TFY 4125 Øving 3

Denne uken skal vi se litt nærmere på hvordan vi kan bruke **energibetraktninger** for å løse mekaniske problemer ved hjelp av begreper som arbeid og kinetisk energi. Vi skal også lære hvordan vi kan gjøre **kurvetilpasning** i Python for å sammenlikne modeller med eksperimenter.

1 Les

Kapittel 6 og 7 er pensum. Les spesielt 6.2, 6.4, 7.2 og 7.1 . Les Python tutorial 3. Les notatet om usikkerhetsanalyse som du finner på `http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/usikkerhet.html`

2 Se

Se de tre fantastiske videoene om Newtons lover av Walter Lewin som du finner på Wikipedia-siden for Newtons lover. Les gjerne selve artikkelen også.

3 Grunnleggende

1. Anta at du gjør et arbeid W på et objekt som opprinnelig er i ro for å gi det en hastighet v og kinetisk energi K. Dersom du gjør et dobbelt så stort arbeid, hva blir den resulterende hastighet og kinetisk energi?

> **Løsning:**
>
> Ettersom objektet begynner i ro kan vi skrive
>
> $$W = K = \frac{1}{2}mv^2$$
>
> Hadde vi hatt dobbelt så stort arbeid ville endring i kinetisk energi være
>
> $$K = 2W$$
>
> Setter vi inn uttrykket for kinetisk energi og arbeidet fra over får vi
>
> $$\frac{1}{2}mv_2^2 = 2\frac{1}{2}mv^2$$
>
> Som gir at hastigheten ved dobbelt arbeid blir
>
> $$v_2 = \sqrt{2}v$$

2. Et tau drar på en kloss med en kraft F slik at den akselererer. Men Newtons tredje lov sier jo at klossen drar på tauet med en like stor men motsatt rettet kraft. Blir det resulterende arbeidet da null? Hvis så, hvordan kan den kinetiske energien endre seg?

Løsning:

Nei. Newtons tredje lover refererer til krefter på to ulike objekter. Mens arbeidet refererer til et gitt objekt. Tauet gjør et positivt arbeid på klossen som kan akselerere. Klossen gjør et negativt arbeid på tauet (kraft og forflytning peker i motsatt retning). Tauet kan likevel akselerere med klossen fordi det også er noe som drar i tauet slik at den totale kraften på tauet peker i samme retning som forflytningen og dermed er det totale arbeidet større enn null.

3. (**Y&F 7.1**)En kloss med masse M sklir ned et friksjonsfritt skråplan med vinkel θ over horisontalen. Finn et uttrykk for den potensielle energien som funksjon av posisjon langs skråplanet (la altså en av koordinataksene være langs skråplanet) ved å se på arbeidet som blir gjort på klossen langs planet. Finn to uttrykk: Først ved å sette nullpunktet for den potensielle energien ved bunnpunktet, deretter ved å sette nullpunktet for den potensielle energien ved startpunktet som er en avstand a fra bunnpunktet. Hvorfor kom ikke normalkraften inn i bildet? Finn farten til klossen i en avstand d fra startpunktet (bruk energibevaring)?

Løsning:

La x aksen ligge langs skråplanet, positiv oppover med nullpunkt ved bunnen av planet. Uten friksjon er det bare tyngdekraften som virker på massen M, altså kraften Mg. Komponenten av denne kraften som peker langs skråplanet blir da $F_x = -Mg\sin\theta$. Arbeidet som gjøres på klossen når den sklir nedover langs planet er

$$\begin{aligned} W &= \int_{\text{start}}^{\text{slutt}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=a}^{x=b} F_x dx \\ &= -Mg\sin\theta \int_a^b dx \\ &= -Mg\sin\theta(b-a) \\ &= -\Delta U = -(U_2 - U_1). \end{aligned}$$

