Øving 9 - Analyse

Håvard Hjelmeseth

8.3.6

a)
Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar.

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Vi definerer funksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

I følge analysens fundamentalteorem er da:

$F'(x) = f(x)$ (Den deriverte av det første leddet forsvinner, ettersom det ikke har noen x'er etter bestemt integral)

Vi observerer at $G(x) = F(g(x))$, og bruker kjerneregelen for å derivere G.

$$G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{\underline{f(g(x)) \cdot g'(x)}}$$

q.e.d

b)

(i) $G(x) = \int_0^{\sin x} te^{-t}\,dt$ Vi sier at $F(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt \Rightarrow F'(x) = xe^{-x}$

$G(x) = F(\sin x)$ Bruker kjerneregelen!

$$G'(x) = F'(\sin x) \cdot (\sin x)' = \underline{\underline{\sin x\, e^{-\sin x} \cdot \cos x}}$$

(ii) Bruker tilsvarende fremgangsmåte.

$$\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\right)' = \underline{\underline{e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

(iii)

$$G(x) = \int_{\sin x}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad , \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$G(x) = \int_{\sin x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_{0}^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\underline{\underline{G'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x}}$$

8.3.8

Et areal er begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$, x-aksen og de to rette linjene $x = a$ og $x = 3a$, der $a > 0$

Arealet e gitt ved:

$$g(a) = \int_{a}^{3a} e^{-x^2}\,dx$$

fordi funksjonen hele tiden er positiv, og når vi tar integralet fra a til 3a, tar vi i realiteten summen av alle de små arealene under funksjonen (trappesummen) mellom $x=a$ og $x=3a$.

$$g'(a) = \frac{d}{da}\, F(3a) - F(a) = 3e^{-9a^2} - e^{-a^2} = 0$$

$$\ln\left(3e^{-9a^2}\right) = \ln\left(e^{-a^2}\right)$$

$$\ln 3 - 9a^2 = -a^2$$

$$8a^2 - \ln 3 = 0$$

$$a^2 = \frac{\ln 3}{8}$$

$$\underline{\underline{a = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}}}$$

8.4.1

c)

$$\int \frac{dx}{1+2x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}\,x)^2} = \underline{\underline{\frac{\arctan(\sqrt{2}\,x)}{\sqrt{2}} + C}}$$

e)

$$\int \frac{4}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}} = 4\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \underline{\underline{4 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C}}$$

8.4.2

c)

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx = \int u' \cos(u)\,dx \qquad \text{der } u = e^x \text{ og } u' = e^x$$

$$\int \cos(u)\,du = \sin u + C = \underline{\underline{\sin(e^x) + C}}$$

e)

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \arctan(x) + \int \frac{1}{u} \cdot \frac{u'}{2}\,dx \qquad \text{der } u = 1+x^2$$

$$= \underline{\underline{\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C}}$$

8.5.6

Finn grenseverdien:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

når $k=1$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sin(0)$
og $k=n$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n}$$

Gjenkjenner som en Riemannsum med maskevidde $\frac{\pi}{2n}$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

8.6.1

b)

$y = xe^{x^2}$, $x \in (-1, 0)$

$$A = -\int_{-1}^{0} x e^{x^2}\, dx = \int_0^{-1} \frac{u'}{2} e^u = \frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u\, du = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_0^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(e-1) = \frac{e-1}{2} = \underline{\underline{0.86}}$$

8.6.5

g)

$y = \tan x$ $\quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Funksjonen er strengt voksende i intervallet.

$\tan(0) = 0$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \pi \tan^2 x \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$$

$$= \pi \left[\tan x - x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi\left(\left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \pi\left(1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \pi\left(2 - \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$\underline{\underline{= 2\pi - \frac{\pi^2}{2}}}$$

$$(\tan x)' = \tan^2 x + 1$$

$$\tan^2 x\, dx = (\tan x)' - 1$$

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\tan x)' - 1\, dx = \int (\tan x)'\, dx - \int 1\, dx$$

$$\underline{= \tan x - x}$$

8.6.7

c)

$y = \frac{1}{1+x^2}$ mellom $x = 0$ og $x = 2$

Finner ikke en måte å integrere på, så bruker geogebra på denne oppgaven.

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \approx \underline{\underline{2.37}}$$

8.6.11

d)

$$y = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \text{fra } x=1 \quad \text{til } x=4$$

$$y' = 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\left(3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\left(9x - 2\,\frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{16x}\right)}\,dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1+9x - \frac{3}{2} + \frac{1}{16x}}\,dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{145}{16}x - \frac{1}{2}}\,dx \qquad \text{setter } u = \frac{145}{16}x - \frac{1}{2} \Rightarrow u' = \frac{145}{16}$$

$$\int \sqrt{\frac{145}{16}x - \frac{1}{2}}\,dx = \frac{16}{145}\int \sqrt{u}\,du = \frac{16}{145}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{32}{435}\left(\frac{145}{16}x - \frac{1}{2}\right)^{3/2} + C$$

Setter vi inn grensene får vi:

$$L = \left[\frac{32}{435}\left(\frac{145}{16}x - \frac{1}{2}\right)^{3/2}\right]_1^4 = \underline{\underline{13.88}}$$