TFY 4125 Øving 6

Denne øvingen dreier seg om **rotasjonsdynamikk**.

1 Les

Penusm denne uker er kapittel 9 og 10.1-10.4 i Y&F. Les spesielt 9.4, 9.5 og 10.1-10.3.

2 Se

Sjekk ut denne: `https://www.youtube.com/watch?v=GeyDf4ooPdo`

3 Grunnleggende

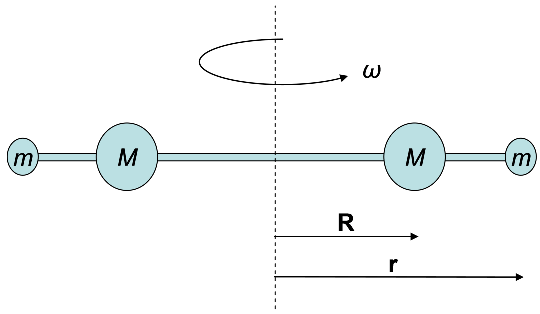
1. I kinematikken har vi størrelsene r, v og a. Hva heter de tilsvarende størrelsene i rotasjonsmekanikken? Hva er relasjonen mellom de lineære størrelsene og rotasjonsstørrelsene for en partikkel som følger en sirkelbane med radius R?

> **Solution:** Tilsvarende rotasjonsstørrelser er θ, ω og α.
>
> Relasjon mellom lineær og rotasjon:
>
> $$b = R\theta$$
> $$v = R\omega$$
> $$a = R\alpha$$

2. Et hjul roterer med $3.0 \cdot 10^3$ omdreininger per sekund. Hva er perioden T og vinkelhastigheten ω (i radianer per sekund) til rotasjonen? Dersom hjulet har radius $r = 1.5$ m, hva blir banehastigheten? Hvis det satt en kloss med masse $m = 1.0$ kg ytterst på hjulet, hva blir kraften som virker på klossen for å holde den i denne bevegelsen? Er det realistisk å realisere et slikt system?

> **Solution:** Vinkelhastighet
>
> $$\omega = 3 \cdot 10^{-3} \text{ rot/s} \cdot 2\pi \text{ rad/rot} = 19 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$
>
> Periode
>
> $$T = 2\pi/\omega = 0.33 \text{ ms}$$
>
> Banehastighet
>
> $$v = R\omega = 1.5 \text{ m} \cdot 19 \cdot 10^3 \text{ rad/s} = 28 \text{ km/s}$$
>
> Klossen følger en uniform sirkelbevegelse og da er alltid den totale kraften gitt av sentripetalkraften.
>
> $$F = m\frac{v^2}{R} = 0.53\,\text{GN}$$

Et slikt system er neppe realiserbart. Kraften er altfor stor. En slik rotasjon vil rive i stykker systemet. Roterende hjul har vært brukt til å lagre energi i mange ulike applikasjoner (se f.eks `http://en.wikipedia.org/wiki/Flywheel_energy_storage`) men en begrensning for mengden energi som kan lagres er hvor stor sentripetalkraft materialet kan tåle.



Figur 1: Oppgave 3

3. Fire punktmasser, symmetrisk plassert på en tynn og meget lett stav, roterer om senteraksen slik figur 1 antyder. Vi antar at ω = 2,0 rad/s, m = 1,0 kg, M = 4,0 kg, r = 35 cm og R = 19 cm

   (a) Finn hastigheten til hver av partiklene, og beregn systemets totale kinetiske energi

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Solution: Hastigheten til de store massene: $V = \omega R = 2,0\text{s}^{-1} \cdot 0,19\text{m} = 0,38\text{m/s}$.

Hastigheten til de små massene: $v = \omega r = 2,0\text{s}^{-1} \cdot 0,35\text{m} = 0,70\text{m/s}$.

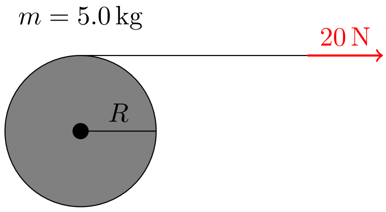
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(mv^2 + mv^2 + MV^2 + MV^2\right) \\ &= m\omega^2 r^2 + M\omega^2 R^2 \\ &= \omega^2(mr^2 + MR^2) \\ &\underline{\approx 1,1\text{kgm}^2/\text{s}^2}. \end{aligned}$$

   (b) Beregn treghetsmomentet I. Regn ut den kinetiske energien ved hjelp av I, og sammenlign svaret med resultatet i a).

Solution:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = mr^2 + mr^2 + MR^2 + MR^2 \\ &= 2mr^2 + 2MR^2, \\ K = K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} I\omega^2 \underline{= \omega^2(mr^2 + MR^2)}. \end{aligned}$$

4. En uniform 5,00 kg skive har radius 0,12 m og er hengt opp slik at den roterer fritt om sin senterakse. Ei snor trekkes med en kraft på 20,0 N, se figur 2.



