

## L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos

Étienne GHYS  
 CNRS - ÉNS Lyon  
 UMPA, 46 Allée d'Italie  
 69364, Lyon, France

### 1 Introduction

L'« attracteur de Lorenz » est le paradigme du chaos comme le verbe « aimer » est le paradigme des verbes du premier groupe. Apprendre la conjugaison du verbe aimer ne suffit pas pour apprendre le français mais c'est sans aucun doute nécessaire. De la même manière, observer de près l'attracteur de Lorenz ne suffit pas pour comprendre tout le mécanisme du *chaos déterministe* mais c'est un travail indispensable. Ce travail est d'ailleurs bien agréable puisqu'il s'agit d'un objet magnifique à la fois mathématiquement et esthétiquement. Il n'est pas étonnant que l'« effet papillon » soit l'un des rares concepts mathématiques connus en dehors des milieux scientifiques.

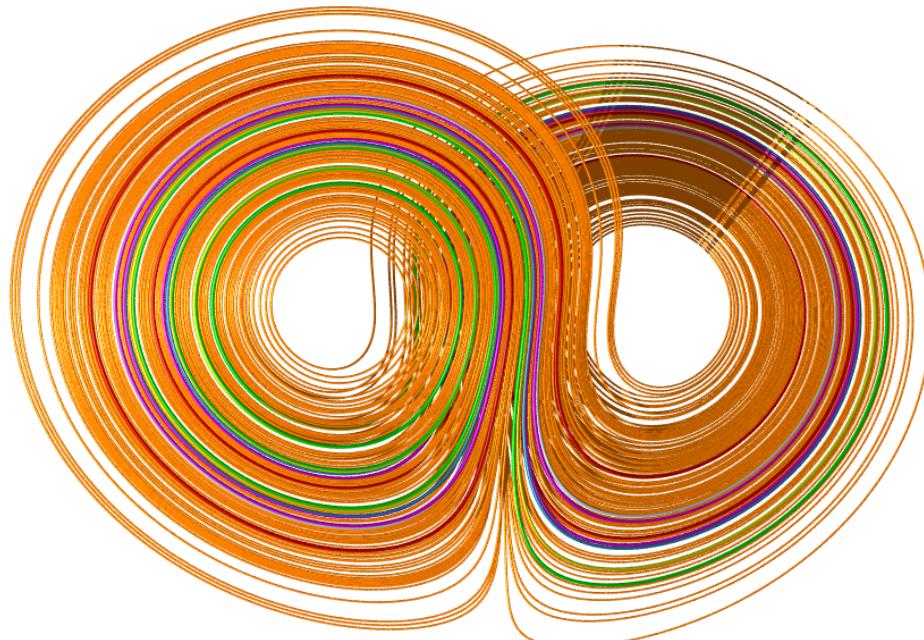


FIG. 1 – Attracteur de Lorenz

Dans son acception épistémologique, un paradigme est une « conception théorique dominante ayant cours à une certaine époque dans une communauté scientifique donnée, qui fonde les types d’explications envisageables, et les types de faits à découvrir dans une science donnée »<sup>1</sup>. C’est en effet le rôle joué par l’attracteur de Lorenz dans la théorie contemporaine des systèmes dynamiques, comme je vais essayer de l’expliquer. La dynamique de Lorenz présente un ensemble de phénomènes qualitatifs dont on pense *aujourd’hui* qu’ils sont représentatifs des dynamiques « génériques ».

Conformément à l’esprit de ce séminaire, ce texte n’est pas destiné aux mathématiciens. On pourra également consulter [81] pour une description accessible de l’attracteur de Lorenz. Le beau livre « Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective » de Bonatti, Díaz et Viana décrit l’état de l’art mais il est destiné aux experts [16].

Dans un premier temps, je voudrais présenter très rapidement deux paradigmes du passé qui ont été supplantés par Lorenz : les « dynamiques (quasi-)périodiques » et les « dynamiques hyperboliques ». L’article de Lorenz date de 1963 mais les mathématiciens n’en prirent véritablement connaissance qu’une dizaine d’années plus tard et il leur a fallu encore une dizaine d’années de plus avant de prendre conscience de l’importance de cet exemple. On pourrait regretter ce manque de communication entre les mathématiciens et les physiciens mais d’une certaine manière il fallait laisser le temps au paradigme hyperbolique de se consolider avant de laisser la place à ses successeurs non hyperboliques<sup>2</sup>. Ensuite, je présenterai le papillon de Lorenz tel qu’on le comprend aujourd’hui, en me concentrant sur les aspects topologiques et statistiques. Enfin, j’essaierai d’esquisser le panorama général des systèmes dynamiques à la lumière d’un ensemble de conjectures (optimistes) de Palis.

On limite souvent la théorie du chaos à un aspect négatif : la sensibilité aux conditions initiales rend impossible la détermination pratique de l’évolution future d’un système puisqu’on ne connaît jamais ces conditions initiales avec une précision totale. La théorie serait cependant bien pauvre si elle se limitait à cette négation du déterminisme et si elle ne contenait aucun aspect déductif. Au contraire, je voudrais insister ici sur le fait qu’en formulant les bonnes questions, la théorie qui en résulte est riche et non triviale et qu’elle apporte une réelle compréhension de la dynamique.

Il reste beaucoup de travail à faire, à mi-chemin entre mathématiques et physique, pour comprendre si cette « petite équation différentielle ordinaire » rend compte des phénomènes météorologiques qui étaient la motivation initiale de Lorenz. Le chemin est long entre ces équations différentielles et les « vraies » équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes, qui sont au cœur du problème physique. Par incomptérence, je n’aborderai pas cette question importante.

Je préfère considérer le papillon comme un joli cadeau des physiciens aux mathématiciens !

Je remercie Aurélien Alvarez, Maxime Bourrigan, Pierre Dehornoy, Jos Leys et Michele Triestino pour leur aide.

---

<sup>1</sup>Trésor de la Langue Française.

<sup>2</sup>Pour une présentation historique du développement de la théorie du chaos, on pourra consulter [8].

## 2 Quelques citations pour commencer

Je voudrais commencer par quelques citations qui illustrent l'évolution des points de vue sur la dynamique depuis environ deux siècles.

On ne se lasse pas de lire la définition du déterminisme par Laplace en 1814, dans son « Essai philosophique sur les probabilités » [41].

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Le fait que cette citation soit extraite d'un livre (fondamental) consacré aux probabilités montre bien que Laplace n'avait pas une vision naïve du déterminisme [38]. La vaste intelligence qu'il évoque nous fait défaut et il nous faut recourir aux probabilités pour comprendre les systèmes dynamiques. N'est-ce pas là une idée moderne, la première référence à la théorie ergodique ?

Dans son petit livre « Matter and Motion », publié en 1876, Maxwell insiste sur la *sensibilité aux conditions initiales* dans les phénomènes physiques : l'intelligence dont parlait Laplace doit être en effet *infiniment* vaste [48] ! On peut remarquer que selon Maxwell cette sensibilité n'est pas la règle générale mais plutôt l'exception. Ce débat n'est d'ailleurs pas véritablement tranché aujourd'hui.

*There is a maxim which is often quoted, that “The same causes will always produce the same effects.”*

*To make this maxim intelligible we must define what we mean by the same causes and the same effects, since it is manifest that no event ever happens more than once, so that the causes and effects cannot be the same in all respects.*

*[...]*

*There is another maxim which must not be confounded with that quoted at the beginning of this article, which asserts “That like causes produce like effects”.*

*This is only true when small variations in the initial circumstances produce only small variations in the final state of the system. In a great many physical phenomena this condition is satisfied; but there are other cases in which a small initial variation may produce a great change in the final state of the system, as when the displacement of the ‘points’ causes a railway train to run into another instead of keeping its proper course.*

Avec son sens de la formule, Poincaré exprime en 1908 la dépendance aux conditions initiales de manière presque aussi « médiatique » que Lorenz et son papillon dont nous parlerons plus loin ; on y retrouve le cyclone qui fait des ravages [62].

Pourquoi les météorologues ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de sorte que bien des gens trouvent tout naturel de

prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils jugeraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologues voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si l'on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard.

La seconde citation de Poincaré montre également qu'il ne voit pas le chaos comme un obstacle à une compréhension globale du phénomène [61]. Il faut dire cependant que le contexte montre qu'il discute de cinétique des gaz si bien que les dynamiques dont il est question dépendent d'un très grand nombre de degrés de liberté (positions et vitesses de tous les atomes). Même si Poincaré a également pris conscience de la possibilité du chaos en mécanique céleste (dépendant d'un nombre beaucoup plus petit de degrés de liberté), il ne semble pas avoir proposé de méthode probabiliste pour l'étudier<sup>3</sup>.

Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.

L'application de ce genre d'idées à des problèmes de mécanique céleste se justifie-t-elle ? Dans son article de 1898 sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, après avoir constaté qu'« un changement si minime qu'il soit apporté à la direction d'une géodésique [...] suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe », Hadamard conclut de manière prudente [34].

Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique ? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude du mouvement des corps célestes ? C'est ce qu'on ne pourrait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité.

[...]

Certes lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs données *au sens mathématique* du mot, le mouvement ultérieur et, par conséquent la manière dont il se comporte, sont par cela même connus. Mais, dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données *physiquement*, c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler.

---

<sup>3</sup>À part le théorème de récurrence ?

Certains ont cru voir dans ces difficultés une rupture entre les mathématiques et la physique. Mais comme l'a bien compris Duhem dès 1907, il s'agit au contraire pour les mathématiques de relever un nouveau défi, celui de développer ce qu'il appelle « les mathématiques de l'à-peu-près » [23].

On ne peut parcourir les nombreuses et difficiles déductions de la Mécanique céleste et de la Physique mathématique, sans redouter, pour beaucoup de ces déductions, une condamnation à l'éternelle stérilité. En effet, une déduction mathématique n'est pas utile au physicien tant qu'elle se borne à affirmer que telle proposition, rigoureusement vraie, a pour conséquence l'exactitude rigoureuse de telle autre proposition. Pour être utile au physicien, il lui faut encore prouver que la seconde proposition reste à peu près exacte lorsque la première est seulement à peu près vraie. Et cela ne suffit pas encore ; il lui faut délimiter l'amplitude de ces deux à-peu-près ; il lui faut fixer les bornes de l'erreur qui peut être commise sur le résultat, lorsque l'on connaît le degré de précision des méthodes qui ont servi à mesurer les données ; il lui faut définir le degré d'incertitude qu'on pourra accorder aux données lorsqu'on voudra connaître le résultat avec une approximation déterminée. Telles sont les conditions rigoureuses qu'on est tenu d'imposer à la déduction mathématique si l'on veut que cette langue, d'une précision absolue, puisse traduire, sans le trahir, le langage du physicien ; car les termes de ce dernier langage sont et seront toujours vagues et imprécis, comme les perceptions qu'ils doivent exprimer. À ces conditions, mais à ces conditions seulement, on aura une représentation mathématique de l'à-peu-près. Mais qu'on ne s'y trompe pas ; ces Mathématiques de l'à-peu-près ne sont pas une forme plus simple et plus grossière des Mathématiques ; elles en sont, au contraire, une forme plus complète, plus raffinée ; elles exigent la solution de problèmes parfois fort difficiles, parfois même transcendants aux méthodes dont dispose l'Algèbre actuelle.

Je décrirai plus loin l'article fondamental de Lorenz, datant de 1963, portant le titre technique « Deterministic non periodic flow » et passé largement inaperçu des mathématiciens pendant près de dix ans [44]. En 1972, une conférence de Lorenz portant le titre « Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ? » rendra célèbre *l'effet papillon* [45]. Les trois phrases suivantes, extraites de cette conférence, me semblent remarquables.

*If a single flap of a butterfly's wing can be instrumental in generating a tornado, so all the previous and subsequent flaps of its wings, as can the flaps of the wings of the millions of other butterflies, not to mention the activities of innumerable more powerful creatures, including our own species.*

*If a flap of a butterfly's wing can be instrumental in generating a tornado, it can equally well be instrumental in preventing a tornado.*

*More generally, I am proposing that over the years minuscule disturbances neither increase nor decrease the frequency of occurrence of various weather events such as tornados ; the most they may do is to modify the sequence in which these events occur.*

La troisième phrase en particulier a un véritable contenu scientifique puisqu'elle propose que les *statistiques* décrivant le futur d'un système dynamique pourraient être

*insensibles* aux conditions initiales ; on peut y voir les prémisses de ce que je décrirai plus loin, les *mesures de Sinai-Ruelle-Bowen* qui permettent une compréhension quantitative de ce type de dynamique chaotique.

### 3 Le vieux paradigme des orbites périodiques

#### 3.1 Du jargon

Il faut d'abord mettre en place le jargon de la *théorie des systèmes dynamiques*. Les espaces sur lesquels nous observerons le mouvement seront presque toujours des espaces numériques  $\mathbb{R}^n$  (et même  $\mathbb{R}^3$  le plus souvent). Parfois, il est utile de considérer un espace plus général comme une *variété différentiable*  $V$  (une sphère ou un tore par exemple) qui peut représenter l'espace des phases du système étudié. L'interaction entre la topologie de  $V$  et la dynamique est en général très riche et il s'agit d'ailleurs de l'une des motivations de Poincaré pour le développement de la topologie. Cependant cet aspect n'interviendra pas ici...

La dynamique est engendrée par une équation différentielle d'évolution, c'est-à-dire par un *champ de vecteurs*  $X$  (supposé différentiable) sur  $V$ . De chaque point  $x$  de  $V$  part une *trajectoire* (aussi appelée *orbite*) de  $X$ . Si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, il se peut que cette trajectoire ne soit pas définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ; elle peut s'échapper à l'infini en temps fini. Si les trajectoires sont définies *pour tout*  $t$  réel, on dit que le champ est *complet* : c'est toujours le cas si  $V$  est compacte. Dans ce cas, si  $x \in V$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on peut noter  $\phi^t(x)$  la position au temps  $t$  de la trajectoire de  $X$  issue au temps  $t = 0$  de  $x$ . Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ , la transformation  $\phi^t : x \mapsto \phi^t(x)$  est une bijection de  $V$  (dont l'inverse est  $\phi^{-t}$ ) différentiable ainsi que son inverse : on dit qu'il s'agit d'un *difféomorphisme*. Évidemment  $\phi^{t_1+t_2}$  n'est autre que la composition de  $\phi^{t_1}$  et  $\phi^{t_2}$  et on parle de  $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  comme du *flot engendré par le champ de vecteurs*  $X$ . En d'autres termes,  $\phi^t$  représente la « vaste intelligence » dont rêvait Laplace qui permet de résoudre toutes les équations différentielles ! Lorsque le mathématicien écrit « Soit  $\phi^t$  le flot engendré par le champ  $X$  », il prétend donc avoir réalisé ce rêve... Bien sûr, dans l'immense majorité des cas, nous feignons de connaître  $\phi^t$  mais en réalité nous nous contenterions d'en connaître le comportement asymptotique lorsque  $t$  tend vers l'infini.

On pourrait objecter – à juste titre – que l'évolution des systèmes physiques n'a aucune raison d'être *autonome*, c'est-à-dire que le champ de vecteurs  $X$  pourrait lui-même dépendre du temps. Cette objection est en quelque sorte celle de Maxwell lorsqu'il fait remarquer qu'on ne retrouve jamais deux fois les mêmes causes à deux moments différents puisque précisément les moments sont différents. Je me limiterai quand même aux équations différentielles autonomes parce qu'elles recouvrent un champ d'applications suffisamment vaste et aussi, il faut bien le reconnaître, puisque sans hypothèse sur la nature de la dépendance en temps du champ de vecteurs, on ne pourrait pas développer une théorie aussi solide.

Les champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  ne sont pas toujours complets mais il arrive qu'ils soient transverses à une sphère de sorte que les orbites des points de cette sphère pénètrent dans la boule et n'en ressortent plus. Les trajectoires des points de la boule sont alors définies pour tout  $t \geq 0$ . Dans ce cas,  $\phi^t$  n'est en fait qu'un *semi-flot* de la boule dans le sens où il n'est défini que pour  $t \geq 0$ , ce qui n'est pas gênant

si nous voulons « seulement » comprendre le futur. Le lecteur non familier avec la topologie différentielle pourra se limiter à ce cas particulier en première lecture.

Il est de coutume d'étudier également les dynamiques en *temps discrets*. Il s'agit alors de se fixer un difféomorphisme  $\phi$  d'une variété et d'étudier ses *itérations* successives  $\phi^k = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$  ( $k$  fois) où  $k$  est maintenant un temps entier.

On peut souvent passer d'un point de vue à l'autre. Partant d'un difféomorphisme  $\phi$  de  $V$ , on peut recoller les deux bords de  $V \times [0, 1]$  à l'aide de  $\phi$  pour construire une variété  $\tilde{V}$  de dimension 1 de plus que  $V$  qui porte naturellement un champ de vecteurs  $X$ , à savoir  $\frac{\partial}{\partial s}$  où  $s$  désigne la coordonnée dans  $[0, 1]$  (voir la figure 2). Notez en particulier que  $X$  ne présente aucune singularité. La variété  $V$  peut être considérée comme une hypersurface dans  $\tilde{V}$ , transverse à  $X$ , par exemple en fixant  $s = 0$ . On dit souvent que  $V$  est une *section globale* de  $X$  dans  $\tilde{V}$ . Les orbites  $\phi^t(x)$  de  $X$  voyagent dans  $\tilde{V}$  et rencontrent la section globale  $V$  lorsque  $t$  est entier, sur les orbites du difféomorphisme  $\phi$ . Il est clair que le flot en temps continu  $\phi^t$  sur  $\tilde{V}$  et la dynamique en temps discret  $\phi^k$  sur  $V$  sont si voisins que comprendre l'un, c'est comprendre l'autre. On dit que le flot  $\phi^t$ , ou le champ  $X$ , est la *suspension* du difféomorphisme  $\phi$ .

Réiproquement, il n'est pas rare qu'étant donné un champ de vecteurs  $X$  sur une variété  $\tilde{V}$ , on puisse trouver une hypersurface transverse  $V \subset \tilde{V}$  qui rencontre toutes les orbites une infinité de fois. À chaque point  $x$  de  $V$  on peut alors associer le point  $\phi(x)$  : le premier point de l'orbite future de  $x$  qui est de retour dans la transversale  $V$ . Ce difféomorphisme  $\phi$  de  $V$  est l'*application de premier retour*. Le champ  $X$  est alors la *suspension* du difféomorphisme  $\phi$ <sup>4</sup>.

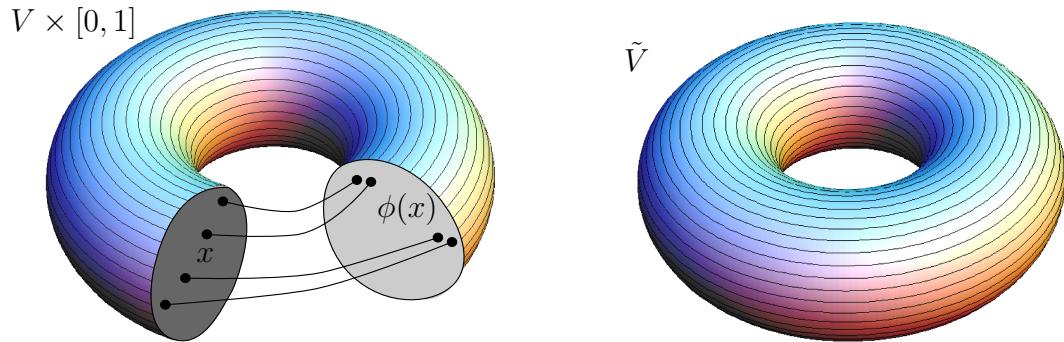


FIG. 2 – Suspension

Mais tous les champs ne sont pas des suspensions. En particulier les champs qui présentent des singularités ne peuvent pas être des suspensions, et nous verrons que c'est le cas de l'équation de Lorenz... Il n'empêche que cette idée (de Poincaré) de ramener une dynamique continue à celle des itérations d'une seule transformation est extrêmement utile, quitte à l'adapter comme nous le verrons plus loin.

