TFY 4125 Øving 5

Denne øvingen tar for seg **svingninger** som er et viktig fenoment som opptrer i mange deler av fysikken.

1 Les

Pensum er kapittel 14 Les spesielt 14.2, 14.7 og 14.8. Les Wikipedia artikkelen om Q-factor `http://en.wikipedia.org/wiki/Q_factor`.

2 Se

Følgende videoer fra Matematikk 3, er relevante for å løse andre ordens differensiallikninger. Endel er grunnleggende matematikk og kanskje mest for de som virkelig liker å forstå ting i dybden.

1. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff837205` (Intro Difflikninger)
2. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff836b09` (Mulige løsninger, Wronskian)
3. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff837eee` (Wronskain, konstante koeffisienter)
4. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff837868` (Klasser av løsninger, konstante koeffisienter
5. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff838ce9` (Inhomogene likninger
6. `https://video.adm.ntnu.no/pres/50237ff8385ec` (Drevne svingninger)

De som ønsker å fokuser på det som er mest relevant for å studere svingninger kan se på følgende deler

- Video 3 fra 28:00 (spesielt fra 37:46 -
- Video 4 fra 19:35 -35:21
- Video 5 fra 0-
- Video 6 fra 08:30-30:00

3 Grunnleggende

1. (a) Skriv ned Newtons andre lov for en masse m festet til en fjær med fjærkonstant k som følger Hookes lov. Skriv om likningen for å tydeliggjøre at det er en differensiallikning.

Solution:

$$\begin{aligned}\sum F &= -kx = ma \\ &= -kx = mx''\end{aligned}$$

(b) Den generelle løsningen på differensiallikningen i oppgave 1 kan enten skrives som $x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ eller $x(t) = C\cos(\omega t + \theta)$. Bestem ω som funksjon av k og m. Uttrykk også konstantene C og θ som funksjon av A og B.

Solution: For å se likheten mellom de to løsningene bruker vi identiteten:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Vi sammenligner likningene, og finner:

$$\begin{aligned}
A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) = C\cos(\omega t + \theta) &= C(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)), \\
\Rightarrow A &= -C\sin\theta, \\
B &= C\cos\theta, \\
\omega_0 &= \omega, \\
\Rightarrow \theta &= \arctan -\frac{A}{B}, \\
C &= \sqrt{A^2 + B^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= C\cos(\omega t + \theta), \\
x'(t) &= -\omega C\sin(\omega t + \theta), \\
x''(t) &= -\omega^2 C\cos(\omega t + \theta),
\end{aligned}$$

Setter inn i ligningen og finner ω,

$$\begin{aligned}
-kC\cos(\omega t + \theta) &= -\omega^2 mC\cos(\omega t + \theta) \\
\omega^2 &= \frac{k}{m}.
\end{aligned}$$

(c) Dersom initsialbetingelsene for klossen er $v(0) = v_0$ og $x(0) = x_0$, bestem C og θ som funksjon av v_0 og x_0

Solution: Setter inn grensebetingelser

$$\begin{aligned}
x(0) &= C\cos(\theta) = x_0, \\
x'(0) &= -\omega C\sin(\theta) = v_0,
\end{aligned}$$

og løser for de to ukjente, først ved å dele ligningene med hverandre:

$$-\omega\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\omega\tan\theta = \frac{v_0}{x_0} \Rightarrow \theta = \arctan\left[-\frac{v_0}{x_0\omega}\right],$$

og deretter ved å ta kvadratet av ligningene og addere:

$$\begin{aligned}
C^2\cos^2\theta &= x_0^2 \\
C^2\sin^2\theta &= \frac{v_0^2}{\omega^2} \\
C^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) &= \frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2 \\
C &= \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}.
\end{aligned}$$

(d) ω i forrige oppgave kalles vinkelfrekvensen. Hva blir frekvensen (altså svingninger per sekund) uttrykt ved ω?

> **Solution:** En svingning skjer når ωt går fra 0 til 2π. Tiden det tar er $t = T = 2\pi/\omega$ (også kalt perioden). Frekvensen blir 1/t altså $f = \omega/2\pi$

(e) Anta at vi har et masse-fjær system som har en svingefrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$, når det oscillerer på et friksjonsfritt bord. Hva blir frekvensen dersom fjæren henger fra taket? Du må selvsagt argumentere for svaret ditt.