Vi ser fra likningen over at vi kan identifisere en potensiell energi som er gitt av

$$U(x) = Mgx\sin\theta$$

dersom potensiell energien er 0 i bunnpunktet. Dersom energien skal være 0 i et punkt a må vi gjøre om uttrykket til

$$U(x) = Mg(x-a)\sin\theta$$

Normalkraften er ikke med, siden arbeidet kun avhenger av den komponenten av kraften som peker langs bevegelsesretningen. Farten til klossen vil være bestemt av at endring i potensiell energi går over til kinetisk energi, $K = \Delta U$. Vi observerer at ΔU er uavhengig av hvor vi setter nullpunktet for potensiell energi, slik at begge uttrykkene for $U(x)$ kan brukes. Ligningen blir da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 =& \Delta U = U(x=d) - U(x=0) \\ =& Mgd\sin\theta, \end{aligned}$$

slik at farten blir

$$v = \sqrt{2gd\sin\theta}.$$

4. En kloss med masse m som er koblet til en fjær ligger på et friksjonsfritt bord og strekkes en lengde Δx fra likevektspunktet hvor den slippes.

   (a) Anta først at fjæren følger Hookes lov med fjærkonstant k Hvor stort arbeid gjør fjæren på klossen fra Δx til likevektspunktet.

Løsning:

$$\begin{aligned} W &= \int F dx \\ &= \int_{\Delta x}^{0} -kx dx \\ &= -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{\Delta x}^{0} \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

(b) Hva er den kinetisk energien til klossen når den når likevektspunket?

Løsning:

$$\Delta K = K = W = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

(c) Anta så at fjæren ikke følger Hookes lov men at kraften fra fjæren på klossen er gitt av $F = -k_1 x - k_2 x^3$. Hva blir nå arbeidet som fjæren gjør på klossen fra Δx til likevektspunktet.

Løsning:
Integrer med nytt uttrykk:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Delta x}^{0} \left(-k_1 x - k_2 x^3\right) dx \\ &= \frac{1}{2}k_1(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}k_2(\Delta x)^4. \end{aligned}$$

(d) Finn et uttrykk for den potensielle energien, U, i systemet som funksjon av Δx (lengdeendring av fjæren) i tilfellet fra deloppgave c)

Løsning:
I et slikt system uten noe demping, så vil summen av kinetisk energi og potensiell energi være konstant. Hvis vi legger nullpunktet for potensiell energi der det er null utslag ($\Delta x = 0$) så har vi at $K + U = 0$. Ved å bruke at kinetisk energi er gitt av arbeidet fjæren gjør på klossen $K = W$ slik som i opppgave (b), så å kan vi skrive at potensiell energi er gitt av

$$U = -K = -W,$$

der W er gitt i oppgave (c).

4 Oppgaver

5. [LAB] Galileo har gjort eksperimentene sine (se øving 2, oppgave 10 - bruk dataene derfra) og vil finne ut om hva slags modell som stemmer overens med målingene. Han har to hypoteser. Den ene er at objektene faller fritt og kun blir akselerert av tyngdekraften med kraften mg. Den andre hypotesen er at det også virker en friksjonskraft f på objektet som er proporsjonal med hastigheten, altså at $f = -kv$.

   (a) Finn et uttrykk for hastigheten til det fallende objektet som funksjon av tid for hver av de to modellene. (Stikkord: Newtons 2. lov og Y&F 5.3)

(b) Neste steg er så å sammenlikne modellen i a med måledataene. I øving 2, oppgave 10 fant du hastigheten til de fallende objektene som funksjon av tid. Bruk disse dataene. Tilpasning av data til modeller er en matematisk gren i seg selv. En populær metode er *minste kvadraters metode*. Denne vil du lære mer om når du studerer lineær algebra i Matematikk 3 (så følg med når du kommer dit!). Heldigvis er denne metoden implementert i Python gjennom en kommando som heter `np.polyfit`. Metoden finner et polynom som passer best til dataene og gir tilbake koeffisientene til polynomet. Kjekt!