---

<sup>4</sup>À vrai dire, le temps de retour n'est pas nécessairement constant et il faut donc reparamétriser le flot pour qu'il s'agisse véritablement d'une suspension.

### 3.2 Une croyance

Depuis très longtemps, l'accent est mis sur deux types d'orbites :

- les *singularités* de  $X$  sont les *points fixes* du flot  $\phi^t$  : ce sont les *positions d'équilibre* du système ;
- les *orbites périodiques* sont les orbites des points  $x$  tels qu'il existe un temps  $T > 0$  tel que  $\phi^T(x) = x$ .

Le vieux paradigme dont il est question dans ce paragraphe est la croyance qu'« *en général, après une période transitoire, le mouvement prend un régime permanent qui est un équilibre ou une trajectoire périodique* ».

Pour exprimer cela de manière plus précise, si  $x$  est un point de  $V$ , on définit l'*ensemble  $\omega$ -limite* (*resp.  $\alpha$ -limite*) de  $x$ , comme l'ensemble  $\omega_X(x)$  (*resp.  $\alpha_X(x)$* ) formé des points de  $V$  sur lesquels s'accumule l'orbite  $\phi^t(x)$  lorsque le temps  $t$  tend vers  $+\infty$  (*resp.  $-\infty$* ). La croyance en question consiste alors à affirmer que pour un champ de vecteurs  $X$  « générique » sur  $V$ , pour tout point  $x$  de  $V$ , l'ensemble  $\omega_X(x)$  se réduit à un point ou à une orbite périodique. Il est inutile d'insister ici sur l'omniprésence des phénomènes périodiques en science (en astronomie par exemple). La prise de conscience qu'il faut s'attendre à d'autres types de régimes permanents a été incroyablement tardive dans l'histoire des sciences.

En fait, les premiers résultats fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques, vers la fin du dix-neuvième siècle, ont au contraire semblé confirmer cette croyance. On peut citer à cet égard le *théorème de Poincaré-Bendixson* qui garantit que pour un champ de vecteurs sur le disque de dimension 2, entrant sur le bord et ne possédant pour simplifier qu'un nombre fini de points singuliers, les ensembles  $\omega$ -limites ne peuvent être que de trois types : un *point singulier*, une *orbite périodique* ou un *cycle* (c'est-à-dire un nombre fini de points singuliers connectés par un nombre fini d'orbites régulières). Voir la figure 3.

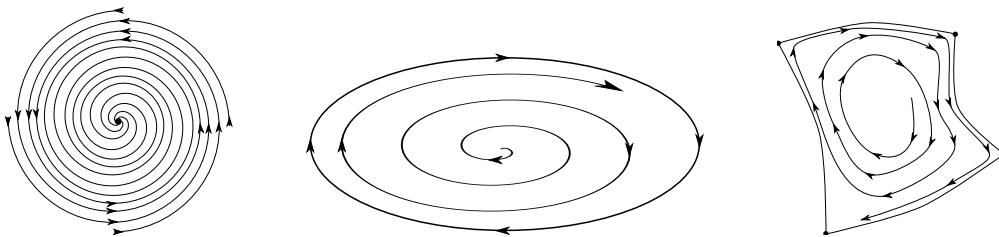


FIG. 3 – Une singularité, un cycle limite et un « cycle »

Il n'est pas difficile de montrer que le cas du cycle est « instable », c'est-à-dire qu'il ne se produit pas pour un champ de vecteurs « générique » et ceci confirme donc la croyance dans le cas du disque. Il est intéressant de constater que Poincaré n'explique pas cette remarque, pourtant simple, que l'un des trois cas de son théorème est « exceptionnel » alors que les deux autres sont « génériques ». Pour une discussion des concepts de générnicité chez Poincaré, on pourra consulter la thèse de Robadey [63]. L'idée consciente d'essayer de comprendre le comportement des champs de vecteurs génériques semble bien plus tardive ; elle est probablement due à Smale et à Thom vers la fin des années 1950.

Le cas des *champs de vecteurs sur les surfaces* plus générales qu'un disque a nécessité plus de travail et ne fut achevé qu'en 1962 par Peixoto [55]. On ne dispose pas de théorème « à la Poincaré-Bendixson » et les ensembles  $\omega$ -limites peuvent être beaucoup plus complexes que dans le cas du disque. Il se trouve cependant que ces exemples complexes sont rares et qu'en général les ensembles limites sont en effet des positions d'équilibre ou des orbites périodiques.

Il nous faut maintenant introduire un concept important que nous généraliserons largement plus loin. Une singularité  $x_0$  d'un champ de vecteurs  $X$  (sur une variété  $V$ ) est dite *hyperbolique* si le champ linéarisé en ce point (qui est donc une matrice) n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. L'ensemble des points  $x$  dont l'orbite converge vers le point  $x_0$  est la *variété stable* de  $x_0$  : c'est une sous-variété  $W^s(x_0)$  *immergée* dans  $V$  passant bien sûr par  $x_0$  et dont la dimension est égale au nombre de valeurs propres de parties réelles négatives. En changeant  $X$  en  $-X$ , on définit la variété instable  $W^u(x_0)$  de  $x_0$ , de dimension complémentaire à celle de  $W^s(x_0)$  puisque la singularité est hyperbolique.

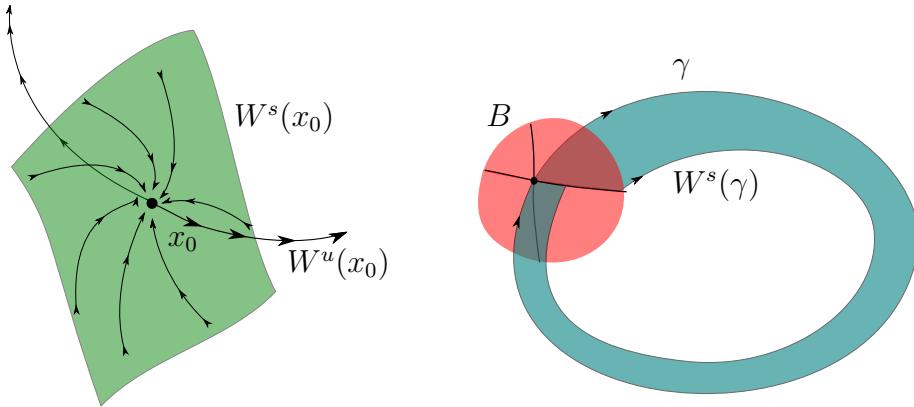


FIG. 4 – Une singularité et une orbite périodique

Si  $\gamma$  est une orbite périodique passant par un point  $x_0$ , on peut choisir une boule  $B$  de dimension  $n - 1$  passant par  $x_0$  et transverse au flot. Le flot permet alors de définir une *application de premier retour de Poincaré*, qui est un difféomorphisme local de  $B$ , défini au voisinage de  $x_0$ , fixant  $x_0$ . Si la différentielle de ce difféomorphisme en  $x_0$  ne possède pas de valeurs propres de module 1, on dit que l'*orbite  $\gamma$  est hyperbolique*. L'ensemble des points  $x$  tels que  $\omega_X(x)$  coïncide avec l'orbite périodique  $\gamma$  est la *variété stable de  $\gamma$* , notée  $W^s(\gamma)$ . C'est une sous-variété immergée comme précédemment. On définit de même  $W^u(\gamma)$ .

En 1959, Smale définit les champs de vecteurs qu'on appelle aujourd'hui de *type Morse-Smale* [72]. Ce sont les champs  $X$  qui vérifient les conditions suivantes :

- $X$  ne possède qu'un nombre fini de singularités et d'orbites périodiques, qui sont toutes hyperboliques ;
- les ensembles  $\alpha$  et  $\omega$ -limites de tous les points sont des singularités ou des orbites périodiques ;
- les variétés stables et instables des singularités et des orbites périodiques se rencontrent transversalement.

Smale formule dans cet article une triple conjecture. Avant de les expliciter, il me faut introduire le concept fondamental de *stabilité structurelle* qui a été introduit en 1937 par Andronov et Pontrjagin [5]. Un champ  $X$  est structurellement stable s'il possède un voisinage dans l'espace de tous les champs de vecteurs (muni de la topologie  $C^1$ ) tel que tous les champs  $X'$  de ce voisinage sont *topologiquement équivalents* à  $X$ . Cela signifie qu'il existe un *homéomorphisme* de  $V$  (en général non différentiable) qui envoie les orbites de  $X$  sur celles de  $X'$  tout en respectant leurs orientations. Les champs structurellement stables sont donc ceux dont la dynamique topologique est insensible qualitativement aux petites perturbations. C'est donc un concept appartenant au domaine des « mathématiques de l'à-peu-près » que Duhem appelait de ses vœux. Andronov et Pontrjagin avaient montré que certains champs de vecteurs très simples sur le disque de dimension 2 sont structurellement stables. L'exemple le plus naïf est celui du champ radial  $X = -x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$ . Si on perturbe  $X$ , le nouveau champ possédera encore une singularité proche de l'origine vers laquelle toutes les autres orbites convergent :  $X$  est structurellement stable.

Voici les conjectures de Smale :

1. *Les champs de type Morse-Smale forment un ouvert dense dans l'espace de tous les champs de vecteurs d'une variété compacte donnée.*
2. *Les champs de type Morse-Smale sont structurellement stables.*
3. *Les champs structurellement stables sont de type Morse-Smale.*

La première et la troisième conjecture sont *fauves* en général, comme Smale lui-même ne tardera pas à le découvrir. Mais la seconde est correcte... La motivation de Smale était claire : il s'agissait de valider la croyance dominante en un régime permanent – équilibre ou orbite périodique – pour une dynamique générique.

En 1962, Peixoto démontre les trois conjectures lorsque  $V$  est une *surface compacte orientable* [55].

Il est surprenant que Smale ait pu penser que la première de ses conjectures puisse être vraie alors que Poincaré ou Birkhoff savaient bien qu'elle était fausse ; un flot peut posséder une infinité d'orbites périodiques de manière stable. Smale, évoquant cette période, écrit en 1998 [77] :

*It is astounding how important scientific ideas can get lost, even when they are aired by leading scientific mathematicians of the preceding decades.*

C'est vers 1960 qu'on prit conscience explicitement qu'un champ de vecteurs générique a toutes les chances d'avoir une dynamique bien plus compliquée que celle d'un Morse-Smale. Le paradigme de l'orbite périodique laisse la place au suivant – celui des systèmes hyperboliques – que je décrirai au paragraphe suivant. Mais les orbites périodiques continueront à jouer un rôle fondamental en dynamique, comme nous l'avait expliqué Poincaré en 1892 [59] :

D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

Encore une remarque avant de continuer notre marche vers l'attracteur de Lorenz... Les dynamiques que nous considérons ici ne sont pas supposées *conservatives*. On pourrait discuter par exemple des systèmes dynamiques *hamiltoniens* qui

ont bien entendu des comportements qualitatifs très différents. Par exemple, le fait qu'ils préservent un volume entraîne que presque tous leurs points sont récurrents : c'est le contenu du *théorème de récurrence de Poincaré*. Un champ conservatif n'est donc *jamais* de type Morse-Smale.

Dans le domaine des champs hamiltoniens, le vieux paradigme est celui du *mouvement quasi-périodique*. On pense que dans la variété ambiante, il y a « beaucoup d'orbites » qui sont situées sur des tores invariants sur lesquels la dynamique est linéaire ; celle qui correspond à un certain nombre d'oscillateurs harmoniques non couplés de périodes différentes. L'exemple typique est celui du mouvement képlérien des planètes, si on suppose qu'elles n'interagissent pas entre elles. Chacune suit une trajectoire périodique et l'ensemble se déplace donc sur un tore de dimension égale au nombre de planètes. La théorie KAM permet de montrer qu'une bonne partie de ces tores invariants subsistent lorsqu'on perturbe un système hamiltonien complètement intégrable, mais il n'y a par contre aucune raison de trouver de tels tores si la dynamique est « générique » (parmi les dynamiques hamiltoniennes).

Il faut donc garder en mémoire que nous discutons ici de *dynamiques a priori dissipatives*. Il est étonnant de constater que des physiciens aussi éminents que Landau et Lifschitz ont longtemps présenté la turbulence comme un phénomène presque périodique, avec des tores invariants dont la dimension dépend du nombre de Reynolds. Ce n'est qu'à partir de la seconde édition de 1971 de leur fameux traité de mécanique des fluides qu'ils ont pris conscience du fait que les fonctions presque périodiques sont trop « gentilles » pour décrire la turbulence.

## 4 Deuxième essai : les dynamiques hyperboliques

### 4.1 Hadamard et les géodésiques sur le front d'un taureau

En 1898, Hadamard écrit un article remarquable sur le comportement dynamique des géodésiques sur les surfaces à courbure négative [34]. Cet article peut être considéré comme le point de départ de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques et de la dynamique symbolique. Il est probablement paru trop tôt puisque, plus de 60 ans plus tard, Smale devra refaire le chemin suivi par Hadamard avant d'aller beaucoup plus loin, comme nous le verrons.

Hadamard commence par donner quelques exemples concrets de *surfaces à courbure négative* dans l'espace usuel. La partie gauche de la figure 5 est extraite de son article. Cette surface est difféomorphe à un plan privé de deux disques, ce qui m'autorise à l'appeler « un pantalon », et à la dessiner comme sur la partie droite de la figure 5.

Le problème consiste à comprendre le comportement dynamique des géodésiques sur cette surface. Autrement dit, un point matériel est astreint à se déplacer sur  $P$  et la seule force à laquelle il soit soumis est la force de réaction. À chaque instant, l'accélération du point mobile est orthogonale à la surface : les trajectoires sont des *géodésiques* de  $P$  parcourues à vitesse constante.

Une condition initiale consiste à choisir un point de  $P$  et un vecteur tangent à  $P$  en ce point, disons de longueur 1. L'ensemble de ces conditions initiales est la variété  $V = T^1 P$  de dimension 3, appelée *fibré unitaire tangent* de  $P$ . Le flot



FIG. 5 – Le pantalon d’Hadamard

géodésique  $\phi^t$  agit sur  $V$  : on considère la géodésique partant d’un point dans une certaine direction et on la suit pendant le temps  $t$  pour obtenir un autre point et une autre direction.

La principale propriété de la courbure négative qui est utilisée est que tout chemin tracé sur la surface peut être déformé, à extrémités fixées, en un unique arc géodésique joignant les deux extrémités.

On peut trouver trois géodésiques fermées  $g_1, g_2, g_3$  qui découpent  $P$  en quatre parties. Trois d’entre elles correspondent aux trois « bouts » de  $P$  et la quatrième est le *cœur convexe* qui est une surface *compacte* à bords limitée par les trois géodésiques.

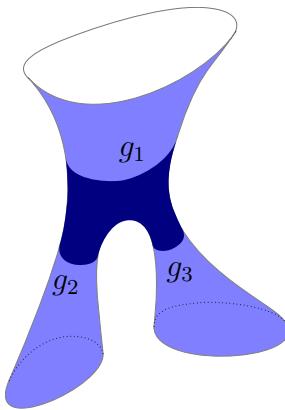


FIG. 6 – Le cœur du pantalon

Considérons maintenant une géodésique  $t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) \in P$ . Si la courbe  $g$  traverse  $g_1, g_2$  ou  $g_3$  au temps  $t_0$ , pour sortir du cœur et entrer dans un bout, la propriété que je viens de rappeler montre que pour  $t > t_0$  la courbe  $g(t)$  reste dans ce bout et ne peut plus revenir dans le cœur. En fait, on vérifie que  $g(t)$  tend vers l’infini dans ce bout. Réciproquement, si une géodésique pénètre dans le cœur au temps  $t_0$ , elle tend vers un bout dans le passé, quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . On peut aussi s’assurer qu’il n’est pas possible qu’une géodésique évite le cœur. On peut donc distinguer plusieurs sortes de géodésiques :

- $g(t)$  est dans le cœur pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ;
- $g(t)$  vient d'un bout, pénètre dans le cœur et sort par un bout ;
- $g(t)$  vient d'un bout, pénètre dans le cœur et y reste pour  $t$  assez grand ;
- $g(t)$  est dans le cœur pour  $t$  assez négatif puis sort par un bout ;

Les plus intéressantes sont celles du premier type : on les appelle aujourd’hui les *orbites non errantes*. Hadamard les analyse de la manière suivante. Joignons  $g_1$  et  $g_2$  par un arc  $c_3$  de longueur minimale : c'est un arc géodésique plongé dans le cœur, perpendiculaire à  $g_1$  et  $g_2$ . De la même manière,  $c_1$  joint  $g_2$  et  $g_3$  et  $c_2$  joint  $g_1$  et  $g_3$ . Ces arcs  $c_1, c_2, c_3$  sont les *coutures du pantalon*. Si on découpe le cœur le long des coutures, on obtient deux hexagones  $H_1$  et  $H_2$  (figure 7).

On considère maintenant une géodésique  $g$  du premier type, donc entièrement contenue dans le cœur. Le point  $g(0)$  appartient à l'un des deux hexagones, peut-être aux deux s'il est sur une couture, mais éliminons ce cas particulier. Lorsqu'on parcourt la géodésique  $g$  en partant de  $g(0)$  dans le sens des  $t$  croissants, on rencontre successivement les coutures  $c_1, c_2, c_3$  une infinité de fois<sup>5</sup>. On lit donc un mot écrit dans l'alphabet à trois lettres  $\{1, 2, 3\}$ . Si  $g$  rencontre la couture  $c_1$ , la couture suivante ne pourra pas être à nouveau  $c_1$  : ce sera  $c_2$  ou  $c_3$ . Le mot associé à une géodésique ne comportera donc pas deux lettres consécutives identiques.

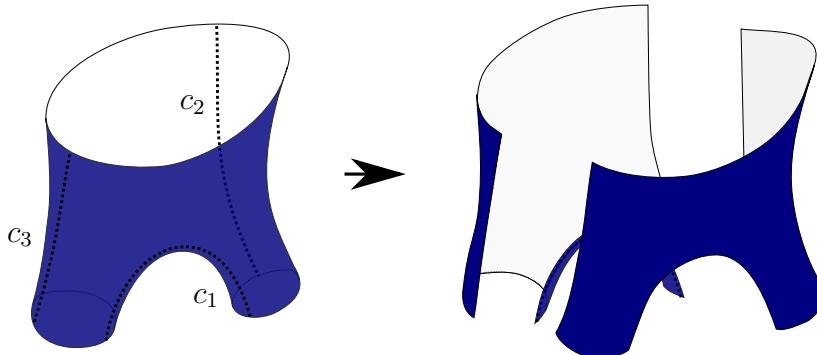


FIG. 7 – Découpe en deux hexagones

De la même manière, on peut parcourir  $g$  dans le sens négatif et on obtient un mot. Ces deux mots constituent un seul mot bi-infini  $m(g)$  associé à la géodésique  $g$ .