> **Solution:** Svingefrekvensen blir fortsatt $\omega = \sqrt{k/m}$. Tyngdekraften på massen strekker fjæren slik at den får et nytt likevektspunkt, men fra dette likevektspunketet vil fortsatt kraften varierer som F = -kx. (Dette vil ikke være gyldig dersom man har en ikke-lineær fjær som ikke følger Hookes lov).

2. Dersom vi innfører dempning i systemet i oppgave 1, vil frekvensen gå opp, ned eller forblir uendret? Gi både en matematisk og intuitiv forklaring.

> **Solution:** Spørsmålet er litt ullent formulert. For det første kan ikke dempningen være større enn at vi har et underdempet system for i det hele tatt å få noen svingninger. For et underdempet system kan løsningen skrive som $x(t) = C \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \theta)$ hvor $\alpha = -b/2m$ og $\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. β kan sees på som en kvasifrekvens (selv om signalet egentlig ikke er periodisk på grunn av den minkende eksponentsialfunksjonen). Vi ser at denne minker med demping. Man kan kanskje tenke seg at dempningen reduserer hastigheten på bevegelsen som minker frekvensen.

3. Dersom vi i tillegg påtrykker systemet en kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega_d t)$, hva blir svingefrekvensen? Er det noen faseforskjell mellom $F(t)$ og $x(t)$? Har dempning noen innvirkning på faseforskjellen? Dersom det er en faseforskjell, hvilket signal ligger foran det andre? Igjen, finn både en intuitiv og en matematisk begrunnelse.

> **Solution:** Igjen er spørsmålet litt ullent formulert. Vi får kun en bestemt svingefrekvens når den transiente løsningen (den homogene delen av differensiallikninge har blitt dempet bort). Svingefrekvensen (til steady-state løsningen) er det samme som drivfrekvensen, altså ω_d.
>
> Går man gjennom algebraen for å finne koeffisientene for steady-state løsningen finner man at
>
> $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega_d b}{2m(\omega_0^2 - \omega_d^2}\right)$$
>
> Hvis drivfrekvensen er over ressonansfrekvensen blir fasen negativ, responsen ligger litt bak - man driver fortere enn systemet ønsker å reagere. Og motsatt.
>
> Ved stor forskjell blir faseforskjellen $\pi/2$. Dess mindre b, dess raskere skjer fasendringen fra $-\pi/2$ til $\pi/2$.

4. [LAB]

(a) Hva menes med resonans? Gi en intuitiv forklaring av fenomenet.

> **Solution:** Drivkraft og fjærkraft forsterker hverandre. Dette skjer gjerne ved en spesiell frekvens.
>
> Et klassisk eksempel på dette er et barn på en huske. Om man dytter (gir drivkraft) på korrekt tidspunkt i husken (når barnet er på bunnen og skal opp igjen) øker svingningene hver gang siden det tilføres mer energi av dyttingen.

(b) Hvordan ser uttrykket for amplituden som funksjon av drivfrekvens ut (for et dempet system)?

Solution:

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}.$$

Her er $F_{\max}$ amplituden til den påtrykte kraften, ω_d drivfrekvensen og b dempningskonstanten.

(c) Hva menes med Q-faktor?

Solution: Energi som tapes per svingning. $Q = \omega_0 m/b$

(d) Plot ved hjelp av Python frekvensspekteret (amplituden som funksjon av drivfrekvensen, $A(\omega_d)$)for systemet i oppgave 3, for $Q \in \{1, 3, 10, 20\}$. Velg k og m selv, og marker verdien $\omega = \sqrt{k/m}$ på x-aksen.

