TFY 4125 Øving 13

Denne øvingen omhandler termiske prosesser.

1 Les

Kapittel 19, 20.2-20.4

2 Se

Videoer om termiske systemer og prosseser.

3 Grunnleggende

1. Hva er et termodynamisk system?
2. 0.1 mol av en to-atomig ideell gass ekspanderer i en isobar prosess ved et trykk på 1.0 bar fra 0.1 m^3 til 0.3 m^3.
   (a) Hva er temperaturen ved begynnelsen og slutten av prosessen?

Solution: Vi bruker først den ideelle gasslov for å finne starttemperaturen:

$$T_1 = \frac{pV_1}{nR} = \frac{1.0\text{bar} \cdot 0.1\text{m}^3}{0.1\text{mol} \cdot 8.314 \cdot 10^{-5}\text{m}^3\text{barK}^{-1}\text{mol}^{-1}} = \underline{12028\text{K}}.$$

Vi ser på en prosess med konstant trykk p. Om omformer den ideelle gasslov ser vi at

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = \text{konstant}.$$

Temperaturen etter ekspansjonen blir derfor:

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 12028\text{K} \cdot \frac{0.3}{0.1} = \underline{36084\text{K}}.$$

   (b) Finn Q, W og ΔU for prosessen.

Solution: Arbeidet som utføres ved konstant trykk er gitt ved

$$\begin{aligned} W &= p(V_2 - V_1) \\ &= 1.0\text{bar}(0.3\text{m}^3 - 0.1\text{m}^3) = \underline{20 \cdot 10^3}\text{J}. \end{aligned}$$

Tilført varme er gitt ved

$$\begin{aligned} Q &= nC_p\Delta T = n\left(\frac{7}{2}R\right)\Delta T \\ &= (0.1\text{mol})\left(\frac{7}{2}\right)(8.315\text{J/mol} \cdot \text{K})(36084\text{K} - 12028\text{K}) = \underline{70 \cdot 10^3}\text{J}. \end{aligned}$$

Dette ender opp med en endring i indre energi

$$\Delta U = Q - W = \underline{50 \cdot 10^3 \text{J}}.$$

3. 0.2 mol gass varmes opp ved konstant volum 0.2 m^3. Utgangstrykket er 2 bar og sluttrykket etter oppvarmingen 4 bar.

   (a) Hva blir temperaturen til gassen i de to endepunktene på prosessen?

   Solution:

$$T_1 = \frac{p_1 V}{nR} = \frac{2\text{bar} \cdot 0.2\text{m}^3}{0.2\text{mol} \cdot 8.314 \cdot 10^{-5}\text{m}^3\text{bar}\text{K}^{-1}\text{mol}^{-1}} = \underline{24056\text{K}}.$$
$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{nR}{V} = \frac{p_2}{T_2},$$
$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 24056\text{K} \cdot \frac{4}{2} = \underline{48112\text{K}}.$$

   (b) Finn Q, W og ΔU for prosessen.

   Solution: Siden dette er en prosess med konstant volum gjør ikke gassen noe arbeid på omgivelsene og $W = 0$. Dette gir en endring i indre energi lik tilført varme:

$$\Delta U = Q = C_V \Delta T = \frac{3}{2} nR(24056\text{K}) = \underline{60 \cdot 10^3 \text{J}}.$$

4. 0.4 mol gass utvider seg i en isoterm prosess ved en temperature på 500 K fra et volum og 0.01 m^3 til 0.03 m^3.

   (a) Hva blir trykket i endepunktene på prosessen?

   Solution:

$$p_1 = \frac{nRT}{V_1} = \frac{0.4\text{mol} \cdot 8.314 \cdot 10^{-5}\text{m}^3\text{bar}\text{K}^{-1}\text{mol}^{-1} \cdot 500\text{K}}{0.01\text{m}^3}$$
$$= \underline{1.66\text{bar}}.$$
$$p_1 V_1 = nRT = p_2 V_2,$$
$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 1.66\text{bar} \cdot \frac{0.01}{0.03} = \underline{0.55\text{bar}}.$$

   (b) Hva blir Q, W og ΔU for prosessen?

   Solution: I en isoterm prosess har vi for en ideell gass

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W.$$

5. En syklisk varmemaskin består av to isokore prosesser og to isobare prosesser. Hva blir virkningsgraden for en slik maskin, uttrykt ved volumene og trykkene for hver av delprosessene?

Solution: Virkningsgraden for varmemaskinen er definert $e = \frac{W}{Q_H}$, der W er arbeidet utført av maskinen, og Q_H tilført varme.

