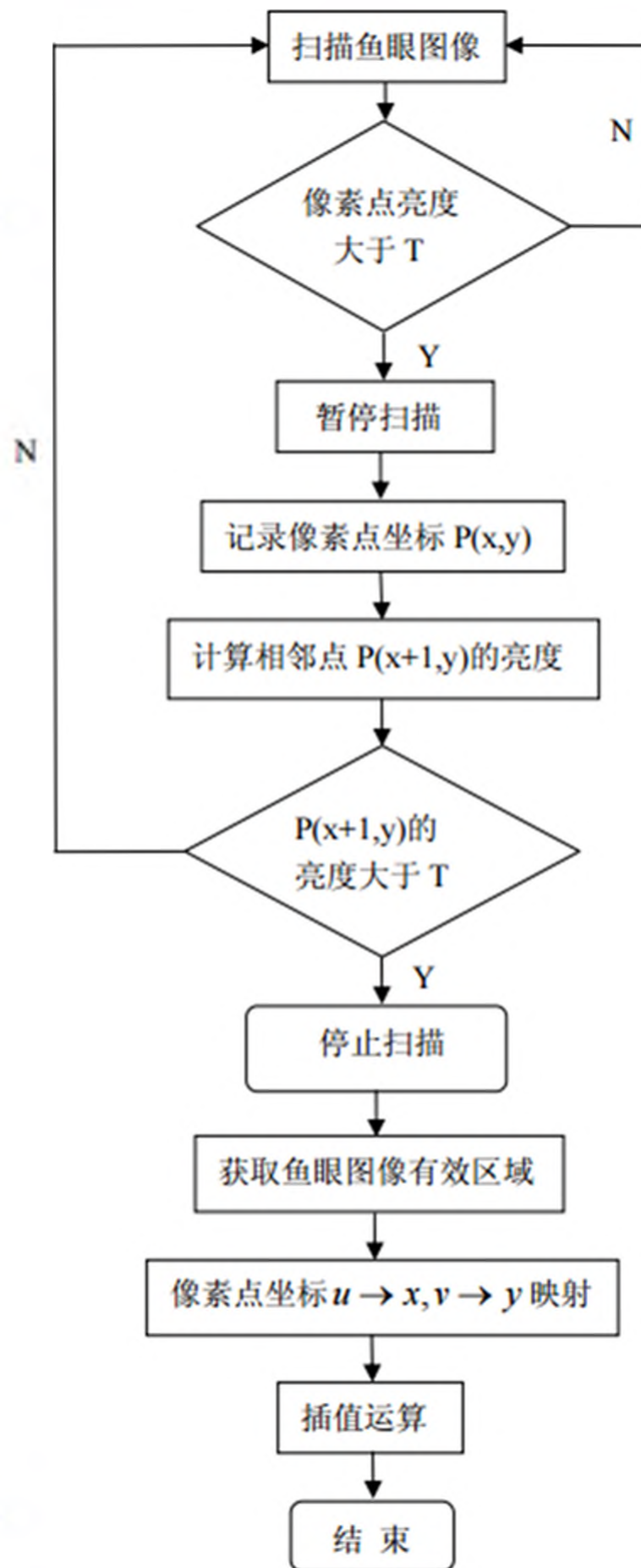
鱼眼图像中每一条经度上的不同像素点在经过校正后的图像中具有相同的列坐标值，在没有畸变的图像中具有相同的横坐标。经度越大的经线，它的畸变程度越大。根据图像中的比例关系，设鱼眼图像同一条经度上一像素点 $p(x, y)$ ，校正图像上对应像点 $p_1(U, V)$ ，则根据校正映射公式：

$$x = x_0 + \frac{U - x_0}{R} \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$y = V$$



鱼眼图像校正算法





4.1.2 实验结果



图4.4鱼眼图像

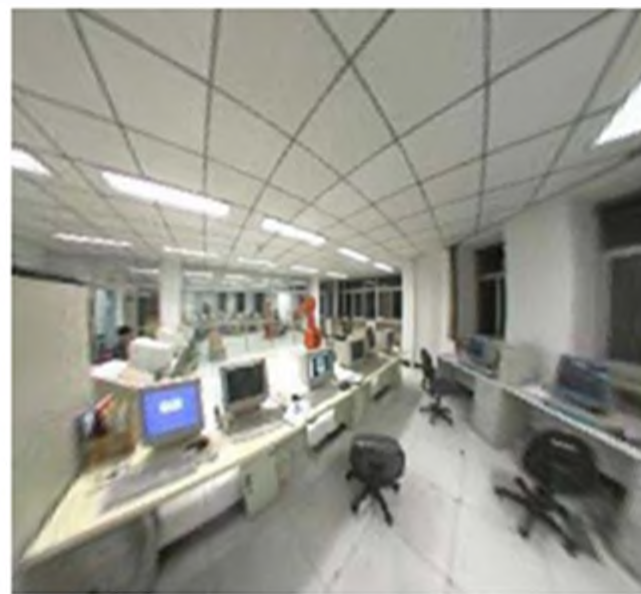


图4.5校正后图像

本实验中用Intel的开放计算机库OpenCV作为辅助工具来处理图像。鱼眼图像的圆形有效区域的提取是改进的算法。然后根据经度坐标算法对原图像进行校正以适合人眼的视觉习惯的图像。从整个校正过程来看，有效区域的提取占了很大的一部分，这也说明其重要性。



图像恢复 与 考古





