TFY 4125 Øving 1

Denne uken omhandler kinematikk som dekkes i Young and Freedman, University physics (Y&F) kapittel 2 og 3. Du får trening i å bruke kinematiske likninger samt kjennskap til sentrale begreper og størrelser. I tillegg skal du sørge for at du har tilgang til en fungerende Python installasjon, få litt trening i bruk av noen enkle funksjoner i python spesielt og numerisk fysikk generelt.

1 Les

I Y&F, les kapittel 1.5, 2.6 (resten av kapittel 2 er forventet kjent fra videregående) og 3 (spesielt 3.2-3.4). Gå gjennom python introduksjon 1 som du finner på Blackboard under *ekstra litteratur* (`python_tutorial1.pdf`). En annen god introduksjon til å plotte i Python finner du her: `https://nbviewer.jupyter.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/basic_plotting.ipynb`.

2 Se

Det fins mange fantastiske videoer om fysikk på nettet som er en flott ressurs dersom du vil ha et tillegg/alternativ til bok eller forelesning. Her er en forelesning fra MIT som oppsummerer mye av den grunnleggende kinematikken fra videregående. Dersom du kommer over noen bra videoer si gjerne i fra så flere kan få glede av det.

`https://www.youtube.com/watch?v=8tTwp4XX-5Y`

3 Python og numerisk fyskk

1. I dette kurset trenger du en fungerende Python installasjon med bibliotekene `matlibplot` og `numpy`. Det er viktig at du venner deg til å bruke Python fra dag én da det er et nødvendig verktøy i mange oppgaver, i labben og relevant for eksamen. Du er fri til å velge distribusjon av Python som du ønsker men en svært enkel løsning er å bruke NTNUs programvareserver `farm.ntnu.no` hvor du finner Python distribusjonen *Idle* under *Math and Statistics*.

2. I Python, lag en variabel som innholder en rekke med tallene fra 1 til 100 i rekkefølge (hint: `np.arange`). Hva er $\sum_{x=1}^{100} x$ (hint: `np.sum`) (Om du syns det er lettere å summere tallene for hånd enn å la datamaskinen gjøre det for deg så gjerne for meg...)

Solution:

```
import numpy as np
x=np.arange(1,101)
np.sum(x)
```

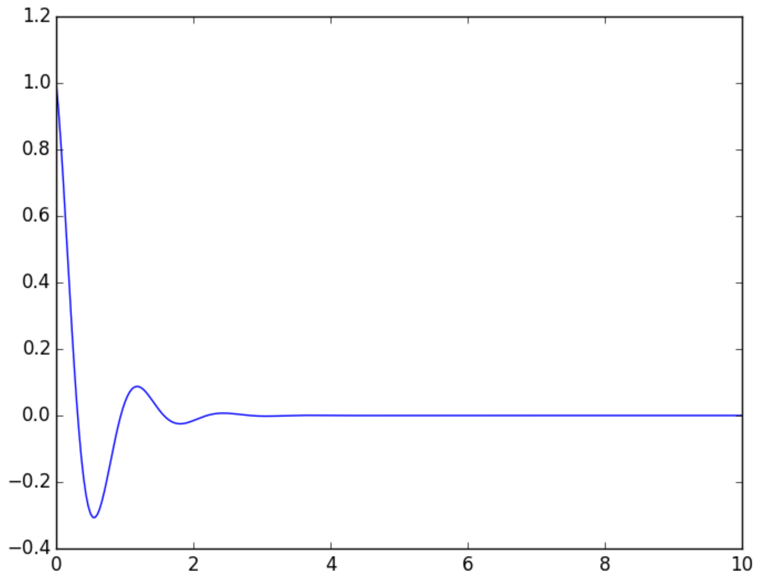
Summen av de hundre første heltallene er 5050.

3. Lag et plot av funksjonen $f(t) = \cos(\omega t)\exp(-at)$ (hint: `np.cos(), np.exp()`) som funksjon av t. La $\omega = 5$, $a = 2$ og plot funksjonen fra $t = 0$ til $t = 10$ (hint: `np.linspace()`).