Vi finner først arbeidet utført av maskinen. Her vil det kun komme bidrag fra de to isobare prosessene siden de er de eneste med volumendring. For å få et netto positivt arbeid må økning av volum finne sted på høyere trykk enn forminskning. Arbeidet til en isobar prosess er gitt ved

$$W = p\Delta V.$$

De to isobare prosessene går mellom de samme to volumene V_1 og V_2, der vi velger $V_1 \leq V_2$, og finner sted ved de to trykkene p_1 og p_2, $p_1 \leq p_2$. Dette gir oss følgende arbeid for de to prosessene:

$$\begin{aligned} W_{12} &= p_2(V_2 - V_1), \\ W_{34} &= p_1(V_1 - V_2), \\ W = W_{12} + W_{34} &= (p_2 - p_1)(V_2 - V_1). \end{aligned}$$

Dette er lik arealet av området prosessen dekker i et pV-diagram.

For å se på tilført varme i systemet antar vi at vi har med en ideell én-atomig gass å gjøre. Fra den ideelle gasslov ser vi da at temperaturen i systemet øker langs den isokore prosessen der trykket øker og langs den isobare prosessen der volumet øker.

For å finne tilført varme bruker vi

$$\begin{aligned} Q_p &= nC_p\Delta T, \\ Q_V &= nC_V\Delta T. \end{aligned}$$

Stiller dette opp for de to prosessene, og bruker ideell gasslov for å finne temperaturen ved endene:

$$\begin{aligned} Q_p &= n\frac{5}{2}R\left(\frac{p_2V_2}{nR} - \frac{p_2V_1}{nR}\right) = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1), \\ Q_V &= n\frac{3}{2}R\left(\frac{p_2V_1}{nR} - \frac{p_1V_1}{nR}\right) = \frac{3}{2}V_1(p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Vi ser at for begge disse prosessene har vi positiv varmeoverføring, dvs. varme tilført systemet. For de to andre prosessene vil varmen være negativ. Total tilført varme vil være

$$Q_H = Q_p + Q_V.$$

Dette gir en virkningsgrad

$$e = \frac{W}{Q_H} = \underline{\frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{\frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}V_1(p_2 - p_1)}}.$$

6. En kjølemaskin består av to isokore prosesser og to isoterme prosesser. Hva blir kjølekoeffisienten (coefficient of performance) for en slik prosess, uttrykt ved volumene og temperaturene for prosessene?

Solution: Kjølekoeffisienten til en kjølemaskin er gitt ved

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|}.$$

Her er Q_C mengden varme som fjernes fra systemet, og W mengden arbeid gjøres av systemet. For å få en kjølemaskin må W være negativ, det må tilføres arbeid.

Vi antar at vi jobber med en ideell én-atomig gass.

Vi begynner med å definere at de to isokore prosessene skjer ved V_1 og V_2, der $V_1 \leq V_2$, og at de to isoterme prosessene skjer ved T_1 og T_2, der $T_1 \leq T_2$. Vi setter opp prosessene slik at den totale prosessen går mot klokken i et pV-diagram. Dette gir negativt arbeid, noe vi ønsker for en kjølemaskin.

Arbeid vil i kjølemaskinen kun finne sted ved de to isoterme prosessene. Arbeidet her finner vi ved å integrere trykket langs volumendringen:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

her er V_2 sluttvolum og V_1 startvolum.

Summen av arbeidet utført av de to isoterme prosessene blir

$$\begin{aligned} W &= nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= nR \ln \frac{V_1}{V_2} (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Vi ser at dette vil gi et negativt arbeid, siden $V_1 \leq V_2$ og $T_1 \leq T_2$.

Q_C vil være summen av den isokore prosessen og den isoterme prosessen med negativ varmeutveksling. For en ideel gass vil en isoterm prosess ha $Q = W$. Dette fører til

$$\begin{aligned} Q_C &= Q_V(V_1) + nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= nC_V \Delta T + nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= n\frac{3}{2}R(T_1 - T_2) + nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}. \end{aligned}$$

Her er begge leddene negative, og beskriver varme ut av systemet.