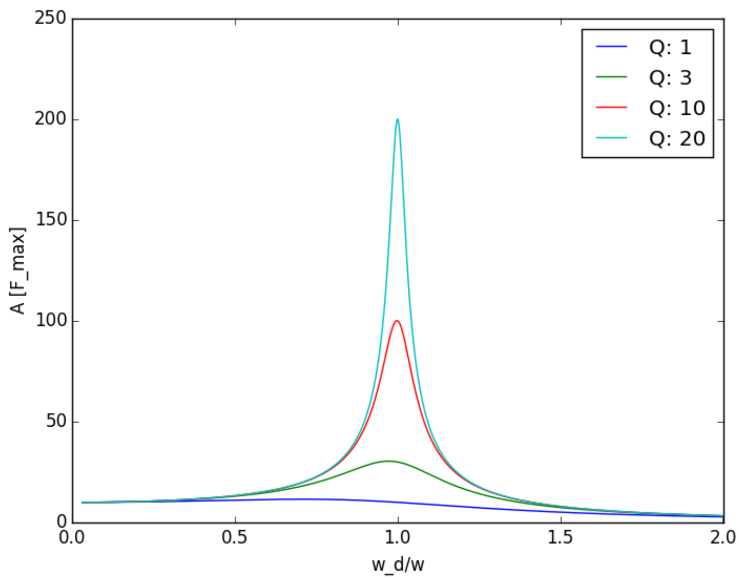
Solution: Bruker uttrykk for amplituden av en drevet og dempet oscillator

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}.$$

Finner et uttrykk for b ved å snu på uttrykket for Q-faktoren:

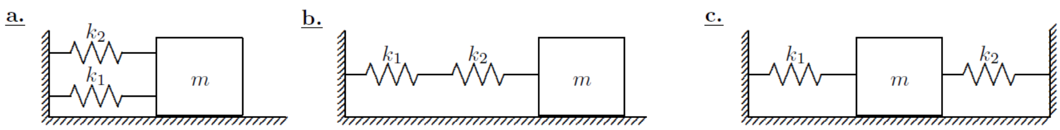
$$Q = \omega_0 \frac{m}{b} \Rightarrow b = \frac{\omega_0 m}{Q}.$$

Satt sammen kan dette brukes til å plotte frekvensspekteret. Under følger resulterende plot og Python-skript. Vi ser at systemet får en mye skarpere resonnanstopp med høyere kvalitetsfaktor, Q.




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mth

# Parametere
k = 0.1
m = 0.01
```

```
Q = [1,3,10,20]

w0 = mth.sqrt(k/m)

N = 10000
wf = 2*w0


wd = np.linspace(0.1,wf,N+1)
A = np.zeros(N+1)

# Loop over Q-verdier
for q in Q:
        for i in range(0,N):
                A[i] = 1/mth.sqrt((k-m*wd[i]**2)**2+(w0*m/q)**2*wd[i]**2)
        plt.plot(wd/w0,A,label='Q: '+str(q))

