TFY 4125 Øving 2

Denne uken er det Newtons lover som står sentralt. Du får også trening i å laste inn data i Python samt et program som du skal bruke i laboratoriøvingen til å analysere videoer (Tracker).

1 Les

Pensum for denne uken er Y&F Kapittel 4 og 5. Spesielt viktig er kanskje 4.2 4.3, 4.5, 4.6 og 5.3 (del om fluid resistance og terminal speed). Gå til https://www.numfys.net/modules/ og lese delen om Eulers metode.

2 Se

På hjemmesiden for det eksperimentelle prosjektet `http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/index.html`, se på de tre videoene om bruk av tracker (under "Programvare").

3 Verktøy for videoanalyse

1. [LAB]Gå til `https://physlets.org/tracker/` og sørg for at du har en fungerende installasjon av videoanalyseverktøyet Tracker. Litt lengere ned på siden er det lenker til Sample videos. Last ned `mechanics_videos.zip`. Pakk ut filene og åpne filen CupsClips.mov i Tracker
   (a) Velg en av muffinsformene i videoen som du vil tracke (se første introduksjonsvideo på labsiden for hvordan dette gjøres). Etter at du har tracket en muffinsform, eksporterer du dataene til en tekstfil (File/Export/Data file...).
   (b) Last deretter dataene inn i Python (`np.genfromtxt(filname)` - det kan være du må fjerne de første linjene i tekstfilen som inneholder diverse generell informasjon om dataene). Plot posisjon som funksjon av tid. Faller formen med konstant hastighet? Konstant akselerasjon? Ingen av delene? Tolk resultatet.

   Solution: Sett inn litt kode, noen grafer og tolkning

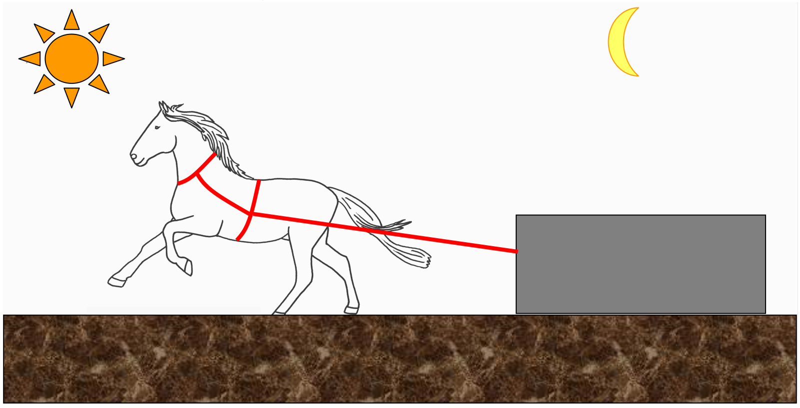
4 Grunnleggende

2. (a) Formuler Newtons 3. lov, og identifiser minst 10 kraft – motkraft par i figure 1 (NB! Vær nøye: eksempelvis tyngdekrafta av lasten og normalkrafta fra bakken er ikke motkrefter i Newtons betydning!). Er det noen av kraftparene som kan neglisjeres når målet er å analysere bevegelsen av hest - last systemet?

   Solution: Newtons tredje lov: Når to legemeer vekselvirker er kraften $\mathbf{F}_{\mathrm{AB}}$ som B utøver på A, like stor og motsatt rettet som kraften $\mathbf{F}_{\mathrm{BA}}$ som A utøver på B. $\mathbf{F}_{\mathrm{AB}} = -\mathbf{F}_{\mathrm{BA}}$. I kortform: Kraft er lik motkraft. Noen eksempler på kraftpar

   - sol-måne (gravitasjon)

Figure 1: Hest i hardt arbeid



- måne-last (gravitasjon)
- last-jord (gravitasjon)
- last-jord (normalkraft)
- last-jord (friksjon)
- hest-jord (friksjon)
- hest-jord (normalkraft)
- hest-seletøy (kontaktkraft)
- seletøy-last (kontaktkraft)

Om man ser på hesten og lasten som ett system kan man ignorere interne krefter i systemt, f.eks. mellom seletøy og last. Man trenger da kun å se på de eksterne kreftene som virker på systemet.

(b) En student river seg i håret og sier at "Newtons tredje lov må være feil, for hvis kraft er lik motkraft, så kan umulig hesten bevege lasten". Hva er feil i dette argumentet?

Solution: Kraft og motkraft refererer til krefter på ulike objekter. For et gitt objekt er det bare en av disse kreftene som virker på objektet og gjør at den totale kraften ikke er null og at objektet dermed har en akselerasjon.