Solution:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=2
omega=5

def f(t):
    return np.cos(omega*t) * np.exp(-a*t)

t1 = np.linspace(0,10,300) # fra 0 til 10 med 300 steg

plt.figure(1)
plt.plot(t1, f(t1))
plt.show()
```

Resulterende plot:



4 Grunnleggende/Repetisjon

4. (Y&F 1.6-1.10) Enhetsvektorer er dimensjonsløse vektorer med lengde eksakt lik 1. La $\mathbf{A} = (4.00\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{\imath}} + (3.00\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{\jmath}}$, $\mathbf{B} = (2.00\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{\imath}} - (3.00\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{\jmath}}$ og $\mathbf{F} = (8.00\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{\imath}} - (15.0\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{\jmath}}$

   (a) Beregn følgende størrelser, og sjekk om enhetene gir mening i alle tilfellene:
      i. A og B (Absoluttveridien/lengden av vektoren)
      ii. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ og $\mathbf{A}$–2$\mathbf{B}$
      iii. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
      iv. $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$
      v. $\mathbf{A}$–$\mathbf{F}$.

Solution:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{(4.00\,\mathrm{m})^2 + (3.00\,\mathrm{m})^2} \underline{= 5.00\,\mathrm{m}}$$
$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{2.00\,\mathrm{m})^2 + (3.00\,\mathrm{m})^2} \underline{= 3.61\,\mathrm{m}}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (4.00 + 2.00)\mathrm{m}\hat{\mathbf{\imath}} + (3.00 - 3.00)\mathrm{m}\hat{\mathbf{\jmath}} \underline{= 6.00\,\mathrm{m}\hat{\mathbf{\imath}}}$$
$$\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = (4.00 - 2 * 2.00)\ \mathrm{m}\hat{\mathbf{\imath}} + (3.00 - 2 * (-3.00))\ \mathrm{m}\hat{\mathbf{\jmath}} \underline{= 9.00\,\mathrm{m}\hat{\mathbf{\jmath}}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 4.00 * 2.00\mathrm{m}^2\hat{\mathbf{\imath}} \cdot \hat{\mathbf{\imath}} + 4.00 * -2.00\mathrm{m}^2\hat{\mathbf{\imath}} \cdot \hat{\mathbf{\jmath}} \\
&\quad + 3.00 * 2.00\mathrm{m}^2\hat{\mathbf{\jmath}} \cdot \hat{\mathbf{\imath}} + 3.00 * -3.00\mathrm{m}^2\hat{\mathbf{\jmath}} \cdot \hat{\mathbf{\jmath}} \\
&= 8.00\mathrm{m}^2 - 9.00\mathrm{m}^2 \underline{= -1.00\mathrm{m}^2} \\
\mathbf{F} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 8 & -15 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \mathrm{Nm} = \langle 0, 0, 8 * (-3) - 2 * (-15) \rangle \mathrm{Nm} \\
&\underline{= 6\mathrm{Nm}}
\end{aligned}$$

A–**F** Subtraksjon av vektorer med ulike enheter er meningsløst.

(b) La $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{a}}$. Uttrykk $\hat{\mathbf{a}}$ ved hjelp av $\hat{\mathbf{\imath}}$ og $\hat{\mathbf{\jmath}}$.

Solution: Bruker $A = 5.00$m fra forrige deloppgave.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 4.00\mathrm{m}\hat{\mathbf{\imath}} + 3.00\mathrm{m}\hat{\mathbf{\jmath}} = A\hat{a} = 5.00\mathrm{m}\hat{a} \\
\Rightarrow \hat{a} &= \frac{4.00\mathrm{m}}{5.00\mathrm{m}}\hat{\mathbf{\imath}} + \frac{3.00\mathrm{m}}{5.00\mathrm{m}}\hat{\mathbf{\jmath}} \\
&\underline{= 0.8\hat{\mathbf{\imath}} + 0.6\hat{\mathbf{\jmath}}}
\end{aligned}$$

(c) Kinetisk energi er gitt ved $K = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, hvor $m = 9.00$ kg i denne oppgaven. Beregn K for $\mathbf{v} = (2.00\ \mathrm{m/s})\hat{\mathbf{\imath}} - (3.00\ \mathrm{m/s})\hat{\mathbf{\jmath}}$. Hva skjer med K hvis $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$? Er K en skalar eller en vektor?

