TFY 4125 Øving 4

I denne øvingen skal vi se på begrepet **bevegelsesmengde** og se hvordan det gir opphav til en viktig bevaringslov.

1 Les

Les kapittel 8 (bevegelsesmengde) samt kapittel 13.1.1-13.1.2, 13.2, 13.3 og 13.7 (gravitasjon). Les spesielt 8.1 og 8.5.

2 Se

3 Grunnleggende

1. Anta at du (masse m_d) står i ro på skøyter på en isbane (antatt friksjonsfri) og kaster en isklump (masse m_k) fra deg med hastighet v_0 og en vinkel θ over horisontalen. Definer et system som består av deg og isklumpen. Er bevegelsesmengden for systemet bevart etter kastet (hvorfor/hvorfor ikke)? Finn et uttrykk for hastigheten din etter at du har kastet klumpen.

Solution: Bevegelsesmengden for systemet er *ikke* bevart fordi, som vi skal se, virker det en ekstern kraft på systemet (normalkraften fra isen). Bevegelsesmengden til et system er kun bevart dersom det ikke virker eksterne krefter på systemet.

Endringen i isklumpens bevegelsesmengde blir

$$\Delta \mathbf{p_k} = m_k \mathbf{v_0} = m_k(v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}})$$

I x retningen er det ingen andre krefter som virker (isen er friksjonsfri) så langs denne aksen er bevegelsesmengden bevart. Vi får med andre ord at

$$\begin{aligned} \Delta p_x = 0 &\implies p_{1x} = p_{2x} \\ &\implies 0 = m_k v_{0x} + m_d v_x \end{aligned}$$

som gir oss

$$v_x = -\frac{m_k v_0 \cos\theta}{m_d}$$

Kraften/impulsen fra deg som gir isklumpen en bevegelsesmengde i y retning har en tilsvarende motkraft på deg. Men ettersom du ikke akselerer gjennom isflaten må det virke en normalkraft fra isen som hindrer denne bevegelsen. Det virker altså en ekstern kraft på systemet (definert som deg og isklumpen) og bevegelsesmengden langs denne aksen er derfor ikke bevart.

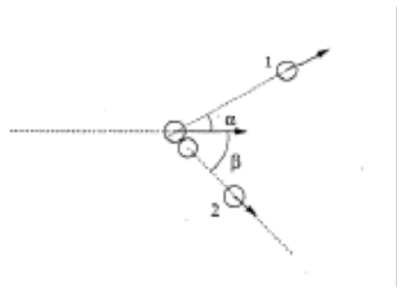
4 Oppgaver

2. Et romskip ($m = 2150$ kg) i verdensrommet fyrer av rakettmotorene sine som påvirker romskipet med en kraft gitt av $F = At^2$.
   (a) Gitt at kraften er 781.25 N når $t = 1.25$ s, hvor stor er A (oppgitt i SI enheter) [Tallsvar: $A = 500$ N/s^2]
   (b) Hvor stor er impulsen som virker på skipet fra rakettmotoren fra $t = 1.50$ s til $t = 2.00$ s? [tallsvar:770 Ns]
   (c) Hva blir endringen i romskipets hastighet i intervallet angitt i b)? [tallsvar: 0.358 m/s]

Solution: a) $A = F/t^2$.
b) $I = \int F dt = \left[\frac{1}{3}At^3\right] \Rightarrow I = 770$ Ns.
c) $I = \Delta p = m\Delta v$. $\Delta v = \frac{I}{m} = 0.358$ m/s
(Ser bort fra massendring av raketten...)

3. En ishockeypuck med hastighet $v_1 = 40.0$ m/s treffer en annen ishockeypuck som ligger i ro på isen (med neglisjerbar friksjon). De to puckene har samme masse. Etter støtet observerer vi at den ene pucken beveger seg ut fra kollisjonspunktet i en vinkel $\alpha = 30°$ og den andre i en vinkel $\beta = 45°$ i forhold til retningen den innkommende pucken beveget seg i før støtet.
   (a) Tegn figur!

Solution:



   (b) Hvor stor er farten til hver av de to puckene like etter støtet?