Figur 2: Oppgave 4. Sentrum av skiven står fast.

(a) Hva er dreiemomentet fra krafta om rotasjonsaksen?

Solution:

$$\tau = RF = 0,12 \cdot 20\text{Nm} = \underline{2,4\text{Nm}}.$$

(b) Hva er vinkelakselerasjonen til skiven?

Solution:

$$\tau = I\alpha, I = \frac{1}{2}MR^2$$
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{RF}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR} \underline{= 67\text{s}^{-2}}.$$

(c) Hva er vinkelhastigheten etter 5,0 s, hvis skiven startet i ro?

Solution:

$$\omega = \alpha t \underline{3,3 \cdot 10^2\text{s}^{-1}}.$$

(d) Hva er den kinetiske energien etter 5,0 s?

Solution:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \underline{= 2,0\text{kJ}}.$$

(e) Hvor stor er den totale vinkelendringen?

Solution: Begynner uten rotasjon.

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

(f) Vis at arbeidet gjort av dreiemomentet er lik den kinetiske energien.

Solution:

$$W = \tau\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha\tau t^2 = 2,0\text{ kJ}.$$

5. **(Y&F Eksempel 10.7)** En tynn sylinder med masse $m = 2.00$ kg ruller, uten å skli, nedover et plan med $\theta = 38°$.

   (a) Hva blir sylinderens akselerasjon? [Svar: $a_{cm-x} = 4.0 \text{m/s}^2$]

   (b) Hva er friksjonskraften? [Svar: $f = 4.0$N]

   Solution: Om man setter opp et diagram over kreftene på sylinderen ser man at kun friksjonskraften påvirker objektet vekk fra sentrum og resulterer i et dreiemoment.
   Antar at sylinderen ikke sklir.
   Setter opp Newtons andre lov for sylinderen langs planet:

   $$\sum F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_{cm-x}.$$

   Her er f friksjonskraften, og betegnelsen a_{cm-x} betyr akselerasjonen til massesenteret langs x-aksen.
   Setter så opp den tilsvarende rotasjonslikningen:

   $$\sum \tau_z = fR = I_{cm}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z.$$

   Her har vi bruke treghetsmomentet $I = \frac{1}{2}MR^2$.
   Fra antakelsen at sylinderen ikke sklir har vi $a_{cm-x} = R\alpha_z$. Denne sammenhengen bruker vi til å eliminere α_z, slik at vi får likningssystemet:

   $$\begin{aligned} fR &= \frac{1}{2}MRa_{cm-x}, \\ f &= Mg\sin\theta - Ma_{cm-x}. \end{aligned}$$

   Vi har nå to likninger for de to ukjente a_{cm-x} og f. Vi setter inn for f i første likning og løser for a_{cm-x}:

   $$\begin{aligned} (g\sin\theta - a_{cm-x})MR &= \frac{1}{2}MRa_{cm-x} \\ g\sin\theta - a_{cm-x} &= \frac{1}{2}a_{cm-x} \\ a_{cm-x} &= \underline{\frac{2}{3}g\sin\theta.} \end{aligned}$$

   Uttrykket for akselerasjonen kan vi sette inn i uttrykket for friksjonskraften:

   $$f = \frac{1}{3}Mg\sin\theta.$$

   Setter vi inn tallverdier for m og θ finner vi $a_{cm-x} = 4.0\text{m/s}^2$ og $f = 4.0$N.

   (c) Hvor stor må friksjonskoeffisienten være for å hindre at sylinderen sklir?

4 Oppgaver

6. En pulsar er en hurtig roterende nøytronstjerne som sender ut radiopulser vi mottar med helt presise tidsintervall. En puls mottas for hver omdreining av stjernen. Perioden T, tiden det tar å rotere 360°, måles ved å måle tidsrommet mellom pulsene. I 2007 hadde pulsaren i den sentrale delen av Krabbetåken en rotasjonsperiode T = 0.033 s, og perioden øker med 1.26 $\cdot 10^{-5}$ s per år.

(a) Vis at sammenhengen mellom vinkelhastighet og periode er gitt ved $\omega = 2\pi/\mathrm{T}$.

Solution: Vinkelhastigheten er definert som $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. Når vinkelhastigheten (i tilstrekkelig god tilnærmelse) kan regnes som konstant, er en periode gitt som:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^T \omega dt = \omega T.$$

(b) Hvor stor er vinkelakselerasjonen [svar: $\alpha = -2.30 \cdot 10^{-9} rad/s^2$.]?

