TFY 4125 Øving 9

Den øvingen omhandler **strøm, spenning, effekt og kapasitans**.

1 Les

Les kapittel 24.1, 24.3, 24.4, 25.1-25.5, 26.4. Les spesielt 24.1, 25.4 og 26.4.

2 Se

3 Grunnleggende

1. (a) Tverrsnittet på en 16 A kabel i boligen din skal være på 2.5 mm^2. Hva blir strømtettheten i ledningen dersom det går en strøm $I = 16$ A gjennom kabelen?

Solution:

$$I = J \cdot A$$
$$J = \frac{I}{A} = \frac{16\text{A}}{2.5\text{mm}^2} = \underline{6.4\text{A}/\text{mm}^2}.$$

(b) Resistiviten til kobber (som er i strømledningen) er på $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$. Hva blir motstanden i en 10 m lang 2.5 mm^2 kabel?

Solution:

$$R = \rho\frac{l}{A} = 1.68 \cdot 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}\frac{10\text{m}}{2.5 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0.067\,\Omega.$$

(c) Dersom du isteden har en 1.25 mm^2 kabel (som egentlig kun er godkjent for 10 A), hvor stor effekt blir dissipert i kabelen dersom det går en strøm $I = 16$ A gjennom den?

Solution: Dersom arealet av lederen blir halvvert blir motstanden fordoblet slik at $R = 0.13\,\Omega$. Effekten som blir dissipert i lederen blir da $P = VI = (RI)I = I^2R$. Vi får dermed

$$P = I^2R = (16\,\text{A})^2 \cdot 0.13\,\Omega = 34\,\text{W}$$

(Vi får altså en varmeutvikling i ledningen som er på størrelse med en liten lysepære, noe som ikke er helt innsignifikant når det gjelder sikkerhet i ledningsnetteverket.)

2. Gitt at du har en parallellplate kondensator med areal A, avstand d og ladning Q.

(a) dersom du øker avstanden mellom platen, hva skjer med det elektriske feltet mellom platene (øker, minker, uforandret)?

Solution:

$$C = \frac{\epsilon A}{d},$$
$$E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon A}{d}V^2.$$

Dersom avstanden øker, minker det elektriske feltet.

(b) Hva skjer med kapasitansen dersom du øker avstanden (øker, minker, uforandret)?

Solution: Kapasitansen minker.

4 Oppgaver

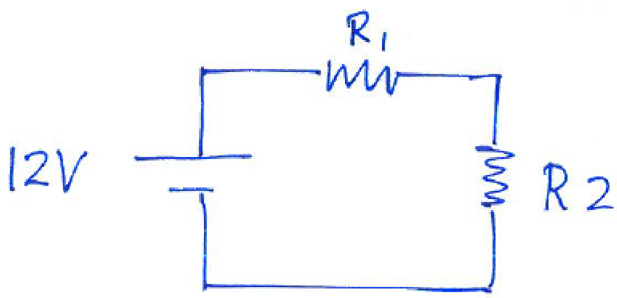


Figure 1: Oppgave

3. Motstand $R_1 = 5\Omega$ tåler kun å dissipere 5 W før den blir ødelagt. Gitt kretsen i figur 1, hvor stor må R_2 være for at R_1 ikke skal ødelegges [tallsvar: $R_2 = 7\Omega$].

Solution:

$$V_1 = R_1 \cdot I, I = \frac{V}{R_1 + R_2},$$
$$P_1 = V_1 \cdot I = R_1 I^2 = R_1 \frac{V^2}{(R_1 + R_2)^2}$$
$$P_1(R_1 + R_2)^2 = R_1 V^2$$
$$R_1 + R_2 = \sqrt{\frac{R_1}{P_1}} \cdot V$$
$$R_2 = \sqrt{\frac{R_1}{P_1}} \cdot V - R_1 = 12\Omega - 5\Omega = \underline{7\Omega}.$$

4. Vi ser på en kondensator med kvadratiske plater (sidekant a), adskilt med en distanse d, med vakuum mellom platene.

   (a) Vis at kapasitansen til kondensatoren er gitt ved $C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}$. Ta utgangspunkt i definisjon av kapasitans $C = Q/V$. Hva blir kapasitansen hvis $a = 5.0$ cm og $d = 10$ cm? (tallsvar: 0.22 pF)

Solution:

$$C = \frac{Q}{V},$$
$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}d,$$
$$\Rightarrow \underline{C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}}.$$

Setter inn verdier fra oppgaven, $a = 5$ cm og $d = 10$ cm:

$$C = \frac{8.85 \cdot 10^{-12}(0.05)^2}{0.10}\mathrm{F} = \underline{0.221\mathrm{pF}}.$$

(b) For å lade opp kondensatoren påtrykkes en konstant strøm $I = \frac{dQ}{dt} = 155$ pA i 0.70 s. Hva blir spenningen over kondensatoren? Hva blir det elektriske feltet? Og hvor mye energi er lagret i kondensatoren? (tallsvar: 489 V, 4.89 kV/m, 26.4 nJ)

Solution: Begynner med å finne ladningen på kondensatoren:

$$\left.\begin{array}{l} I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 155\mathrm{pA} \\ \Delta T = 0.70\mathrm{s} \end{array}\right\} Q = I\Delta t \approx 0.108\mathrm{nC}.$$

Spenningen finner vi da ved å bruke kapasitansen:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{0.108\mathrm{nC}}{0.221\mathrm{pF}} = \underline{489\mathrm{V}}.$$