Pour être précis, Hadamard ne parle en fait que de géodésiques fermées, c'est-à-dire qu'il se limite à des mots périodiques. C'est Morse, en 1921, qui complétera la théorie en n'hésitant pas à coder les géodésiques non périodiques par des mots bi-infinis [50]. Par la suite, je « mélangerai » les deux articles en parlant de Hadamard-Morse.

Le résultat principal de Hadamard-Morse est le suivant.

*Pour tout mot bi-infini  $m$  en  $\{1, 2, 3\}$  sans répétition, il existe une géodésique  $g$  qui le réalise. La géodésique est unique si on spécifie l'hexagone  $H_1$  ou  $H_2$  qui contient  $g(0)$ .*

Bien entendu l'unicité de la géodésique dont il est question ici doit être bien comprise : on peut déplacer l'origine de  $g$  et la placer en  $g(\tau)$  sans changer le mot

<sup>5</sup>Cela résulte de la négativité de la courbure.

associé pourvu que  $g$  ne rencontre pas les coutures entre les temps  $t = 0$  et  $t = \tau$ . L'unicité signifie que deux géodésiques de type 1 qui sont associées au même mot et qui partent du même hexagone ne diffèrent que de cette façon.

La preuve n'est pas difficile (aujourd'hui). Partant d'un mot bi-infini, on considère le mot  $m_p$  de longueur  $2p$  obtenu en ne gardant que les  $p$  premiers chiffres à droite et à gauche. On considère alors un chemin  $\gamma_p : [-l_p, l_p] \mapsto P$  qui « suit » le mot  $m_p$  et qui part de  $H_1$  ou  $H_2$ . Plus précisément, on choisit un point  $x_1$  dans  $H_1$  et un point  $x_2$  dans  $H_2$  et le chemin  $\gamma_p$  est formé de  $2p$  arcs géodésiques qui joignent alternativement  $x_1$  et  $x_2$  et qui passent par les coutures, comme indiqué par le mot  $m_p$ . Cet arc  $\gamma_p$  peut être déformé, à extrémités fixes, en un arc géodésique  $\tilde{\gamma}_p : [-\bar{l}_p, \bar{l}_p] \rightarrow P$ . Il s'agit ensuite de faire converger cela vers une géodésique  $g : \mathbb{R} \rightarrow P$  et ceci est un jeu d'enfant pour un mathématicien d'aujourd'hui (théorème d'Ascoli...). L'unicité n'est pas non plus très difficile...

Voici quelques conséquences qualitatives :

- Si deux mots bi-infinis  $m$  et  $m'$  coïncident à partir d'un certain indice, les géodésiques  $g, g'$  qui leur sont associées vont se rapprocher quand le temps tend vers l'infini ; elles sont *asymptotes*. Il existe  $\tau$  tel que la distance entre  $g(t)$  et  $g'(t + \tau)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . On dit aujourd'hui que  $g$  et  $g'$  sont dans la même variété stable. Bien sûr, on peut faire un commentaire analogue lorsque  $m$  et  $m'$  coïncident pour les indices suffisamment négatifs et on obtient les espaces instables.
- Si on dispose de deux mots infinis sans répétition  $m_+$  et  $m_-$ , on peut bien sûr trouver un mot  $m$  qui coïncide avec  $m_+$  pour les indices suffisamment positifs et avec  $m_-$  pour les indices suffisamment négatifs. Ainsi, étant données deux géodésiques non errantes, on peut toujours en trouver une autre qui est asymptote à la première dans le passé et à la seconde dans le futur. On peut même imposer à  $m$  une valeur quelconque sur un nombre fini d'indices. Évidemment tout cela implique une dépendance sensible aux conditions initiales : *une perturbation arbitrairement petite sur une géodésique permet de lui imposer d'être asymptote dans le futur et dans le passé à deux géodésiques choisies arbitrairement*.
- Une autre propriété est que *toute géodésique non errante peut être arbitrairement approchée par des géodésiques périodiques* : partant d'un mot bi-infini, il suffit d'en considérer un long segment et de le répéter périodiquement pour construire une géodésique proche. Il y a donc *une infinité dénombrable de géodésiques périodiques et leur réunion est dense dans l'ensemble des points non errants*. On voit donc que le comportement dynamique de ces géodésiques est autrement plus complexe qu'un flot de Morse-Smale.

Pour terminer cette brève évocation de ces articles, je voudrais citer quelques conséquences que Hadamard-Morse auraient pu obtenir « facilement » mais qu'ils n'obtiennent pas.

- On observe que la description de la dynamique des géodésiques ne dépend pas du choix de la métrique à courbure négative. Il en résulte « presque » que si on considère deux métriques à courbure négative sur  $P$ , les flots géodésiques des deux métriques sont topologiquement conjugués. On est proche de la stabilité structurelle qui sera démontrée par Anosov en 1962 [3] : *le flot géodésique d'une métrique riemannienne à courbure négative est structurellement stable*. D'ailleurs, Gromov montrera en toute généralité dans [30] que les flots géodésiques de deux métriques

à courbure négative sur une variété compacte sont topologiquement conjugués<sup>6</sup>.

- Un autre aspect qui est implicitement présent dans ces articles est l'introduction d'une dynamique sur un *espace de symboles*. L'espace des suites  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$  est compact et le *décalage* des indices  $(x_i) \mapsto (x_{i+1})$  est un homéomorphisme qui « code » la dynamique du flot géodésique. Pour être précis, il faudrait prendre le « sous-décalage de type fini » formé des suites sans répétitions, et pour être encore plus précis, il faudrait en prendre deux copies, une pour chaque hexagone.

- Enfin, avec un peu d'imagination, on peut voir également dans ces articles une apparition subliminale du fer à cheval de Smale que j'évoquerai bientôt. On peut procéder de la manière suivante. Considérons tous les vecteurs unitaires tangents à  $P$  en un point d'une couture qui pointent dans la direction d'une autre couture. La géodésique qui part d'une telle condition initiale part d'un point de  $c_i$ , traverse  $H_1$  ou  $H_2$ , et en ressort par  $c_j$ . Ces vecteurs unitaires forment douze rectangles : il faut choisir  $c_i, c_j$ , puis  $H_1$  ou  $H_2$ , ce qui donne douze possibilités, et pour chacune d'entre elles, il faut préciser le point de départ et le point d'arrivée sur les coutures. Ces douze rectangles – qu'on peut noter  $R_{ij}^1, R_{ij}^2$  – sont plongés dans  $T_1(P)$ , fibré unitaire tangent à  $P$ , de manière transverse au flot géodésique que nous étudions.

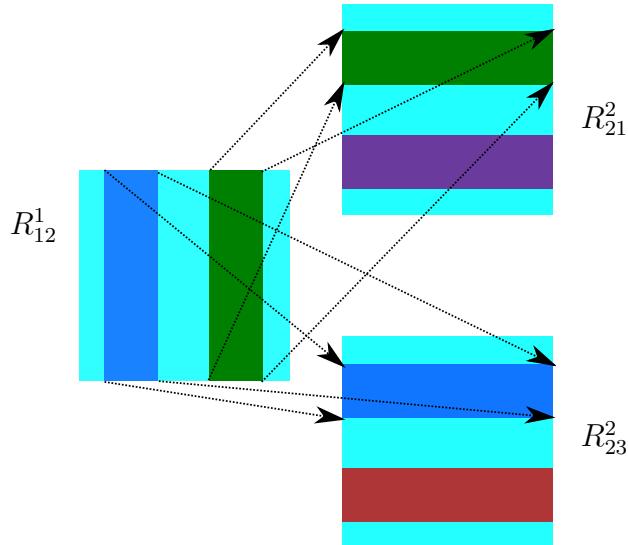


FIG. 8 – Dynamique sur les  $R_{ij}$

À strictement parler, la réunion  $R$  de ces rectangles n'est *pas* une section globale pour le flot géodésique puisqu'il s'agit d'une sous-variété à bord, mais surtout puisqu'elle ne rencontre pas *toutes* les géodésiques : les coutures elles-mêmes définissent des géodésiques qui ne rencontrent pas  $R$ . Il n'empêche qu'on peut définir une application  $\phi$  « de premier retour » qui n'est pas définie dans tout  $R$  et qui n'est pas surjective. Partant d'un vecteur unitaire  $x$  dans  $R$ , la géodésique qui lui correspond traverse un hexagone et en ressort sur une autre couture. Le vecteur tangent à la sortie de l'hexagone n'est pas nécessairement dans  $R$  puisque la géodésique continue son chemin et peut sortir de l'hexagone qui suit par  $g_1, g_2, g_3$  plutôt que par une couture. Si ce vecteur tangent est encore dans  $R$ , on le note  $\phi(x)$ . Le domaine de définition de  $\phi$  est la réunion de 24 zones « rectangulaires verticales », deux par

<sup>6</sup>Il suffit d'ailleurs que les métriques soient sur deux variétés dont les groupes fondamentaux sont isomorphes.

rectangle, et son image est formée de 24 « zones rectangulaires horizontales ». Chacune des 24 zones rectangulaires verticales est contractée par  $\phi$  dans la direction verticale et dilatée dans la direction horizontale et son image est l'une des 24 zones rectangulaires horizontales. La figure 8 montre les deux bandes verticales dans  $R_{12}^1$  et leurs images dans  $R_{21}^2$  et  $R_{23}^2$ .

Cette apparition simultanée de *dilatation et de contraction* est clairement au cœur du phénomène mais elle n'est pas explicitée par Hadamard-Morse. On comprend bien que si on perturbe légèrement le flot géodésique en un autre champ de vecteurs (pas nécessairement le flot géodésique d'une métrique riemannienne),  $R$  sera encore transverse et le « retour » sur  $R$  aura la même allure, avec des zones rectangulaires légèrement déformées ; on pourra encore coder les orbites non errantes par des suites de symboles, décrivant la suite des rectangles rencontrés au cours du temps. La stabilité structurelle, tout au moins de la partie non errante, se déduit assez facilement de cette observation.

Il est surprenant que cet article si original d'Hadamard ait pu rester longtemps inaperçu. Pourtant, Duhem en a donné une description « imagée » qui aurait pu le faire connaître en dehors du cercle limité des mathématiciens [23].

Imaginons le front d'un taureau, avec les éminences d'où partent les cornes et les oreilles, et les cols qui se creusent entre ces éminences ; mais allongeons sans limite ces cornes et ces oreilles, de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini ; nous aurons une des surfaces que nous voulons étudier. Sur une telle surface, les géodésiques peuvent présenter bien des aspects différents. Il est, d'abord, des géodésiques qui se ferment sur elles-mêmes. Il en est aussi qui, sans jamais repasser exactement par leur point de départ, ne s'en éloignent jamais infiniment ; les unes tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, ou de l'oreille droite, ou de l'oreille gauche ; d'autres, plus compliquées, font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne, ou de l'une des oreilles. Enfin, sur le front de notre taureau aux cornes et aux oreilles illimitées, il y aura des géodésiques qui s'en iront à l'infini, les unes en gravissant la corne droite, les autres en gravissant la corne gauche, d'autres encore en suivant l'oreille droite ou l'oreille gauche. [...] Si donc un point matériel est lancé sur la surface étudiée à partir d'une position géométriquement donnée, avec une vitesse géométriquement donnée, la déduction mathématique peut déterminer la trajectoire de ce point et dire si cette trajectoire s'éloigne ou non à l'infini. Mais, pour le physicien, cette déduction est à tout jamais inutilisable. Lorsqu'en effet les données ne sont plus connues géométriquement, mais sont déterminées par des procédés physiques, si précis qu'on les suppose, la question posée demeure et demeurera toujours sans réponse.

## 4.2 Smale et son fer à cheval

Smale a décrit plusieurs fois sa découverte des systèmes hyperboliques<sup>7</sup>(voir par exemple [77]) vers 1960. Celle-ci est indépendante des contributions antérieures de Poincaré et Birkhoff, qui ont cependant joué un rôle dans le développement ultérieur de la théorie. Il semble par contre que l'article d'Hadamard que je viens de décrire

---

<sup>7</sup>sur la plage de Copacabana et même de Leme pour être plus précis !

n'a joué aucun rôle à cette époque. Quoi qu'il en soit, Smale construit un contre-exemple à sa propre conjecture selon laquelle les Morse-Smale forment un ouvert dense dans l'espace des systèmes dynamiques : c'est le célèbre *fer à cheval*. Il s'agit d'un difféomorphisme  $\phi$  de la sphère  $S^2$  de dimension 2, qu'on pense comme le plan  $\mathbb{R}^2$  auquel on adjoint un point à l'infini. On suppose que  $\phi$  transforme un rectangle  $R$  dans le plan comme sur la figure 9, en dilatant les directions verticales et en contractant les directions horizontales. L'intersection  $R \cap \phi(R)$  est la réunion de deux rectangles  $R_1, R_2$ .

On peut supposer que le point à l'infini est un point fixe répulsif. Les points de  $R$  dont l'orbite par  $\phi$  reste toujours dans  $R$ , c'est-à-dire  $\cap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(R)$  forment un ensemble de Cantor, homéomorphe à  $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ . Ses points sont codés par la suite des rectangles  $R_1, R_2$  qui sont successivement visités par l'orbite. En particulier, les points périodiques forment une partie infinie dénombrable, dense dans cet ensemble de Cantor. Smale établit alors que *le fer à cheval est structurellement stable*, ce qui (aujourd'hui) n'est pas très difficile. Lorsqu'on perturbe le difféomorphisme  $\phi$  en un difféomorphisme  $\phi'$ , l'intersection  $\phi'(R) \cap R$  est encore constituée de deux zones « rectangulaires » qui traversent  $R$  de part en part et on peut encore associer une unique orbite à toute suite de  $\{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ , ce qui permet de construire une conjugaison topologique entre  $\phi$  et  $\phi'$ , tout au moins sur ces ensembles de Cantor invariants. Il faut ensuite prolonger la conjugaison à l'extérieur, grâce au fait que toutes les orbites extérieures viennent de l'infini.

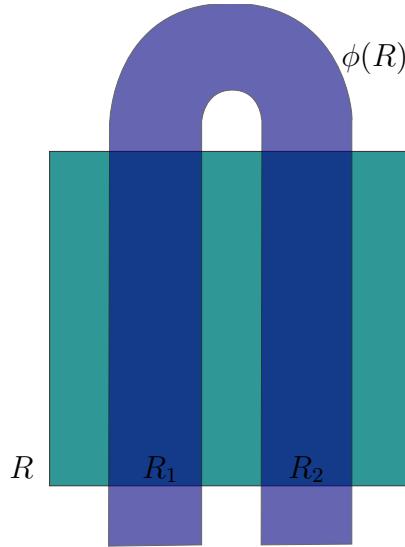


FIG. 9 – Le fer à cheval

Smale publie ce résultat dans les actes d'un colloque en URSS en 1961 [73]. Anosov raconte cette « révolution hyperbolique » dans [4].

*The world turned upside down for me, and a new life began, having read Smale's announcement of "a structurally stable homeomorphism with an infinite number of periodic points", while standing in line to register for a conference in Kiev in 1961. The article is written in a lively, witty, and often jocular style and is full of captivating observations. [...] [Smale] felt like a god who is to create a universe in which certain phenomena would occur.*

Ensuite, les progrès seront extrêmement rapides. Le fer à cheval est vite généralisé par Smale (voir par exemple [74]). Et comme je l'ai déjà mentionné, Anosov montre en 1962 que le flot géodésique d'une variété à courbure négative est structurellement stable<sup>8</sup>. Pour démontrer cela, il dégage le concept de ce qu'on appelle aujourd'hui un *flot d'Anosov*.

Un flot *non singulier*  $\phi^t$  sur une variété compacte  $V$ , associé à un champ de vecteurs  $X$ , est un flot d'Anosov si en chaque point  $x$ , on peut décomposer l'espace tangent  $T_x V$  en trois sous-espaces  $\mathbb{R}.X(x) \oplus E_x^u \oplus E_x^s$ . Le premier  $\mathbb{R}.X(x)$  n'est autre que la droite engendrée par le champ de vecteurs et les autres sont appelés respectivement instable et stable. On demande que cette décomposition soit invariante par la différentielle  $d\phi^t$  du flot et qu'il existe des constantes  $C > 0, \lambda > 0$  telles que pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $v_u \in E_x^u, v_s \in E_x^s$  :

$$\begin{aligned} \|d\phi^t(v_u)\| &\geq C \exp(\lambda t) \|v_u\| \\ \|d\phi^t(v_s)\| &\leq C \exp(-\lambda t) \|v_s\|. \end{aligned}$$

(où  $\|\cdot\|$  désigne une métrique riemannienne auxiliaire).

Partant des exemples connus de dynamiques structurellement stables (les Morse-Smale, le fer à cheval, le flot géodésique d'une variété à courbure négative et quelques autres), Smale dégage vers 1965 le concept fondamental de système dynamique satisfaisant à l'*Axiome A*.

Considérons un ensemble compact  $\Lambda \subset V$  invariant par un difféomorphisme  $\phi$ . On dit que  $\Lambda$  est un ensemble *hyperbolique* si l'espace tangent à  $V$  restreint aux points de  $\Lambda$  admet une décomposition continue en somme directe :  $T_\Lambda V = E^u \oplus E^s$  qui est invariante par la différentielle de  $\phi$  et telle que les vecteurs de  $E^u$  sont dilatés, alors que ceux de  $E^s$  sont contractés. En formules, il existe  $C > 0, \lambda > 0$  tels que pour  $v_u \in E^u, v_s \in E^s, k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\|d\phi^k(v_u)\| \geq C \exp(k\lambda) \|v_u\| \quad ; \quad \|d\phi^k(v_s)\| \leq C \exp(-k\lambda) \|v_s\|.$$

Un point  $x$  de  $V$  est appelé *errant* s'il possède un voisinage ouvert  $U$  qui est disjoint de tous ses itérés :  $\phi^k(U) \cap U = \emptyset$  pour tout  $k \neq 0$ . L'ensemble des *points non errants* est un fermé invariant noté traditionnellement  $\Omega(\phi)$ <sup>9</sup>.

On dit alors (par abus de langage) que  $\phi$  est un *Axiome A* si  $\Omega(\phi)$  est hyperbolique et si l'ensemble des points périodiques est dense dans  $\Omega(\phi)$ .

Sous cette hypothèse, si  $x$  est un point non errant, l'ensemble  $W^s(x)$  (*resp.*  $W^u(x)$ ) des points  $y$  tels que la distance entre  $\phi^k(y)$  et  $\phi^k(x)$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$  (*resp.*  $-\infty$ ) est une sous-variété immergée dans  $V$  : c'est la variété stable (*resp.* instable). Un difféomorphisme  $\phi$  Axiome A vérifie la *condition de transversalité forte* si les variétés stables sont transverses aux variétés instables.

On donne des définitions analogues dans le cas des champs de vecteurs  $X$  : il s'agit alors de décomposer de manière continue  $T_\Lambda V$  en une somme  $\mathbb{R}.X \oplus E^u \oplus E^s$ . Notons en particulier que cette définition implique que les points singuliers de  $X$  sont isolés dans l'ensemble des points non errants car dans le cas contraire il y aurait discontinuité dans les dimensions de la décomposition.