Vi kan nå sette opp et uttrykk for virkningsgraden

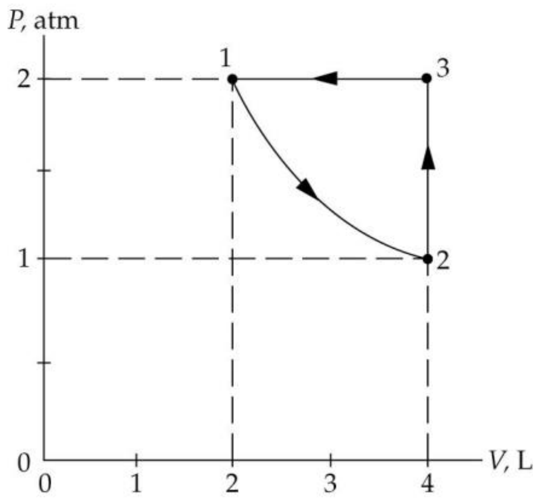
$$K = \frac{\left|\frac{3}{2}(T_1 - T_2) + T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}\right|}{\left|\ln \frac{V_1}{V_2} \cdot (T_2 - T_1)\right|}.$$

4 Oppgaver

7. To mol av en ideell én-atomig gass har i utgangspunktet et trykk $P_1 = 2$ atm og volum $V_1 = 2$ L. Gassen tas gjennom følgende kvasi-statiske syklus: Den ekspanderes isotermt inntil den når volumet $V_2 = 4$ L. Deretter varmes den ved konstant volum inntil den når trykket $P_3 = 2$ atm. Den blir deretter avkjølt ved konstant trykk inntil den er tilbake i utgangstilstanden.

   (a) Vis prosessen i et PV-diagram.

   Solution:



(b) Finn temperaturene T1, T2, T3.

Solution: Vi bruker den ideelle gasslov for å finne temperaturen i utgangspunktet, T_1:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{P_1 V_1}{nR} \\ &= \frac{(2\text{atm})(2\text{L})}{(2\text{mol})(8.206 \cdot 10^{-2}\text{L} \cdot \text{atm}/\text{mol} \cdot \text{K})} \\ &= \underline{24.4\text{K}}. \end{aligned}$$

Siden prosessen fra punkt 1 til 2 er isoterm:

$$T_2 = \underline{24.4\text{K}}.$$

Bruker igjen den ideelle gasslov for å finne temperaturen ved punkt 3:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{P_3 V_3}{nR} \\ &= \frac{(2\text{atm})(4\text{L})}{(2\text{mol})(8.206 \cdot 10^{-2}\text{L} \cdot \text{atm}/\text{mol} \cdot \text{K})} \\ &= \underline{48.7\text{K}}. \end{aligned}$$

(c) Beregn varmen tilført og arbeidet gjort av gassen i hver del av syklusen.

Solution: Siden prosessen fra 1 til 2 er isoterm, har vi $Q_{\text{in},1\to 2} = W_{\text{by gas},1\to 2}$:

$$\begin{aligned} Q_{\text{in},1\to 2} = W_{\text{by gas},1\to 2} &= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= (2\text{mol})(8.314\text{J}/\text{mol} \cdot \text{K}) \cdot (24.4\text{K}) \ln \frac{4\text{L}}{2\text{L}} \\ &= \underline{281\text{J}}. \end{aligned}$$

Siden prosessen fra 2 til 3 finner sted ved konstant volum har vi:

$$W_{2\to 3} = \underline{0}.$$

På grunn av dette får vi følgende tilførte varme:

$$\begin{aligned} Q_{\text{in},2\to 3} &= \Delta E_{\text{int},2\to 3} = C_{\text{V}}\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_2) \\ &= \frac{3}{2}(2\text{mol})(8.314\text{J/mol}\cdot\text{K})(48.7\text{K} - 24.4\text{K}) \\ &= \underline{606\text{J}}. \end{aligned}$$

Prosessen fra 3 tilbake til 1 er isobar:

$$\begin{aligned} Q_{3\to 1} &= C_{\text{P}}\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_3) \\ &= \frac{5}{2}(2\text{mol})(8.314\text{J/mol}\cdot\text{K})(24.4\text{K} - 48.7\text{K}) \\ &= \underline{-1.01\text{kJ}}. \end{aligned}$$

Arbeidet som utføres er:

$$\begin{aligned} W_{\text{by gas},3\to 1} &= -P_{1,3}\Delta V = P_{1,3}(V_1 - V_3) \\ &= -(2\text{atm})(2\text{L} - 4\text{L}) \\ &= -(-4\text{atm}\cdot\text{L})\left(\frac{101.3\text{J}}{\text{atm}\cdot\text{L}}\right) \\ &= \underline{405\text{J}}. \end{aligned}$$

8. Gassen i en sylinder ekspanderer fra et volum på 0.110 m^3 til 0.320 m^3. Varme tilføres gassen slik at trykket holdes konstand på $1.65 \cdot 10^5$ Pa gjennom ekspansjonen. Total varme tilført er $1.15 \cdot 10^5$ J.