Solution:
De to massene er like, og kan derfor forkrtes bort fra alle regninger. Bevaring av vektoren bevegelsesmengde gir da

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}.$$

På komponentform

$$v_{1i} = v_{1f}\cos\alpha + v_{2f}\cos\beta,$$
$$0 = v_{1f}\sin\alpha - v_{2f}\sin\beta.$$

Ved innsetting av oppgitte tallverdier får man da

$$40m/s = v_{1f}\frac{\sqrt{3}}{2} + v_{2f}\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$v_{1f}\frac{1}{2} = v_{2f}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

som leder til

$$v_{1f} = 29.3m/s,$$
$$v_{2f} = 20.7m/s.$$

(c) Hvor stor del av den kinetiske energien går tapt i støtet? [tallsvar: 19.6 %]

Solution: Den kinetiske energien før og etter støtet er gitt av

$$K_i = \frac{1}{2}mv_{1i}^2, K_f = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2.$$

Det relative energitapet i støtet er da

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2 - v_{2f}^2}{v_{1i}^2} = 19.6\%.$$

4. To stålkuler, med masser m_1 og m_2, er hengt opp i samme punkt med tynne snorer, begge med lengde l (se figur **??**). Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal (og strukket), og slippes så. Den svinger nedover, treffer kula med masse m_2 (sentralt støt) – og kulene spretter fra hverandre igjen. Anta fullstendig elastisk støt og masseløse snorer. Betrakt kulene som punktmasser. Tyngdens akselerasjon er g

(a) Finn uttrykk for hastigheten v_{1f} til kula med masse m_1 og snorkraften T_{1f} i snora som masse m_1 henger i, like før støtet.

Solution: Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 = m_1 g l \Rightarrow v_{1f} = \sqrt{2gl}.$$

Strekkraften (når vi ser verden fra det akselererte utsiktspunktet til massen m_1) er gitt av summen av vekten $m_1 g$ og sentrifugalkraften $m_1 v_{1f}^2/l$,

$$T_{1f} = m_1 g + m_1 v_{1f}^2/l = 3m_1 g.$$

(b) Finn så uttrykk for hastigheten v_{1e} til kula med masse m_1 og hastigheten v_{2e} til kula med masse m_2 like etter støtet. Bruk Python til å plotte v_2e som en funksjon av m_1/m_2. Sjekk om grensene $m_1 \ll m_2$ og $m_1 \gg m_2$ gir det du forventer.

Solution: Siden støtet mellom m_1 og m_2 er perfekt elastisk, er både energi og bevegelsesmengde bevart. Derved har vi to ligninger til bestemmelse av de to ukjente v_{1e} og v_{2e}.
Siden vi regnet v_{1f} som positiv, innebærer det at hastigheter rettet mot venstre er positive, mens de som er rettet mot høyre er negative. (Vi kunne selvsagt valgt omvendt fortegnskonvensjon). De to ligningene er:

I $m_1 v_{1f} = m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e}$ (bevarelse av bevegelsesmengde),

II $m_1 v_{1f}^2/2 = m_1 v_{1e}^2/2 + m_2 v_{2e}^2/2$ (energibevarelse - elastisk støt).

Ligningene kan omskrives til:

I $m_1(v_{1f} - v_{1e}) = m_2 v_{2e}$,

II $m_1(v_{1f} - v_{1e})(v_{1f} + v_{1e}) + m_2 v_{2e}^2$.

Dersom vi så dividerer (II) med (I) finner vi:

$$v_{1f} + v_{1e} = v_{2e}.$$

Sammen med ligning (I), dividert med m_1, gir denne siste ligningen umiddelbart:

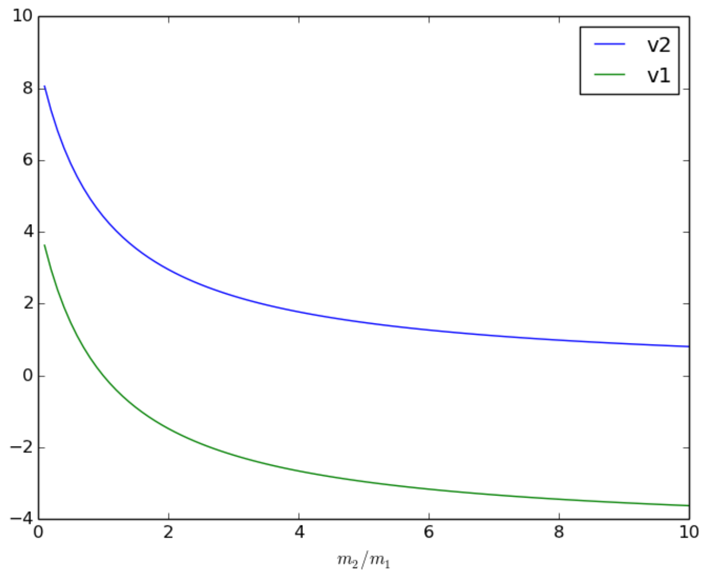
$$\begin{aligned} v_{2e} &= \frac{2v_{1f}}{1 + m_2/m_1} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1f}, \\ v_{1e} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1f}. \end{aligned}$$

Dersom $m_2 \gg m_1$ vil vi forvente at m_1 spretter tilbake. I den grensen blir resultatet over, $v_{1e} = -v_{1f}$ og $v_{2e} = 0$, som forventet. Omvendt, dersom $m_2 \ll m_1$ ville vi forvente at m_1 fortsetter med (tilnærmet) uendret hastighet etter støtet. Vårt resultat gir $v_{1e} = v_{1f} = 2v_{2e}$ i denne grensen.