<sup>8</sup>De manière étonnante, il ne semble pas connaître le travail d'Hadamard.

<sup>9</sup>Même si la notation fait irrémédiablement penser à un ouvert.

Smale formule alors trois conjectures, parallèles aux trois conjectures qu'il avait formulées neuf ans plus tôt :

1. *Les difféomorphismes Axiome A vérifiant la condition de transversalité forment un ouvert dense dans l'espace des difféomorphismes d'une variété compacte donnée.*
2. *Les difféomorphismes Axiome A vérifiant la condition de transversalité sont structurellement stables.*
3. *Les difféomorphismes structurellement stables sont Axiome A et vérifient la condition de transversalité.*

La deuxième conjecture est correcte, comme cela sera démontré par Robbin en 1971 puis par Robinson en 1972 (en supposant seulement le difféomorphisme de classe  $C^1$ ). La troisième conjecture est correcte mais il faudra attendre 1988 pour la démonstration par Mañé.

Cependant, la première conjecture est fausse, comme Smale lui-même le montrera en 1966 [75]. Comme nous le verrons, un contre-exemple était en fait « prêt à l'emploi » dans l'article de Lorenz, quatre ans auparavant, mais il faudra du temps pour qu'il parvienne dans la communauté mathématique. Le contre-exemple de Smale est d'une nature différente ; il montre qu'un défaut de transversalité entre les variétés stables et instables peut parfois ne pas être rétabli par une petite perturbation. Cependant, Smale introduit une notion plus faible que la stabilité structurelle : la  $\Omega$ -stabilité : on demande qu'après perturbation du difféomorphisme  $\phi$  en  $\phi'$ , les restrictions de  $\phi$  à  $\Omega(\phi)$  et de  $\phi'$  à  $\Omega(\phi')$  soient conjuguées par un homéomorphisme. Il conjecture que cette propriété est générique.

L'article « Differentiable dynamical systems » de Smale en 1967 représente un moment important de la théorie des systèmes hyperboliques [76] ; « a masterpiece of mathematical literature », selon Ruelle [69].

Mais, dès 1968, Abraham et Smale trouvent un contre-exemple à cette nouvelle conjecture, montrant par ailleurs que l'Axiome A n'est pas générique [1]... En 1972, Shub et Smale tentent un autre concept de stabilité dans [70], dont la recension par Meyer dira :

*In the never-ending quest for a solution of the yin-yang problem more and more general concepts of stability are proffered.*

L'article de survol de 1978 par Bowen est intéressant à plus d'un titre [18]. La théorie des Axiomes A est devenue solide et, même s'il reste des questions ouvertes et difficiles, on peut dire qu'on a une bonne compréhension de leur dynamique, aussi bien d'un point de vue topologique qu'ergodique. Même si certains « cygnes noirs » ont fait leur apparition dans le paysage, détruisant ainsi l'idée de générnicité des Axiomes A, on envisage encore à cette époque de les étudier « comme s'ils étaient hyperboliques ». Voici les premières phrases de l'article de Bowen, illustrant ce point de vue.

*These notes attempt to survey the results about Axiom A diffeomorphisms since Smale's well known paper of 1967. In that paper, Smale defined these diffeomorphisms and set up a program for dynamical systems centered around them. These examples are charming in that they display complicated behavior but are*

*still intelligible. This means that there are many theorems and yet some open problems. [...] The last sections deal with certain non-Axiom A systems that have received a good deal of attention. These systems display a certain amount of Axiom A behavior. One hopes that further study of these examples will lead to the definition of a new and larger class of diffeomorphisms, with the Axiom A class of prototype.*

Il n'est pas possible ici de présenter sérieusement la théorie des systèmes hyperboliques, pour laquelle je renvoie à [36]. Je décrirai cependant un peu plus loin quelques-uns des théorèmes les plus importants qui précisent le comportement ergodique de ces systèmes.

Mais il me faut citer l'un des résultats majeurs – dû à Bowen – qui permet de comprendre la dynamique « à la manière d'Hadamard ». Supposons qu'on recouvre l'ensemble non errant  $\Omega(\phi)$  par un nombre fini de « boîtes »  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) qui sont supposées compactes et dont les intérieurs sont disjoints. Construisons un graphe fini dont les sommets sont indexés par  $i$  et dans lequel une arête orientée joint  $i$  à  $j$  si l'intérieur de  $\phi(B_i) \cap B_j$  est non vide (comme partie de  $\Omega(\phi)$ ). Notons  $\Sigma$  la partie fermée de l'espace des suites  $\{1, 2, \dots, l\}^{\mathbb{Z}}$  correspondant aux chemins infinis dans le graphe, c'est-à-dire des suites d'indices  $\sigma(p)_{p \in \mathbb{Z}}$  tels que deux consécutifs sont connectés dans le graphe. On dit que  $\Sigma$  est un *sous-décalage de type fini*. La collection des boîtes est une *partition de Markov* si ce décalage code convenablement la dynamique de  $\phi$ . On demande d'une part que pour chaque suite  $\sigma$  de  $\Sigma$ , il existe un point unique  $x = \pi(\sigma)$  dans  $\Omega(\phi)$  dont l'orbite suit précisément l'itinéraire  $\sigma$  : pour tout  $k$ , on a  $\phi^k(x) \in B_{\sigma(k)}$ . Mais on demande également que le codage  $\pi : \Sigma \rightarrow \Omega(\phi)$  soit aussi injectif que possible : les fibres  $\pi^{-1}(x)$  sont finies et ne contiennent qu'un seul itinéraire pour un  $x$  générique au sens de Baire dans  $\Omega(\phi)$ . Bowen établit que les ensembles non errants des ensembles hyperboliques peuvent être recouverts par ce type de partition de Markov. L'utilité de ce résultat est claire car il ramène la question dynamique à une question combinatoire.

Aujourd'hui, les systèmes dynamiques Axiomes A semblent occuper une place bien plus petite qu'on ne le pensait à la fin des années 70. Le paradigme hyperbolique a laissé la place... La citation suivante d'Anosov pourrait probablement dépasser le cadre strictement mathématique [4].

*Thus the grandiose hopes of the 1960s were not confirmed, just as the earlier naive conjectures were not confirmed.*

Pour une description plus détaillée de l'« histoire hyperbolique », on pourra également consulter l'introduction de [36] ou encore de [54]. Voir aussi « What is ... a horseshoe » par l'un des acteurs du sujet [69].

### 4.3 Et Poincaré et son treillis infiniment serré ?

J'ose à peine commettre un crime de lèse-majesté dans un séminaire qui porte le nom de Poincaré. Beaucoup d'auteurs affirment que Poincaré est à l'origine de la théorie du chaos. Son rôle aura été sans aucun doute très important mais peut-être pas autant qu'on le dit parfois. D'une part, l'idée que des phénomènes physiques puissent être sensibles aux conditions initiales n'était pas totalement nouvelle, comme nous l'avons vu avec Maxwell. D'autre part, il semble que les contributions

de Poincaré sur ces questions aient été largement oubliées par la suite et n'ont joué qu'un rôle mineur dans le développement ultérieur de la théorie. Pour l'essentiel, le chemin que Poincaré avait commencé à parcourir a dû être redécouvert. Mais surtout, l'idée centrale que je voudrais présenter ici est que la théorie du chaos ne peut pas se limiter au constat d'échec que la dynamique est compliquée : elle doit s'accompagner de méthodes qui expliquent le fonctionnement interne de cette dynamique. La citation célèbre suivante de Poincaré illustre ce sentiment d'impuissance face à la complexité de la dynamique [59] :

Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique. Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à maille infiniment serrées ; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même de manière infiniment complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien de plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

La contribution majeure de Poincaré<sup>10</sup> aura été de mettre en évidence l'importance cruciale des *orbites homoclines*. Considérons un difféomorphisme  $\phi$  du plan possédant un point fixe hyperbolique à l'origine, avec des directions stable et instable de dimension 1. Un point  $x$  (différent de l'origine) est *homocline* s'il appartient à l'intersection  $W^s \cap W^u$  des variétés stable et instable de l'origine. L'orbite de  $x$  converge donc vers l'origine à la fois dans le futur et dans le passé.

Il n'est pas utile de rappeler ici en détail comment ce concept est apparu en 1890. Je recommande à ce sujet la lecture de [12] qui raconte la belle histoire de l'erreur de Poincaré dans la première version de son mémoire pour le prix du roi Oscar [58]. Le livre [11] discute également de ce prix en insistant sur les aspects historiques et sociologiques plus que mathématiques.

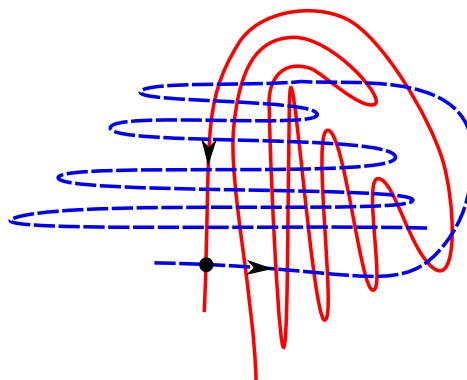


FIG. 10 – Une orbite homocline

Dans la situation de Poincaré, provenant de la mécanique céleste,  $\phi$  préserve l'aire et il avait d'abord pensé qu'il était impossible que  $W^s$  et  $W^u$  puissent se rencontrer sans coïncider. Il en déduisait un théorème de stabilité dans le problème des trois corps. Lorsqu'il prit conscience de son erreur, il comprit que ces points

<sup>10</sup>dans ce domaine !

homoclines où  $W^s$  rencontre  $W^u$  de manière transverse sont non seulement possibles mais sont en quelque sorte la règle. Il complit également que la simple existence d'un tel point d'intersection implique que la géométrie des courbes  $W^s$  et  $W^u$  doit en effet constituer « un treillis à mailles infiniment serrées ». Poincaré ne cherche pas à tracer le treillis mais pour illustrer la complexité de la situation, il montre que l'existence d'une intersection homocline transverse entraîne celle d'une infinité d'autres orbites homoclines : l'arc de  $W^s$  situé entre  $x$  et  $\phi(x)$  rencontre une infinité de fois la variété instable  $W^u$ .

Shil'nikov s'étonne dans [68] que Poincaré n'accorde que peu d'importance à l'article d'Hadamard, dans lequel on détecte évidemment la présence d'orbites homoclines : une suite infinie de 1, 2, 3 sans répétitions et qui ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur 1 (par exemple) définit une géodésique sur le pantalon qui converge vers l'orbite périodique  $g_1$  à la fois dans le futur et dans le passé. Mais Poincaré considère que [60] :

Ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que le problème des trois corps est comparable ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.

L'opposition hyperbolique/elliptique, courbure négative/positive ne date pas d'hier.

L'étape suivante dans l'analyse des orbites homoclines est due à George Birkhoff en 1935 : il établit par un joli argument géométrique qu'on peut trouver des points périodiques arbitrairement près d'un point d'intersection transverse homocline [13].

Puis, c'est la redécouverte par Smale vingt-cinq ans plus tard. Il observe que si on considère un rectangle  $R$  au voisinage de la variété stable, contenant à la fois l'origine et le point homocline, comme sur la figure 11, un itéré convenable  $\phi^l$  sur  $R$  agit comme un *fer à cheval*. On obtient ainsi une description du « fonctionnement interne » de ce treillis serré, à l'aide par exemple des suites de symboles 0, 1, comme nous l'avons vu. La présence d'une infinité d'orbites périodiques par exemple devient une évidence. On trouvera dans [68] un récit de l'évolution des idées autour de ces orbites homoclines.

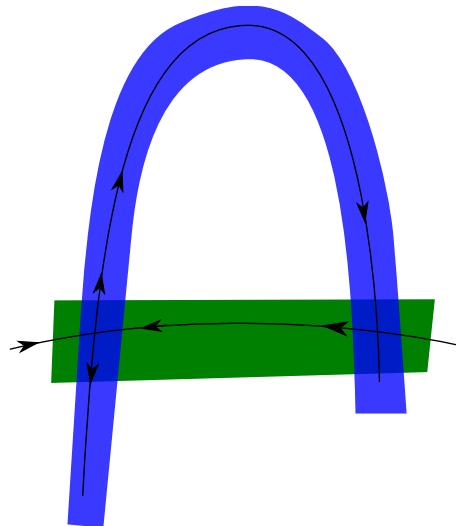


FIG. 11 – Un point homocline et son fer à cheval

## 5 L'attracteur de Lorenz

Comment expliquer le manque de communication dans les années 60 et 70 entre un physicien théoricien comme Lorenz et un mathématicien comme Smale ? L'un travaillait sur la côte est et l'autre sur la côte ouest des États-Unis... Selon Williams [82], la revue dans laquelle Lorenz a publié son article serait en cause<sup>11</sup> ?

*Though many scientists, especially experimentalists, knew this article, it is not too surprising that most mathematicians did not, considering for example where it was published. Thus, when Ruelle-Takens proposed (1971) specifically that turbulence was likely an instance of a “strange attractor”, they did so without specific solutions of the Navier-Stokes equations, or truncated ones, in mind. This proposal, controversial at first, has gained much favor.*

Smale semble n'avoir eu que très peu de motivations physiques dans sa théorie hyperbolique et on constate que la physique n'a semble-t-il que bien peu de connexions avec les systèmes hyperboliques. C'est en tout cas le point de vue d'Anosov [4] :

*One gets the impression that the Lord God would prefer to weaken hyperbolicity a bit rather than deal with restrictions on the topology of an attractor that arise when it really is “1960s-model” hyperbolic.*

Aujourd'hui encore, il n'est pas facile de trouver des phénomènes physiques dont la dynamique est hyperbolique au sens strict (voir cependant [35, 39]). C'est d'ailleurs à mon sens l'un des enjeux de cet aspect des mathématiques que de « reprendre » contact avec la physique.

### 5.1 Lorenz et son papillon

L'article de Lorenz de 1963 est magnifique [44]. Depuis quelques années, Lorenz étudiait des modèles simplifiés décrivant le mouvement de l'atmosphère à travers des équations différentielles ordinaires dépendant d'un petit nombre de variables. Par exemple, en 1960, il décrit un système qu'il peut résoudre explicitement à l'aide de fonctions elliptiques : les solutions sont « encore » *quasi-périodiques en temps* [42]. Son article de 1962 analyse une équation différentielle dans un espace de dimension 12 dans lequel il détecte numériquement une dépendance sensible aux conditions initiales [43]. Mais c'est l'article de 1963 qui est resté célèbre, à juste titre. Le but est clair :

*In this study we shall work with systems of deterministic equations which are idealizations of hydrodynamical systems.*

Après tout, l'atmosphère n'est constituée que d'un nombre fini de particules si bien qu'il s'agit effectivement de résoudre une équation différentielle ordinaire dans un espace de dimension « très grande ». Mais bien sûr, de telles équations sont « highly intractable » et on est contraint de les traiter à travers des équations aux dérivées partielles qui peuvent à leur tour être discrétisées sur une grille finie et mener parfois à de nouvelles équations différentielles ordinaires, dépendant d'un nombre plus raisonnable de variables et probablement plus utiles. Lorenz discute alors du type d'équations différentielles qu'il désire étudier.

---

<sup>11</sup>On peut se demander si la prestigieuse revue dans laquelle Williams publie son article [82] est accessible aux physiciens ?

*In seeking the ultimate behaviour of a system, the use of conservative equations is unsatisfactory [...]. This difficulty may be obviated by including the dissipative processes, thereby making the equations non conservative, and also including external mechanical or thermal forcing, thus preventing the system from ultimately reaching a state at rest.*

Une équation différentielle typique présentant à la fois *viscosité* et *forçage* est de la forme suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i,k} a_{ijk} x_i x_j x_k - \sum_{i,j} b_{ij} x_j + c_i$$

où  $\sum a_{ijk} x_i x_j x_k$  est identiquement nul<sup>12</sup> et  $\sum b_{ij} x_j$  est défini positif. Les termes quadratiques  $a_{ijk} x_i x_j x_k$  représentent l'*advection*, les termes linéaires  $\sum b_{ij} x_j$  correspondent au *frottement* et les termes constants au *forçage*. Lorenz observe que sous ces conditions, le champ de vecteurs est transverse aux sphères de grands rayons (*i.e.* de grande énergie) si bien que les trajectoires qui pénètrent dans une grande boule y restent confinées. Il peut alors discuter de diverses notions de stabilité, familières aux mathématiciens d'aujourd'hui ; périodicité, quasi-périodicité, stabilité au sens de Poisson, etc. Les références bibliographiques de l'article de Lorenz contiennent un article de Poincaré mais il s'agit de celui, célèbre, datant de 1881 [57]. Dans cet article, fondateur de la théorie des systèmes dynamiques, Poincaré introduit les cycles limites, démontre des cas particuliers du théorème de Poincaré-Bendixson, introduit les applications de premier retour, etc. mais il n'y est pas encore question de comportement chaotique ; cela ne viendra que dans le mémoire de 1890 que nous avons discuté et qui semble également avoir échappé à Lorenz. Une autre référence bibliographique renvoie à un livre de Birkhoff datant de 1927 consacré aux systèmes dynamiques. Mais là encore, cette référence est antérieure aux travaux de Birkhoff dans lesquels on voit « presque » apparaître un fer à cheval...

Puis, Lorenz prend l'exemple du phénomène de *convection*. Une couche d'un fluide visqueux est placée entre deux plans horizontaux, qui sont à deux températures différentes et il s'agit de décrire le mouvement qui en résulte. Les parties hautes du fluide sont plus froides et donc plus denses ; elles ont donc tendance à descendre par gravité et elles sont réchauffées lorsqu'elles parviennent dans les zones basses. La circulation du fluide qui en résulte est complexe. Les physiciens connaissent bien les expériences de Bénard et Rayleigh. En supposant des solutions périodiques en espace, en développant en séries de Fourier, et en tronquant ces séries en un petit nombre de termes, Salzman venait d'obtenir une équation différentielle ordinaire décrivant l'évolution. En simplifiant encore cette équation, Lorenz parvient à « son » équation :

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x + \sigma y \\ dy/dt &= -xz + rx - y \\ dz/dt &= xy - bz. \end{aligned}$$

Ici  $x$  représente l'intensité du mouvement de convection,  $y$  représente la différence de température entre les courants ascendants et descendants et  $z$  est proportionnel à la « distortion of the vertical temperature profile from linearity, a positive value indicating that the strongest gradients occur near the boundaries ». Comme on l'aura compris, il ne faut pas chercher dans cette équation différentielle ordinaire une représentation fidèle du phénomène physique... La constante  $\sigma$  est le *nombre*

<sup>12</sup>Cette condition exprime le fait que l'« énergie »  $\sum x_i^2$  est invariante par la partie quadratique du champ.

de Prandtl. Guidé par des considérations physiques, Lorenz est amené à choisir les valeurs numériques  $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$ ; c'était un bon choix et ces valeurs sont restées traditionnelles. Il peut alors résoudre numériquement ces équations et observer quelques orbites. Le calculateur électronique Royal McBee LGP-30 était bien primitif : selon Lorenz il calculait (seulement !) 1000 fois plus rapidement qu'à la main...