Den brukes slik:

```
p = polyfit(t,v,n)
```

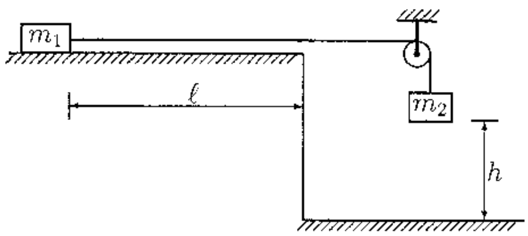
`t` er tid (eller en annen variabel i måledataene), `v` er måledataene og `n` er graden på polynomet du ønsker å tilpasse. `p` er en rekke med tall som er koeffisientene til det tilpassede polynomet:

```
v = p[0]*t**n + p[1]*t**(n-1) + p[2]*t**(n-2) + ...
```

Tilpass et andreordens polynom til hastigheten for hver av målingene. (Her må du først trimme dataene ettersom den selve fallet begynner først noe uti måleserien. Når du har trimmet dataen skift tidsaksen slik at fallet begynner ved $t = 0$.)

i. Sammenlikn polynomet du får fra målingen xvacuum.txt med fritt fall løsningen. Hvilken verdi får du for tyngdens akselerasjon? Kan du si noe om massen til objektet fra denne målingen?

ii. For modellen med luftmotstand får du en eksponentialfunksjon. Rekkeutvikle denne til andre orden og sammenlikn med polynomet du får fra xnonvacuum.txt. Kan du si noe om hva terminal hastighet er? Hva med k og m? Kanskje forholdet mellom k og m?



Figur 1: Oppgave 6

6. (Hint: bruk energibetraktninger)En kloss med masse m_1 ligger på en horisontal bordplate, i avstand l fra bordkanten (se figur 1). Klossen er festet til en annen kloss ved hjelp av en tynn snor og en trinse. Den andre klossen har masse m_2 og befinner seg i en posisjon med høyde h over gulvet ($h < l$). Klossen m_2 slippes, og drar med seg m_1 mens den faller.

Se bort fra massen til snora og trinsa, og friksjonen i trinsa. Den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom bordplate og massen m_1 er μ, mens tyngdens akselerasjon er g.

Løsning:

Inntil massen m_2 treffer gulvet har de to massene åpenbart samme fart, selv om retningen til de to hastighetsvektorene er forskjellig. Tilsvarende er det en enkel sammenheng mellom høyden z som m_2 befinner seg i, og distansen s som massen m_1 har beveget seg fra begynnelsespunktet: $s = h - z$.

(a) Finn klossenes hastighet v_A idet massen m_2 treffer gulvet.

Løsning:

Det er hensiktsmessig å bruke energibevarelse til å finne v_A, klossenes fart idet m_2 treffer gulvet. Men da må vi ta i betraktning at arbeidet mot friksjonskraften på m_1 vil føre til at mekanisk energi lekker ut til varmeenergi. Energibalansen blir derfor, når friksjonskraften har virket mens m_1 har blitt dratt distansen h,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_A^2 = m_2 gh - \mu m_1 gh.$$

Dette gir umiddelbart v_A som

$$v_A = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu m_1)gh}{m_1 + m_2}}.$$

(b) Finn så et uttrykk for hastigheten til m_1, v_B når (eller: hvis) den når bordkanten.

Løsning:
Etter at m_2 har truffet gulvet, vil m_1 fortsette ferden, men nå med friksjonskraften som eneste ytre kraft. Dersom vi forutsetter at m_1 rekker helt frem til kanten av bordet med hastighet v_B, vil tapet av kinetisk energi under retardasjonsbevegelsen være gitt av friksjons-arbeidet som

$$\frac{1}{2}m_1(v_A^2 - v_B^2) = \mu m_1 g(l - h).$$

Dette gir uttrykket for v_B,

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu g(l - h)}.$$

(c) Sett til slutt inn tallverdier: $m_1 = 1.00$ kg, $m_2 = 2.00$ kg, $h = 1.00$ m, $l = 2.00$ m, $\mu = 0.300$ og $g = 9.81$ m/s^2, og finn v_A og v_B. Kontroller også at uttrykkene du finner gir riktig dimensjon, $[v] = \text{m/s}$.