Det elektriske feltet blir:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{489\mathrm{V}}{0.10\mathrm{m}} = \underline{4.89\mathrm{kV/m}}.$$

Til slutt finner vi energien fra:

$$U = \frac{1}{2}QV \approx \underline{26.4\mathrm{nJ}}.$$

(c) Et elektron med hastighet $v = 2.00 \cdot 10^7$ m/s skytes gjennom kondensatoren, parallelt med en av sidekantene. Hvilken vinkel får elektronets hastighet i forhold til kondensatorplatene når det forlater mellomrommet mellom platene? (tallsvar: 6.1°)

Solution: (Vi tillater oss å regne klassisk, $v << c$.)
Vi antar at det elektriske feltet mellom kondensatorene står vinkelrett på platene, og er helt uniformt. Elektronet vil derfor kun akselereres vinkelrett på platene, og den originale hastighetskomponenten parallelt med platene vil være uendret. Fra dette kan vi finne ut hvor lang tid det vil ta for partikkelen å passere igjennom kondensatoren (husk at her er a lengden på kondensatorplaten og ikke akselerasjonen):

$$\Delta t = \frac{a}{v} = \frac{0.05\mathrm{m}}{2.00 \cdot 10^7\mathrm{m/s}} = 2.50\mathrm{ns}.$$

Vi kjenner styrken til det elektriske feltet mellom platene fra forrige deloppgave. Denne kan brukes sammen med ladningen til partikkelen for å finne kraften som virker på den i feltretningen:

$$F_z = qE.$$

$$\Delta p_z = F_z \Delta t = qE\Delta t = m_e v_z$$

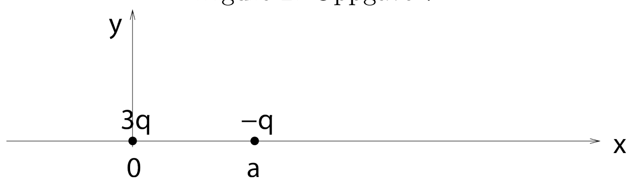
$$v_z = \frac{qE\Delta t}{m_e} = \frac{1.60 \cdot 10^{-19} \cdot 4.89 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-9}}{9.11 \cdot 10^{-31}} \mathrm{m/s} \approx 2.15 \cdot 10^6 \mathrm{m/s}.$$

Vi kan nå finne vinkelen mellom hastigheten parallelt og vinkelrett på kondensatorplatene:

$$\theta = \arctan \frac{v_z}{v_x} = \arctan \frac{2.15 \cdot 10^6}{2.00 \cdot 10^7} \approx \underline{6.1°}.$$

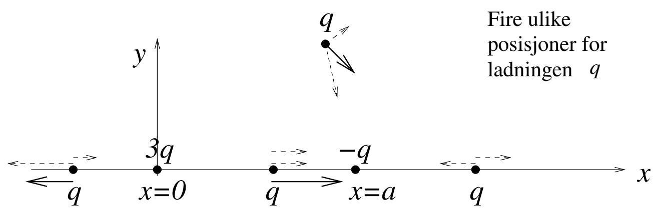
5 Repetisjon

Figure 2: Oppgave 7



5. (a) To punktladninger $3q$ og $-q$ er plassert på x-aksen i henholdsvis $x = 0$ og $x = a$. Forklar hvorfor mulige likevektsposisjoner for en tredje ladning q må være på x-aksen.

Solution:



Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x-aksen, f.eks. som i figuren over (her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil). Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x-aksen.

(b) Det er *en* likevektsposisjon x_0 på x-aksen for denne tredje ladningen. Bestem x_0. Begrunn, *uten* ytterligere regning, at denne likevekten er ustabil med hensyn på en liten forflytning i x-retning. (Alternativt, *med* ytterligere regning: Vurder stabiliteten av likevekten ved å se på dF/dx i $x = x_0$.)

[I *likevekt* virker det ingen netto kraft på ladningen. Når den forskyves en avstand Δx fra likevektsposisjonen, vil den påvirkes av en kraft. Dersom denne kraften virker i samme retning som Δx, er likevekten ustabil, i motsatt fall stabil.]

Solution: Vi har fått oppgitt at det *en* likevektsposisjon x_0 for q på x-aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a, for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\epsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\epsilon_0(a-x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0^2}\hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(x_0-a)^2}\hat{x} \\
&\Rightarrow \frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{(x_0-a)^2} \\
&\Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = x_0^2 \\
&\Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = 0 \\
&\Rightarrow x_0 = \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a.
\end{aligned}$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning (den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponentene er like store og har samme retning).

Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x >> x_0$. Da "ser" punktladningen q tilnærmet en punkladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0, mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0. Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x-aksen.

Alternativt, med litt regning: la oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$\vec{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}f(x)\hat{x}.$$

Deretter bestemmer vi:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0-a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0.$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

6. Figuren viser feltlinjer for et uniformt elektrisk felt. Et elektron som plasseres i dette feltet vil

   A. bevege seg med konstant hastighet mot venstre.

   B. bevege seg med konstant hastighet mot høyre.

   C. akselereres mot venstre.

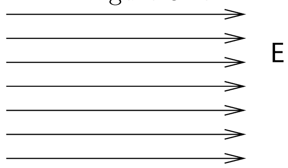
   D. akselereres mot høyre.

Solution: C.

Newtons andre lov sier:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}.$$

Figure 3: c



Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E},$$

altså mot venstre.