Mais les observations de Lorenz sont remarquablement fines. Il constate d'abord la fameuse *sensibilité aux conditions initiales*<sup>13</sup>. Mais surtout, il constate que les orbites, même si elles dépendent des conditions initiales, semblent s'accumuler sur un compact compliqué qui est *insensible* aux conditions initiales. Il observe que ce compact invariant ressemble en première approximation à une surface qui présente une ligne « double » le long de laquelle deux feuillets se rejoignent.

*Thus within the limits of accuracy of the printed values, the trajectory is confined to a pair of surfaces which appear to merge in the lower portion. [...] It would seem, then, that the two surfaces merely appear to merge, and remain distinct surfaces. [...] Continuing this process for another circuit, we see that there are really eight surfaces, etc., and we finally conclude that there is an infinite complex of surfaces, each extremely close to one or the other of the two merging surfaces.*

La figure 12 est extraite de l'article de Lorenz.

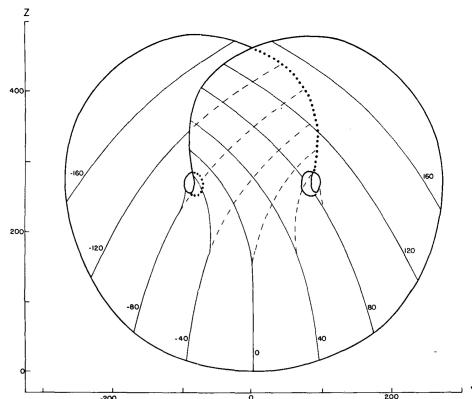


FIG. 12 – Le schéma de Lorenz

Partant d'une condition initiale, l'orbite s'approche rapidement de cet « objet de dimension deux » et voyage ensuite « sur » cette surface. L'orbite tourne alors autour des deux trous, de droite et de gauche, d'une manière qui semble aléatoire. Notez l'analogie avec les géodésiques d'Hadamard qui tournent autour des cornes du taureau.

<sup>13</sup>L'anecdote est assez connue « I started the computer again and went out for a cup of coffee »... La petite histoire a été racontée dans la conférence de Lorenz à l'occasion du prix Kyoto en 1991 intitulée « A scientist by choice » qui contient beaucoup de choses intéressantes. Il y discute en particulier de son rapport avec les mathématiques. En 1938, Lorenz est un « graduate student » à Harvard et il travaille sous la direction de G.Birkhoff « on a problem in mathematical physics ». Aucune mention n'est faite d'une influence éventuelle de Birkhoff sur sa conception du chaos. Rendez-vous manqué ? Lorenz signale par contre que Birkhoff « was noted for having formulated a theory of aesthetics ». Notez que presque tous les écrits de Lorenz, y compris un certain nombre non publiés, peuvent être téléchargés sur <http://eapsweb.mit.edu/research/Lorenz/publications.htm>.

Par ailleurs, Lorenz étudie la manière dont les orbites reviennent sur la « ligne de branchement » entre les deux feuillets, qui peut être paramétrée par un intervalle  $[0, 1]$ . Évidemment, cet intervalle n'est pas très bien défini puisque les deux feuillets n'entrent pas réellement en contact mais ils coïncident cependant « within the limits of accuracy of the printed values ». Partant d'un point sur cet intervalle, on peut suivre la trajectoire future et observer son retour sur l'intervalle. Pour cette application de premier retour  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , chaque point a une image mais deux préimages. Cela correspond au fait que pour remonter le temps et décrire la trajectoire passée d'un point de  $[0, 1]$ , il faudrait distinguer deux copies de l'intervalle, indiscernables sur la figure, et qu'en réalité deux orbites passées émanent du « même point ». Mais bien sûr, s'il y a deux orbites passées partant d' $\langle\!\langle$  un  $\rangle\!\rangle$  point, il y en a quatre puis huit, etc. et c'est précisément ce que Lorenz exprime dans la citation précédente. Numériquement, l'application de premier retour est représentée sur la partie gauche de la figure 13.

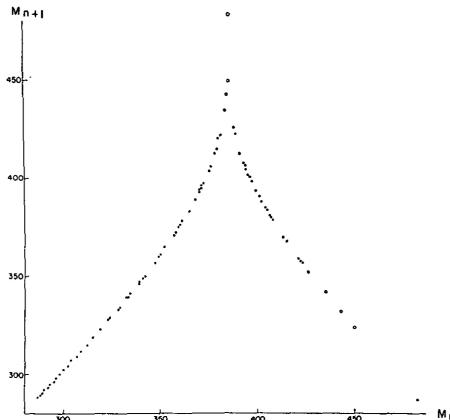


FIG. 4. Corresponding values of relative maximum of  $Z$  (abscissa) and subsequent relative maximum of  $Z$  (ordinate) occurring during the first 6000 iterations.

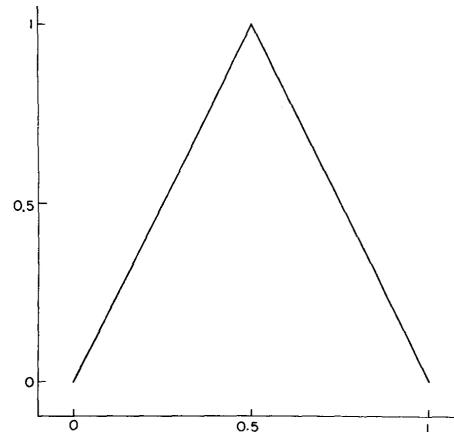


FIG. 5. The function  $M_{n+1}=2M_n$  if  $M_n < \frac{1}{2}$ ,  $M_{n+1}=2-2M_n$  if  $M_n > \frac{1}{2}$ , serving as an idealization of the locus of points in Fig. 4.

FIG. 13 – Les graphes de Lorenz

Travaillant toujours par analogie, Lorenz compare cette application à la suivante, évidemment beaucoup plus simple :  $F(x) = 2x$  si  $0 \leq x \leq 1/2$  et  $F(x) = 2-2x$  si  $1/2 \leq x \leq 1$  (partie droite de la figure 13). On connaît bien aujourd'hui le comportement chaotique de cette « application tente » mais cela était bien moins classique en 1963... En particulier, les *points périodiques* de  $F$  sont exactement les rationnels dont le dénominateur est impair ; ils sont denses dans  $[0, 1]$ . Lorenz n'hésite pas à laisser entendre que la même propriété vaut pour les itérations de l'application de premier retour qui le concerne. Les orbites périodiques sont « donc » denses dans l'attracteur de Lorenz. Quelle intuition !

*There remains the question as to whether our results really apply to the atmosphere. One does not usually regard the atmosphere as either deterministic or finite, and the lack of periodicity is not a mathematical certainty, since the atmosphere has not been observed forever.*

En résumé, cet article contient *le premier exemple de système dynamique dissipatif et physiquement crédible qui présente tous les attributs du chaos. Les orbites sont instables mais le comportement asymptotique des orbites semble relativement insensible aux conditions initiales*. Aucune des assertions précédentes n'est accompagnée

d'une justification, tout au moins au sens mathématique du terme. Exaspérant !

De manière étonnante, une question importante n'est pas abordée dans l'article de Lorenz. Il se trouve que le comportement observé est *robuste* : si on perturbe légèrement, non pas la condition initiale, mais l'équation différentielle, par exemple en changeant les valeurs des paramètres ou encore en ajoutant de petits termes, la nouvelle équation différentielle présentera encore le même type d'attracteur, ayant encore l'aspect général d'une surface. Cette propriété sera établie plus tard, comme nous le verrons.

On connaît le succès rencontré par l'« effet papillon ». La terminologie semble provenir du livre à grand succès de Gleick [29] et s'inspirer du titre d'une conférence de Lorenz en 1972 [45].

## 5.2 Guckenheimer, Williams et leur patron

L'équation de Lorenz est apparue dans les mathématiques au milieu des années 1970. D'après Guckenheimer [32], c'est Yorke qui a signalé à Smale et à ses élèves l'existence de l'équation de Lorenz, qui ne rentrait pas dans le cadre des objets qu'ils étudiaient. L'article bien connu de Ruelle et Takens sur la turbulence en 1971 ne propose encore comme modèles que des attracteurs hyperboliques [67], mais en 1975 Ruelle observe que « Lorenz's work was unfortunately overlooked » [65]. Guckenheimer et Lanford sont parmi les premiers à s'intéresser à cette équation d'un point de vue mathématique [31, 40]. Les mathématiciens ne vont d'ailleurs pas tarder à s'approprier l'objet et il est impossible de rendre compte de tous leurs travaux. Dès 1982, un livre entier est consacré à l'équation de Lorenz, même s'il faut bien constater qu'il s'agit pour l'essentiel d'une liste de problèmes ouverts pour mathématiciens [79].

Je vais me contenter ici de présenter les travaux fondamentaux de Guckenheimer et Williams qui ont construit *les modèles géométriques de Lorenz* [33, 82] (indépendamment de Afraimovich, Bykov et Shil'nikov [2]). Le problème initial consiste à justifier les phénomènes *observés* par Lorenz sur son équation différentielle. Nous avons vu que l'équation différentielle en elle-même est une approximation grossière du phénomène physique. Le problème de démontrer que les équations de Lorenz possèdent bien les propriétés en question n'est donc peut-être pas le plus intéressant. Guckenheimer et Williams se donnent en fait un autre but : il s'agit de *s'inspirer* des comportements observés par Lorenz pour construire des champs de vecteurs, appelés modèles géométriques de Lorenz, qui vérifient les propriétés suivantes :

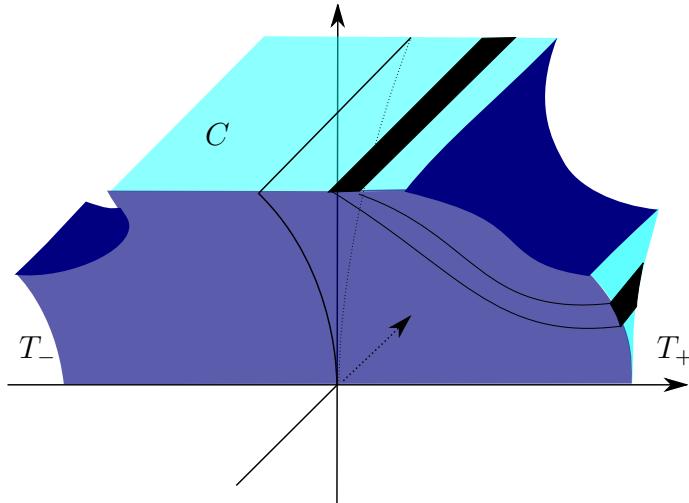
- *l'ensemble des points non errants n'est pas hyperbolique, puisque celui-ci contient à la fois des points non singuliers et un point singulier ;*
- *ils ne sont pas structurellement stables ;*
- *ils constituent un ouvert dans l'espace des champs de vecteurs.*

Considérons d'abord un champ de vecteurs linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = -by, \quad \frac{dz}{dt} = -cz$$

avec  $0 < c < a < b$ . Soit  $C$  le carré  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$ . L'orbite partant d'un point  $(x_0, y_0, 1)$  de ce carré est  $(x_0 \exp(at), y_0 \exp(-bt), \exp(-ct))$ .

Appelons  $T_{\pm}$  les zones triangulaires où ces orbites viennent rencontrer les plans d'équations  $x = \pm 1$ . Elles sont définies par  $x = \pm 1$ ,  $|y| \leq \frac{1}{2}|z|^{b/c}$  et  $z > 0$ . Il s'agit donc de « triangles » présentant un point de rebroussement en leur sommet inférieur. On considère alors la zone  $B$  balayée par les orbites qui partent de  $C$  jusqu'au moment où elles rencontrent  $T_{\pm}$ , à laquelle on ajoute toutes les orbites futures des points de  $\{x = 0; -1/2 \leq y \leq 1/2; z = 1\}$  (qui ne rencontrent jamais  $T_{\pm}$ ) ainsi que l'arête saillante  $\{-1 \leq x \leq 1; y = 0; z = 0\}$  (voir la figure 14).

FIG. 14 – Le bloc  $B$ 

Le « champ de vecteurs de Lorenz » que nous allons construire coïncidera avec ce champ de vecteurs linéaire dans la boîte  $B$ . À l'extérieur de la boîte, on procède différemment. On fait en sorte que les orbites qui sortent de  $T_{\pm}$  reviennent à l'intérieur du carré  $C$ . On obtient donc un champ de vecteurs qui n'est défini pour l'instant qu'à l'intérieur d'un domaine  $D$  ayant l'allure de la figure 15.

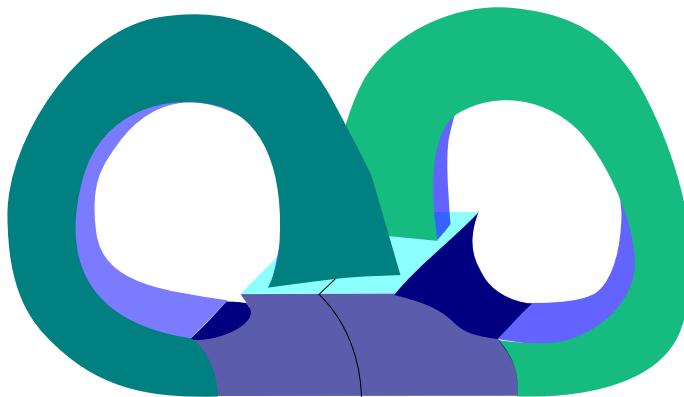


FIG. 15 – Modèle géométrique

Le but est essentiellement de comprendre la dynamique à l'intérieur de  $D$  mais on peut bien sûr compléter le champ à l'extérieur si on souhaite un champ défini dans l'espace tout entier. Un tel champ de vecteurs  $X$  est un *modèle géométrique de Lorenz*.

Notons – c'est un fait important – qu'il n'est pas tout à fait exact de dire que les points des triangles *reviennent* dans le carré : la pointe fait exception puisqu'elle provient du point singulier à l'origine. Il y a beaucoup de façons d'organiser le retour de  $T_{\pm}$  dans  $C$ , mais on peut faire en sorte que l'application de retour de Poincaré :  $R : C \rightarrow C$  soit de la forme suivante :

$$F(x, y) = (f(x), H(x, y)).$$

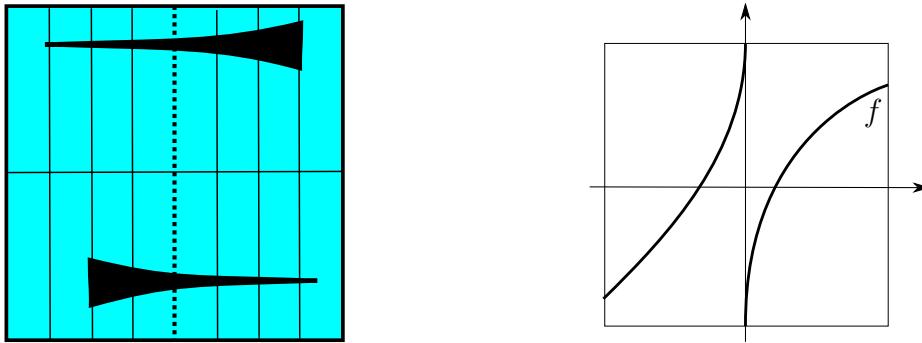


FIG. 16 – Applications de retour

Techniquement, on demande que  $H(x, y) > 1/4$  pour  $x > 0$  et que  $H(x, y) < 1/4$  pour  $x < 0$ . Mais surtout, on demande que l'application  $f : [-1/2, 1/2] \rightarrow [-1/2, 1/2]$  vérifie les conditions suivantes :

1.  $f(0^-) = 1/2$ ,  $f(0^+) = -1/2$ ;
2.  $f'(x) > \sqrt{2}$  pour tout  $x$  dans  $[-1/2, 1/2]$ .

La seconde condition implique que pour tout intervalle  $J$  contenu dans  $[-1/2, 1/2]$ , il existe un entier  $l > 0$  tel que  $f^l(J) = [-1/2, 1/2]$ <sup>14</sup>.

Pour décrire la structure des orbites à l'intérieur de la boîte, Williams introduit le concept de *patron* (« template » en anglais). La figure 17 est extraite de [15]<sup>15</sup> : il s'agit d'une *surface branchée*  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  plongée dans l'espace, sur laquelle on peut définir un *semi-flot*  $\psi^t$  ( $t \geq 0$ ). Semi-flot signifie ici que  $\psi^t : \Sigma \rightarrow \Sigma$  n'est défini que pour  $t \geq 0$  et que  $\psi^{t_1+t_2} = \psi^{t_1} \circ \psi^{t_2}$  pour tous  $t_1, t_2$ . On voit les trajectoires du semi-flot sur la figure : un point de  $\Sigma$  a un futur mais n'a pas de passé, précisément à cause des deux feuillets qui entrent en contact le long d'un intervalle. L'application de premier retour sur cet intervalle est choisie comme étant l'application  $f$  définie précédemment. La dynamique du semi-flot n'est pas difficile à comprendre : les orbites tournent sur la surface, tantôt en passant par l'aile gauche et tantôt par l'aile droite, selon le signe des itérés d'un point  $f^k(x)$ .

Il s'agit maintenant de construire un flot à partir du semi-flot par une méthode bien connue, dite de la *limite projective*. On considère l'espace abstrait  $\hat{\Sigma}$  des courbes  $c : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  qui sont des trajectoires de  $\psi^t$  dans le sens suivant : pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\psi^t(c(s)) = c(s + t)$ . Étant donné un point  $x$  sur  $\Sigma$ , choisir une telle courbe  $c$  telle que  $c(0) = x$  revient à « choisir un passé » pour  $x$  : on remonte le semi-flot et à chaque franchissement de la ligne double, on fait l'un des deux choix

<sup>14</sup>Le fait que le graphe de  $f$  ne ressemble pas à la figure 13 résulte simplement de choix différents de notations.

<sup>15</sup>Incidentement, cette figure montre que la qualité d'un article ne dépend pas que de la qualité de ses illustrations...

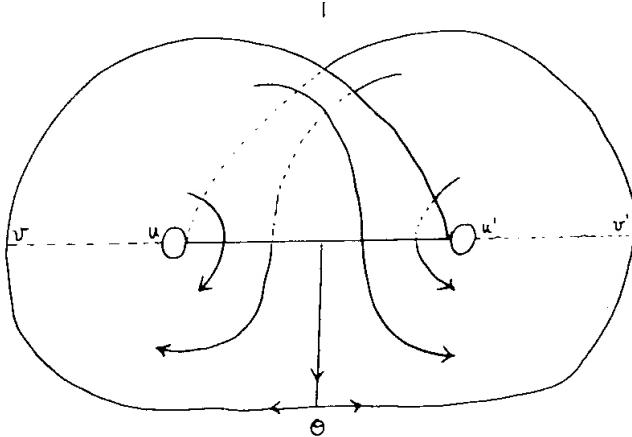


FIG. 17 – Le patron

possibles. L’application  $c \in \hat{\Sigma} \mapsto c(0) \in \Sigma$  a donc des fibres totalement discontinues, qui sont des ensembles de Cantor. L’espace  $\hat{\Sigma}$  est un ensemble compact abstrait muni d’un *flot*  $\hat{\psi}^t$  défini par  $\hat{\psi}^t(c)(s) = c(s + t)$ , ce qui a maintenant un sens pour tout  $t$  réel.