Løsning:
Først sjekker vi dimensjonene i uttrykkene: $[v_A] = [v_B] = [gh]^{1/2} = [\text{m/s}^2 \cdot \text{m}]^{1/2} = \text{m/s}$. Dimensjonene stemmer.

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1}\sqrt{(2 - 0.3 \cdot 1)/(1 + 2)}\text{m/s} &&= 3.33\text{m/s}, \\ v_B &= \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1}\sqrt{(2 - 0.3 \cdot 1)/(1 + 2) - 0.3 \cdot (2/1 - 1)}\text{m/s} &&= 2.29\text{m/s}. \end{aligned}$$

7. (Her kan det være lurt med energibevaring) En pendel består av ei kule med masse m i ei masseløs snor med lengde L, som vist i figur 2. Pendelen trekkes ut til snoren er vannrett og slippes uten starthastighet. Snora treffer en pinne P (med neglisjerbar diameter) i avstand x rett under pendelens opphengningspunkt. Pendelen svinger så rundt denne pinnen.

(a) Vis at farten til kula når den er rett over pinnen er gitt ved:

$$v = \sqrt{2g(2x - L)}$$

Løsning:
Ingen friksjon her (konservativt system)! Energibevarelse gir, når kula slippes med null fart fra høyden $x = 0$ (fritt valgt):

$$0 = E = -mg(L - 2r) + \frac{1}{2}mv^2, \text{ der } x = L - r.$$

Dermed

$$v = \sqrt{2g(2x - L)}.$$

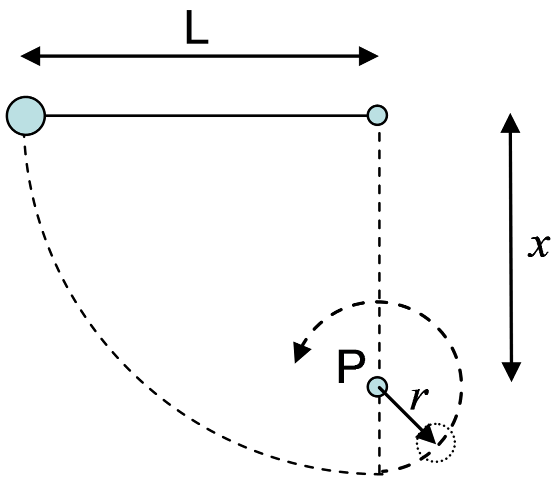
(b) Hvor stor må x minst være for at kula skal nå posisjonen rett over pinnen med stram snor?

Løsning:
For at snoren skal være stram når kulen er rett over pinnen, må sentripetalakselerasjonen være større enn g:

$$\frac{v^2}{r} > g \Rightarrow 2g(2x - L) > g(L - x)$$

som gir

$$\underline{x > \frac{3}{5}L.}$$

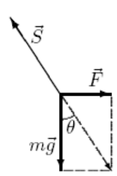


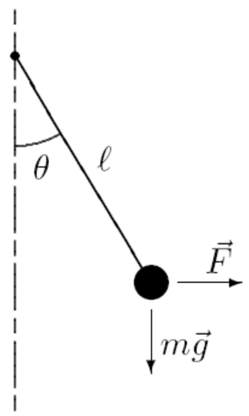
Figur 2: Pendel som treffer en pinne.

