TFY 4125 Øving 8

Denne øvingen omhandler Elektrostatikk, det vil si krefter som virker mellom ladde partikler i ro. Vi skal lære begreper som elektrisk felt, elektrisk potensiell energi og elektrisk potensial.

1 Les

Les 21.1-21.6, 23.1-23.3, 23.5

2 Se

3 Grunnleggende

1. To små kuler er 20 cm fra hverandre og har lik ladning. Hvor mange overskuddselektroner må det være på hver sfære for at frastøtningen skal bli $4.57 \cdot 10^{-7}$ N?

Solution: Frastøtningen mellom to små kuler er nesten lik frastøtningen fra to punktladninger:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$
$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 F r^2$$
$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 F r^2}.$$

Antall overskuddselektroner er lik total ladning delt på ladning per elektron:

$$N = \frac{q}{e} \simeq \underline{8.9 \cdot 10^9}.$$

2. **(Eksempel 22.6)**To (uendelig) lange ledere er 0.30 m fra hverandre. Hver leder har samme ladningstetthet $\lambda = 5.20\mu\text{C/m}$. Med hvilken kraft virker den ene lederen på et 5.0 cm langt stykke av den andre lederen?

Solution: Det elektriske feltet fra en uendelig leder er gitt ved (Eksempel 22.6):

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

Bruker dette sammen med ladningen på et $L = 5.0$ cm langt stykke for å finne kraften:

$$F = qE = (\lambda \cdot L) \cdot E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{L}{r}\lambda^2 \simeq \underline{8.1 \cdot 10^{-2}\text{N}}.$$

3. En partikkel har ladning 5.00μ C og masse $2.00 \cdot 10^{-4}$ kg. Den befinner seg i punkt A hvor potensialet er $V = 200$ V og beveger seg så til punkt B hvor potensialet er $V = 800$ V. Det er bare den elektriske kraften som virker. Dersom partikkelen har hastighet 5.0 m/s i A, hva blir hastigheten i punkt B?

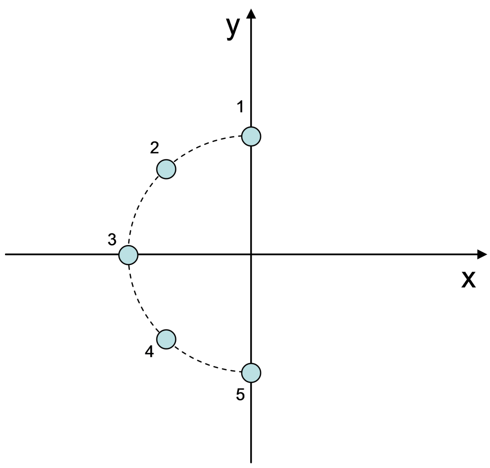
Solution: Vi benevner de ulike størrelsene i de to punktene med subskript A og B, og ønsker å finne v_B.

Vi setter først opp et uttrykk for energibevaring, summen av kinetisk energi og potensiell energi er bevart. Deretter snur vi på uttrykket og løser for v_B.

$$\begin{aligned} K_A + U_A &= K_B + U_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + q(V_A - V_B) &= \frac{1}{2}mv_B^2 \\ v_B &= \sqrt{v_A^2 + \frac{2q}{m}(V_A - V_B)}. \end{aligned}$$

Om vi setter inn tallverdier fra oppgaven ser vi at vi får et problem. Partikkelen har ikke nok kinetisk energi i utgangspunktet til å nå punkt B, og vi får derfor et negativt uttrykk inni rottegnet og ingen hastighet i B.

