TFY 4125 Øving 7

Denne øvingen dreier seg om **rotasjonsdynamikk**.

1 Les

Penusm denne uker er kapittel 10.5-10.7 og 11.1-11.4i Y&F.

2 Oppgaver

1. Ei snelle – to hjul med radius R forbundet med en aksel med radius r – ligger på et skråplan med helningsvinkel θ (se figur 2. Ei snor er vikla om akselen, og strukket parallelt med skråplanet til et festepunkt P på oversida av det lille hjulet. Snellas treghetsmoment om aksen er I, massen er M, statisk friksjonskoeffisient mot skråplanet er μ_S og kinetisk friksjonskoeffisient (glidende friksjon) er μ_K, der $\mu_\mathrm{K} < \mu_\mathrm{S}$.

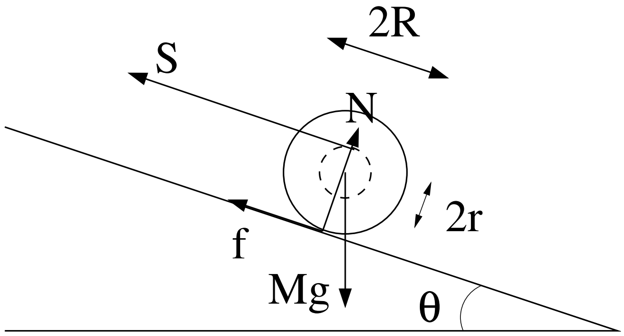
   Skråplanet bikkes (helningsvinkelen økes) og ved en helningsvinkel $\theta = \theta_0$ begynner snella å gli (slure) nedover.

   (a) Ved $\theta = \theta_0$ **like før** den starter å slure er snella i likevekt (i ro). Bruk likevektsbetingelser til å vise at vinkelen θ_0 og strekket S i snora kan skrives som

$$\theta_0 = \arctan\left[\mu_\mathrm{S}\left(1 + R/r\right)\right]$$

$$S = Mg\,\mu_\mathrm{S}\cos\theta_0 \cdot R/r$$

Solution:



Her har vi fire ukjente: θ_0, S, f og N. Dette krever fire ligninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen gjelder:

$$\sum F_\perp = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\theta,$$

$$\sum F_\parallel = 0 \Rightarrow Mg\sin\theta = f + S,$$

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow Sr = fR.$$

Vi vet at den statiske friksjonskraften kan ligge mellom null og en øvre grense:

$$f \leq \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta.$$

Ved grensen $\theta = \theta_0$, dvs. der hvor snellen akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/slure, er friksjonskraften lik det maksimale, $f = \mu_s Mg\cos\theta_0$.

Vi har nå fire ligninger vi kan bruke til å bestemme de ukjente.

Først har vi $S = (R/r)f$. Dette brukes så til å omforme uttrykket langs planet:

$$Mg\sin\theta_0 - f - (R/r)f = 0.$$

Her setter vi så inn løsningen for maksimal f, og finner en ligning for θ_0:

$$Mg\sin\theta_0 = \mu_s Mg\cos\theta_0(1 + R/r) \Rightarrow \tan\theta_0 = \mu_s(1 + R/r),$$

og dermed

$$\underline{\theta_0 = \arctan[\mu_s(1 + R/r)]}.$$

Snorkraften finner vi ved å sette inn for f:

$$S = \frac{R}{r}f = \frac{R}{r}\mu_s Mg\cos\theta_0.$$

(b) Finn uttrykk for akselerasjonen a nedover skråplanet når snella har begynt å slure. Helningsvinkelen holdes på fast vinkel θ litt større enn θ_0.

Solution: Vinkelen er nå gitt lik $\theta > \theta_0$, og siden vi har bevegelse blir de fire ukjente: a, S_1, f og N. Snorkraften blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol for den, og akselerasjonen langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskraften er nå gitt av den kinetiske friksjonskoeffisienten μ_k:

$$f = \mu_k N = \mu_k Mg\cos\theta.$$

Normalkraften er gitt som i forrige oppgave:

$$N = Mg\cos\theta.$$

Dette gjør at vi sitter igjen med to ukjent a og S_1. For å finne disse stiller vi opp to ligninger, Newtons andre lov langs planet og tilsvarende for rotasjon om snellens massesenter:

$$\sum F_{\|} = Ma \Rightarrow Mg\sin\theta - f - S_1 = Ma.$$
$$\sum \tau = I\dot{\omega} \Rightarrow -fR + S_1 r = I\dot{\omega}.$$

Her er I treghetsmomentet om snellens akse. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokken. Når snellen rutsjer nedover, rulles snoren ut med hastighet $v = \omega r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot{\omega} = \dot{v}/r = a/r$. Dette gir oss ligningssystemet:

$$Mg\sin\theta - fS_1 = Ma,$$
$$-fR + S_1 r = I(a/r).$$

Eliminerer S_1 og finner med litt smarte divisjoner og innsetting av f et uttrykk for a:

$$S_1 = Mg\sin\theta - f - Ma \Rightarrow -fR + Mgr\sin\theta - fr = I(a/r) + Mar.$$

$$\underline{a = g\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta\left(1 + \frac{R}{r}\right)}{1 + I/(Mr^2)}}.$$