Solution:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 9.00\mathrm{kg} \cdot \langle 2.00, -3.00 \rangle \cdot \langle 2.00, -3.00 \rangle \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 9.00 \cdot (4 + 9)\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2 \\
&\underline{= 58.5\mathrm{J}}
\end{aligned}$$

Hvis vi endrer fartsvektoren,

$$\mathbf{v} \to -\mathbf{v},$$

finner vi,

$$K \propto \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (-\mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{v}) = v^2,$$

dvs. K er uendret. Dette er som forventet fordi kinetisk energi er en skalar: den har ikke noen retning.

5. Litt repetisjon...
   i. Skriv ned de to generelle differensiallikningene vi har i kinematikken.

ii. Hva er SI enhetene for hastighet og akselerasjon?

iii. Utled de to kinematiske likningene som vi har for spesialtilfellet med konstant akselerasjon.

Solution:
i) Den deriverte av posisjonen gir hastigheten, $v = r'$, og den deriverte av hastigheten gir akselerasjonen, $a = v'$.
ii)

- Hastighet: m/s
- Akselerasjon: m/s^2

iii) Dersom vi tar med starthastigheter og integrerer likningene i i) med konstant akselerasjon finner vi uttrykkene:

$$s = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t at' + v_0 dt' = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v = v_0 + \int_0^t a(t')dt' = v_0 + at.$$

6. (Y&F 2.6) En bil akselerer med en akselerasjon $a(t) = c_1 t - c_2 t^3$ hvor $c_1 = 3.0$ m/s^3 og $c_2 = 0.8$ m/s^5. Anta at bilen er i ro ved $t = 0$.

i. Hvor langt har bilen kjørt på 2.0 s?

Solution: For å finne ut hvor langt bilen har kjørt på 2.0s må vi integrere, først akselerasjon for å finne hastigheten, deretter, hastigheten for å finne forflytningen:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(t')dt' = \frac{c_1}{2}t^2 - \frac{c_2}{4}t^4 \\ s(t) &= \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \left(\frac{c_1}{2}t'^2 - \frac{c_2}{4}t'^4\right) dt' \\ &= \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{20}c_2 t^5. \end{aligned}$$

På 2.0 s har bilen kjørt:

$$\begin{aligned} s(t = 2.0\text{s}) =& \frac{1}{6}(3.0\text{m/s}^3) * (2.0\text{s})^3 - \frac{1}{20}(0.8\text{m/s}^5) * (2.0\text{s})^5 \\ =& 2.72\text{m} \\ =& \underline{2.7\text{m}}. \end{aligned}$$

ii. Hva er gjennomsnittshastigheten til bilen i forrige oppgave?

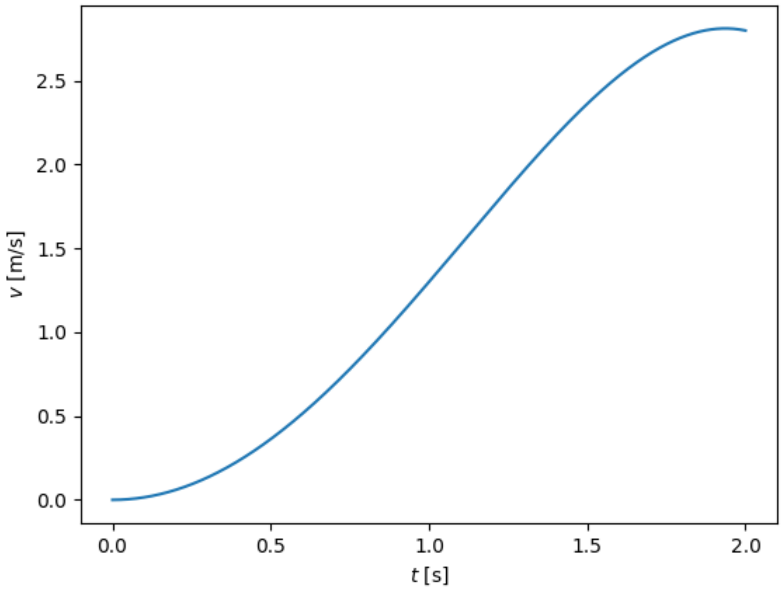
Solution: For å finne ut gjennomsnittshastighet tar vi strekning og deler på tid:

$$\bar{v} = \frac{s(t)}{t} = \frac{2.72\text{m}}{2.0\text{s}} = \underline{1.4\text{m/s}}.$$

iii. Bruk Python til å lage en graf som viser hastigheten til bilen fra $t = 0$ s til $t = 2$ s. Finn arealet under grafen numerisk (bestem også arealet analytisk - kanskje du allerede har gjort det?)

Solution:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

c1=3
c2=0.8

def v(t):
    return 0.5*c1*t**2-0.25*c2*t**4

N = 3000
t = np.linspace(0,2,N) # fra 0 til 2 med 300 steg

plt.figure(1)
plt.plot(t, v(t))
plt.xlabel('$t$␣[s]')
plt.ylabel('$v$␣[m/s]')
plt.show()

#Finne areal
v = v(t)
dt = 2.0/N #Lengde p tidssteg
ds = v*dt

s = np.sum(ds[0:N-2]) #Naive integration
s_trap = 0.5*ds[0] + np.sum(ds[1:N-2]) + 0.5*ds[1] #Trapezoidal rule


print(s,s_trap)
```



Arealet under grafen av hastigheten er lik avstanden i del i.