4 Oppgaver



Figur 1: Oppgave 4

4. Fem ladninger med ladning Q er plassert som vist i figure 1, alle i en avstand R fra origo.

   (a) Vis at kraften som virker på en testpartikkel med ladning q som befinner seg i origo er gitt ved uttrykket

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = (1 + \sqrt{2})\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{x}}$$

   Tips: For å løse denne oppgaven på en oversiktlig måte, kan det være lurt å regne med enhets-vektorer! For eksempel, for ladning 2 er $\hat{\mathbf{r}} = [1, -1]/\sqrt{2}$

Solution: Vi ser på summen av kreftene fra partiklene.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i, \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i q}{R^2}\hat{R}_i.$$

I denne summen er det kun enhetsvektorene $\hat{R}_i$ som er forskjellige. Vi setter opp uttrykk for dem:

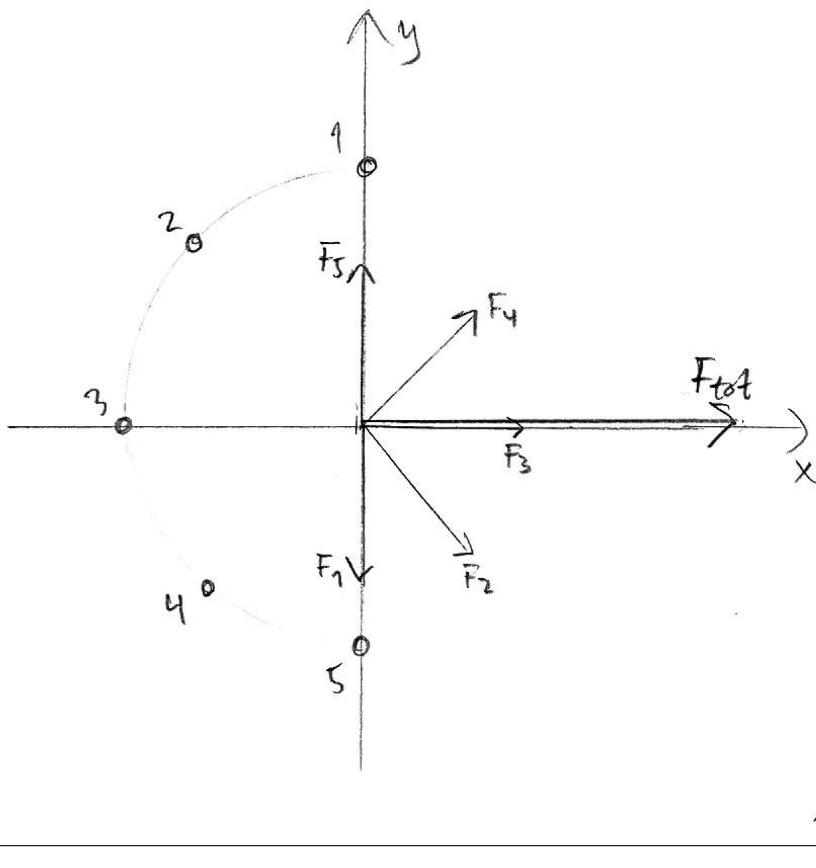
$$\hat{R}_1 = \langle 0, -1 \rangle, \hat{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1 \rangle, \hat{R}_3 = \langle 1, 0 \rangle,$$
$$\hat{R}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 \rangle, \hat{R}_5 = \langle 0, 1 \rangle.$$

Vi setter dette inn i uttrykket for $\vec{F}$:

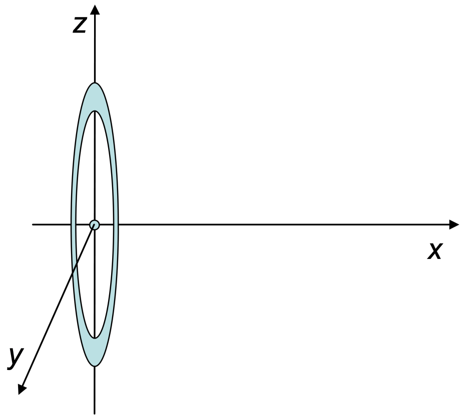
$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^2}\sum \hat{R}_i \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^2}\left(\langle 0, -1 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1 \rangle + \langle 1, 0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 \rangle + \langle 0, 1 \rangle\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^2}\langle \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^2}\left(1 + \sqrt{2}\right)\hat{x}.
\end{aligned}$$

(b) Lag en skisse hvor alle kreftene (for eksempel F_{1q}) som virker på q tegnes inn. Indiker også totalkrafta **F** som virker på q. Hva er totalkrafta på systemet?