Solution: Vinkelakselerasjonen er gitt som

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 2\pi \frac{d}{dt} T^{-1} = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt}.$$

Med de oppgitte tallene blir dette

$$\alpha = -\frac{2\pi}{(0.033)^2 s^2} \frac{1.25 \cdot 10^{-5} s}{365 \cdot 24 \cdot 3600 s} = \underline{-2.30 \cdot 10^{-9} rad/s^2}.$$

(c) Når vil rotasjonen stoppe dersom vinkelakselerasjonen er konstant (verdi som i b)? [År 4626]

Solution: Med konstant (her: negativ) vinkelakselerasjon er $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, der $\omega_0 = \omega(0)$. Rotasjonen stopper (dersom α virkelig holder seg konstant!) ved tida τ:

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \alpha\tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\omega_0}{-\alpha} = \frac{2\pi}{T}\frac{T^2}{2\pi(dT/dt)} = \frac{T}{dT/t}.$$

Med de oppgitte tallene gir dette $\tau = (0.033/1.26 \cdot 10^{-5}) = 2619$ år, slik at (dersom vi antar at målingene er helt ferske) rotasjonen vil opphøre om 2619 år.

(d) Pulsaren oppsto i en supernovaeksplosjon som ble observert av kinesiske astronomer i år 1054. Hva var rotasjonsperioden på det tidspunktet? [T = 0.024s]

Solution: Dersom vinkelakselerasjonen er konstant, finner vi (med $\Delta t = 1054 - 2007 = -953$ år),

$$\omega(1054) = \omega_0 + \alpha\Delta t = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T^2} \cdot \frac{dT}{dt}\Delta t = \frac{2\pi}{T}\left(1 - T^{-1}\frac{dT}{dt}\Delta t\right).$$

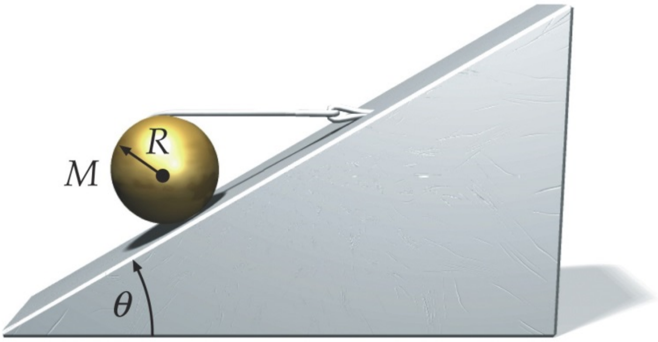
Dermed er

$$T(1054) = \frac{T}{1 - T^{-1}(dT/dt)\Delta t} = \frac{0.033}{1 - [1.26 \cdot 10^{-5} \cdot (-953)]/0.033} s = \underline{0.024 s}.$$

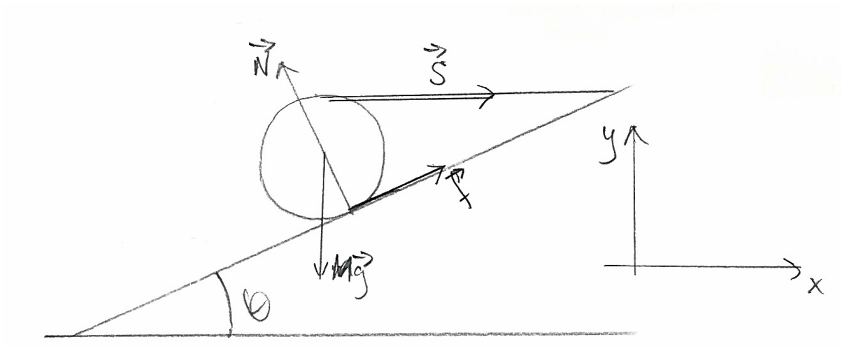
7. Ei kompakt uniform kule med radius R og masse M holdes i ro på et skråplan med vinkel θ ved hjelp av ei horisontal snor, som vist i figur 3. Anta R = 20 cm, M = 3.0 kg og $\theta = 30°$.

(a) Tegn kraft-legeme diagram for kula.

Solution:



Figur 3: Oppgave 7



(b) Hva er spenningen i snora (snordraget) [Tallsvar: 7.89 N]?