Fixons un modèle de Lorenz  $X$ , engendrant un flot  $\phi^t$  et associé à une application de retour  $f$ . Williams établit dans [82] que :

*Il existe un compact  $\Lambda$  contenu dans la boîte  $D$  tel que :*

- l’ensemble  $\omega$ -limite de tout point de  $D$  est contenu dans  $\Lambda$  ;
- $\Lambda$  est invariant par  $\phi^t$  et la restriction de  $\phi^t$  à  $\Lambda$  est topologiquement conjuguée à  $\hat{\psi}^t$  agissant sur  $\hat{\Sigma}$  ;
- $\Lambda$  est topologiquement transitif : il contient des points dont l’orbite est dense dans  $\Lambda$  ;
- la réunion des orbites périodiques est dense dans  $\Lambda$ .

Voilà donc précisée l’intuition de Lorenz selon laquelle l’attracteur  $\Lambda$  se comporte comme une surface « within the limits of accuracy of the printed values ».

On voit également que la dynamique topologique du champ de vecteurs est complètement déterminée par celle de l’application  $f$ . Pour la comprendre, on utilise la notion de *suite de pétrissage* (« kneading sequence » en anglais) introduite vers cette époque dans un contexte plus général. Il s’agit des deux suites  $\alpha_k, \beta_k = \pm$  qui ne sont autres que les signes de  $f^k(1/2^-)$  et  $f^k(1/2^+)$  pour  $k \geq 0$  (on convient par exemple que le signe de 0 est +). Il est clair que deux applications  $f$  du genre précédent qui sont conjuguées par un homéomorphisme (préservant l’orientation) définissent les mêmes suite  $\alpha_k, \beta_k$ . La réciproque est vraie. Revenant au champ de vecteurs, ces deux suites s’obtiennent en considérant les deux séparatrices instables qui partent de l’origine, qui vont intersecter le carré  $C$  une infinité de fois, tantôt dans la partie  $x > 0$  et tantôt dans la partie  $x < 0$ . Les deux suites décrivent donc précisément le cheminement de ces deux séparatrices. Il devrait être clair que ces champs sont structurellement instables car une petite perturbation peut changer les suites  $\alpha_k, \beta_k$ .

Guckenheimer et Williams démontrent que les deux suites contiennent toute l’information topologique sur le champ de vecteurs. Précisément, ils établissent le

théorème suivant :

*Il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  dans l'espace des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et une application continue  $\pi$  de  $\mathcal{U}$  vers un disque de dimension 2 tels que deux champs  $X, Y$  de  $\mathcal{U}$  sont conjugués par un homéomorphisme proche de l'identité si et seulement si  $\pi(X) = \pi(Y)$ .*

Il n'est pas question ici d'évoquer les preuves mais il faut insister sur un point important : le flot de Lorenz, bien que non hyperbolique, est quand même « singulier hyperbolique ». En chaque point  $x$  de l'attracteur  $\Lambda$ , on peut décomposer l'espace tangent en une somme directe d'une droite  $E_x^s$  et d'un plan  $F_x$  de façon à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- $E_x^s$  et  $F_x$  dépendent continûment du point  $x \in \Lambda$  et sont invariants par la différentielle du flot  $\phi^t$  ;
- les vecteurs de  $E_x^s$  sont contractés par le flot : il existe  $C > 0, \lambda > 0$  tel que pour tout  $t > 0$  et tout  $v \in E_x^s$ , on ait  $\|d\phi^t(v)\| \leq C \exp(-\lambda t) \|v\|$  ;
- les vecteurs de  $F_x$  ne sont pas nécessairement dilatés par le flot mais ils ne sont pas autant contractés que les vecteurs de  $E^s$ . Précisément, si  $u \in F_x$  et  $v \in E_x^s$  sont unitaires, on a  $\|d\phi^t(u)\| \geq C \exp(\lambda t) \|d\phi^t(v)\|$  pour tout  $t > 0$  ;
- le flot dilate uniformément le volume bi-dimensionnel de  $F_x$  :  $\det(d\phi^t|F_x) \geq C \exp(\lambda' t)$  pour un  $\lambda' > 0$  et tout  $t > 0$ .

Pour chaque point  $x$  de  $\Lambda$ , on peut considérer l'ensemble  $W^s(x)$  des points  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que la distance  $\|\phi^t(x) - \phi^t(y)\|$  tende vers 0 plus vite que  $\exp(-\lambda t)$ . Il s'agit d'une courbe lisse dont la tangente en  $x$  est  $E_x^s$ . La collection de ces courbes définit un feuilletage d'un voisinage ouvert de  $\Lambda$  ce qui justifie la terminologie « *attracteur* » : tous les points de ce voisinage ouvert sont attirés par  $\Lambda$  et leurs trajectoires sont asymptotes à une trajectoire contenue dans  $\Lambda$ . La surface branchée  $\Sigma$  est obtenue à partir d'espaces de feuilles locaux de ce feuilletage. Il faut bien sûr démontrer que toutes ces structures existent et surtout qu'elles subsistent par perturbation du champ de vecteurs.

Ainsi l'ouvert dans l'espace des champs détecté par Guckenheimer et Williams est hors du domaine des systèmes hyperboliques mais on parvient cependant à comprendre la dynamique de ce type de champs (au moins d'un point de vue qualitatif). Comme on le voit, la spécificité de ces champs provient du fait qu'ils sont en quelque sorte des suspensions d'applications  $f$  de l'intervalle mais qu'ils possèdent un point singulier dans leur ensemble non errant. D'une certaine manière leur dynamique se ramène à une dynamique en temps discret mais d'une autre manière la présence du point singulier fait que le temps de retour sur le carré  $C$  n'est pas borné. Il serait naïf de penser qu'il suffise d'ajouter ce type de phénomène aux systèmes hyperboliques pour avoir une vue d'ensemble de la dynamique générique. Nous verrons plus loin quelques autres types de phénomènes qui se produisent de manière stable en dehors de l'hyperbolité. Mais le « phénomène Lorenz » que je viens de décrire est sans aucun doute l'un des quelques-uns qui semblent représenter significativement une situation générique. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Bien entendu les modèles géométriques de l'attracteur de Lorenz ont été *inspirés* par l'équation originale de Lorenz et rien ne permettait d'affirmer que l'équation de Lorenz se comporte effectivement comme un modèle géométrique. À vrai dire, la question n'était pas cruciale puisqu'il est bien clair que Lorenz aurait pu faire

d'autres choix pour établir son équation, qui résultait de troncatures un peu arbitraires de séries de Fourier. Lorenz lui-même n'affirmait d'ailleurs pas que son équation avait un sens physique. Il n'empêche que la question de savoir si les dynamiques de Guckenheimer-Williams ont un lien avec celle de Lorenz était naturelle, et Smale la choisit comme l'un des « mathematical problems for the next century » en 1998 [78]. Le problème fut résolu positivement en 1999 par Tucker [80] (donc avant le « next century » !). Il s'agit donc de construire un carré  $C$  adapté à l'équation originale de Lorenz, l'application de retour sur  $C$ , et de vérifier qu'elles ont les propriétés requises par le modèle géométrique. La démonstration se fait par ordinateur et il s'agit de borner les erreurs. La difficulté majeure – qui rend le problème très délicat – est bien sûr la présence du point singulier qui fait que les temps de retour tendent vers l'infini... Pour une description concise de la méthode employée, on peut consulter [81].

## 6 La topologie de l'attracteur de Lorenz

### 6.1 Birman, Williams et leur sac de noeuds

Nous avons vu que les orbites périodiques sont denses dans l'attracteur d'un modèle géométrique de Lorenz. Pour mieux appréhender la topologie de l'attracteur, Birman et Williams eurent l'idée de considérer ces orbites périodiques comme des noeuds. Un *noeud* est une courbe fermée orientée sans point doubles dans l'espace. Un topologue considère deux noeuds comme identiques (le terme technique est *isotope*) s'il est possible de passer continûment de l'un à l'autre sans créer de points doubles. Quels sont les noeuds qui sont représentés par au moins une orbite périodique ? Un noeud donné peut-il être représenté par une infinité d'orbites périodiques ? Au delà des noeuds, on peut également s'intéresser aux *entrelacs*, c'est-à-dire aux réunions d'un nombre fini de noeuds disjoints. Chaque collection finie d'orbites périodiques définit bien entendu un entrelacs. Puisque les orbites périodiques sont denses dans l'attracteur, on peut penser l'approcher par un entrelacs avec un très grand nombre de composantes. L'article [15] est un joli mélange de topologie et de dynamique.

A priori, il faudrait faire une étude pour chaque modèle géométrique de Lorenz, c'est-à-dire pour chaque application de premier retour  $f$ , ou plus précisément pour chaque choix d'une paire de suites de pétrissage  $\alpha, \beta$ . On peut cependant se limiter à étudier la situation dans le cas particulier de la multiplication par deux : on pose  $f_0(x) = 2x + 1$  pour  $x \in [-1/2, 0[$  et  $f_0(x) = 2x - 1$  pour  $x \in [0, 1/2]$ . Un point de  $[-1/2, 1/2]$  est complètement déterminé par la suite des signes de ses itérés par  $f_0$  et toute suite de signes correspond à un point de  $[-1/2, 1/2]$ . Il s'agit bien sûr de l'écriture dyadique des nombres de  $[-1/2, 1/2]$ . Si  $f$  est une transformation de  $[-1/2, 1/2]$  provenant d'un modèle géométrique de Lorenz, on peut associer à tout  $x$  l'unique point  $h(x)$  tel que le signe de  $f^k(x)$  soit le même que celui de  $f_0^k(h(x))$  pour tout  $k \geq 0$ . Ceci définit une injection de  $h : [-1/2, 1/2] \rightarrow [-1/2, 1/2]$  telle que  $h \circ f = f_0 \circ h$  et on peut donc penser que  $f_0$  « contient » toutes les dynamiques uni-dimensionnelles qui nous intéressent. Bien entendu, l'application  $h$  n'est pas toujours une bijection ; cela dépend du modèle de Lorenz considéré mais nous étudierons le cas maximal de  $f_0$  puisqu'il contient tous les autres. On peut aussi remarquer qu'à strictement parler, l'application  $f_0$  n'intervient pas comme

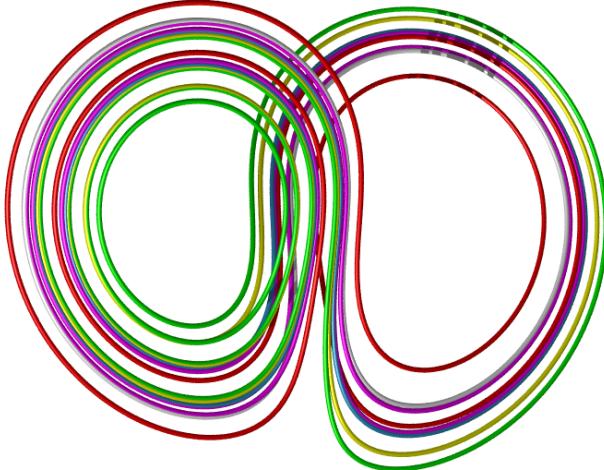


FIG. 18 – Quelques orbites périodiques

application de premier retour d'un modèle géométrique de Lorenz puisque la dérivée ne tend pas vers l'infini en 0. Cependant, partant de  $f_0$ , on peut construire, de la même manière qu'au paragraphe précédent, un semi-flot *topologique* sur la surface branchée, puis un flot par la construction de la limite projective. Puisque nous nous intéressons ici à la nature des noeuds et entrelacs formés par les orbites périodiques des modèles géométriques de Lorenz, ce flot topologique est parfaitement adapté à notre problème.

Chaque orbite périodique du flot de Lorenz peut être projetée sur le patron ; elle est donc associée à une orbite périodique de  $f$ . On pourrait craindre cependant que lors de cette projection, le type topologique du noeud puisse changer et que des points doubles apparaissent. Mais cela ne se produira pas car la projection sur le patron se fait au long des variétés stables, de dimension 1, et il suffit de remarquer qu'une variété stable ne peut bien sûr rencontrer une orbite périodique qu'en au plus un point : deux points différents ne peuvent pas être simultanément asymptotes et périodiques.

Les points périodiques de  $f_0$  sont faciles à déterminer : ce sont les rationnels dont le dénominateur est deux fois un nombre impair. Si  $x$  est un tel point périodique de période  $k$ , on construit une tresse de la manière suivante : dans le carré  $[-1/2, 1/2] \times [0, 1]$ , on joint les points  $(f^i(x), 0)$  et  $(f^{i+1}(x), 1)$  par un segment pour  $i = 0, \dots, k-1$  et on fait en sorte que les segments montant vers la droite passent en dessous de ceux qui montent vers la gauche, comme sur la figure 19. Ensuite, on ferme la tresse, comme le font classiquement les topologues, pour obtenir un noeud  $k(x)$ . Si on part d'un nombre fini d'orbites périodiques  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , on obtient un entrelacs. Il s'agit des « noeuds et entrelacs de Lorenz ».

Avant de citer quelques-uns des résultats obtenus dans [15, 83], il faut rappeler quelques définitions concernant les noeuds. Un noeud orienté est toujours le bord d'une surface (dite de Seifert) orientée et plongée dans l'espace. Le genre minimum d'une telle surface est le *genre* du noeud. Si un noeud ne peut pas s'obtenir comme somme connexe de deux noeuds non triviaux, on dit qu'il est *premier*. Un noeud

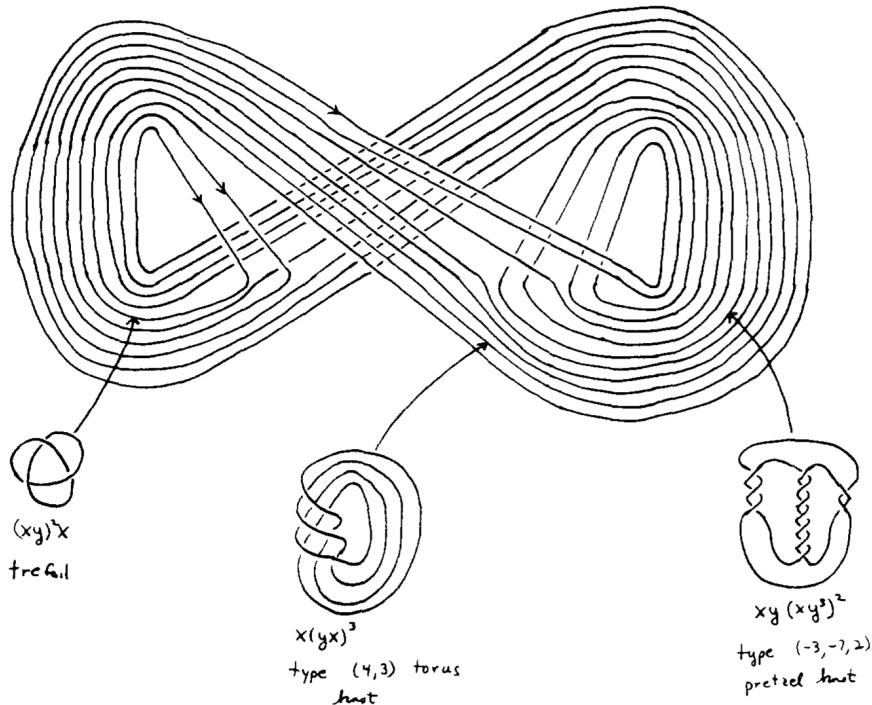


FIG. 19 – Un entrelacs de Lorenz

est appelé *chiral* s'il ne peut pas être déformé continûment (isotope) en son image dans un miroir. Étant donné un noeud  $k$  considéré comme plongé dans la sphère  $\mathbb{S}^3$  de dimension 3 (union de  $\mathbb{R}^3$  et d'un point à l'infini), on dit qu'il est *fibré* si le complémentaire  $\mathbb{S}^3 \setminus k$  fibre sur le cercle. Cela signifie qu'il existe une famille de surfaces à bord paramétrées par un angle  $\theta \in \mathbb{S}^1$  qui ont toutes  $k$  comme bord, qui ne se rencontrent deux à deux que sur leur bord commun, et qui balayent toute la sphère. Au voisinage du noeud, les surfaces se comportent comme les pages d'un livre ouvert au voisinage de la reliure. Enfin, étant donnés deux noeuds disjoints  $k_1$  et  $k_2$ , on peut définir leur *nombre d'enlacement*; il s'agit de choisir une surface orientée dont le bord est  $k_1$  et de compter le nombre algébrique d'intersections de  $k_2$  avec cette surface. Cet entier  $\text{enl}(k_1, k_2)$  est indépendant de la surface choisie et  $\text{enl}(k_1, k_2) = \text{enl}(k_2, k_1)$ .

Voici quelques propriétés des entrelacs de Lorenz :

- Il existe des noeuds de Lorenz dont le genre est arbitrairement grand.
- Deux noeuds de Lorenz sont toujours enlacés positivement.
- Les noeuds de Lorenz sont premiers.
- Tous les entrelacs de Lorenz sont fibrés.
- Les noeuds de Lorenz non triviaux sont chiraux.

Les noeuds de Lorenz sont très particuliers. On peut par exemple utiliser un ordinateur et les tables contenant les 1 701 936 noeuds premiers pouvant être représentés par un diagramme plan avec moins de 16 croisements, pour montrer que seuls 21 d'entre eux sont des noeuds de Lorenz [28]. Pour beaucoup plus d'informations sur les noeuds de Lorenz ainsi que des développements récents, on peut consulter [22, 14]. De

manière surprenante, Ghrist a montré que si on plonge la surface branchée dans l'espace en tordant l'une des deux ailes d'un demi-tour, le nouveau flot qui en résulte est *universel* : *tous* les entrelacs peuvent être représentés par une collection finie d'orbites périodiques [25].

## 6.2 L'attracteur lévogyre...

Si on imagine l'attracteur comme une « limite topologique » de ses orbites périodiques, et si on prend en compte le fait que chaque réunion finie d'orbites périodiques définit un entrelacs fibré, on peut se demander comment toutes ces fibrations sur le cercle se comportent lorsque le nombre de composantes tend vers l'infini. D'une certaine façon, on serait tenté d'affirmer que le complémentaire de l'attracteur lui-même est un objet fibré... Dans [27], je propose une description globale de toutes ces fibrations qui est fondée sur le concept de champ de vecteurs *lévogyre* (*qui tourne à gauche* pour être moins pédant).

On considère un champ de vecteurs *non singulier*  $X$  sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  engendrant un flot  $\phi^t$ . Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble compact convexe formé des mesures de probabilité invariantes par le flot. Cet espace contient par exemple les mesures de probabilités équidistribuées sur une orbite périodique (s'il en existe), ainsi que leurs combinaisons convexes. On peut penser à une mesure invariante générale comme une orbite périodique généralisée (un *cycle feuilleté*, dans la terminologie de Sullivan). De la même manière que deux noeuds dans la sphère possèdent un nombre d'enlacement, je montre qu'on peut toujours définir une forme quadratique d'enlacement  $enl : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le flot est alors qualifié de lévogyre si  $enl$  ne prend que des valeurs strictement positives. Pour le flot de Lorenz,  $enl$  n'est que positif ou nul mais il est strictement positif dès qu'on se limite aux mesures invariantes qui ne chargent pas le point singulier ; cela se « voit » directement sur le patron de Williams puisque deux arcs de trajectoires ne présentent que des intersections positives lorsqu'on les projette sur le plan. Le flot de Lorenz n'est donc pas lévogyre au sens strict que je viens de définir.