Enkelt Python-skript som viser etterhastighetene gitt et forhold mellom massene:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

v1 = 4.43
dm = np.linspace(0.1,10,100) #dm = m2/m1
plt.plot(dm,v1*2/(dm+1),label='v2')
plt.plot(dm,v1*(1-dm)/(1+dm),label='v1')
plt.show()
plt.xlabel('$m_2/m_1$')
plt.legend()
```



Fra figuren ser vi at om massene er like store blir $v_1 = 0$ og $v_2 = 4.43$ (altså all bevegelsesmengde overført). Dersom m_1 er større enn m_2 (m_2/m_1 liten) vil begge gå i positiv retning. Dersom m_2 er større enn m_1 vil m_2 få en liten fart forover mens m_1 vil være negativ (spretter tilbake).

(c) Finn dernest uttrykk for snorkreftene T_{1e} og T_{2e} like etter støtet.

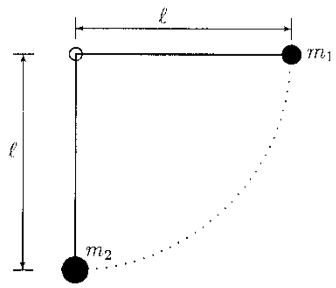
Solution: Strekkreftene etter støtet finnes igjen som summen av vekt og sentrifugalkraft

$$T_{1e} = m_1 g \left[1 + 2\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right],$$
$$T_{2e} = m_2 g \left[1 + 2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\right].$$

(d) Sett til slutt inn $m_1 = 10$ g, $m_2 = 20$ g, $l = 1$ m og $g = 9.8$ m/s^2, og finn tallverdier for v_{1f}, v_{1e}, v_{2e}, T_{1f}, T_{1e} og T_{2e}. Kontroller at uttrykkene dine har riktige dimensjoner.

Solution:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= 4.43\text{m/s}, \\ v_{1e} &= -1.48\text{m/s}, \\ v_{2e} &= 2.95\text{m/s}, \\ T_{1f} &= 0.294\text{N}, \\ T_{1e} &= 0.12\text{N}, \\ T_{2e} &= 0.37\text{N}. \end{aligned}$$



Figur 1: Oppgave 4

5. I denne oppgava skal vi se på en uelastisk kollisjon mellom to legemer 1 og 2, begge med masse m og hastighet v. Før kollisjonen (se figur 2) beveger 1 seg langs x-aksen, mens 2 kommer inn med en vinkel θ. Etter kollisjonen beveger de sammenklistrede legemene seg med (felles) hastighet $\mathbf{v} = [v_x, v_y]$

(a) Finn uttrykk for vektorkomponentene v_x og v_y, og vis at bevegelsesmengden p_f etter støtet kan uttrykkes som

$$\mathbf{p}_f = mv[1 + \cos\theta, \sin\theta]$$

Solution: I denne oppgaven må vi utnytte bevaring av bevegelsesmengde i x- og y-retning.

$$\begin{aligned} &\text{x}: \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\theta &&= (m_1 + m_2) v_x, \\ &\text{y}: \quad 0 + m_2 v_2 \sin\theta &&= (m_1 + m_2) v_y. \end{aligned}$$

Ettersom $m_1 = m_2 = m$ og $v_1 = v_2 = v$ får man:

$$v_x = \frac{v(1 + \cos\theta)}{2},$$
$$v_y = \frac{v\sin\theta}{2}.$$

Bevegelsesmengde finner vi:

$$\begin{aligned}\vec{p}_f &= (m_1 + m_2)[v_x, v_y] \\ &= 2mv\frac{1}{2}[1 + \cos\theta, \sin\theta].\end{aligned}$$

(b) Finn uttrykk for den kinetiske energien før støtet (K_i), og etter støtet (K_f), og vis at

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

Solution: Kinetisk energi,

$$\begin{aligned}K_i &= 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \underline{= mv^2}, \\ K_f &= \frac{1}{2}(2m)\left(v_x^2 + v_y^2\right) \\ &= m\left[\frac{1}{4}v^2(1 + \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}v^2\sin^2\theta\right] \\ &\underline{= \frac{1}{2}mv^2(1 + \cos\theta).}\end{aligned}$$

Dermed:

$$\underline{\frac{K_f}{K_i} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta).}$$

(c) Plott uttrykket fra b) på intervallet $\theta \in (0, 360^\circ)$ ved hjelp av Python, og diskuter kort K_f/K_i for tilfellene $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, og 270°.

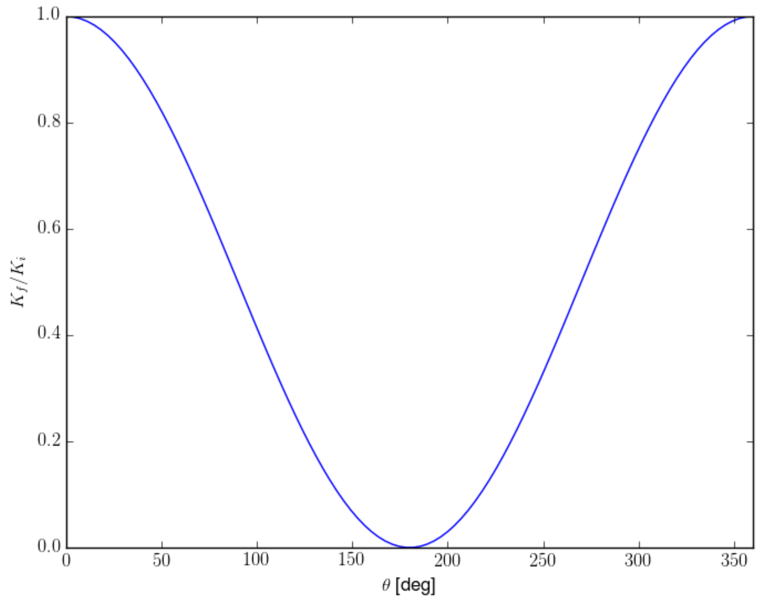
Solution:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

deg = np.linspace(0,360,100)
plt.plot(deg,0.5*(1+np.cos(np.radians(deg))))

plt.rc('text', usetex=True) # Use latex with labels
plt.xlabel(r'$\theta$␣[deg]')
plt.ylabel(r'$K_f/K_i$')
plt.xlim(0, 360)
plt.show()
```