Solution: Kraften er lik motkraft mellom alle ladningene. Derfor er totalkraften på hele ladningssystemet lik null.



5. I denne oppgaven ønsker vi å skyte ut et elektron som opprinnelig befinner seg i ro i origo. En ring med radius $R = 3.00$ mm og ladning $Q = -2.00$ nC er plassert rundt elektronet (i yz-planet), se



Figur 2: Oppgave 5

figur. «Avtrekkermekanismen» kan for eksempel være at ringen forskyves en infinitesimal strekning i negativ x-retning. Det oppgis at potensialet på symmetriaksen til en ladet ring er $V(r) = kQ/r$, hvor r er avstanden fra et punkt på ringen til et punkt på x-aksen.

(a) Ta utgangspunkt i potensialet for en punktladning og gi et overbevisende argument for at potensialet som angitt over er korrekt.

(b) Sett opp et uttrykk for potensialet $V(x)$ som skyldes ringen. Finn deretter potensialet i origo. (Svar: -5.99 kV)

> **Solution:**
>
> $$V(x) = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}}, \epsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\text{F/m},$$
> $$V(0) = \frac{1}{4\pi 8.85\cdot 10^{-12}}\frac{-2.00\cdot 10^{-9}}{3.00\cdot 10^{-3}}\text{V} \simeq \underline{-6.0\text{kV}}.$$

(c) Hva er den potensielle energien til elektronet når det ligger i «startgropa», og i det øyeblikk det passerer $x = 10.0$ cm? Hvor stort arbeid har feltet gjort på elektronet når det har flyttet seg denne strekningen? ($W = 9.3\cdot 10^{-16}$ J)

> **Solution:** Potensiell energi:
>
> $$U = qV.$$
>
> Setter inn de to posisjonene:
>
> $$U(0) = qV(0) = (-1.60\cdot 10^{-19}\text{C})(-5.99\cdot 10^{3}\text{V}) \simeq \underline{9.6\cdot 10^{-16}\text{J}},$$
> $$U(10\text{cm}) = qV(10\text{cm}) \simeq \underline{2.9\cdot 10^{-17}\text{J}}.$$
>
> Arbeidet må være lik endringen i potensiell energi, med omvendt fortegn:
>
> $$W = -(2.9\cdot 10^{-17}\text{J} - 9.6\cdot 10^{-16}\text{J}) = \underline{9.3\cdot 10^{-16}\text{J}}.$$

(d) Hva er elektronets hastighet når det passerer $x = 10.0$ cm? ($v = 4.5\cdot 10^{7}$ m/s)

Solution:

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 = W = -\Delta U$$

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m_{\mathrm{e}}}}, m_{\mathrm{e}} = 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$$
$$= \underline{4.5 \cdot 10^7 \mathrm{m/s}}.$$

(e) Forklar kort hvorfor $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(x)\hat{\mathbf{x}}$ på symmetriaksen (altså at den bare har en x-komponent). Husk at det elektriske feltet kan utledes fra gradienten av potensialet (se Y&F 23.5) (Potensialet $V(r)$ er et skalarfelt, mens det elektriske feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ er et vektorfelt). Deretter, beregn $E(x)$, og vis at $E(0) = 0$. Gi et overbevisende argument for dette siste resultatet uten å ty til regning.

