TFY 4125 Øving 12

Denne øvingen omhandler termodynamikk 1: Temperatur, temperaturavhengige egenskaper, ideelle gasser, Tilstandslikninger og variabler, Varmetransport

1 Les

Kapittel 17 og 18 i boken er pensum. Les spesielt 17.1, 17.3, 17.4, 17.6 og 17.7, 18.1 og 18.4

2 Se

Video om tilstandslikninger og tilstandsvariabler

3 Grunnleggende

1. Hva er temperatur?

Solution: Temperatur kan defineres på flere måter.

En måte er se på det kinetisk. Den gjennomsnittlige kinetiske bevegelsesenergien til et enkelt molekyl er gitt ved:

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{av}} = \frac{3}{2}kT.$$

2. Hvor mye er 60 Kelvin på Celciusskalaen

Solution: $-213.15°\text{C}$.

3. Hva er en ideell gass? Hva er vitsen med et slikt idealisert system? Hvilken relasjon har den til virkeligheten?

Solution: En ideell gass er en gass som oppfyller en rekke sammenhenger mellom trykk, volum, absolutt temperatur og antall molekyler i gassen. Disse sammenhengene kan oppsummeres i det som kalles den ideelle gasslov:

$$pV = nRT.$$

Poenget med et slikt idealisert system er at det er en veldig anvendelig beskrivelse som gjør det mulig å løse mange problemer. Ved standard temperatur og trykk oppfører de fleste gasser seg kvalitativt som en ideell gass.

Generelt oppfører gasser seg mer ideelt ved høyere temperatur og lavere trykk.

4. Anta at vi måler trykket i en gass til å være $4.80 \cdot 10^4$ Pa ved trippelpunktet til vann ($0.01°$ C).
   (a) Ved 100°C måler vi et trykk på $6.5 \cdot 10^4$ Pa. Oppfører gassen seg som en ideell gass?

Solution: Bruker den ideelle gasslov:

$$pV = nRT$$
$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}.$$

Her har vi samlet de delene av uttrykket som varierer i oppgaven på venstre side, mens høyre side kun inneholder konstanter. Dersom gassen oppfører seg som en ideell gass vil venstre side før og etter endring av temperatur og trykk være lik den samme konstanten:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{4.80 \cdot 10^4 \text{Pa}}{273.16\text{K}} = 175.7\text{J/K/m}^3,$$
$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{6.5 \cdot 10^4 \text{Pa}}{373.15\text{K}} = 174.2\text{J/K/m}^3,$$
$$\frac{p_1}{T_1} \simeq \frac{p_2}{T_2}.$$

Uttrykkene er nesten like, så vi kan si at det ser ut som gassen oppfører seg som en ideell gass.

   (b) Dersom trykket hadde variert lineært med temperaturen, ved hvilken temperatur (i Celcius) ville trykket blitt lik null.

Solution: Trykket blir null når temperaturen er lik null dersom det er en lineær sammenheng (uten noen konstantforskjell). Dette er det den ideelle gassloven sier, men den snakker om absolutt temperatur i Kelvin. Derfor vil vi ha null trykk ved temperaturen -273.2°C.

5. En 1 m lang metallstang består av 0.5 m stål og 0.5 m kobber. En av enden holdes på en temepratur på 0°C og den andre enden holdes på en temperatur på 100°C. Hva blir temperaturen i skjøten mellom de to materialene (Du må nok slå opp noen egenskaper ved kobber og stål).

Solution: Kobber $k_{\text{Cu}} = 385\text{W/mK}$, stål $k_{\text{S}} = 50.2\text{W/mK}$.

For å finne varmeprofilen gjennom materialet ser vi på varmestrømmen som vi kan anta konstant i dette tilfellet,

$$\frac{k_1 A \Delta T_1}{L} = \frac{k_2 A \Delta T_2}{L}.$$

Siden det ikke er oppgitt i oppgaven hvilken ende som er ved hvilken temperatur er de to delene her generalisert som k_1 og k_2. ΔT_1 er temperaturfallet over den første delen som vi kan definere går fra 100°C til temperaturen T vi skal finne, mens ΔT_2 går fra denne temperaturen til 0°C. Arealet og lengden av stengene, A og L, er like for de to delene og kan elimineres:

$$k_1 \Delta T_1 = k_2 \Delta T_2$$
$$k_1(100°\text{C} - T) = k_2 T$$
$$T = \frac{100°\text{C}}{1 + \frac{k_2}{k_1}}.$$

Innsatt i dette finner vi de to krysningstemperaturene, avhengig av rekkefølgen på metallene.