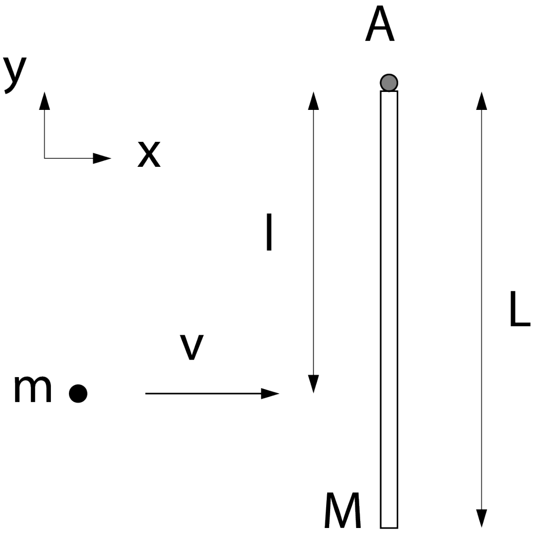


Figure 1: Oppgave 2

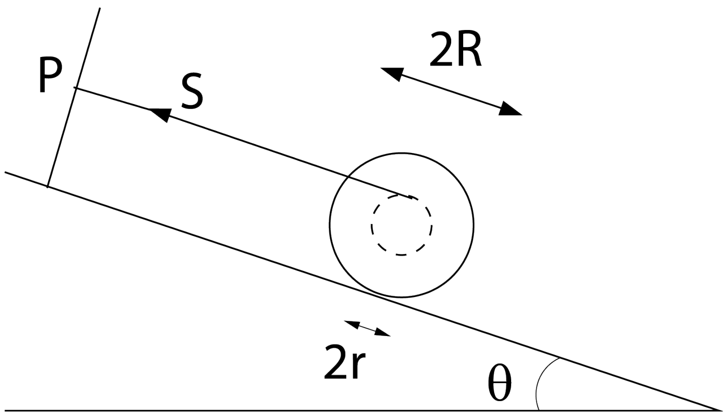


Figure 2: Oppgave 1

2. En stav med lengde L og masse M kan rotere friksjonsfritt om sin ene ende (A). Ei kule med masse m og hastighet $\vec{v}$ kolliderer fullstendig uelastisk med staven i avstand l fra A.

   (a) Hva er treghetsmomentet I til systemet stav + kule etter sammenstøtet, mhp aksen gjennom A?

   Solution: Betrakter kulen som en punktmasse.
   Mhp. aksen gjennom A (normalt på papirplanet) har staven et treghetsmoment $ML^2/3$. En ekstra masse m i avstand l gir ganske enkelt et ekstra bidrag ml^2, slik at

   $$I = \frac{1}{3}ML^2 + ml^2.$$

   (b) Hva er systemets impuls $\vec{p}_i$ før sammenstøtet?

   Solution: Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

   $$\vec{p}_i = mv\hat{x}.$$

(c) Hva er systemets dreieimpuls $\vec{L}_i$ om A før sammenstøtet?

Solution: Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls om A, dens *banedreieimpuls* om A er

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p}_i = -l\hat{y} \times mv\hat{x} = mvl\hat{z}.$$

Med impuls i z-retning bidrar ikke x-komponenten av $\vec{r}$ til dreieimpulsen.

(d) Hva er systemets dreieimpuls $\vec{L}_f$ om A umiddelbart etter sammenstøtet?

Solution: Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment om A som påvirker systemet, og dreieimpulsen om A er bevart: $\vec{L}_f = \vec{L}_i = mvl\hat{z}$.

(e) Hva er systemets vinkelhastighet $\vec{\omega}$ umiddelbart etter sammenstøtet?

Solution: Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvl mhp. A retter sammenstøtet. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{I} = \frac{v/l}{1 + ML^2/3ml^2}\hat{z}.$$

(f) Hva er systemets impuls $\vec{p}_f$ umiddelbart etter sammenstøtet? For hvilke verdier av l er hhv $p_f < p_i$ og $p_f > p_i$?

Solution: Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kulen, hastighet i positiv x-retning:

$$\vec{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\vec{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\vec{v} = \omega L\hat{x}$ helt nederst ($y = -L$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega L\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega L\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulens impuls $m\omega l\hat{x}$. Følgelig:

$$\vec{p}_f = \left(\frac{1}{2}ML + ml\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting av ω fra forrige oppgave gir

$$\vec{p}_f = \frac{mv + MvL/2l}{1 + ML^2/3ml^2}\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i\frac{1 + ML/2ml}{1 + ML^2/3ml^2}.$$

Her vil forholdet mellom leddene som adderes til i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{ML/2ml}{ML^2/3ml^2} = \frac{3l}{2L}.$$

Dermed: Hvis $l > 2L/3$, er $p_f > p_i$. Kulen treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre.

Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skuldes en kraf $\vec{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\vec{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)

Tilsvarende: Hvis $l < 2L/3$, treffer kulen staven så langt oppe at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.

Treffer kulen nøyaktig i $l = 2L/3$, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.

(I det videre forløpet har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

(g) Finn et uttrykk for $\Delta K = K_f - K_i$, dvs endringen i systemets kinetiske energi i sammenstøtet. Hva er den prosentvise endringen i K for grensetilfellene $m \gg M$ og $m \ll M$?

Solution: Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + \frac{1}{2}\int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}\int_{-L}^{0} \frac{M\ dy}{L}\omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{6}ML^2\right)\frac{(v/l)^2}{(1 + ML^2/3ml^2)^2} \\
&= \frac{K_i}{1 + ML^2/3ml^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi:

$$\Delta = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3ml^2/ML^2}.$$

Hvis kulen har mye større masse enn staven, $m >> M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kulen, som (rett etter støtet) fortsetter som om ingenting har hendt. Hvis kulen derimot har mye mindre masse enn staven, $m << M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kulen at den henger praktisk talt i ro etter støtet.