(c) Tegn kraft-legeme diagrammer for hesten og for lasten. Ved å referere til kreftene som virker på lasten, forklar betingelsene for at lasten

i. forblir i ro,

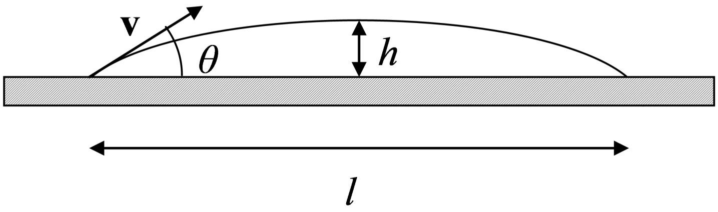
ii. akselereres, eller

iii. trekkes med konstant hastighet

Solution: (Sett inn figur med kraft-legeme diagram for hest og last!)
Laster forblir i ro dersom $T < f_{\text{max}}$ hvor f_{max} er den maksimale statiske friksjonskrafta, $f_{\text{max}} = \mu_{\text{s}} mg$, med statisk friksjonskoeffisient μ_{s}.
Lasten akselereres dersom $T > f_{\text{k}}$, hvor $f_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} mg$ er den kinetiske friksjonskrafta og kinetisk friksjonskoeffisient er μ_{k}.
Lasten trekkes med konstant hastighet dersom $T = f_{\text{k}}$
(NB: For å få en last som er i ro i bevegelse (statisk $\rightarrow$ kinetisk friksjon), må den "dyttes"

igang med en kraft $T > f_{\mathrm{max}}$. Husk at $\mu_s > \mu_k$. Husk også at hvis $T = 0$ så er friksjonskrafta også lik 0.)

Figure 2: Balistisk bevegelse



3. Ei kule skytes ut fra bakken med en starthastighet v, i en vinkel θ med det horisontale underlaget, se figur 2.

   a) Anta $v = 50$ m/s og $\theta = 45°$. Hvor høyt går kula (h), hvor langt går den (l) og hvor lenge er den i lufta (t)? Finn først formler for h, l og t. Beregn deretter tallsvar (svar: $h = 63.8$ m, $l = 255$ m $t = 7.2$ s).

Solution: La koordinatsystemet ha enhetsvektorer $\hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{y}}$ langs henholdsvis horisontal og vertikal retning. Kulen akselereres kun i vertikal retning, slik at akselerasjonensvektoren er $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{y}}$, gitt av tyngdeakselerasjonen $g = 9.81$ m/s^2 (uavhengig av kulens masse). Dekomponering av bevegelsen gir da

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin(\theta)t,$$
$$l(t) = v\cos(\theta)t.$$

Tiden det tar er gitt av å sette høyden $h(t) = 0$ og løse for tiden t. Dette fører til ligningen

$$0 = t\left(v\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt\right).$$

Vi er interessert i løsningen når kulen lander ($t > 0$) som gir

$$t = \frac{2v}{g}\sin\theta.$$

   b) Vi antar nå at l og t måles, mens v og θ er ukjente. Hva må utskytingshastigheten v og utskytingsvinkelen θ ha vært hvis l = 55 m og t = 4.4 s? (svar $\theta = 1.05$ rad $\approx 60°$ og $v = 25$ m/s)

4. **(Y&F 3.3)** En kule med masse m beveger seg i en sirkel med radius R med uniform banehastighet v. Bruk at $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ til å vise at $a = v^2/R$ (Du må altså finne et uttrykk for $\mathbf{r}(t)$ som du kan derivere). Bestem også retningen på akselerasjonen. Hva er den totale kraften som virker på massen?

Solution: For en sirkelbane sentrert i origo i vårt koordinatsystem kan vi skrive posisjonen til kulen som

$$\mathbf{r}(t) = R\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\omega t\right),$$

der ω er en konstant vinkelhastighet. Derivasjoner av $\mathbf{r}(t)$ gir deretter hastighet

$$\mathbf{v}(t) = \omega R\left(-\hat{\mathbf{x}}\sin\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos\omega t\right),$$

og akselerasjon

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 R\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\omega t\right).$$

Fra lengden av disse vektorene ($v = \sqrt{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)}$ etc.) finner vi konstant radius ($\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = R$), hastighet ($v = \sqrt{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)} = \omega R$) og akselerasjon ($a = \omega^2 R$). Vi observerer at $\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$, altså peker akselerasjonen inn mot sentrum av sirkelen.