4 Oppgaver

6. Vi tar for oss en typisk husvegg med 2.5 cm ytterpanel og 2.0 cm innerpanel av gran med varmeledning $k_{gran} = 0.14$ W/mK. Mellom ytter- og innerpanel er det plassert steinullmatter med tykkelse 10 cm og med varmeledningsevne $k_{ull} = 0.0047$ W/mK. Anta at temperaturen på innsiden av veggen er $T_i = 22°$ mens vi for utetemperaturen velger $T_y = +5°C$. Vi neglisjerer varmeovergangseffekter mellom vegg og luft både inne og ute.

   (a) Tegn figur av veggens tverrsnitt, og skisser temperaturen som funksjon av posisjon i veggen. Utled et uttrykk for varmestrømmtettheten $j \equiv H/A$ gjennom den lagdelte veggen som funksjon av inne- og utetemperaturen, og tykkelser og varmeledningsevner.

   Solution: Varmeledningsligningen lyder $j = -k\frac{dT}{dx}$. For det tilfellet at en har stasjonær varmeledning gjennom en plate med tykkelse b gir dette (når varmestrømtettheten regnes positiv og ΔT er temperaturforskjellen mellom platens to sider) at $j = (k/b)\Delta T$. Denne ligningen er helt analog Ohms lov for likestrøm, med ΔT i rollen som elektrisk spenning, j som elektrisk strøm, og b/k i rollen som elektrisk motstand. En lagdelt vegg er helt analog en seriekopling av elektriske motstander, og siden motstanden til en seriekopling er summen av enkeltmotstandene har vi at j er gitt som

   $$j = \frac{T_i - T_y}{(b_1/k_{\text{gran}}) + (b_2/k_{\text{steinull}}) + (b_3/k_{\text{gran}})} = \frac{T_i - T_y}{((b_1 + b_3)/k_{\text{gran}}) + (b_2/k_{\text{steinull}})}.$$

   (b) Beregn denne varmestrømtettheten j numerisk ut fra tallen ovenfor.

   Solution:

   $$\frac{22 - 5}{(0.045/0.14) + (0.10/0.047)}\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \underline{6.94\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}.$$

   (c) Beregn også temperaturen på yttersiden av innerpanelet (HINT: systemet er i likevekt!)

   Solution: Varmestrømtettheten er konstant gjennom alle lag i veggen under stasjonære forhold. Kaller vi temperaturen på yttersiden av innerpanelet for T, må den være gitt av

   $$j = k_{\text{gran}}(T_i - T)/b_3 \Rightarrow T = T_i - j \cdot b_3/k_{\text{gran}} = (22.0 - 6.94 \cdot 0.02/0.14)°\text{C} = \underline{21.0°\text{C}}.$$

   (d) For å vurdere betydningen av isolasjonene i veggene for husets totale energiregnskap, la oss anta at det totale nettoareal av ytterveggene i en enebolig (fraregnet vinduer og dører er 100m^2. Dersom vi regner med at oppvarming trengs 200 døgn pr. år, og at gjennomsnittlig utetemperatur i denne fyringssesongen er $T_y = +5°C$, hva blir da det gjennomsnittlige energitapet pr. døgn (regnet i kWh) ut av veggene? Hvor mange kWh pr. år vil en spare ved å øke tykkelsen av steinullmattene fra 10 cm til 15 cm? Og fra 15 cm til 20 cm?

   Solution: Med 10 cm steinull blir det årlige varmetapet ut gjennom 100m^2 veggflate, under de gitte forutsetninger

   $$E(10\text{cm}) = 6.94 \cdot 10^{-3}\text{kW/m}^2 \cdot 100\text{m}^2 \cdot 24(\text{h/døgn}) \cdot 200(\text{døgn/år}) = \underline{3331\text{kWh/år}}.$$

For 15 cm og 20 cm steinull finner en tilsvarende:

$$j(15\text{cm}) = 4.84\text{W/m}^2 \Rightarrow \underline{E(15\text{cm}) = 2323\text{kWh/år}},$$
$$j(20\text{cm}) = 3.71\text{W/m}^2 \Rightarrow \underline{E(15\text{cm}) = 1783\text{kWh/år}}.$$

Med andre ord: Ved å gå opp fra 10 cm til 15 cm isolasjon kan en spare ca. 1000 kWh pr. år, mens en ytterligere økning fra 15 cm til 20 cm vil redusere varmetapet gjennom veggene med ytterligere 540 kWh pr. år (under de gitte forutsetningene!).

Uansett: ved nybygg vil god veggisolasjon høyst sannsynlig være en fornuftig investering, mens det fra et rent økonomisk synspunkt er mer tvilsomt om etterisolering lønner seg.