plt.legend()
plt.xlabel('w_d/w')
plt.ylabel('A [F_max]')
plt.show()
```



Figur 1: Ulike fjærsystemer

5. Et enkelt masse-fjær svingesystem med masse m og fjærkonstant k_i har som kjent svingefrekvens $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$. Sett opp Newtons lover for de tre svingesystemene vist i figur 1 og finn svingefrekvensen ω for hvert av systemene uttrykt med ω_1 og ω_2. I alle tilfellen er fjærene masseløse og det er ingen friksjon.

Solution:

a) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1 x$ og $-k_2 x$. Fra Newton's 2. lov finner vi svingelikningen

$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right) x = 0.$$

Sammenligner vi med standard SHM-likning $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ finner vi at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$
$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Effektiv fjærstivhet for parallellkoplede fjærer er mao. $k = k_1 + k_2$.

b) Når m forskyves mot høyre strekkes fjærene avstandene x_1 og x_2, og disse er ulike dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (Newton's 3. og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -(1/k_1 + 1/k_2)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$
\begin{aligned}
F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \\
\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0.
\end{aligned}
$$

Tilsvarende sammeligning som i a) gir svingefrekvensen ω

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}, \\
\omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.
\end{aligned}
$$

c) Med utsving x fra likevektsstillingen vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2 x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1 x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i a) og $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

6. [LAB] Anta at du har en fjær hvor du har målt fjærkonstanten til 4.0 ± 0.3 N/m, og massen i enden av fjæren til 200 ± 4 g. Hva blir svingefrekvensen med usikkerhet?

Solution: Bruker feilforplantningsloven sammen med uttrykket for frekvens gitt m og k:

$$
\begin{aligned}
f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \\
\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial k}\Delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial m}\Delta m\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Finner først de to partiellderiverte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{1}{km}}, \\
\frac{\partial f}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m^3}}.
\end{aligned}
$$

Innsatt finner vi uttrykket:

$$
\Delta f = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\Delta k^2}{km} + \frac{k\Delta m^2}{m^3}}.
$$

Med oppgitte verdier:

$$
\underline{f = 0.71 \pm 0.03 s^{-1}}.
$$

4 Oppgaver

7. [LAB]Anta at du har en kloss med masse m = 10 g som er festet i en fjær med fjærkonstant k = 0,1 N/m (Ingen andre krefter virker på systemet – f.eks beveger klossen seg horisontalt på et

friksjonsfritt bord). Sett opp Newtons 2. lov for dette systemet. Den generelle løsningen for denne andre ordens differensiallikning kan skrives som $x = Acos(\omega t + \theta)$

(a) Anta at klossen er i likevekt ved $x = 0$. Gitt at $x(0) = 1,0$ cm, og $x'(0) = 0.05$ m/s, bestem amplituden A og fasekonstanten θ. Løs deretter differensiallikningen numerisk i Python med de gitte initialbetingelsene.

Solution: A kan bestemmes fra energibevaring:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}A^2$$
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = \sqrt{(0.01\text{m})^2 + \frac{0.1\text{N/m}}{0.01\text{kg}}(0.05\text{m/s})^2} = 0.019\text{m}.$$

θ bestemmes fra:

$$\theta = \pm\cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right), (x(0) = \cos(\omega \cdot 0 + \theta))$$
$$v(0) = -A\omega\sin(\theta) > 0$$
$$\Rightarrow \theta = -1.0.$$

Numerisk løsning av $ma = -kx$:

$$x'' = -\frac{k}{m}x \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}x.$$

Diskretiserer:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = -\frac{k}{m}x_n$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = -\frac{k}{m}x_n \cdot h + v_n,$$
$$x_{n+1} = x_n + hv_n.$$

Forslag til implementasjon er gitt under c).

(b) Bestem analytisk hva perioden til svingesystemet er.

Solution:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.0\text{s}.$$

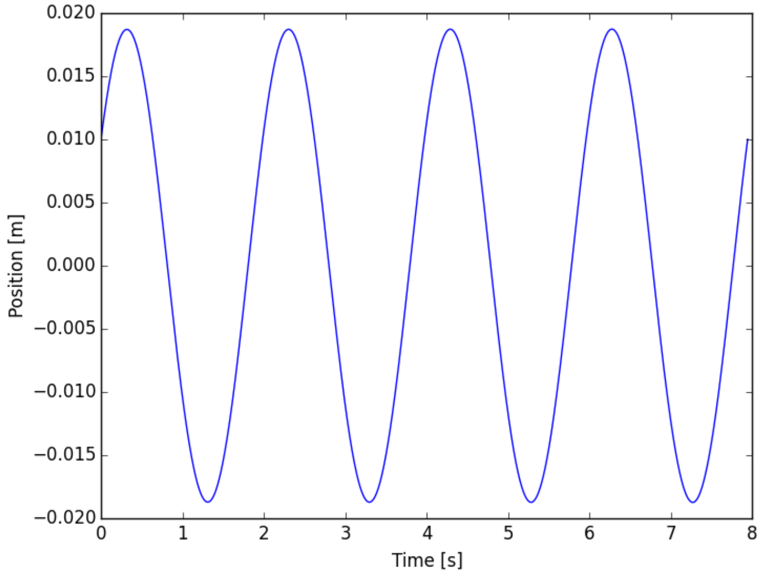
(c) Plot den analytiske løsningen sammen med den numeriske løsningen over et tidsintervall på 4 perioder (som du fant i deloppgave b)). Hvor lite må du gjøre tidsintervallet for at den numeriske løsningen skal reprodusere den analytiske løsningen?

Solution:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mth

# Fysiske parametere
k = 0.1
m = 0.01

w = mth.sqrt(k/m)
pi = mth.pi
```

```
# Simuleringsparametere
N = 200000                # Antall tidssteg
p = 4                     # Antall perioder
Tf = 2*pi/w*p    # Sluttid

h = Tf/N                  # Tidssteg

t = np.linspace(0,Tf,N+1)
x = np.zeros(N+1)
v = np.zeros(N+1)

x[0] = 0.01 # Initiell posisjon og hastighet
v[0] = 0.05

# Loop over tidssteg
for i in range(0,N):
        x[i+1] = x[i] + v[i]*h
        v[i+1] = v[i] - k/m*x[i]*h

plt.plot(t,x)
plt.xlabel('Time␣[s]')
plt.ylabel('Position␣[m]')
plt.show()
```

Dette Python-skriptet produserer figuren under:



Trenger $N = 100000$ får å ikke se noen forskjell. Dvs. $h = 7.9 \cdot 10^{-5}$s.