Solution: Slik må det være fordi ladningsfordelingen er symmetrisk om x-aksen og potensialet avhenger dermed kun av x (ikke y og z).

$$\vec{E} - \nabla V = \langle \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \rangle = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\hat{x}, \text{fordi} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

$V(\vec{r})$ er et skalart felt som det er enklere å beregne enn $\vec{E}(\vec{r})$, som er et vektorfelt.

$$E = |\vec{E}| = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{-1}{2}\right) (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} 2x$$
$$= \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}},$$
$$\Rightarrow E(0) = 0.$$

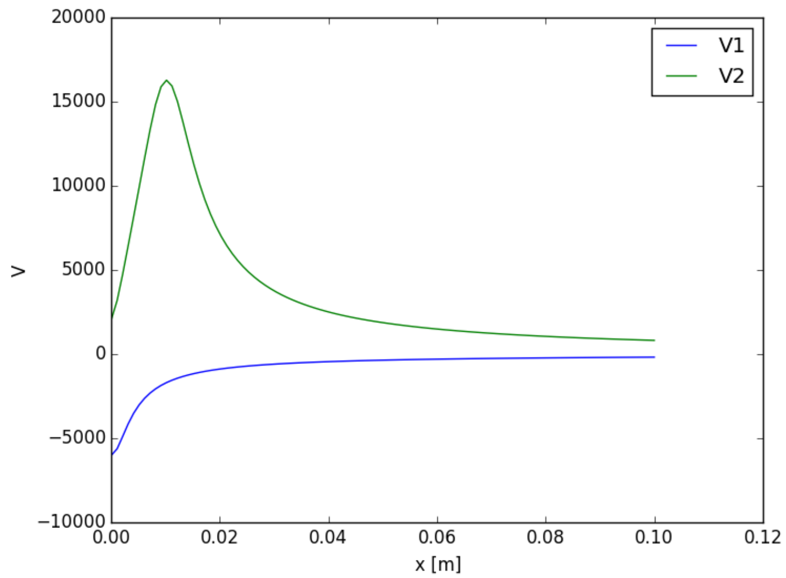
Dette er som forventet fordi i origo er ladningene dQ symmetrisk plassert, slik at bidragene kansellerer.

(f) Du blir innkalt som konsulent, fordi sjefen din ikke klarer å overskue om det kan lønne seg å sette inn ytterligere en ring, med radius $R_2 = 5.00$ mm og ladning $Q_2 = +10.0$ nC ved $x = a = 1.00$ cm. Du synes spørsmålet er temmelig ullent formulert, men bestemmer deg for å gi sjefen litt «grunnlagsmateriale» (som det heter i industrien). Du setter derfor opp et nytt uttrykk for potensialet, $V_{II}(x)$, og plotter (ved hjelp av Python) både $V(x)$ (fra oppgave b) og $V_{II}(x)$ i intervallet fra $x \in [0.01, 10]$ cm.

Solution:

$$V_{\mathrm{II}}(x) = \sum V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{\sqrt{(x-a)^2 + R_2^2}}.$$

Et raskt Python-skript produserer figuren:



Fordi elektroner har negativ ladning vil de gladelig “rutsje” oppover til større x i disse potensialene. En positiv ladning ville derimot stortrives i $x = 0$.

Vi ser at å innføre en ekstra irng vil gi hurtigere akselerasjon i starten, deretter litt oppbremsing, før potensialet er omtrent flatt.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

e0 = 8.85e-12

R = 3e-3
Q = -2e-9

R2 = 5e-3
Q2 = 10e-9
a = 1e-2

x = np.linspace(0.0001,0.10,100)