7. Anta at du har målt at en bil har kjørt 36.2 m på 1.7 s. Hva var gjennomsnittlig hastighet (med riktig antall signifikante siffer)?

Solution: 36.2 har tre signifikante siffer, mens 1.7 har to. Svaret skal derfor ha to signifikante siffer etter divisjon.

$$\frac{36.2}{1.7}\text{m/s} \underline{= 21\text{m/s}}.$$

5 Oppgaver

8. Et tog reiser fra stasjonen med konstant akselerasjon 4.0 m/s^2. En passasjer ankommer til et punkt på perrongen like ved siden av toget 1.0 s etter at den, uforsvarlig nok, fortsatt åpne togdøra dro derfra. Hva er den minste konstante hastighet passasjeren må løpe med for å komme seg med toget? (Utled en formel først og sett deretter inn verdier for tallsvar. Svar: 8.0 m/s) Plott ved hjelp av Python posisjon som funksjon av tid for både toget og passasjeren. Plott kurvene ved høyere og lavere hastighet for pasasjerene og tolk kurvene.

Solution:

$$\begin{aligned} & a_x = 4.0\text{m/s}^2 \\ \text{Strekning toget tilbakelegger :}\quad & s_t = \frac{1}{2}at^2, \\ \text{Strekning passasjer tilbakelegger :}\quad & s_p = v(t - t_0). \end{aligned}$$

Her er v passasjerens løpehastighet og t_0 passasjerens forsinkelse. Setter streknigene lik hverandre og løser for tiden for å finne ut når dette skjer:

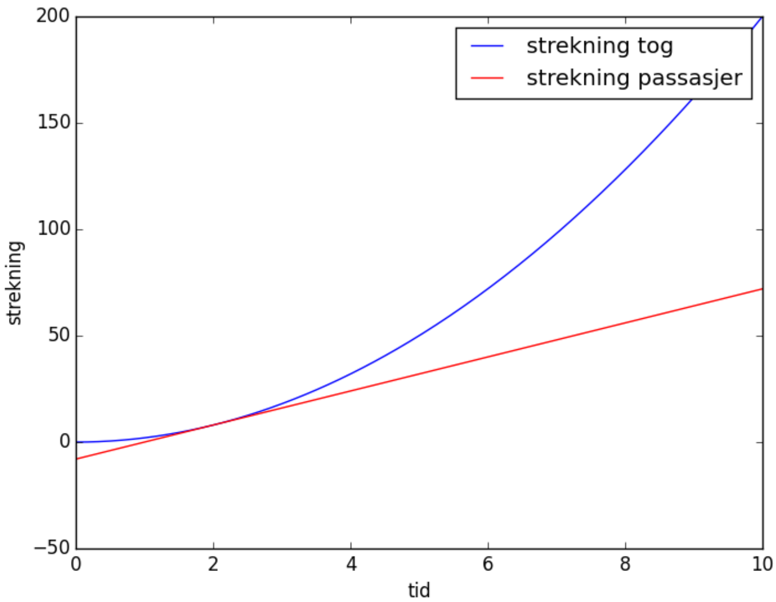
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}at^2 &= v(t - t_0) \\ t &= \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}avt_0}}{2 \cdot \frac{1}{2}a}. \end{aligned}$$

Vi ønsker én løsning for tiden (hvorfor?), og setter derfor kvadratroten lik null.

$$\begin{aligned} v^2 - 4 * \frac{1}{2}avt_0 &= 0 \\ \Rightarrow \underline{v = 2at_0}&. \end{aligned}$$

Innsatt gir dette $\underline{v = 8.0\text{m/s}}$.