5. Hvor stor akselerasjon har du når du står på jordens overflate som følge av jordens rotasjon? Du finner nok dataene du trenger på internett.

Solution: Bruk sentripetalakselerasjonene. Er det noen forskjell om man står på ekvator eller nordpolen ?

6. Om du står på rulleskøyter inni et tog når toget starter vil du rulle (akselerere) bakover i toget, selv om det ikke virker noen krefter på deg. Hvorfor gjelder ikke Newtons lover i dette tilfellet?

Solution: Toget akselererer og er ikke i et treghetssystem og dermed gjelder ikke Newtons lover.

5 Oppgaver

7. **(Y&F eksempel 5.5)** Figur 3 viser kloss 1 og 2 med masser m_1 og m_2 som er bundet sammen med en ideell snor (bøyelig og med neglisjerbar masse) som kan skli friksjonsløst over et avrundet hjørne.

   (a) Tegn relevante kraft-legeme diagram og vis at akselerasjonen a til klossene kan beskrives ved dette uttrykket:

   $$a = \frac{m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1}{m_1 + m_2}g$$

   g er tyngdens akselerasjon. (La akselerasjonen til 2 være positiv nedover).

   Solution: (Sett inn figur!)
   N2 langs de respektive skråplan gir

   $$-m_1 g\sin\theta_1 + T = m_1 a$$

   $$m_2 g\sin\theta_2 - T = m_2 a$$

   Løser vi likningene for a får vi

   $$a = \frac{m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1}{m_1 + m_2}g$$

   (b) Finn et uttrykk for snorkrafta T!

   Solution: Løser samme likningssett som i forrige oppgave for T og får da

   $$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)}{m_1 + m_2}$$

(c) Har uttrykkene for a og T riktige dimensjoner? Vurder også om uttrykkene ser rimelige ut sammenlignet med resultatene utledet for vanlig en Atwood-maskin (der massene henger fritt og ikke på skråplan) (Se for eksempel artikkel om Atwood maskin på wikipedia).

Solution: Uttrykket for a har samme dimensjoner som g som er m/s^2 som er riktig. Uttrykket for T har dimensjoner $[mg]$ altså kg m / s^2 som er det samme som Newton (N). Dette systemet er det samme som en Atwood maskin dersom vi lar $\theta_1 = \theta_2 = 90°$. Alle sinus-funksjonene er da 1 og vi får

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

som er det samme man får om man analyserer en vanlig Atwood maskin.

(d) Finn et uttrykk for a i grensen $\theta_1 = 0°, \theta_2 = 90°$. Gi en lettfattelig fysisk tolking av uttrykket du finner!

Solution: Vi får i dette tilfellet

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

I dette tilfellet ligger m_1 flatt slik at det blir tyngdekraften på m_2, $F = m_2 g$ som gir akselerasjon til begge objektene $(m_1 + m_2)$

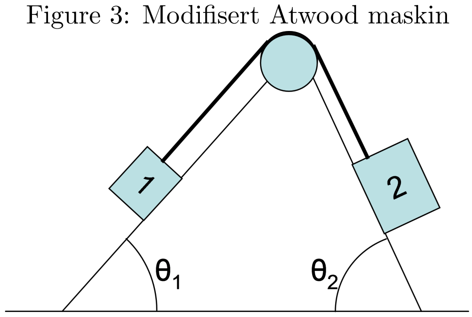
(e) Vi lar nå m_2 være lik et helt antall ganger massen til m_1, dvs. $m_2 = nm_1$, $n \in \mathbb{Z}$. Videre lar vi $\theta_1 = \theta_2$. Finn også i dette tilfellet et uttrykk for akselerasjonen a, og plott $a/(gsin\theta)$ som funksjon av n i Python. Drøft tilfellene $n = 0$, $n = 1$ og $n \to \infty$.

Solution: Setter inn $m_2 = nm_1$ i likningen over gir at

$$a = \frac{n-1}{n+1} g \sin\theta$$

(legg inn python kode og en graf...) $n = 0$ gir $a = -g\sin\theta$, som er det som ett legeme på et skråplan. $n = 1$ gir $a = 0$ som er at klossene ikke akselereres når de er like store. $n \to \infty$ gir $a = g\sin\theta$ som er ett objekt som skli ned et skråplan (andre massen blir neglisjerbar).

Figure 3: Modifisert Atwood maskin



8. Akselerasjonen til en klinkekule som beveger seg med relativt stor hastighet gjennom en væske kan i rimelig tilnærmelse skrives som

$$a = -kv^2$$

der k er en konstant som avhenger av væskens egenskaper og kulas masse og radius. Vi neglisjerer tyngdeakselerasjonen i denne oppgaven.