5 Repetisjon

8. Ei kule (punktmasse) med masse $m = 0.1$ kg er festet til ei vektløs stang med lengde $l = 0.5$ m (se figur 3). Stanga kan rotere friksjonsløst i papirplanet om opphengningspunktet. Kula trekkes ut til siden med en horisontal kraft **F**

Løsning:





Figur 3: Pendel som strekkes ut og roterer.

Vi har her å gjøre med et system med en frihetsgrad, dvs. vi trenger en skalar likning for å beskrive systemet. Fordi vi har har et eksempel på statisk likevekt gir Newtons 2. lov at **F** og $m\mathbf{g}$ balanseres av strekket i stanga, **S** som peker langs stanga. Dermed må også resultanten av **F** og $m\mathbf{g}$ peke langs stangen som vist på figuren. Derav følger det at

$$\tan\theta = F/mg.$$

(a) Hvis likevektsvinkelen er $\theta = 30°$, hvor stor må da F være?

Løsning:
Vinkelen θ er gitt, krafta blir derfor

$$F = mg\tan\theta = (0.1 \cdot 9.8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}})\text{N} = \underline{0.57\text{N}}.$$

(b) Hvis $F = 0.2$ N hva blir da θ?

Løsning:
Krafta F er gitt, vinkelen blir derfor

$$\theta = \arctan(F/mg) = \arctan(0.2/0.98) = 0.201\text{rad} = \underline{11.5\,\text{deg}}.$$

(c) I stedet for å trekke med ei kraft F, lar vi hele systemet rotere om en vertikal akse gjennom opphengningspunktet med rotasjonsperiode $T = 1$ s. I likevekt har kula en banehastighet $v = 2\pi r/T$, hvor $r = l\sin\theta$ og den tilsvarende radialakselerasjonen er $a_r = -v^2/r$. Hva blir nå vinkelen θ?

Løsning:
Krafta F erstattes av sentripetalkrafta F_r

$$F_r = mv^2/r.$$

Ved likevekt har vi da

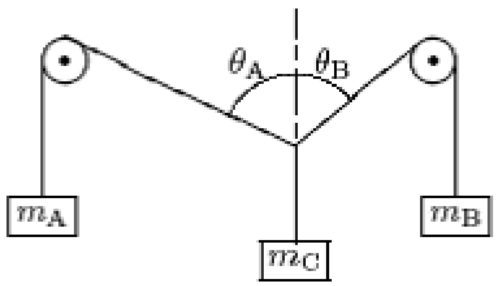
$$\tan\theta = \frac{F_r}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{l\sin\theta}{g},$$

hvor vi nå bruker at $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ og deler ligningen over på $\sin\theta$ (anta $\theta \neq 0$). Det gir

$$\frac{1}{\cos\theta} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{l}{g}$$

likevektsvinkelen blir

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{g}{l}\right)\\ &= \arccos\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{9.8}{0.5}\right) = 60.2^\circ\end{aligned}$$



Figur 4: Oppgave 9

9. En snor er strukket over to trinser og tre lodd med masser m_A, m_B og m_C, er hengt opp som vist i figuren.

Løsning:

- $F_\mathrm{A} = m_{\mathrm{A}g}$ =snorkrafta i snora til masse A.
- $F_\mathrm{B} = m_{\mathrm{B}g}$ =snorkrafta i snora til masse B.
- $F_\mathrm{C} = m_{\mathrm{C}g}$ =snorkrafta i snora til masse A.
- (x, z) er koordinatene til knutepunktet mellom snorene.

Fordi alle krefter ligger i samme plan er dette et todimensjonalt problem. Geometrien til systemet er fullt ut gitt for alle kombinasjoner av massestørrelsene når koordinatene til knutepunktet er gitt.

Dette vil si at vi har et problem med to frihetsgrader. For å bestemme disse to frihetsgradene trenger vi to matematisk sett uachengige skalere likninger som inneholder disse to parameterene pluss massene til vektene A, B og C. Når disse likningene er funnet er den opprinnelige fysikk-oppgaven transformert til en rutinejobb i matematikk som, i dette tilfellet, består i å løse et likningssystem bestående av to likninger inneholdende to ukjente.