   (a) Finn arbeidet gjort av gassen.

   Solution: For en prosess med konstant trykk har vi

   $$\begin{aligned} W &= p\Delta V \\ &= (1.65\cdot 10^5\text{Pa})(0.320\text{m}^3 - 0.110\text{m}^3) = \underline{3.47\cdot 10^4}\text{J}. \end{aligned}$$

   (b) Finn endring i indre energi i gassen.

   Solution: Endringen i indre energi er gitt ved

   $$\Delta U = Q - W = 1.15\cdot 10^5\text{J} - 3.47\cdot 10^4\text{J} = \underline{8.04\cdot 10^4}\text{J}.$$

   (c) Har det noe å si om gassen er ideell eller ikke for svaret i a) og b)?

   Solution: $W = p\Delta V$ under konstant trykk og $\Delta U = Q - W$ gjelder begge for alle materialer. Vi har ikke brukt den ideelle gasslov noe sted, og det har derfor ikke noe å si om gassen er ideell eller ikke.

9. Når en mengde enatomig ideell gass ekspanderer ved konstant trykk $4.00 \cdot 10^4$ Pa, øker volumet fra $2.00 \cdot 10^{-3}$ m^3 til $8.00 \cdot 10^{-3}$ m^3. Hva er endringen i indre energi i gassen?

Solution: For en ideell gass som ved konstant trykk har vi følgende sammenhenger:

$$p\Delta V = nR\Delta T,$$
$$\Delta U = C_V \Delta T.$$

For enatomige gasser har vi:

$$C_V = \frac{3}{2}R.$$

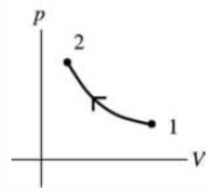
Vi finner endringen i indre energi ved å evaluere:

$$\begin{aligned}\Delta U &= n\left(\frac{3}{2}R\right)\Delta T \\ &= \frac{3}{2}p\Delta V = \frac{3}{2}(4.00 \cdot 10^4\text{Pa})(8.00 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 - 2.00 \cdot 10^{-3}\text{m}^3) = \underline{360\text{J}}.\end{aligned}$$

10. Motoren i en Ferrari F355 F1 tar in luft ved 20 grader og 1 atm og komprimerer den adiabatisk til 0.0900 ganger the opprinnelige volumet. Luften kan sees på som en ideell gas med $\gamma = 1.40$.

(a) Tegn et pV diagram for prosessen.

Solution: I prosessen øker trykket og volumet minker.



(b) Finn endelig temperatur og trykk.

Solution: For en adiabatisk prosess for en ideell gass har vi

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$
$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma},$$
$$pV = nRT.$$

Fra den første ligningen finner vi T_2:

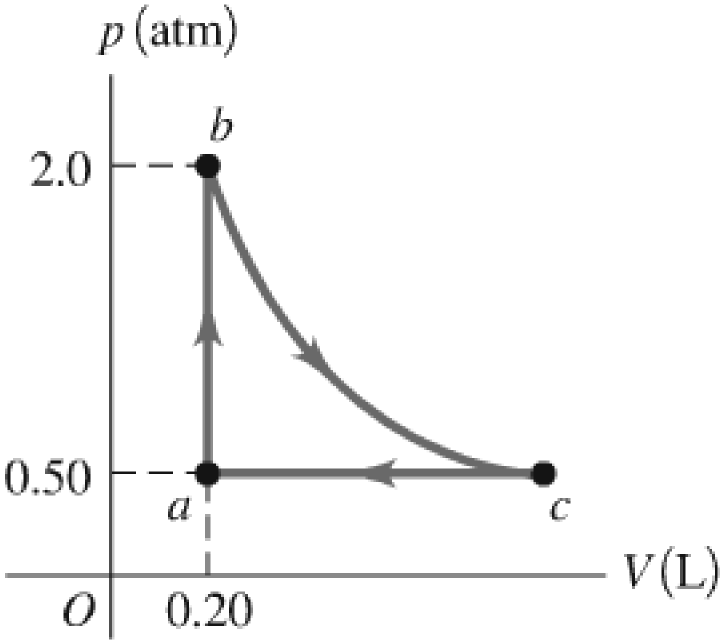
$$\begin{aligned}T_2 &= T_1(V_1/V_2)^{\gamma-1} = (293\text{K})(V_1/0.0900V_1)^{1.4-1} \\ &= (293\text{K})(11.11)^{0.4} = \underline{768\text{K}}.\end{aligned}$$