7. Jernbaneskinner av stål i lengder på 12 m legges ende mot ende. Skinnene legges en vinterdag med utetemperatur -11 grader. Stålet i skinnene har lineær termisk utvidelseskoeffisient $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$

   (a) Hvor stort mellomrom må man la det være mellom tilstøtende skinnelengder når skinnene blir lagt ut, dersom man ønsker at de akkurat skal berøre hverandre en sommerdag med temperatur 32 grader [svar 6.2 mm]

   Solution: Lengdeforandringen til skinnene blir:

   $$\Delta l = \alpha l \Delta T = 1.2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1} \cdot 12\text{m} \cdot 43\text{K} = 6.2\text{mm}.$$

   Dette er det mellomrommet som må velges når skinnene legges.

   (b) Hva kunne man risikert dersom man ikke hadde laget mellomrom?
   `http://www.nrk.no/ho/solslyng-forer-til-togforsinkelser-1.11842252`
   `http://www.nrk.no/trondelag/varmen-stopper-toget-1.6156389`

   Solution: Dersom skinnene lå tett inntil hverandre ved 11 kuldegrader, vil trykkspenningen i skinnene bli formidabel når temperaturen har steget til 32°C. I "gamle dager" kunne denslags føre til "solslyng", dvs. at skinnene rett og slett gjorde slyng på seg for å redusere trykkspenningen, med togstans eller avsporinger som resultat. På den annen side er det selvsagt ingen fordel med gap mellom skinnene. Det fører til dunking, ubehag og større slitasje. Den tekniske løsningen på dette problemet er å bruke et annet materiale enn jern i overgangen mellom skinnene. De nysgjerrige henvises til Jernbaneverket.

8. (a) Når lufttemperaturen er under 0°C fryser vannet på overflaten av en innsjø slik at det dannes is. Hvorfor fryser ikke innsjøen straks i hele sin dybde?

   Solution: For at vannet skal fryse til is må først varme ledes vekk fra vannet slik at temperaturen synker til 0°C, og deretter må ytterligere varme ledes vekk for at faseendringen kan finne sted. Hele vannvolumet har altså for mye termisk energi til at det kan fyse, selv om det samme ikke kan sies om det øverste sjiktet.

   (b) Vis at istykkelsen øker proporsjonal med kvadratroten av tiden fra tilfrysningen startet. Vi antar at smeltevarmen som avgis fra et nydannet issjikt på undersiden av isen må ledes bort gjennom den istykkelsen som til enhver tid finnes (hint: Finn en måte å sette opp to uttrykk for varmetransporten dQ som må til for å få tilfrysning av en istykkelse dh og eliminer deretter dq. Husk at avkjølingen av vannet som skal fryse må skje gjennom islaget over. $k_is = 1.6$ W/mK, $\rho_is = 920kg/m^3$, $L_t = 334 \cdot 10^3 J/kg$) (smeltevarmen).

   Solution: For at vannlaget under isen skal fryse må den nødvendige varmen ledes vekk gjennom islaget over. La istykkelsen ved tiden t være h, og anta at den øker med en infinitesimal tykkelse dh til $h + dh$ innen tidspunktet $t + dt$. Massen av den nydannede isen er da

$$dm = \rho dV = \rho A dh$$

og vi kan sette opp to uttrykk for varmen dQ som må ledes gjennom det øverste ("gamle") islaget.

$$dQ = dm \cdot L_f = \rho A L_f dh \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{h} \tag{2}$$
$$dQ = kA\frac{\Delta T}{h}dt. \tag{3}$$

Likning 1 angir den spesifikke smeltevarmen (eller i denne sammenhengen kanskje heller "frysevarmen") L_f mens likning 3 beskriver den varmestrømmen som oppstår når en har temperaturgradient $\Delta T/h = (T_{\text{vann}} - T_{\text{is}})/h$ og termisk konduktivitet k. Eliminerer vi dQ mellom de to finner vi dh gitt ved dt:

$$\rho A L_f dh = dQ = kA\frac{\Delta T}{h}dt$$
$$h dh = \frac{k\Delta T}{\rho L_f}dt.$$

Integrasjon av hver side med korresponderende integrasjonsgrenser gir

$$\int_0^h h dh = \int_0^t \frac{k\Delta T}{\rho L_f}dt$$
$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{k\Delta T}{\rho L_f}t$$
$$h = \sqrt{\frac{2k\Delta T}{\rho L_f}t}$$

som viser at istykkelsen økre proporsjonalt med kvadratroten av tiden.