V1 = 1/(4*np.pi*e0)*(Q)/(np.sqrt(x**2+R**2))
V2 = 1/(4*np.pi*e0)*(Q2)/(np.sqrt((x-a)**2+R2**2))
V = V1 + V2
p1, = plt.plot(x,V1)
p2, = plt.plot(x,V)
plt.legend([p1, p2], ["V1", "V2"])
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("V")
plt.show()
```

(g) (utfordring) Bruk uttrykket for $E(r)$ til å finne krafta $F(r) = Fx$ på x-aksen. Vis ved hjelp av definisjonen på mekanisk arbeid at direkte integrasjon gir samme svar for arbeid som du har funnet i b) (altså, uten ringen i oppgave e)).

Solution:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{x}.$$
$$W = \int \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = q\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

Her gjør vi et variabelbytte.

$$u = R^2 + x^2, \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x,$$

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\mathrm{d}u = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}u^{-1/2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{-1}{(R^2+x^2)^{1/2}}.$$

Dermed

$$W = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^{0.1} = qV.$$

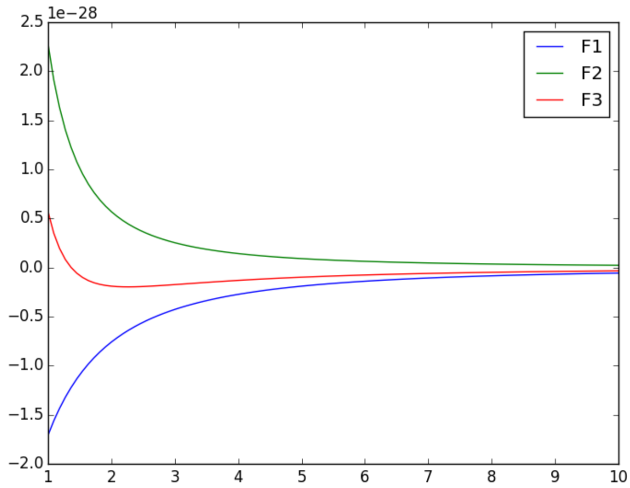
Kommentar: Elektronkanoner brukes mye i eksperimentell forskning, og er også en del av grunnlaget for gammeldagseTV'er (altså, ikke-flatskjermer).

6. En positiv ladning (proton) q_1 er plassert på den negative x-aksen i $x = -1.0$ m og en negativ ladning (elektron) q_2 er plassert i origo.

   (a) Kan en negativ ladning q_3 være i likevekt (slik at totalkraften på den er null) mellom $x = 1.0$ m and $x = 10.0$ m, gitt at den må sitte på x-aksen? Bruk Python til å plotte kraften på q_3 fra q_2 mellom $x = 1.0$ m og $x = 10.0$ m. Plott så kraften på q_3 fra q_1. Addér de to kreftene og plott disse.

Solution: Nei, siden de to ladningene er like store men motsatt ladd må de ligge like langt unna q_3 for at totalkraften skal bli lik null. Så lenge q_3 befinner seg langs den positive x-aksen vil alltid q_2 ligge nærmere, og den totale kraften vil være ulik null.

De ulike kreftene kan plottes med Python-skriptet under.



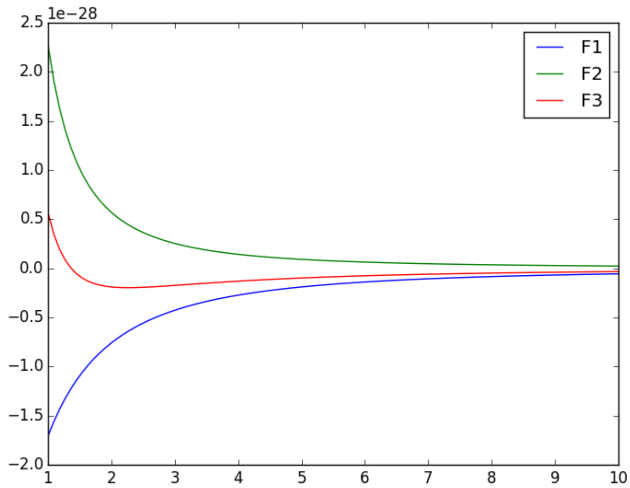

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
e = 1.6e-19
k = 8.9e9
q1 = e
q2 = -e
q3 = -e
x = np.linspace(1,10,100)

F1 = k*q1*q3/(x+1)**2
F2 = k*q2*q3/(x)**2
F3 = F1 + F2
p1, = plt.plot(x,F1)
p2, = plt.plot(x,F2)
p3, = plt.plot(x,F3)
plt.legend([p1, p2, p3], ["F1", "F2", "F3"])
plt.show()
```

(b) Hvilken typisk verdi for q_1 kan gi likevekt? Plott et slikt tilfelle.