L'un des résultats principaux de [27] est qu'un flot lévogyre est *fibré* dans le sens suivant. On peut trouver une *forme d'enlacement de Gauss* strictement positive sur le flot. Précisément, cela signifie qu'il existe une  $(1, 1)$ -forme différentielle  $\Omega$  sur  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  privé de la diagonale telle que :

- si  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  sont deux courbes fermées disjointes, leur nombre d'enlacement est donné par l'intégrale de Gauss  $\iint \Omega_{\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)} \left( \frac{d\gamma_1}{dt_1}, \frac{d\gamma_2}{dt_2} \right) dt_1 dt_2$  ;
- si  $x_1, x_2$  sont deux points distincts,  $\Omega_{x_1, x_2}(X(x_1), X(x_2)) > 0$ .

L'intérêt de cette propriété est qu'une telle forme de Gauss donne immédiatement des fibrations sur le complémentaire de chaque orbite périodique. Il suffit pour cela de remarquer que si  $\mu$  est une mesure de probabilité invariante, l'intégrale

$$\omega_x(v) = \int \Omega_{x,y}(v, X(y)) d\mu(y)$$

définit une 1-forme *fermée et non singulière* sur le complémentaire du support de la mesure  $\mu$ . Si  $\mu$  est une orbite périodique, la forme  $\omega$  a une primitive multiforme, qui définit une fibration du complémentaire de l'orbite sur le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Même si le flot de Lorenz ne rentre pas dans ce cadre, je montre dans [27] comment ceci permet de mieux comprendre les résultats de Birman et Williams que j'ai décrits plus haut.

### 6.3 Retour de Lorenz vers Hadamard...

Hadamard étudiait les géodésiques sur un pantalon à courbure négative, et montrait qu'elles sont décrites par des suites de symboles, énumérant les coutures traversées. Williams explique le mouvement d'une trajectoire dans l'attracteur de Lorenz par un semi-flot sur le « patron de Lorenz », lui-même décrit par une suite de symboles, suivant la suite des ailes du papillon, gauche ou droite, qui sont successivement parcourues. Il n'est donc pas très surprenant qu'il existe un lien entre ces deux dynamiques. C'est un tel lien qui est mis en évidence dans [26].

Lorsqu'on parcourt une géodésique non errante sur le pantalon  $P$ , on peut considérer qu'après chaque passage sur une couture, on tourne à droite ou à gauche pour atteindre la couture suivante. On peut donc associer une suite bi-infinie de symboles « gauche-droite » à toute géodésique non errante. Ce nouveau codage n'est pas parfait cependant car il n'est pas bijectif. Supposons le pantalon représenté dans l'espace de manière symétrique, c'est-à-dire invariant par six rotations (l'identité, deux rotations d'ordre trois et trois rotations d'ordre deux) comme sur la figure 20.

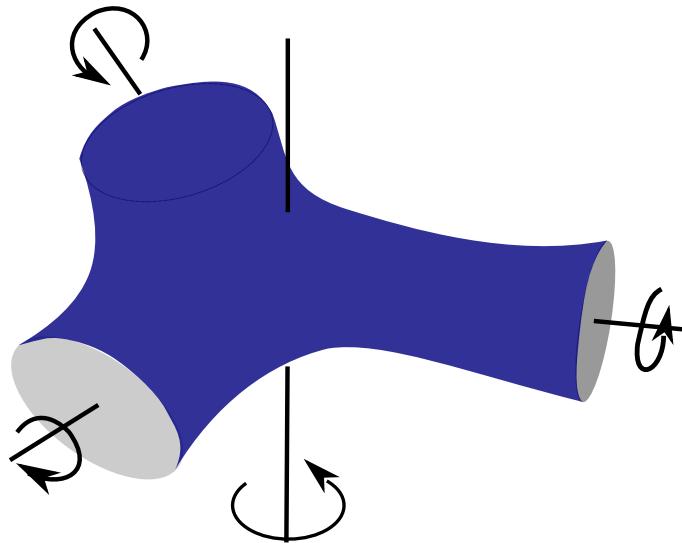


FIG. 20 – Symétries du pantalon

Évidemment chacune de ces rotations transforme une géodésique de  $P$  en une autre qui possède la même suite de « gauche-droite ». On est donc amené à considérer le quotient  $\hat{P}$  de  $P$  par ce groupe à six éléments. Il ne s'agit pas tout à fait d'une surface à cause des points d'intersection des axes de rotation avec  $P$ . Oubliant ce « détail », on peut considérer que les géodésiques de  $\hat{P}$  sont codées bijectivement par une suite « gauche-droite » comme pour une orbite du flot de Lorenz.

On reconnaît dans  $\hat{P}$  une variante de la *surface modulaire*, quotient du demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$  par l'action de  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  par transformations de Möbius. Le sous-groupe  $\Gamma[2]$  d'indice six, formé des matrices congrues à l'identité

modulo 2, agit sans point fixe sur  $\mathcal{H}$  et le quotient est une sphère moins trois points. Le groupe à six éléments  $\Gamma/\Gamma[2]$  agit sur cette sphère moins trois points de la même manière qu'il agit sur  $P$ . Une géodésique de la surface modulaire est donc également codée par une suite de symboles « gauche-droite », tout comme une orbite du flot de Lorenz.

Pour aller plus loin, il faut comparer les espaces sur lesquels ces deux dynamiques ont lieu. Pour l'équation de Lorenz, il s'agit de l'espace usuel  $\mathbb{R}^3$ . Pour le flot géodésique modulaire, il s'agit du quotient  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  : cela résulte du fait que  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  s'identifie au fibré unitaire tangent à  $\mathcal{H}$ . La figure 21 montre un domaine fondamental pour l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur le demi-plan de Poincaré. Trois copies de ce domaine forment un triangle circulaire dont les trois sommets sont sur l'axe réel. Deux copies de ces triangles forment un domaine fondamental de  $\Gamma[2]$ .

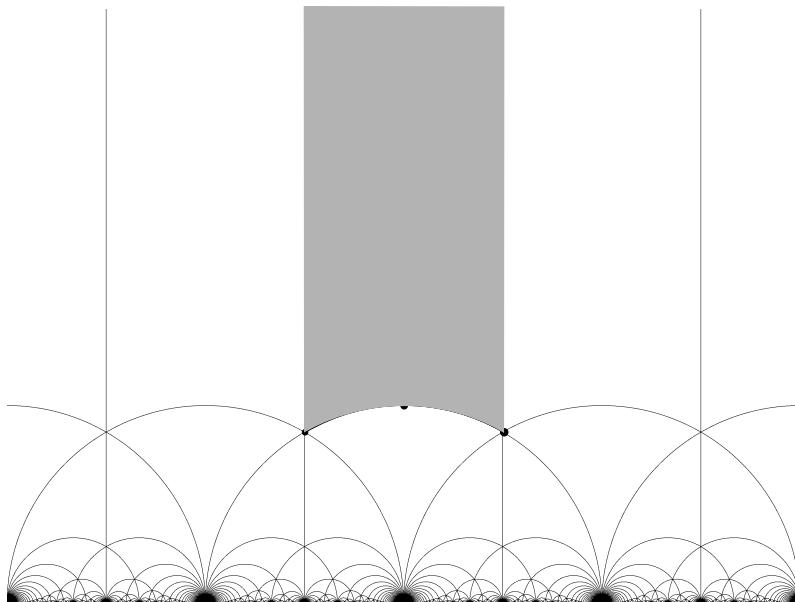


FIG. 21 – Domaine fondamental pour l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur le demi-plan

Dans [26], j'utilise le fait que les formes modulaires classiques permettent d'identifier topologiquement  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  au complémentaire dans la sphère  $\mathbb{S}^3$  du nœud de trèfle pour représenter les géodésiques modulaires dans la sphère. Je peux alors « identifier » les dynamiques topologiques du flot de Lorenz et du flot géodésique modulaire : par exemple je montre que les géodésiques périodiques de la surface modulaire, vues comme nœuds dans la sphère, peuvent se déformer sur les nœuds de Lorenz.

La partie gauche de la figure 22 montre l'une des orbites périodiques du flot géodésique modulaire, dans le complémentaire d'une version du patron de Lorenz. La partie droite montre l'orbite de Lorenz qui possède le même code symbolique. La partie centrale illustre une étape de la déformation. Pour plus d'explications, voir [26, 28].

L'analogie entre le mouvement d'un fluide et un flot géodésique n'est pas nouvelle. Dans un article remarquable de 1966, Arnold montrait que l'équation d'Euler

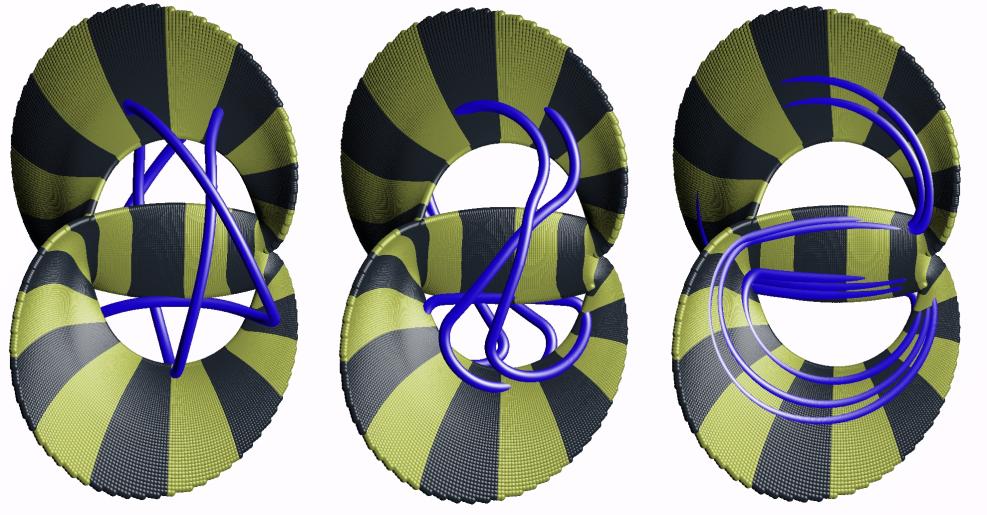


FIG. 22 – Déformation d'un nœud modulaire en un nœud de Lorenz

des fluides parfaits n'est autre que celle qui régit les géodésiques du groupe de dimension infinie des difféomorphismes qui préservent le volume [7]. Par ailleurs, il montre que les courbures sectionnelles sont « souvent » négatives ce qui lui permet de proposer un comportement « à la Hadamard » pour les solutions de l'équation d'Euler. Bien sûr, Lorenz ne considère pas des fluides parfaits et il part de l'équation de Navier-Stokes et non pas de celle d'Euler mais les motivations sont proches.

## 7 L'attracteur comme objet statistique

### 7.1 Mesures physiques

Comme nous l'avons vu, l'une des grandes idées pour « contourner » la sensibilité aux conditions initiales consiste à faire intervenir les probabilités.

Lorenz est l'un de ceux qui ont exprimé cette idée le plus clairement : « over the years minuscule disturbances neither increase nor decrease the frequency of occurrence of various weather events such as tornados ; the most they may do is to modify the sequence in which these events occur. »

Un flot  $\phi^t$  sur une variété compacte  $V$  préserve toujours au moins une mesure de probabilité. Cela résulte par exemple du fait qu'il agit sur l'espace convexe compact de toutes les probabilités sur  $V$  et qu'un groupe abélien agissant affinement sur un convexe compact possède un point fixe. Voilà un théorème d'existence mathématique qui n'impressionnera pas le physicien ! Mais, une fois « choisie » une probabilité invariante  $\mu$ , on peut faire appel au *théorème ergodique de Birkhoff* : pour chaque fonction  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable pour la mesure  $\mu$ , les limites des moyennes temporelles

$$\tilde{u}(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(\phi^t(x)) dt$$

existent pour  $\mu$ -presque tout point  $x$ . Bien entendu la fonction  $\tilde{u}$ , définie presque

partout, est constante sur les orbites du flot. On peut choisir<sup>16</sup> la mesure  $\mu$  ergodique si bien que toute fonction invariante sur les orbites est constante presque partout. On pourrait donc considérer que ce théorème ergodique exprime le souhait de Lorenz : la *fréquence* d'apparition des divers événements ne dépend pas de la situation initiale. La difficulté réside cependant dans le fait qu'un flot donné  $\phi^t$  préserve en général une infinité de mesures et les ensembles de mesures totales pour les unes et les autres peuvent tout à fait être disjoints. La question se pose donc de savoir s'il en existe une qui a un « sens physique ».

Au début des années 1970, Sinai, Ruelle et Bowen ont dégagé un concept fondamental pour répondre à cette question [71, 66, 17].

Rappelons que sur une variété, il n'y a pas de notion intrinsèque de mesure de Lebesgue, mais que par contre les ensembles négligeables au sens de Lebesgue sont bien définis, *i.e.* ne dépendent pas des choix des systèmes de coordonnées utilisés. Pour cette raison, il est légitime de parler d'une mesure absolument continue par rapport à « la » mesure de Lebesgue. On peut penser que ces ensembles négligeables au sens de Lebesgue sont en effet négligeables pour un physicien...

Il est temps que je précise enfin le sens du mot *attracteur* que j'ai utilisé plusieurs fois. *Un ensemble compact  $\Lambda$  dans  $V$  est un attracteur si :*

- $\Lambda$  est invariant par le flot  $\phi^t$  ;
- il existe un point de  $\Lambda$  dont l'orbite est dense dans  $\Lambda$  ;
- le bassin d'attraction  $B(\Lambda) = \{x \in V | \omega(x) \subset \Lambda\}$  est de mesure de Lebesgue non nulle.

*Une mesure de probabilité  $\mu$  invariante par  $\phi^t$  est une mesure SRB (pour Sinai-Ruelle-Bowen) si pour toute fonction continue  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , l'ensemble des points  $x$  tels que*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(\phi^t(x)) dt = \int u d\mu$$

*est de mesure de Lebesgue non nulle.* Cet ensemble de points est appelé le *bassin* de  $\mu$  et noté  $B(\mu)$ .

On a bien sûr des définitions analogues pour des dynamiques en temps discrets  $\phi : V \rightarrow V$  (qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement bijectives).

Un exemple simple, mais non générique dans notre contexte, est celui d'un flot qui préserve une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et qui est ergodique. En effet, dans ce cas, le théorème ergodique signifie précisément que les moyennes temporelles convergent presque sûrement vers la moyenne spatiale. Mais j'ai déjà signalé que l'essentiel de notre discussion concerne les dynamiques dissipatives... Une mesure SRB est une mesure invariante qui « se souvient le mieux possible de la mesure de Lebesgue ».

Avant de donner des exemples, commençons par donner un contre-exemple, dû à Bowen. Considérons le champ de vecteurs possédant deux connexions de selles, comme sur la figure 23. Si on considère une condition initiale  $x$  à l'intérieur de la région bordée par les séparatrices, son orbite future va s'accumuler sur les deux points singuliers. Comme la dynamique est lente près des points singuliers, il faut

<sup>16</sup>Une mesure invariante est ergodique si toute partie invariante est de mesure nulle ou de mesure totale. Les mesures ergodiques sont les points extrémaux du convexe compact des probabilités invariantes : il en existe donc, mais ce « donc » est bien abstrait.

imaginer que les trajectoires sont constituées d'intervalles presque à l'arrêt, près de l'un des deux points singuliers, séparés par des phases de transitions rapides. Les phases lentes durent des périodes de plus en plus longues. Il en résulte que les moyennes temporelles « hésitent » entre les deux masses de Dirac aux deux points singuliers. Les statistiques ne convergent pas vers une mesure invariante ; il n'y a pas de mesure SRB.

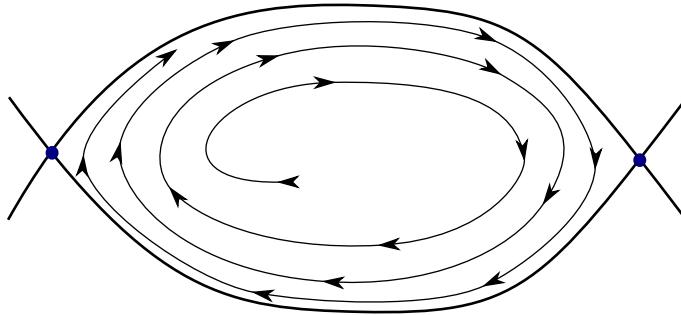


FIG. 23 – Le contre-exemple de Bowen

Ce contre-exemple semble un peu artificiel et il faut bien dire qu'on n'en connaît pas vraiment d'autres qui soient significativement différents. Nous verrons qu'*on conjecture que l'existence d'une mesure SRB est une propriété générique parmi les systèmes dynamiques* (voir aussi [84]).

Avant de donner des exemples significatifs, une mise en garde importante s'impose. Jusqu'à présent, nous avons considéré l'équivalence topologique entre des flots : un homéomorphisme qui envoie les orbites de l'un sur celles de l'autre. Évidemment, il est fréquent qu'un tel homéomorphisme soit *singulier* par rapport à la mesure de Lebesgue si bien qu'il ne transforme pas une mesure SRB de l'un sur une mesure SRB de l'autre...

L'exemple le plus facile à comprendre est celui d'une *application dilatante du cercle* qui sert de modèle pour tous les développements ultérieurs. Il s'agit d'une application  $\psi$ , disons infiniment différentiable, du cercle dans lui-même, dont la dérivée est partout strictement supérieure à 1. Bien sûr, une telle application ne peut pas être bijective. On peut montrer que  $f$  est *topologiquement conjuguée* à  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto d.x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  pour un certain entier  $d$  ( $d \neq \pm 1$ ) mais comme nous venons de le voir, ceci n'entraîne rien relativement à la mesure de Lebesgue.

Le *lemme de distorsion* est une idée simple mais fondamentale. Considérons une branche  $F_k$  de l'inverse de  $\psi^k$ , définie sur un intervalle  $I$  du cercle. Cette branche s'écrit sous la forme  $f_{k-1} \circ f_{k-2} \circ \dots \circ f_0$  où chaque  $f_i$  est l'une des branches de l'inverse de  $\psi$ . Pour évaluer la différence  $(\log F'_k)(x_0) - (\log F'_k)(y_0)$ , on pose  $x_i = f_i \circ \dots \circ f_0(x_0)$  et  $y_i = f_i \circ \dots \circ f_0(y_0)$ . On observe que  $|x_i - y_i| \leq \delta^i |x_0 - y_0|$  pour un certain  $\delta < 1$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} |(\log F'_k)(x) - (\log F'_k)(y)| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |(\log f'_i)(x_i) - (\log f'_i)(y_i)| \\ &\leq C \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i |x_0 - y_0| \leq \frac{C}{1-\delta} |x_0 - y_0| \end{aligned}$$

où  $C$  désigne une borne supérieure de la dérivée de  $(\log f_i)'$ . Ceci montre que les quotients  $F'_k(x)/F'_k(y)$  sont bornés indépendamment de  $k$ , et de la branche choisie. C'est le contenu du lemme.