8. [LAB] Vi tilfører nå demping i systemet (f.eks fester en magnet til massen og lar magneten bevege seg gjennom en spole). Dempingen kan modelleres med et dempeledd som er gitt av $F = -bv$, hvor b er en konstant som beskriver dempningen. Endre den numerisk løsningen din fra oppgave 1 til å inkludere et dempeledd.

Solution: Vi inkluderer først et dempeledd i likningen, $ma = -kx - bv$:

$$x'' = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v.$$

Diskretiserer:

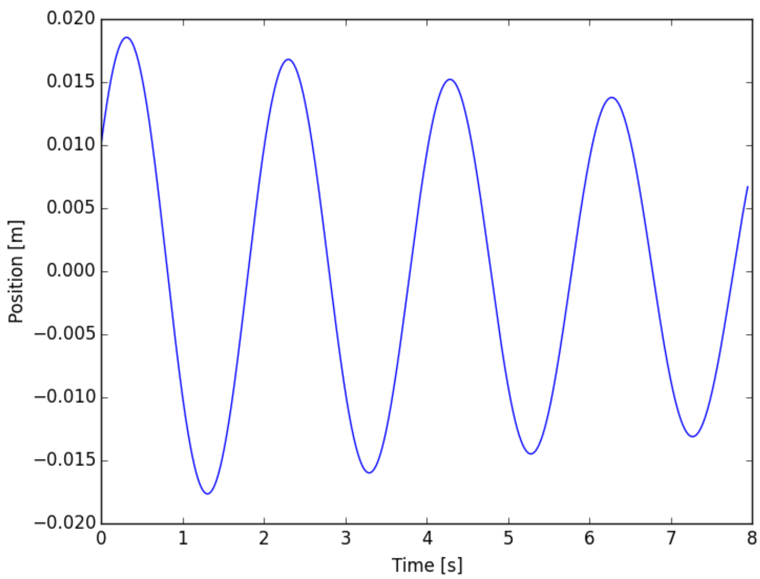
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}-v_n}{h} &= -\frac{k}{m}x_n - \frac{b}{m}v_n \\ \Rightarrow v_{n+1} &= -\frac{k}{m}x_n \cdot h + (1-\frac{b}{m}\cdot h)v_n, \\ x_{n+1} &= x_n + hv_n.\end{aligned}$$

Dette systemet med likninger er veldig likt det vi løste i forrige oppgave. Det eneste vi må gjøre er å endre uttrykket i løkken som oppdaterer hastigheten, og i den sammenheng også legge til en dempningskonstant.

```
            b = mth.sqrt(4*m*k)
...
v[i+1] = v[i]*(1-b/m*h) - k/m*x[i]*h
```

(a) Prøve først med $b = 0.0010$ Ns/m. Hva slags system er dette (overdempet eller underdempet)

Solution: Denne dempningskonstanten gir et underdempet system, som vi kan se av den resulterende figuren:

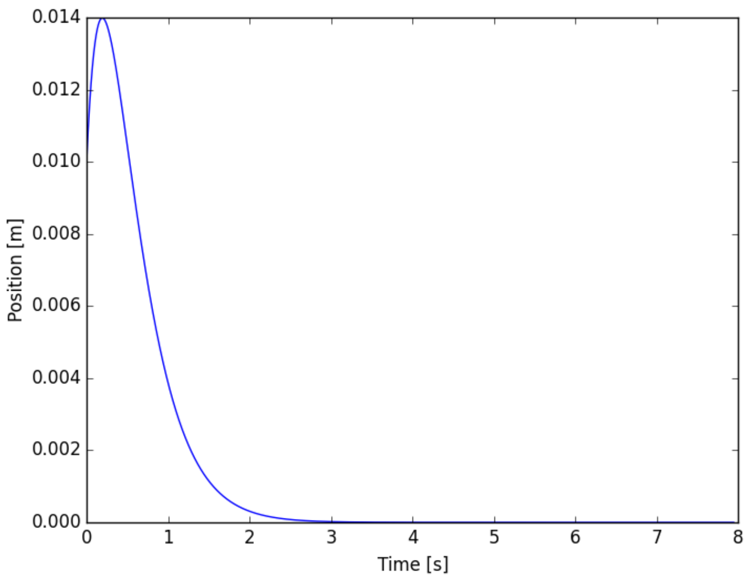


(b) Hva må b være for å få til et kritisk dempet system. Plot løsningen for dette.