Solution: Vi får likevekt når $-\nabla U(x) = F(x) = \frac{-q_3}{4\pi\epsilon}\left(\frac{q_1}{(x+1)^2} - \frac{q_2}{x^2}\right) = 0$. Med andre ord må $q_1 = \frac{(x+1)^2}{x^2} \cdot q_2$.



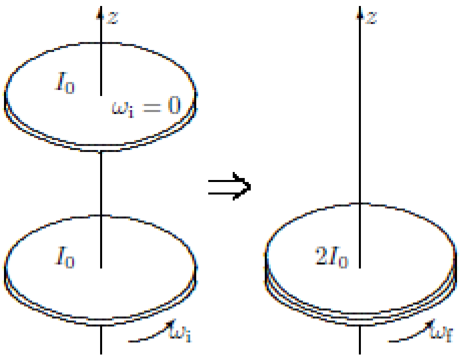
(c) Er ladningen i stabil likevekt?

Solution: Dette vil være en stabil likevekt. Dette kan observeres ved å se at $U(x)$ har et bunnpunkt når $q_1 = \frac{(x+1)^2}{x^2} \cdot q_2$.

(d) Har verdien til den elektriske permittiviteten innflytelse på resultatet? Hva skjer hvis alle ladninger dobles?

Solution: Dne elektriske permittiviteten har ingen innvirkning på posisjonen til likevekstpunktet. Dette er en følge av at $F(x) = 0$ kun avhenger av x, q_1 og q_2, derimot vil en endring i fortegn føre til at likevektspunktet går fra å være stabilt til ustabilt.

En dobling av ladningene vil føre til en firedobling i F og U, men likevektspunktet forblir det samme.



Figur 3: oppgave

5 Repetisjon

7. En sirkulær skive i et horisontalt plan roterer fritt og uten friksjon om en vertikal akse gjennom sentrum. Vinkelhastigheten er ω_i. Ei likedan skive, som til å begynne med ikke roterer, plasseres oppå den første slik at den akkurat dekker denne (Dette er prinsippet for en mekanisk bilklutsj, da er skivene koplet videre til henholdsvis motor og drivhjul).

   (a) Hva blir den felles vinkelhastigheten ω_f til de to skivene?

   Solution: Treghetsmomentet til en skive er I_0, og treghetsmomentet til begge skivene er $2I_0$. Spinnet må være bevart siden det er ingen netto kraftmoment på skivene:

   $$\tau_{\mathrm{tot}} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow L_\mathrm{i} = L_\mathrm{f}$$
   $$I_0\omega_\mathrm{i} = 2I_0\omega_\mathrm{f} \Rightarrow \omega_\mathrm{f} = \underline{\frac{\omega_\mathrm{i}}{2}}.$$

   (b) Hva blir endringen i kinetisk energi?

   Solution: Endringen i kinetisk energi er:

   $$\Delta E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k},2} - E_{\mathrm{k},1} = \frac{1}{2}\cdot 2I_0\omega_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}\cdot I_0\omega_\mathrm{i}^2 = \frac{1}{4}I_0\omega_\mathrm{i}^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_\mathrm{i}^2 = \underline{-\frac{1}{4}I_0\omega_\mathrm{i}^2}.$$

   Halve rotasjonsenergien går over til varme pga. friksjonen mellom platene.

8. Et legeme svinger med utslag: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \theta)$
   der $x_0 = 0,50\,\mathrm{m}$, $\omega = \frac{3\pi}{4}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, og t er tida i sekunder.