Innen punktmekanikk er den viktigste av alle likninger Newtons 2. lov, som er ei vektorlikning. I tillegg har vi et par skalare konserveringslikninger. Newtons 2. lov for knutepunktet mellom snorene:

$$\{F_x, F_z\} = m_K\{\ddot{x}, \ddot{z}\},$$

hvor $\mathbf{F}_K = \{F_x, F_z\}$ er den totale ytre krafte på knutepunktet og m_K er knutepunktets masse. For statisk likevekt er $\ddot{x} = \ddot{z} = 0$, som gir følgende to skalere likninger inneholdende de fri variablene pluss massen til vektene

$$\begin{aligned} F_x &= -F_\mathrm{A}\sin\theta_\mathrm{A} + F_\mathrm{B}\sin\theta_\mathrm{B} = 0, \\ F_z &= F_\mathrm{A}\cos\theta_\mathrm{A} + F_\mathrm{B}\cos\theta_\mathrm{B} - F_\mathrm{C} = 0. \end{aligned}$$

Dette er et eksempel på kraftbalanse, noe som alltid opptrer ved analyse av systemer i statisk likevekt. Innsetting av uttrykkene for snorkreftene gir

$$\begin{aligned} m_\mathrm{A}\sin\theta_\mathrm{A} - m_\mathrm{B}\sin\theta_\mathrm{B} &= 0, \\ m_\mathrm{A}\cos\theta_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\cos\theta_\mathrm{B} &= m_\mathrm{C}. \end{aligned}$$

I dette likningssystemet er det fem parametre: m_A, m_B, m_C, θ_A og θ_B. Når tre vilkårlige valgte av disse parametrene er gitt, kan likningssettet brukes til å bestemme de to resterende parameterene.

(a) Anta $m_C = 10$ kg, $\theta_A = 30°$ og $\theta_B = 45°$. Hva er m_A og m_B?

Løsning:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{A} &= m_\mathrm{C}\sin\theta_\mathrm{B}/[\cos\theta_\mathrm{A}\sin\theta_\mathrm{B} + \sin\theta_\mathrm{A}\cos\theta_\mathrm{B}], \\ m_\mathrm{B} &= m_\mathrm{C}\sin\theta_\mathrm{A}/[\cos\theta_\mathrm{A}\sin\theta_\mathrm{B} + \sin\theta_\mathrm{A}\cos\theta_\mathrm{B}], \end{aligned}$$

som med innsatte verdier gir $m_\mathrm{A} = 7$ kg og $m_\mathrm{B} = 5$ kg.

(b) Anta at $m_C = 10$ kg, $m_A = 6$ kg og $m_B = 8$ kg. Hva blir θ_A og θ_B?

Løsning:
MANGLER.

10. Du prøver å regne deg frem til terminalhastigheten til et fallende objekt, med antatt luftmotstand $F = -bv$. Du måler følgende parameter med angitt usikkerhet, $m = (1.0 \pm 0.2)$ kg, $g = (9.8 \pm 0.2)$ m/s^2 og $b = (0.51 \pm 0.05)$ Ns/m. Hva er beste estimat for terminalhastigheten og hva blir usikkerheten i denne verdien? Hvilken av de målte parametrene gir størst bidrag til usikkerheten i terminalhastigheten.