Solution: Kritisk dempning har man dersom

$$\begin{aligned}b^2 &= 4mk \\ b &= \sqrt{4mk}.\end{aligned}$$

Under følger en figur som viser kritisk dempning:



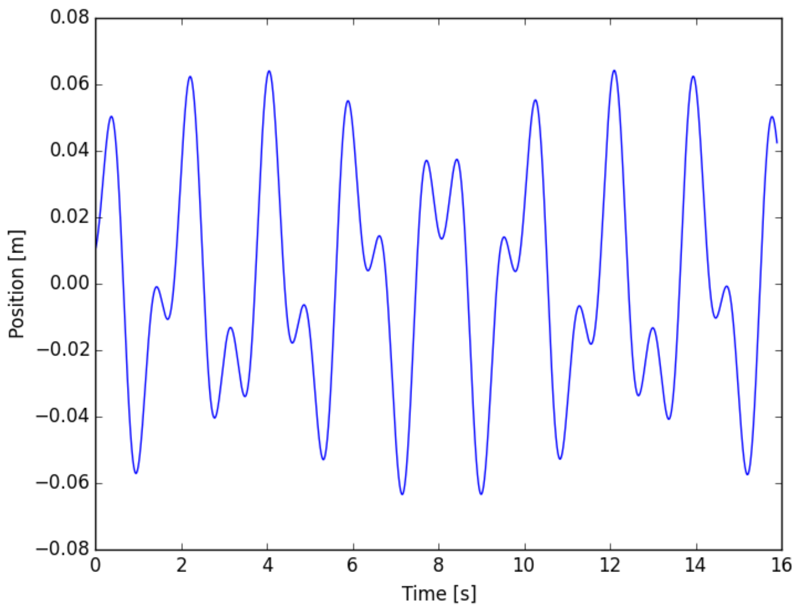
9. [LAB] Vi introduserer nå en kraft som driver systemet som er gitt av $F_0 \cos(\omega_d t)$.
   (a) Modifiser den numeriske løsningen din fra forrige oppgave til også å inkludere denne kraften. La $\omega_d = 7$ rad/s og F_0= 0.01 N.
   (b) Øk tidsintervallet til å være like 8 perioder (ved frie svingninger). Plot så svingningene først for $b = 0$ (ingen demping) og deretter for b satt til 10% av verdien for kritisk demping. Tolk kurvene ved hjelp av begrepene transient og steady-state løsning.
   (c) Hva er resonansfrekvensen til systemet? Plot løsningen for tre ulike frekvenser, en lik resonansfrekvensen, en litt over og en litt under (La demping være 10% av demping for kritisk demping).
   (d) Hva er Q-faktoren til systemet når b er 10% av verdien for kritisk demping?

Solution: Vi kan modifisere skriptet på samme måte som i forrige oppgave og få koden:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mth

#Fysiske parametere
k = 0.1
m = 0.01
b = 0.1 * mth.sqrt(4*m*k)
F0 = 0.01

w = mth.sqrt(k/m)
wd = 7
pi = mth.pi

#Simuleringsparametere
N = 200000              # Antall tidssteg
p = 8                   # Antall perioder
Tf = 2*pi/w*p    # Sluttid

h = Tf/N                # Tidssteg

t = np.linspace(0,Tf,N+1)
x = np.zeros(N+1)
v = np.zeros(N+1)