   (a) Finn perioden T og frekvensen f for oscillatoren (tallverdier).

   Solution:

   $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}\mathrm{s}^{-1}} = \frac{8}{3}\mathrm{s} = \underline{2.67\mathrm{s}},$$
   $$f = \frac{1}{T} = \underline{\frac{3}{8}\mathrm{Hz}}.$$

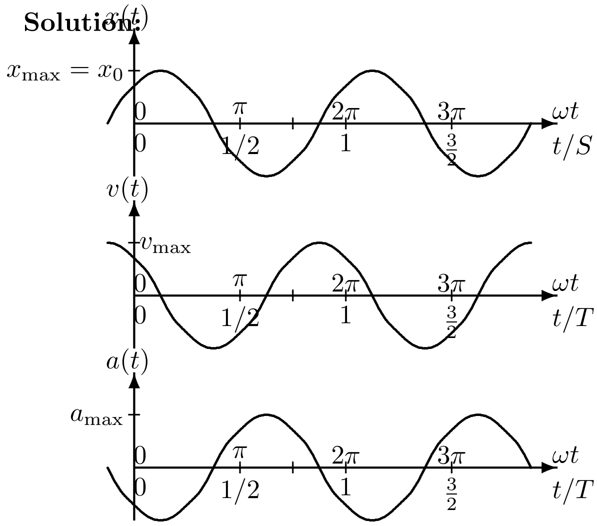
(b) Finn uttrykk for hastigheten $v(t) = x'(t)$ og akselerasjonen $a(t) = x'(t)$. (Ikke sett inn tallverdier)

Solution:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= & x_0 \cdot \cos(\omega t + \theta), \\
v(t) &= & \dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \theta), \\
a(t) &= & \dot{v}(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \theta).
\end{aligned}
$$

(c) Plot en graf i Python med den relative tida t/T langs horisontal akse og posisjonen $x(t)$ langs vertikal akse. Lag også et plot hvor den horisontale aksen gitt av ωt. (Det mest elegante er å putte begge grafene i samme plot. Kan gjøres med matplotlib-funksjonen `twinx` som den interesserte kan søke opp). Tenk over hvorfor toppunkter og kryssninger med x-aksen skjer der de skjer.
Tegn også tilsvarende grafer for $v(t)$ og $a(t)$, tegn alle tre grafene under hverandre.
Du kan få hjelp av svarene i d) - e) til å tegne grafene.

Solution:



(d) Hva er posisjonen x_0 og hastigheten v_0 ved $t = 0$?

Solution: Ved tiden $t = 0$ har vi:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= & x_0 \cdot \cos(\theta) = x_0 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{0.35\text{m}}, \\
v(0) &= & -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\theta) = \underline{0.83\text{m/s}}.
\end{aligned}
$$

(e) Hva er posisjonen x_1, hastigheten v_1 og akselerasjonen a_1 ved $t_1 = 2,0$ s?

Solution:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\text{m} \simeq -0.35\text{m}, \\
v_1 &\simeq 0.83\text{m/s}, \\
a_1 &\simeq 1.96\text{m/s}^2.
\end{aligned}
$$

(f) Hva er den maksimale hastigheten $v_{\max}$ og ved hvilke tider finner vi denne og den maksimale akselerasjonen $a_{\max}$?

Solution: Den maksimale hastigheten er amplituden til hastighetsfunksjonen:

$$|v_{\max}| = x_0\omega = 0.5\text{m} \cdot \frac{3\pi}{4}\text{s}^{-1} = \underline{1.18\text{m/s}}.$$

Denne oppnås når $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, dvs. når $a(t) = 0$. Dette er ved

$$\cos(\omega t + \theta) = 0 \Rightarrow \omega t + \theta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Med $\theta = -\frac{\pi}{4}$ og $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gir dette

$$t = T\left(\frac{3}{8} + \frac{n}{2}\right), n = 0, 1, 2, \ldots.$$