Grensetilfellet er plottet i figuren under:



9. Et lokomotiv suser av gårde med hastigheten $v_0 = 30.0$ m/s, og passerer et flagg ved tiden $t = 0.00$s. Etter $t_1 = 120$ s skrus motoren av, og lokomotiv mister gradvis fart. Det viser seg at lokomotivets hastighet med motoren av kan beskrives ved likningen $v_x = v_0 t_1^2/t^2$.

   i. Hva er lokomotivets hastighet når $t = 4.00$ minutter (svar: 7.50 m/s)? Enn når $t \to \infty$? Plot ved hjelp av Python et diagram som viser lokomotivets hastighet som funksjon av tid. Her trenger du kanskje å koble sammen to rekker med tall a og b. Det kan gjøres i Python med `c = np.hstack((a,b))`. For å lage en rekker med like tall kan du bruke funksjonen `np.ones(N)` som lager en rekke med N ett-tall. Så kan denne rekken multipliseres med et vilkårlig tall for å få en lange rekke av disse tallene.

Solution:

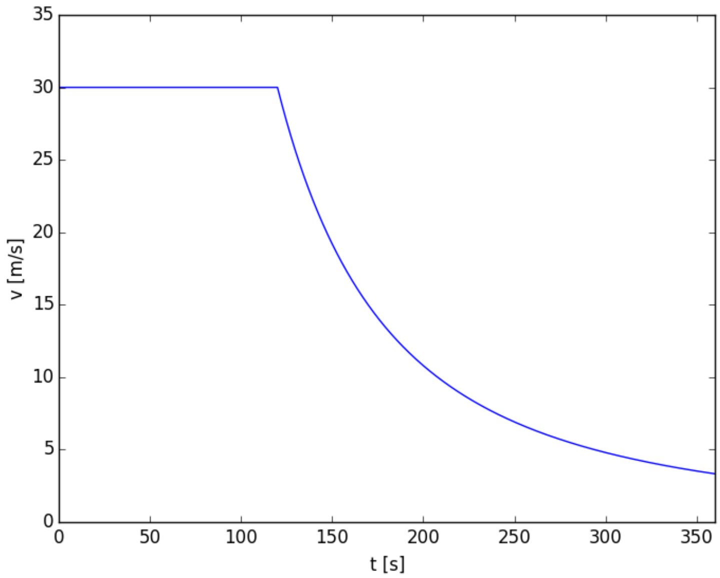
$$v_x = v_0 \frac{t_1^2}{t^2} = 30 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{(120\mathrm{s})^2}{(240\mathrm{s})^2}$$
$$\underline{= 7.50\mathrm{m/s}}$$

Plot av hastigheten kan man lage med følgende Python-kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t1 = 120
v0 = 30

def vx(t):
    return v0 * (t1*t1)/(t*t)

tp1 = np.arange(0,120)
tp2 = np.linspace(120,100000,1000000)

a = v0*np.ones(np.size(tp1))
b = vx(tp2)

c = np.hstack((a,b))
t = np.hstack((tp1,tp2))

plt.figure(1)
```

```
plt.plot(t, c)

plt.xlabel('t␣[s]')
plt.ylabel('v␣[m/s]')
plt.axis([0, 360, 0, 35])