Trykket finner vi fra den andre ligningen:

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^{\gamma} = (1\text{atm})(V_1/0.0900V_1)^1.4 = (1\text{atm})(11.11)^1.4 = \underline{29.1\text{atm}}.$$

Alternativt kunne vi brukt den ideelle gasslov. Her vet vi at n og R er konstant, og derfor $pV/T = nR$ =konstant. Dette gir oss følgende uttrykk:

$$p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2,$$
$$p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = (1\text{atm})(V_1/0.0900V_1)(768\text{K}/293\text{K}) = \underline{29.1\text{atm}}.$$



11. Figuren viser et pV diagram for 0.0040 mol av en ideell H2 gas. Temepraturen til gassen endrer seg ikke i segmentet bc.

> **Solution:** I oppgaven får vi oppgitt en god del informasjon om de ulike prosessene. Vi vet at prosessen bc er isoterm, med $\Delta T = 0$, $\Delta U = 0$ og $Q = W = nRT\ln(V_c/V_b)$. Vi vet også at vi har for en ideell H2 gass: $C_V = \frac{5}{2}R$ og $C_p = \frac{7}{2}R$. $\Delta U = nC_V\Delta T$ for en hvilken som helst prosess med en ideell gass.

(a) Hva er volumet til gassen ved punkt c?

> **Solution:** Siden temperaturen ikke endres fra b til c har vi $pV = nRT$ =konstant. Dette gir oss $p_bV_b = p_cV_c$ og
>
> $$V_c = V_b\left(\frac{p_b}{p_c}\right) = (0.20\text{L})\left(\frac{2.0}{0.50}\right) = \underline{0.80\text{L}}.$$

(b) Finn temperaturen til gassen ved punktene a, b, og c.

> **Solution:**
>
> $$T_a = \frac{p_aV_a}{nR} = \frac{(0.50\text{atm})(1.013\cdot 10^5\text{Pa/atm})(0.20\cdot 10^{-3}\text{m}^3)}{(0.0040\text{mol})(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})} = \underline{305\text{K}}.$$
>
> Vi har $V_a = V_b$, noe som gir
>
> $$\frac{T}{p} = \frac{V}{nR} = \text{konstant},$$
>
> $$\frac{T_a}{p_a} = \frac{T_b}{p_b},$$
>
> $$T_b = T_c = T_a\left(\frac{p_b}{p_a}\right) = (305\text{K})\left(\frac{2.0}{0.50}\right) = \underline{1220\text{K}}.$$

(c) Hvor mye varme gikk inn eller ut av gassen i segmentene aab, ca og bc? Indiker om varmen går inn eller ut.

Solution: *ab*:

$$\begin{aligned} Q &= nC_V\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T \\ &= (0.0040\text{mol})\left(\frac{5}{2}\right)(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})(1220\text{K} - 305\text{K}) = \underline{+76\text{J}}. \end{aligned}$$

Her har vi positiv Q. Varmen går derfor inn i gassen.
ca:

$$\begin{aligned} Q &= nC_p\Delta T = n\left(\frac{7}{2}R\right)\Delta T \\ &= (0.0040\text{mol})\left(\frac{7}{2}\right)(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})(305\text{K} - 1220\text{K}) = \underline{-107\text{J}}. \end{aligned}$$

Her er Q negativ, og varmen går derfor ut av gassen.
bc:

$$\begin{aligned} Q &= W = nRT\ln(V_c/V_b) \\ &= (0.0040\text{mol})(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})(1220\text{K})\ln(0.80/0.20) = \underline{+56\text{J}}. \end{aligned}$$

Her er Q også positiv og det går derfor varme inn i gassen.

(d) Finn endring i indre energi til hydrogen gjennom segmentene ab, bc og ca. Indiker om den indre energien endrer seg gjennom noen av disse segmentene.

Solution: *ab*:

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_V\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T \\ &= (0.0040\text{mol})\left(\frac{5}{2}\right)(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})(1220\text{K} - 305\text{K}) = \underline{+76\text{J}}. \end{aligned}$$

I denne prosessen økte den indre energien.
bc:

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0.$$

Den indre energien endres ikke.
ca:

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_V\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T \\ &= (0.0040\text{mol})\left(\frac{5}{2}\right)(8.315\text{J/mol}\cdot\text{K})(305\text{K} - 1220\text{K}) = \underline{-76\text{J}}. \end{aligned}$$

Den indre energien synker.