Dette skriptet produserer figuren:

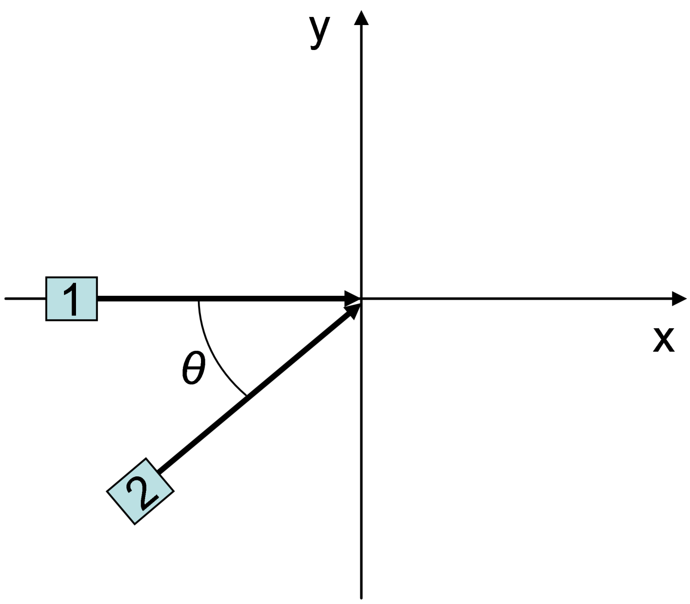


Siden energi ikke er tilført systemet må $K_f/K_i \leq 1$ og $K_f/K_i > 0$.

$\theta = 0° \Rightarrow K_f/K_i = 1$: Dette er et rimelig svar siden legemene kommer fra samme retning, og henger sammen etter å ha passert origo. Ikke "ordentlig" kollisjon.

$\theta = 180° \Rightarrow K_f/K_i = 0$: Her møtes to legemer "front-mot-front" med samme masse og hastighet. Jamfør uttrykket i a) blir $\vec{p}_f = \vec{0}$, dvs. $v_x = v_y = 0$. All den kinetiske energien er tapt.

$\theta = 90°, 270° \Rightarrow K_f/K_i = 1/2$: "Sidekollisjon". Halvparten av den opprinnelige kinetiske energien er tapt.