plt.show()
```

Denne koden produserer figuren:

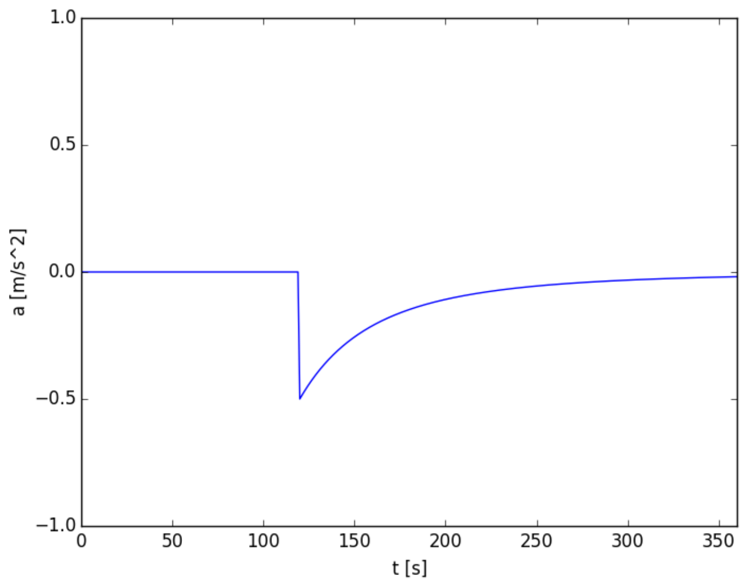


ii. Finn uttrykk for lokomotivets akselerasjon, $a(t)$. Plot ved hjelp av Python et diagram som viser $a(t)$. Du kan velge om du vil derivere numerisk eller plotte det analytiske uttrykket for a(t).

Solution:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_0 t_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right) = v_0 t_1^2 \,(-2)\, \frac{1}{t^3} \quad \text{for} \quad t > 120\text{s},$$
$$a_x = 0 \quad \text{for} \quad t < 120\text{s}.$$

Akselerasjonen kan plottes som hastigheten ble plottet i forrige figur:



iii. Finn uttrykk for lokomotivets tilbakelagte strekning, $s(t)$. Forklar hvordan $s(t)$ er relatert til diagrammet i i). Finn s(t = 4.00 min) (svar: s = 5.4 km), og også lokomotivets totale tilbakelagte strekning (når $t \to \infty$) (svar s = 7.2 km). Bruk Python til å plotte s(t) ved å numerisk integrere v(t) [En numerisk integrasjon er bare en summasjon]. Sammenlikn det analytiske med det numeriske resultatet

Solution:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t v(t')dt' \\
&= \int_0^{t_1} v_0 dt' + \int_{t_1}^t v_0 t_1^2 \frac{1}{t'^2} dt' && \text{(Gjelder for } \ t > 120\text{s)} \\
&= v_0 t_1 + v_0 t_1^2 \left[\frac{-1}{t'}\right]_{t_1}^t \\
&= v_0 t_1 + v_0 t_1 - v_0 t_1^2/t \quad \underline{= 2v_0 t_1 - v_0 t_1^2/t.}
\end{aligned}$$

Når tiden er henholdsvis 4.00 min og går mot uendelig finner vi strekningene:

$$\begin{aligned}
&s(4.00\text{min}) = 5.4\text{km}, \\
&t \to \infty \Rightarrow s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t) = 2v_0 t_1 = 7.2\text{km}.
\end{aligned}$$

Integralet av hastighetskurven kan man approksimere ved å ta summen av verdien på alle intervallene ganget med bredden dt av intervallet. Siden hastigheten ble regnet ut i to deler med ulik dt må summen også gjøres i to deler:

```
Ia=np.sum(a)*(tp1[1]-tp1[0])
Ib=np.sum(b)*(tp2[1]-tp2[0])

I = Ia+Ib
```

10. En kule skytes ut fra en kanon med en hastighet på 150 m/s, med en vinkel på 30 grader over horisontalen. Anta at kulen akselereres vertikalt nedover med 9.8 m/s^2. Se bort fra luftmostand. Hvor lang tid tar det før kula treffer bakken (svar 15 s)? Hvor langt vil den bevege seg (svar 2.0 km)?

Solution: Tiden kulen er i luften er tiden frem til kulen treffer bakken igjen. Vi begynner med å finne et uttrykk for høyden kulen har over bakken, og finner ut når den treffer bakken igjen, altså når $h(t) = 0$. Bruker bevegelseslikningen for konstant akselerasjon i vertikal retnng:

$$\begin{aligned} h(t) &= v\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v\sin(\theta) &= \frac{1}{2}gt, \\ t &= 2v\sin(\theta)/g. \end{aligned}$$

Lengden kulen da har beveget seg er:

$$\begin{aligned} l &= v\cos(\theta)t \\ &= 2v^2\sin(\theta)\cos(\theta)/g = v^2\sin(2\theta)/g. \end{aligned}$$

11. Anta at kule i foregående oppgave påvirkes av en sidevind som gjør at den akselererer 0.03 m/s^2 i horisontalplanet og vinkelrett på utgangsretningen. Hvor langt vil den lande fra der den landet om det ikke var noen sidevind (svar 3.4 m)?

Solution: Siden kulen kun påvirkes i horisontalplanet vil tiden før den lander være lik den som ble funnet i forrige oppgave.

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 3.4\text{m}.$$

12. Hvis du kaster en ball rett opp med en hastighet på 10 m/s? Hvor lenge vil den være i et område mer enn 5.0 meter over deg (svar 0.29 s)? Anta tyngdens akselerasjon er 9.8 m/s^2

Solution: Vi kan bruke uttrykket for høyden fra oppgave 10, og løse for tid. Dette gir de to tidspunktene ballen passerer en høyde.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt^2 - v\underbrace{\sin(\theta)}_{1}t + h &= 0 \\ t &= \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{g} \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{2\sqrt{v^2 - 2gh}}{g} = 0.29\text{s}. \end{aligned}$$