(a) Dersom ei kule slippes ned i væsken med hastigheten v_0, hva blir uttrykket for kulas hastighet $v(t)$?

Solution: Vi får differensiallikningen

$$dv/dt = -kv^2 \implies dv/v^2 = kdt \implies v^{-1} = kt + C$$

der C er en konstant. Med betingelsen $v(0) = v_0$ er løsningen fullstendig bestemt for $t > 0$ som

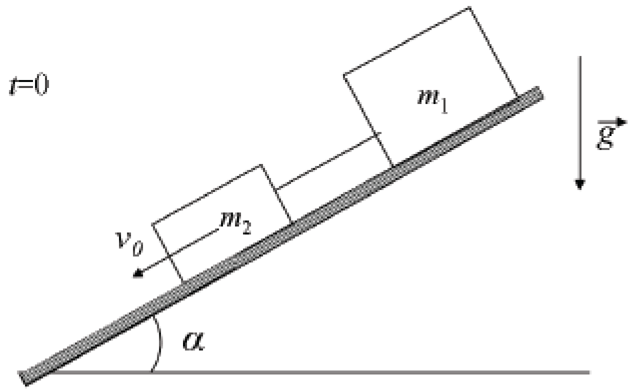
$$v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

(b) Dersom $k = 3\ \mathrm{m}^{-1}$ (sjekk at dimensjonen stemmer!) og v_0 er 1.5 m/s, hvor lang tid tar det før hastigheten er redusert til det halve? Og hvor langt har kula da beveget seg i væsken?

(c) Bruk Eulers metode til å løse differensiallikningen numerisk og plott hastigheten du finner. Les av hvor farten har blitt redusert til det halve og sjekk at det stemmer.

9. En kloss med masse m_1 plasseres på et skråplan med helningsvinkel α, og gis en starthastighet $v(t = 0) = v_0$ nedover langs skråplanet. Friksjonskoeffisienten mellom kloss og underlag er μ_1

Figure 4: Klosser på skråplan



(a) Tegn et fritt-legeme diagram som viser kreftene som virker på klossen. Bruk Newtons andre lov til å finne klossens akselserasjon, hastighet og posisjon langs skråplanet som funksjoner av tiden t.

Solution: Sett inn figur

(b) Kloss m_1 føres tilbake til utgangspunktet og forbindes med en snor til en annen klosse m_2 som plasseres lengre ned på skråplanet (se figur 4). Snora som forbinder klossene antas å ha neglisjerbar masse. Klossene er av ulike materialer som gir kinematiske friksjonskoeffisienter $\mu_1 > \mu_2$. Vi setter i gang systemet som i oppgave a). Vis at så lenge betingelsene er som oppgitt, vil snora alltid være stram, uavhengig av forholdet mellom m_1 og m_2.

Solution: Løsning ligger bla på labsidene under laboppgave 1

(c) For en gitt (kritisk) vinkel α, vil klossene i oppgave b) skli ned planet med konstant hastighet. Bestem den kritiske vinklen.

Solution: Samme som forrige

10. Galileo Galilei har stått opp fra de døde for å gjenta noen eksperimenter han hadde ugjort og som han ønsket å bruke litt mer moderne måleutstyr på enn de han hadde tilgjengelig på sin tid. I mappen `\data` under øving 2 på BbL finner du data fra to eksperimenter som Galileo har gjort hvor han har sluppet et objekt i fritt fall under to ulike forhold (i vakuum og i luft) og målt posisjonen til objektene ved hjelp av et høyhastighetskamera (som de ikke hadde på Gallileos tid). Det er to filer for hvert eksperiment (posisjon og tid, filnavnet begynner med henholdsvis x og t). Merk at i hver av måleseriene går det litt tid før objektet slippes.

    [Tips: For å laste inn data fra en tekstfil (.txt) i Python bruker du

    `x = np.genfromtxt(filename, delimiter='\t')` Det kan være nyttig å vite hvor mange målepunkter det er. Da kan du bruke `n = x.size`

    a) Bruk Python til å plotte posisjon og hastighet til objektene. Sistnevnte ved hjelp av numerisk derivasjon. Å derivere numerisk er bare å ta differensen mellom to tilstøtende funksjonsverdier og dele på tidsintervallet.

    Solution: Sett inn litt pythonkode og grafer

    b) Evaluer hastighetskurvene. Var de som du forventet? Hva er din fysiske tolkning av resultatene?

    Solution: Sett inn litt tolkning.