Løsning:
Ved terminalhastigheten vil luftmotstanden være lik tyngdekraften, altså har vi at

$$v = \frac{mg}{b} = \frac{1.0 * 9.8}{0.51}\ \mathrm{m/s} = 19\ \mathrm{m/s}.$$

Vi kan bruke Gauss' feilforplantningslov til å finne relativ usikkerhet i terminalhastigheten

($\Delta v/v$) ved hjelp av de relative usikkerhetene i de målte størrelsene. Generelt har vi da

$$(\Delta v)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial g}\Delta g\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\Delta b\right)^2.$$

Dette gir da uttrykt med relative usikkerheter

$$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2$$

Usikkerheten i terminalhastigheten blir da

$$\begin{aligned}\Delta v =& v\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}\\ =& \frac{1.0 * 9.8}{0.51}\sqrt{\left(\frac{0.2}{1.0}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{9.8}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{0.51}\right)^2}\,\text{m/s} = 4.3\ \text{m/s}.\end{aligned}$$

Vi observerer at den målte størrelsen med størst relativ usikkerhet er massen, slik at det gir det største bidraget til usikkerheten i terminalhastigheten.

11. En kloss med masse m = 1.0 kg holdes i ro på et skråplan med helningsvinkel $\theta = 30°$. Den kinetiske friksjonskoeffisienten er $\mu_k = 0.42$.

(a) Hvor stor er akselerasjonen når klossen slippes?

Løsning:
Her er normalkraften $N = mg\cos\theta$ og netto tangensialkraft, etter at klossen har begynt å skli, er $F = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$. Derved blir akselerasjonen nedover skråplanet gitt som

$$\begin{aligned}a &= F/m = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)\\ &= 9.8(0.5 - 0.42\cdot 0.866)\text{m/s}^2\\ &= \underline{1.34\ \text{m/s}^2}.\end{aligned}$$

(b) Vi lar så klossen bli påvirket av en kraft på 1.0 N, rettet oppover langs skråplanet. Hva blir nå klossens akselerasjon?

Løsning:
Hva skjer så når en legger til en ytra kraft F_p, rettet oppover, parallelt med skråplanet? For å finne ut hvilken retning friksjonskraften har, må vi finne ut hvilken retning klossen ville bevege seg med alle ytre krefter på plass, men *uten* friksjon. Friksjonskraften er alltid rettet mote bevegelsen vi ville fått uten friksjon. Netto akselererende kraft nedover langs skråplanet er, når vi ser bort fra friksjon,

$$F_{\text{aks}} = mg\sin\theta - F_p.$$

Med $m = 1.0$kg, $\phi = 0.30\,\text{deg}$, og $F_p = 1.0$ N, blir $F_{\text{aks}} = 1.0\cdot 9.8\cdot 0.5 - 1.0 = +3.9$N. Altså: Friksjonskraften er rettet *oppover*, med størrelsen $F_f = 0.42\cdot 1.0\cdot 9.8\cdot 0.866\text{N} = 3.56\text{N}$, som er mindre enn netto akselererende kraft nedover. Dermed akselererer klossen nedover med akselerasjonen $a = [(F_{\text{aks}} - F_f)/1.0]\ \text{m/s}^2 = 0.34\ \text{m/s}^2$.

(c) Hva skjer dersom kraften oppover langs skråplanet økes til 2.0 N?

Løsning:
Med parallelkraften $F_p = 2.0$ N er netto akselererende kraft nedover fortsatt positiv, $F_{\text{aks}} = +2.9$ N, slik at friksjonskraften fortsatt virker oppover. Men nå er $F_{\text{aks}} < F_f$, dersom vi, som før, regner med friksjonskraften slik den er når klossen er i bevegelse. Derved vil *ikke* klossen komme seg ut av startgropa (spesielt ikke siden den statiske friksjonskoeffisienten er større enn den kinetiske!), *klossen blir liggende stille*, og $F_f = F_{\text{aks}} = 2.9$ N. Nettokraften på klossen er, som den burde, lik null.

(d) La igjen kun tyngden og friksjon virke på klossen men la friksjonen være hastighetsavhengig slik at friksjonskoeffisienten kan skrives $\mu_k = 0.42 + 0.13$v, hvor v er hastigheten. Sett opp Newtons 2. lov for systemet som en differensiallikning, løs likningen numerisk med Python og plot farten som en funksjon av tid mellom $t = 0$ s og $t = 10$ s (La $v(0) = 0.0$ m/s og $x(0) = 0.0$ m.