Figur 2: Oppgave 5

5 Repetisjon

6. Den menneskelige kropp kan maksimalt overleve en akselerasjon på 250 m/s^2. Anta at du er i en kollisjon og at du bremses av en kollisjonspute. Dersom hastigheten din er 50 km/t, hva er den minste strekningen som kollisjonsputene kan stoppe deg uten at akselerasjonen blir for stor? Vi antar at kraften fra puten på deg er konstant.

Solution: En kollisjonspute har allerede begynner å slippe ut luft så snart du treffer den for å gjøre akselerasjonen så jevn så mulig. Akselerasjonen vil nok ikke være konstant men det er en grei første approksimasjon som gir oss størrelsesordner på hvor langt man beveger seg. Se figur 3 for faktiske data.

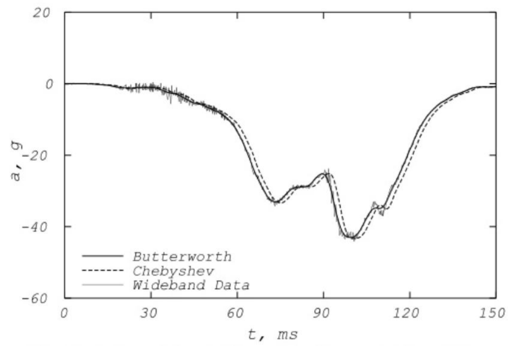
Vi setter opp de kinematiske likningen for konstant akselerasjon (den uten t):

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$
$$x_0 = 0, v = 0 \Rightarrow x = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{(50\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 250\,\mathrm{m/s^2}} = 0.50\mathrm{m}.$$

Man kan også tenke at kollisjonsputen må gjøre et arbeid W for å redusere den kinetiske energien. Vi får da

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F ds = mas$$

som gir samme resultat som å bruke kinematikk.



Figur 3: Akselerasjonen til en brystkasse i en testkollisjon.

7. Et horisontalt brett (eller en skål) på 1.50 kg er festet på en vertikal ideell spiralfjær med fjærkonstant $k = 185$ N/m. En metallkule med masse 275 g ligger på brettet. Fjæra er festet under brettet, slik at dette kan oscillere opp og ned. Brettet med kula blir så presset 15.0 cm under sin likevektsposisjon. Denne nye posisjonen benevnes posisjon A. Brettet med kula slippes deretter fra sin tilstand i ro i posisjon A.

   (a) Etter en viss tid forlater kula brettet. Hvor høyt over posisjon A er brettet kommet idet dette skjer? (Tips: Dette skjer *ikke* idet brettet og kula har maksimal hastighet.) [Svar: 24.4 cm]

   Solution: Den største akselerasjonen nedover ballen kan ha er g, mens brettets akselerasjon avhenger av fjærkraften. Når akselerasjonen nedover til brettet er høyere enn g, forlater ballen brettet.

   Vi har posisjonen til brettet gitt av: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Kraften nedover fra fjæren er $F = kd$, der d er distansen objektet er over likevektpunktet. Akselerasjonen til brettet har derfor størrelsen $\frac{F}{m} = \frac{kd}{m}$, der m er den totale massen av ballen og brettet. $x = A$ ved $t = 0$, derfor er fasevinkelen ϕ null og $+x$ er rettet nedover.

$$\frac{kd}{m} = g \Rightarrow d = \frac{mg}{k} = \frac{(1.775\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)}{180\text{N/m}} = 9.40\text{cm}.$$

Dette punktet er 9.40cm over likevektspunktet, og er derfor $9.40 + 15.0\text{cm} = 24.4\text{cm}$ over punkt A.

(b) Hvor lang tid går fra brettet med kula blir sluppet i posisjon A og til kula forlater brettet? [Svar: 0.221 s]

Solution:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10.2\text{rad/s}.$$

Punktet i del a) er over likevektspunktet så $x = -9.40\text{cm}$. $x = A\cos(\omega t)$ gir

$$\begin{aligned} \omega t &= \arccos\left(\frac{x}{A}\right) \\ t &= \frac{\arccos\left(\frac{x}{A}\right)}{\omega} \\ &= \frac{\arccos\left(\frac{-9.40\text{cm}}{15.0\text{cm}}\right)}{10.2\text{rad/s}} = 0.221\text{s}. \end{aligned}$$

(c) Hva er farten til kula idet den forlater brettet? [Svar 1.19 m/s]

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \\ v &= \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{\frac{185\text{N/m}}{1.775\text{kg}}([0.150\text{m}]^2 - [-0.0940\text{m}]^2)} = 1.19\text{m/s}. \end{aligned}$$