Solution: Siden kulen står i ro har vi her en statikkoppgave:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \sum \vec{\tau} = \vec{0}.$$

Snordraget finner vi ved å sette inn i disse summene. Vi ser på krefter langs skråplanet og vinkelrett på.

$$\begin{aligned} x &: f\cos\theta + S - N\sin\theta = 0, \\ y &: f\sin\theta + N\cos\theta - Mg = 0, \\ \tau &: fR - SR = 0. \end{aligned}$$

De ukjente her er kreftene f, S og N. Vi har tre likninger, og begynner med å løse for S. Ser først at $f = S$. Bruker dette til å finne:

$$S\cos\theta + S - N\sin\theta = 0 \Rightarrow N = \frac{S(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$
$$S\sin\theta + N\cos\theta - Mg = 0$$

$$S\sin\theta + \frac{S(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\theta - Mg = 0$$
$$S(\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta) = Mg\sin\theta$$
$$S = \frac{Mg\sin\theta}{1+\cos\theta} \underline{= 7.89\text{N}}.$$

(c) Hva er normalkrafta på kula fra skråplanet? Kommenter svaret! [Tallsvar: 29.4 N]

Solution:

$$N = \frac{S(1+\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{Mg\sin\theta}{(1+\cos\theta)}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta} = \underline{Mg = 29.4\text{N}}.$$

Kommentar: kuler har samme normalkraft som om den skulle lagt på flat mark. Her ser vi at snordraget også gir et bidrag til normalkraften.

(d) Hvor stor er friksjonskraften som virker på kula (størrelse og retning)?

Solution:

$$f = S = 7.89\text{N}.$$

Siden kulen ikke roterer må friksjonskraften og snordraget være like store. Kreftene er rettet som vist i figuren i a).

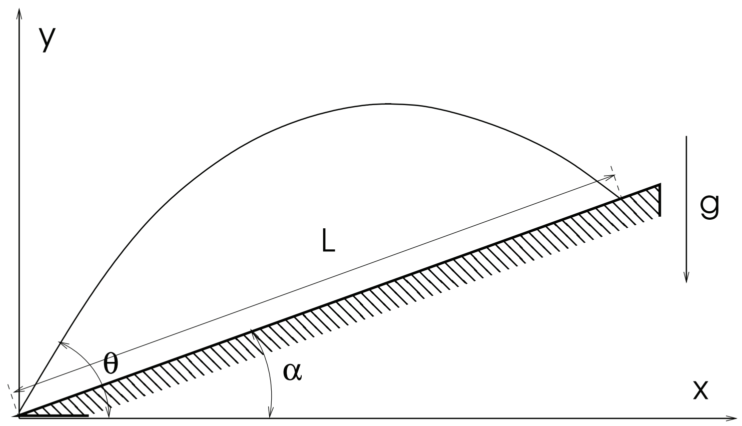
(Full utledning, endelig uttrykk og tallsvar ønskes som vanlig i alle deloppgavene).

5 Repetisjon

8. En pil skytes fra bakkenivå oppover en bakke med konstant helningsvinkel α. Pilen har en utgangshastighet v_0, og en utgangsvinkel θ i forhold til horisontalplanet ($\theta > \alpha$). Vi ser bort fra luftmotstanden. Rekkevidden til skuddet (avstanden langs bakken fra startpunkt til nedslagspunkt) betegner vi med L.

(a) Tegn figur!

Solution:



(b) Finn tida t_b før pilen treffer bakken og vis at $L = \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g\cos\alpha}\cdot(\tan\theta - \tan\alpha)$.

Solution: Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er startbetingelsene

$$x(0) = 0, y(0) = 0,$$
$$v_x(0) = v_0\cos\theta, v_y(0) = v_0\sin\theta.$$

I x-retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) =$

$v_0 \cos\theta \cdot t$. I y-retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_o \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pilen treffer bakken ved tiden t_b, har den beveget seg $x(t_b)$ i x-retningen og $y(t_b)$ i y-retningen. Da må ifølge figuren $y(t_b)/x(t_b) = \tan\alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin\theta \cdot t_b - \frac{1}{2}gt_b^2}{v_0 \cos\theta \cdot t_b} = \tan\alpha \Rightarrow \underline{t_b = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin\theta - \cos\theta \tan\alpha)}.$$

Rekkevidden blir da:

$$L = \frac{x(t_b)}{\cos\alpha} = \frac{v_0 \cos\theta \cdot t_b}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos\theta \sin\theta - \cos^2\theta \tan\alpha)}{g \cos\alpha} \underline{= \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta}{g \cdot \cos\alpha}(\tan\theta - \tan\alpha)}.$$

(c) Finn den vinkelen, θ_{maks}, som gir maksimal rekkevidde. Sjekk svaret for $\alpha = 0$.

OPPGITT: $1/\tan\alpha = -\tan(\alpha + \pi/2)$. Formler for $\sin 2\theta$ og $\cos 2\theta$ kan også være nyttige.

Solution: Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp θ og sette den deriverte lik null.

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\frac{d}{d\theta}\big(\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta\tan\alpha\big) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\big(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin\theta\tan\alpha\big) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos 2\theta + \sin 2\theta\tan\alpha\right).
\end{aligned}$$

Setter $\frac{dL}{d\theta} = 0$ og løser mhp θ:

$$\tan 2\theta_{\text{maks}} = -\cot\alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \Rightarrow \theta_{\text{maks}} \underline{= \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_{\text{maks}} = 45°$, i tråd med erfaringer.