Løsning:

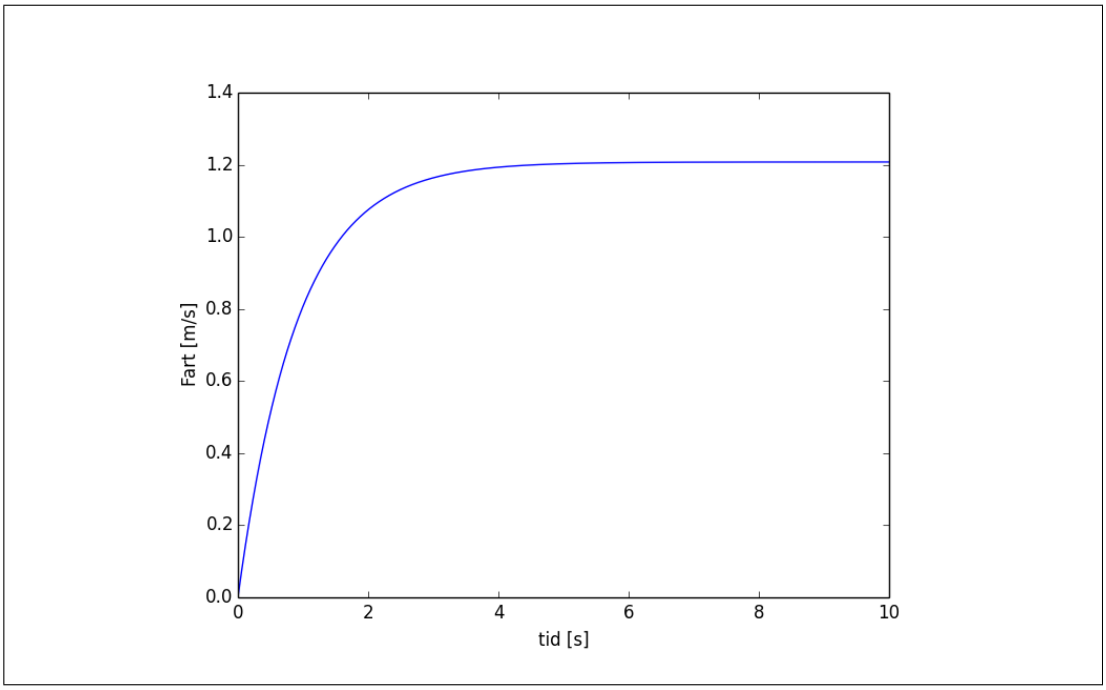
$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= mg\sin\theta - (0.42 + 0.13v)\cdot mg\cos\theta \\
a &= g(\sin\theta - (0.42 + 0.13v)\cos\theta) = v' \\
x' &= v,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{k+1} &= hg(\sin\theta - (0.42 + 0.13v_n)\cos\theta + v_n), \\
x_{n+1} &= hv + x_n.
\end{aligned}
$$

Dette kan implementeres i Python slik:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math as m

tf = 10.0
N = 1000000
h = tf/N
g = 9.81
theta = 30*3.14/180
st = m.sin(theta)
ct = m.cos(theta)

t = np.linspace(0,tf,N)
v = np.zeros(N)
x = np.zeros(N)

for n in range(0,N-1):
    v[n+1] = h*g*(st-(0.42+0.13*v[n])*ct)+v[n]
    x[n+1] = h*v[n] + x[n]

plt.plot(t,v)
plt.show()
```

Fra dette Python-skriptet kan man lage følgende plot av fart mot tid:



6 Utfordring

Hva er arbeidet som blir gjort av friksjonskraften når en kloss med masse m sklir ned en kvartsirkel, fra vertikalt til horisontalt?