(c) Anta at temperaturen på oversiden av isen er -10 grader og på undersiden 0 grader og regn ut hvor lang tid det ville ta før isen er 25 cm tykk. [svar: 170 timer]

Solution: Omrokkerer uttrykket fra forrige oppgave og setter inn $h = 0.25$ m, $\Delta T = 10°$C, $\rho = 920$ kg/m^3, $L_f = 334 \cdot 10^3$ J/kg og $k = 1.6$ W/Km gir

$$t = 6.0 \cdot 10^5 \text{s} \simeq \underline{170\text{h}}.$$

(d) Hvis innsjøen er 40 m dyp og vi har temperaturer som i forrige oppgave, hvor lang tid tar det før den fryser helt til bunns? [svar: $\simeq$ 500 år]

Solution: Med $h \propto \sqrt{t}$ og $t = 170$ h for $h = 0.25$m får vi

$$\left(\frac{40\text{m}}{0.25\text{m}}\right)^2 = \frac{t(40\text{m})}{170\text{h}}$$

som gir $\underline{t(40\text{m}) \simeq 500\text{år}}$. Det må (minst!) en ny istid til for at 40 m dype innsjøer skal fryse helt til bunns.

9. En vannvarmer samler energi ved hjelp av solfangere på taket, der vannet sirkulerer i rør og får tilført varme fra solstrålene som slipper gjennom et gjennomsiktig deksel. Vannet blir så pumpet ned i en tank inne i huset.

   Hvor stort areal må oppsamleren ha for å varme vannet i en 200 liters tank fra 20°C til 40°C i løpet av en time, dersom vi (forsiktig, men realistisk!) antar at systemet har en virkningsgrad på 20 %? (80 % av energien i sollyset går tapt, eller rettere: ender opp andre steder enn i varmtvannstanken.) Det oppgis at intensiteten til det innfallende sollyset (i middel) er 700 W/m^2, og den spesifikke varmekapasiteten til vann er 4186 J/kgK. [Svar: $33m^2$]

   Solution: Innstrålt enerig i løpet av tiden t er $E = IAt$, der I er innstrålt intensitet og A er arealet. Massetettheten til vann er 1 kg/liter slik at vannbeholderen inneholder 200 kg vann. Når dette vannet skal varmes opp fra 20°C til 40°C i løpet av en time med en virkningsgrad på 20%, er det nødvendige arealet gitt ved

$$0.20IAt = cm\Delta T \Rightarrow A = \frac{cm\Delta T}{0.20It} = \frac{4186 \cdot 200 \cdot 20}{0.20 \cdot 700 \cdot 3600}\text{m}^2 = \underline{33.2\text{m}^2}.$$

10. Daltons lov sier at totaltrykket i en gassblanding er lik summen av partialtrykkene (altså deltrykkene fra hver av gassene som inngår i blandingen). Forklar kort hvordan dette kan forstås i lys av kinetisk gassteori.

    En gassflaske har masse $m = 21.22$ kg når den er tom. Volum 1,33 L. Fylt med like masser av N_2 og O_2 gir total masse 21.61 kg. Hva er trykket i flaska, oppgitt i atmosfærer, når $T = 20°C$? [Svar: 236 atm]

    Solution: I kinetisk gassteori antar vi at gassmolekylene beveger seg uavhengig av hverandre, og at trykk oppstår når gassmolekylene kolliderer med "veggene" (for eksempel i en beholder). Det er derfor rimelig at Daltons lov gjelder for ideelle gasser, altså at vi kan summere trykkbidragene fra hver av gassene individuelt for å finne totaltrykket.

    For å finne trykket i flasken finner vi først antall molekyler av de to typene:

$$M_{\text{N}_2} = 28.02\text{g/mol}, M_{\text{O}_2} = 32.00\text{g/mol}.$$

$$m_{\text{gass}} = (21.61 - 21.22)\text{kg} = 0.39\text{kg}.$$
$$m_{\text{N}_2} = m_{\text{O}_2} = 0.5 \cdot m_{\text{gass}} = 0.195\text{kg}.$$

$$n_{\text{N}_2} = m_{\text{N}_2}/M_{\text{N}_2} = 195/28.02\text{mol} = 6.959\text{mol},$$
$$n_{\text{O}_2} = m_{\text{O}_2}/M_{\text{O}_2} = 195/32.00\text{mol} = 6.094\text{mol}.$$

    Nå bruker vi Daltons lov, og finner at

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} &= \sum P_i = (n_{\text{N}_2} + n_{\text{O}_2})\frac{RT}{V} \\ &= (6.959 + 6.094)\frac{8.314 \cdot 293}{1.33 \cdot 10^{-3}}\text{Pa} = 2.39 \cdot 10^7\text{Pa} \approx 236\text{atm}. \end{aligned}$$