x[0] = 0.01 # Initiell posisjon og hastighet
```

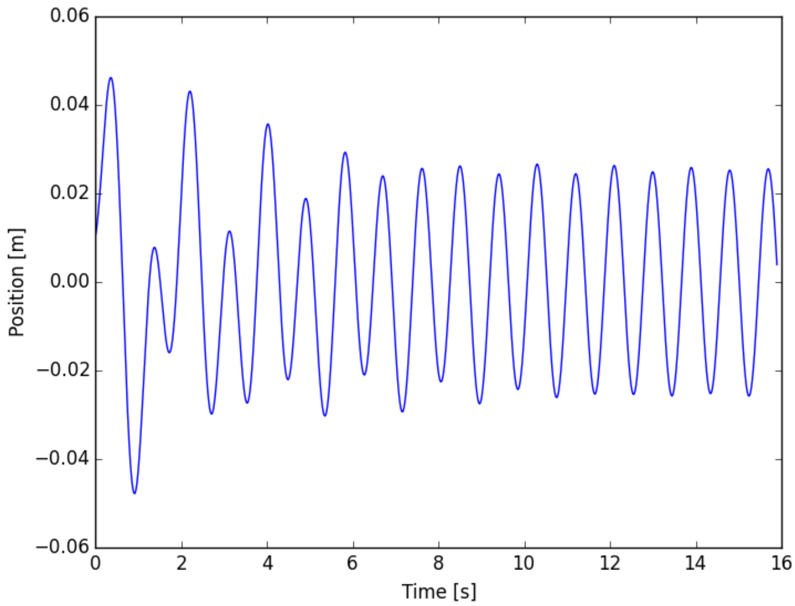
```
v[0] = 0.05

# Loop over tidssteg
for i in range(0,N):
        x[i+1] = x[i] + v[i]*h
        v[i+1] = v[i]*(1-b/m*h) - k/m*x[i]*h + F0*np.cos(wd*t[i])/m*h

plt.plot(t,x)
plt.xlabel('Time␣[s]')
plt.ylabel('Position␣[m]')
plt.show()
```

Med dette skriptet finner vi kurver for oppførsel ved $b = 0$:



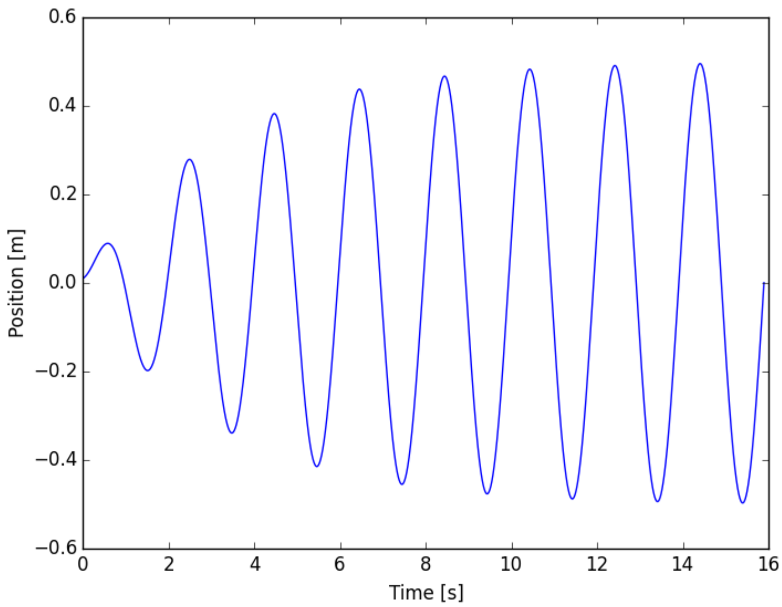
I denne figuren ser vi at den eksterne kraften legges til den originale bevegelsen, dette skjer siden systemer er udempet.

Ved b satt til 10% av kritisk demping får vi svingeforløpet:

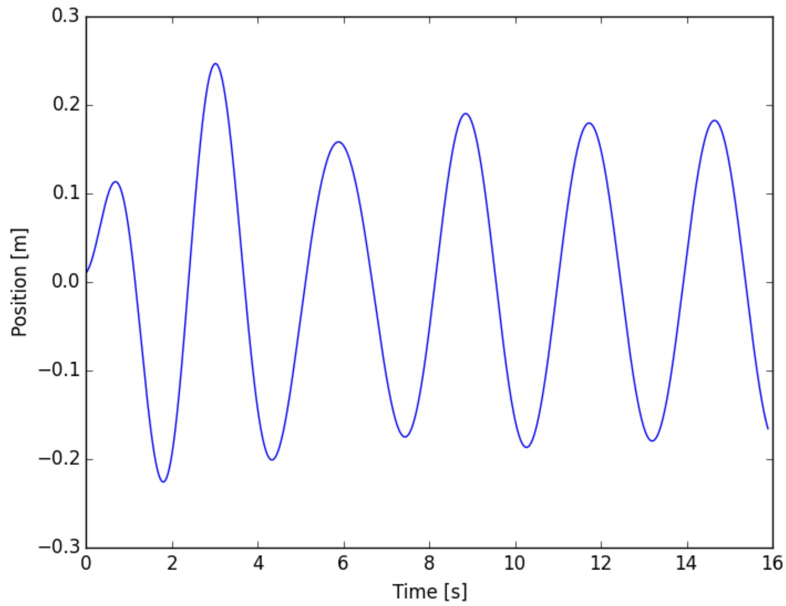


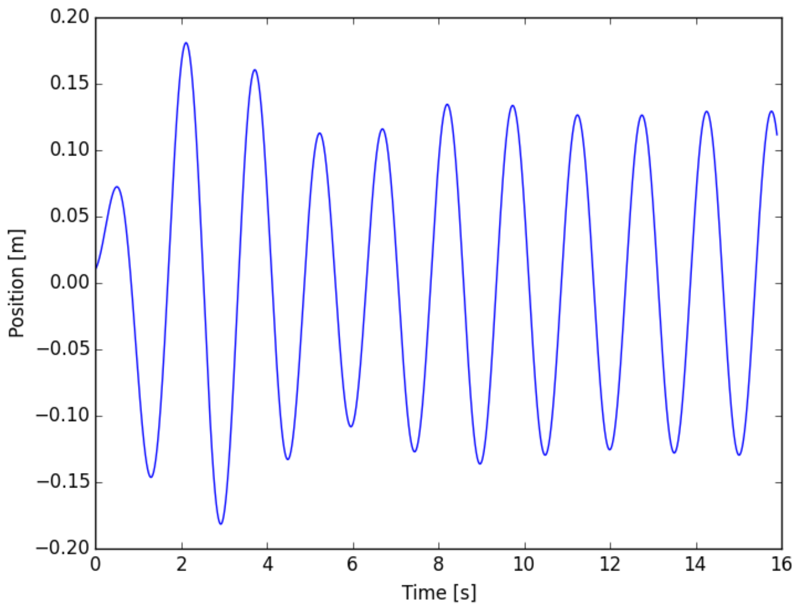
I denne figuren ser vi at vi har en transient periode i starten der den originale bevegelsen dør ut, før vi ender opp med et mer eller mindre steady-state system som følger den påtrykkede kraften.

Resonansfrekvensen kan settes lik ω. Settes drivkraften lik denne før vi store svingninger:



Settes drikraften litt under eller litt over resonansfrekvensen får vi de to følgende figurene:





Q-faktoren er gitt av

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\sqrt{mk}}{b} \\
&= \frac{\sqrt{mk}}{0.1\sqrt{4mk}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5.
\end{aligned}
$$

5 Repetisjon

10. En partikkel beveger seg under en attraktiv kraft F av formen

$$F = -\frac{k}{r^2}$$

der r er avstanden til det tiltrekkende sentrum, og k er en konstant. Vi antar at partikkelen følger en sirkelbane med radius r.

Vis at partikkelen har total mekanisk energi $E = -k/2r$. (Velg nullpunkt for potensiell energi i $r \to \infty$).

Solution: Vi skal finne den totale mekaniske energien $E = K + U$. Vi gjør dette i to omganger.

Den potensielle energien er satt til null i uendeligheten og blir negativ når partikkelen beveger seg nærmere sentrum. Når partikkelen er ved r har kraften F utført arbeidet:

$$\begin{aligned} U &= -\int_{\infty}^{r} F(r')dr' \\ &= \int_{r}^{\infty} -\frac{k}{r'^2}dr' \\ &= [\frac{k}{r'}]_r^{\infty} \\ &= -\frac{k}{r}. \end{aligned}$$

Positiv retning for bevegelse er retningen vekk fra sentrum, noe som må blir tatt hensyn til når man bruker de vanlige formlene for sirkelbevegelse:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2, \\ -F &= ma_{\text{rad}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{k}{r^2} \\ mv^2 &= \frac{k}{r}, \\ K &= \frac{1}{2}\frac{k}{r} \Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}\frac{k}{r} - \frac{k}{r} \underline{= -\frac{1}{2}\frac{k}{r}}. \end{aligned}$$