Soit maintenant  $\text{Leb}$  la mesure de Lebesgue et  $\text{Leb}_k$  son image par  $\psi^k$ . La densité de  $\text{Leb}_k$  par rapport à  $\text{Leb}$  est la somme des dérivées de toutes les branches de l'inverse de  $\psi^k$ . Cette densité est donc comprise entre deux constantes positives, indépendamment du nombre  $k$  d'itérés.

Il n'est alors pas difficile de s'assurer que toute limite faible des moyennes de Birkhoff  $(\sum_1^k \text{Leb}_i)/k$  est une mesure invariante par  $\psi$  qui est absolument continue par rapport à  $\text{Leb}$ , et dont la densité est d'ailleurs comprise entre les mêmes bornes. Nous avons donc montré l'*existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue*.

On observe alors que  $\psi$  est *ergodique* par rapport à la mesure de Lebesgue : si  $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est invariant par  $\psi$  (dans le sens où  $\psi^{-1}(A) = A$ ), la mesure de Lebesgue de  $A$  ou de son complémentaire est nulle. C'est aussi une conséquence du lemme de distorsion. Si la mesure de Lebesgue de  $A$  est non nulle, on peut trouver des intervalles  $I_k$  tels que  $\text{Leb}(I_k \cap A)/\text{Leb}(I_k)$  tend vers 1, au prix bien sûr de devoir choisir des intervalles  $I_k$  dont la longueur tend vers 0. Si on pose  $J_k = \psi^{n_k}(I_k)$  avec un  $n_k$  convenable, le lemme montre que  $\text{Leb}(J_k \cap A)/\text{Leb}(J_k)$  tend également vers 1 mais cette fois on peut supposer que  $J_k$  a une longueur minorée. Ainsi, on peut trouver des intervalles de longueurs minorées qui contiennent une proportion arbitrairement élevée de points de  $A$ . À la limite, on obtient un intervalle non vide  $J_\infty$  tel que  $\text{Leb}(J_\infty \cap A) = \text{Leb}(J_\infty)$ , c'est-à-dire que  $A$  est d'intérieur non vide à un ensemble négligeable près. En dilatant encore, et en utilisant le fait que  $\psi$  a une orbite dense, on montre que  $A$  est de mesure totale.

Nous avons donc montré qu'*il existe une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue* et le théorème ergodique de Birkhoff montre alors qu'il s'agit d'une mesure SRB.

Cette démonstration n'est pas difficile et elle a été généralisée de nombreuses fois, sous des hypothèses requérant de moins en moins d'hyperbolicité.

La généralisation la plus facile est celle d'une *application dilatante*  $\psi : V \rightarrow V$ , où cette fois  $V$  n'est plus supposée de dimension 1. On montre de manière analogue qu'il existe une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et ergodique. Il suffit de remplacer l'estimation des dérivées par celles des déterminants jacobiens.

Le premier cas vraiment différent est celui d'un attracteur hyperbolique. La situation est celle-ci : un difféomorphisme  $\phi$  préserve un ensemble compact  $\Lambda$  et le fibré tangent  $T_\Lambda V$  au-dessus de  $\Lambda$  se décompose en une somme  $E^s \oplus E^u$  d'un fibré formé des vecteurs uniformément contractés et d'un fibré uniformément dilaté. On suppose que  $\Lambda$  est un attracteur, ce qui signifie ici que pour chaque  $x \in \Lambda$ , la variété instable  $W^u(x)$  – formée des points dont l'orbite passée est asymptote à celle de  $x$  – est complètement contenue dans  $\Lambda$ . Tout point  $y$  d'un voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda$  est alors sur la variété stable d'un certain point  $x$  de  $\Lambda$  : l'orbite future de  $y$  est asymptote à celle de  $x$  et s'accumule donc dans  $\Lambda$ .

L'ensemble  $\Lambda$  est feuilleté par les variétés instables qui sont uniformément dilatées par l'action de  $\phi$ . L'idée est alors de copier le lemme de distorsion, mais seulement dans les directions dilatées. On part d'une mesure de probabilité dont le support est une petite boule contenue dans une variété instable et qui est absolument contenue par rapport à la mesure de Lebesgue de cette variété instable. Il

s'agit alors d'itérer cette mesure par le difféomorphisme et on espère montrer ensuite une convergence faible en moyennant cette suite de mesures. On n'estime donc plus les déterminants jacobiens mais bien les jacobiens instables, calculés au long de  $E^u$ . Le résultat est qu'on obtient une mesure invariante qui n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue mais qui est absolument continue *en restriction aux variétés instables*. Il faut préciser cette dernière assertion. Localement, au voisinage d'un point  $x$  de  $\Lambda$ , la situation est celle d'un produit  $B^u \times B^s$  d'une boule ouverte dans la variété instable  $W^u(x)$  et d'une boule dans la variété stable. Deux points ayant même première coordonnée sont dans la même variété stable et deux points ayant même seconde coordonnée sont dans la même variété instable. Une mesure  $\mu$  peut alors être « désintégrée » dans ces coordonnées locales : si  $A \subset B^u \times B^s$ ,

$$\mu(A) = \int_T \mu_t(A \cap (B^u \times \{t\})) d\nu(t)$$

où  $\nu$  est une mesure sur  $B^s$  et  $\mu_t$  est une mesure sur  $B^u$  définie pour  $\nu$ -presque tout  $t \in B^s$ . Les mesures construites sont telles que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue des feuilles instables, pour  $\nu$ -presque tout point  $t$ . Techniquement, on dit que  $\mu$  est un *état de Gibbs* (instable).

Il faut ensuite montrer que ces états de Gibbs sont des mesures SRB. Si on considère le bassin  $B(\mu)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels la moyenne temporelle est égale à la  $\mu$ -moyenne spatiale pour toute fonction test continue, il est clair que ce bassin est une réunion de variétés stables : si deux points ont des orbites futures asymptotes, leurs moyennes temporelles coïncident. Par ailleurs, par la propriété définissant les états de Gibbs, un ensemble de  $\mu$ -mesure totale rencontre presque toutes les variétés instables sur des parties de mesure de Lebesgue totale. On pourrait penser que cela entraîne que la mesure de Lebesgue du bassin est positive dans  $V$ . Mais il faut établir qu'une partie de  $B^u \times B^s$  qui est réunion de boules verticales et qui rencontre une horizontale sur une partie de mesure de Lebesgue totale dans  $B^u$  est de mesure de Lebesgue totale dans  $B^u \times B^s$ . Cela serait le cas si le paramétrage d'un voisinage de  $x$  par  $B^u \times B^u$  était différentiable mais il ne l'est pas en général. Par contre, l'un des résultats techniques fondamentaux affirme que les « holonomies » de ces feuillettages stable et instable sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue : cela signifie que dans les coordonnées  $B^u \times B^s$ , la projection sur la première coordonnée permet d'identifier entre elles des boules de variétés instables différentes, et il se trouve que toutes ces identifications préservent les ensembles de mesure de Lebesgue nulle. On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour conclure qu'un état de Gibbs est bien une mesure SRB : son bassin  $B(\mu)$  est de mesure de Lebesgue totale dans le voisinage ouvert  $U$  de  $\Lambda$ . Ces résultats constituent l'essentiel de [71, 66, 17].

Pour aller plus loin, il faut relaxer les hypothèses d'hyperbolité. Par exemple, on peut supposer que le difféomorphisme  $\phi$  est *partiellement hyperbolique* : on dispose maintenant d'une décomposition invariante  $E^u \oplus E$ . On suppose toujours que les vecteurs de  $E^u$  sont uniformément dilatés mais on ne suppose plus que les vecteurs de  $E$  sont contractés. On demande par contre que si un vecteur de  $E$  est dilaté, il l'est moins que ne le sont les vecteurs de  $E^u$  : on parle de *décomposition dominée*. Sous cette hypothèse, il n'est pas difficile de copier les arguments précédents et de montrer l'existence d'états de Gibbs instables. Par contre, cette hypothèse ne suffit plus pour

montrer que les états de Gibbs sont des mesures SRB ; il manque la condition qui permet d'assurer l'existence de suffisamment de variétés stables pour que le futur de presque tout point de l'ouvert  $U$  soit asymptote à un point de l'attracteur. Pour pouvoir montrer qu'un état de Gibbs  $\mu$  est une mesure SRB, il suffit par exemple de demander que pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $\Lambda$ , les vecteurs de  $E_x$  sont contractés exponentiellement.

La quête de conditions les plus faibles possibles permettant de montrer qu'il existe des mesures SRB est l'objet du chapitre 11 du livre [16]. Cette question est fondamentale puisque, nous le verrons plus loin, on espère que « presque tous » les difféomorphismes possèdent des mesures SRB.

## 7.2 La théorie ergodique de l'attracteur de Lorenz

Les modèles géométriques de l'attracteur de Lorenz ne sont pas hyperboliques et n'entrent donc pas dans le cadre des travaux de Sinai, Ruelle et Bowen que nous venons de survoler. Par contre, nous avons vu que le flot est *singulier hyperbolique*. En chaque point  $x$  de l'attracteur  $\Lambda$ , on peut décomposer l'espace tangent en une somme directe d'une droite  $E_x^s$  et d'un plan  $F_x$  de telle sorte que les vecteurs de  $E_x^s$  soient uniformément contractés alors qu'un vecteur de  $F_x$  est « moins contracté » que tous les vecteurs de  $E_x^s$ . Bien sûr, le plan  $F_x$  contient le champ de vecteurs. Notez qu'un champ de vecteurs est invariant par le flot qu'il engendre si bien qu'en tout point où il est non singulier on obtient une direction qui n'est pas dilatée. On s'attend à trouver une dilatation dans  $F_x$ , dans la direction transverse au champ, mais cette dilatation ne peut pas être uniforme à cause du défaut d'hyperbolité. Pour chaque point  $x$  de  $\Lambda$ , on dispose d'une variété stable  $W^s(x)$  qui est une courbe « transverse » à l'attracteur.

Nous avons vu également la structure de l'application de premier retour sur le carré  $C$  qui a toutes les caractéristiques d'une application hyperbolique. Ceci permet par exemple de montrer l'existence d'une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour l'application  $f$  de l'intervalle. Le temps de retour d'une orbite sur le carré tend vers l'infini (logarithmiquement) lorsqu'on tend vers la discontinuité de  $f$ . Ceci pose souvent des difficultés techniques (mais, de manière étrange, cela simplifie aussi parfois le travail). La plupart de ces difficultés techniques ont été surmontées et on dispose maintenant d'une bonne compréhension du comportement ergodique des flots de Lorenz.

L'un des premiers résultats obtenus, dans les années 1980, est que *l'attracteur de Lorenz supporte une unique mesure SRB* [21, 56].

De plus *l'exposant de Lyapounov instable pour cette mesure  $\mu$  est strictement positif*. Cela signifie qu'on peut trouver pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  de  $\Lambda$ , une droite  $E_x^u$  contenue dans le plan  $F_x$  tel que si  $v \in E_x^u$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \|d\phi^T(v)\| = \lambda > 0$$

pour un  $\lambda$  indépendant du point  $x$ . En d'autres termes, la dynamique dilate exponentiellement presque tous les vecteurs. Bien entendu, cette dilatation n'est pas uniforme.

On peut donc appliquer la théorie de Pesin des exposants de Lyapounov qui permet de construire des variétés instables. Précisément, pour  $\mu$ -presque tout point  $x \in \Lambda$ , l'ensemble des points  $y$  dont l'orbite passée est asymptote à celle de  $x$  est une courbe lisse  $W_x^u$  contenue dans  $\Lambda$ . En quelque sorte,  $\mu$  est hyperbolique presque partout avec une décomposition de l'espace tangent en trois droites :  $E_x^s$  (qui dépend continûment de  $x$ ),  $E_x^u$  (définie presque partout) et la droite portant le champ de vecteurs (définie partout sauf en un point).

Le caractère *mélangeant* de cette mesure SRB a été établi récemment [46] : si  $A, B$  sont deux parties mesurables de  $U$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(\phi^t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Le résultat le plus complet est celui obtenu très récemment par Holland et Melbourne [37]. On considère une fonction lisse  $u$  définie sur l'ouvert  $U$  et on suppose pour simplifier l'énoncé que sa moyenne pour  $\mu$  est nulle. Alors, il existe un mouvement brownien  $W_T$  de variance  $\sigma^2 \geq 0$  et un  $\varepsilon > 0$  tel qu'on ait  $\mu$ -presque sûrement

$$\int_0^T u \circ \phi^t dt = W_T + O(T^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Autrement dit, les sommes de Birkhoff oscillent autour de leur moyenne comme un mouvement brownien. Cela entraîne un *théorème central limite* et une *loi des logarithmes itérés*.

Signalons également la prépublication [24] qui analyse en détail la nature statistique des temps de récurrence dans une petite boule.

## 8 La place du papillon dans le panorama général

### 8.1 Hyperbolicité singulière

L'attracteur de Lorenz est avant tout un *exemple* qui possède un certain nombre de propriétés :

- *il est compliqué et chaotique mais il n'est pas hyperbolique* ;
- *on peut cependant décrire raisonnablement sa dynamique, à la fois topologiquement et ergodiquement* ;
- *il possède « un peu » d'hyperbolicité* ;
- *il est robuste : toute perturbation d'un modèle de Lorenz est un autre modèle de Lorenz*.

La question centrale est de déterminer s'il constitue un exemple « significatif ». L'enjeu est de trouver des propriétés qualitatives suffisamment générales sur une dynamique qui permettent de montrer qu'elle ressemble à un attracteur de Lorenz.

Avant d'énoncer des résultats récents allant dans cette direction, il faut expliquer un théorème précurseur de Mañé datant de 1982 [47]. Soit  $\phi$  un difféomorphisme d'une variété compacte  $V$  et  $\Lambda \subset V$  un ensemble compact invariant. On dit que  $\Lambda$  est *transitif* s'il contient une orbite dense (dans  $\Lambda$ ). On dit que  $\Lambda$  est *maximal* s'il possède un voisinage ouvert  $U$  tel que l'orbite de tout point hors de  $\Lambda$  finit par sortir de  $U$  dans le futur ou dans le passé. Enfin, on dit que  $\Lambda$  est *transitif de manière*

*robuste*, si ces propriétés persistent par perturbation : il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\phi$  dans l'espace des difféomorphismes de classe  $C^1$  tel que si  $\psi \in \mathcal{V}$ , l'ensemble compact  $\Lambda_\psi = \cap_{k \in \mathbb{Z}} \psi^k(U)$  est un ensemble non vide et transitif. Le théorème de Mañé est le premier à montrer que l'hyperbolique peut résulter de conditions dynamiques de cette nature. Il établit qu'*en dimension 2, les ensembles qui sont transitifs de manière robuste sont précisément les ensembles hyperboliques*. Un tel résultat ne se généralise pas en dimension supérieure et il faut alors chercher à démontrer une hyperbolique partielle. Le chapitre 7 de [16] est tout entier consacré à la description de résultats récents allant dans cette direction.

Dans le cas des champs de vecteurs en dimension 3, le résultat principal a été obtenu par Morales, Pacifico et Pujals en 2004 [49]. Soit  $\phi^t$  un flot sur une variété  $V$  préservant un compact  $\Lambda$ . Rappelons une définition donnée en 5.2 : on dit que  $\Lambda$  est *singulier hyperbolique*, si – comme dans le cas du modèle de Lorenz – l'espace tangent  $T_\Lambda V$  se décompose en  $E^s \oplus F$  de sorte que :

- $E_x^s$  et  $F_x$  dépendent continûment du point  $x \in \Lambda$  et sont invariants par la différentielle du flot  $\phi^t$  ;
- les vecteurs de  $E_x^s$  sont contractés uniformément par le flot ;
- la décomposition  $E_x^s \oplus F_x$  est dominée : si  $u \in F_x$  et  $v \in E_x^s$  sont unitaires, on a  $\|d\phi^t(u)\| \geq C \exp(\lambda t) \|d\phi^t(v)\|$  pour tout  $t > 0$  ;
- le flot dilate le volume bi-dimensionnel de  $F_x$  :  $\det(d\phi^t|F_x) \geq C \exp(\lambda t)$  pour tout  $t > 0$ .

Le théorème principal de [49] affirme que *si un ensemble compact invariant  $\Lambda$  d'un flot en dimension 3 est transitif de manière robuste, alors :*

- $\Lambda$  est singulier hyperbolique ;
- si  $\Lambda$  ne contient pas de points singuliers, il s'agit d'un ensemble hyperbolique ;
- toutes les singularités du champ contenues dans  $\Lambda$  sont de type Lorenz ; les trois valeurs propres  $a < b < c$  de la linéarisation sont telles que  $a < 0 < c$  et  $0 < b < -c$  (indice 1) ou  $a < 0 < c$  et  $-c < b < 0$  (indice 2) ;
- toutes les singularités ont le même indice et  $\Lambda$  est un attracteur ou un répulseur (i.e. un attracteur pour le champ opposé) suivant que l'indice est 2 ou 1 ;

Ainsi, ce théorème donne un statut à l'attracteur de Lorenz, ou plus précisément aux dynamiques du même groupe que lui : *les attracteurs singuliers hyperboliques*. Ils sont les représentants, en dimension 3, d'un phénomène qualitatif : la robustesse de la transitivité. On peut lire une esquisse de preuve ainsi que des compléments dans le chapitre 9 de [16].

Encore faut-il généraliser convenablement les résultats valables pour l'attracteur de Lorenz à tous les attracteurs singuliers hyperboliques. La compréhension topologique de ces objets est encore incomplète même si on sait par exemple que les orbites périodiques sont denses dans l'attracteur [9]. La compréhension ergodique est maintenant bien meilleure et assez proche de ce qu'on connaît pour l'attracteur de Lorenz ; *on dispose par exemple d'une mesure SRB dont le bassin contient presque tous les points d'un voisinage ouvert de l'attracteur* [6].

## 8.2 Le grand panorama de Palis

L'histoire de la dynamique semble marquée par une longue suite d'espoirs déçus... Un monde de Morse-Smale, remplacé par un monde d'attracteurs hyperboliques, à son tour détruit par l'abondance d'exemples comme celui de Lorenz. L'optimisme semble cependant ne pas faire défaut aux dynamiciens qui n'hésitent pas à brosser un panorama du monde tel qu'ils l'imaginent aujourd'hui en espérant (naïvement ?) que leur vision ne sera pas obsolète d'ici peu. Palis a formalisé cette vision dans trois articles, en 1995, 2005 et 2008 [51, 52, 53]. Il s'agit d'un ensemble de conjectures qui décrivent la dynamique de « presque tous » les difféomorphismes ou flots. Ces conjectures sont techniques par nécessité et il n'est pas utile de les décrire ici en détail. Je vais me contenter d'en donner l'esprit général.

La première difficulté – qui n'est pas spécifique à ce domaine – est de donner un sens à « presque toutes » les dynamiques. L'idée initiale des années 1960 était de décrire un *ouvert dense* dans l'espace des systèmes dynamiques, ou à la rigueur, une intersection dénombrable d'ouverts denses pour pouvoir faire usage de la *généricité au sens de Baire*. Cette notion s'est cependant avérée trop stricte. Il est bien connu qu'il n'y a pas de notion de « mesure de Lebesgue » sur un espace de dimension infinie mais un substitut – la *prévalence* – semble s'imposer peu à peu. Soit  $\mathcal{P}$  une partie de l'espace  $\text{Diff}(V)$  des difféomorphismes d'une variété (d'une certaine régularité). On considère alors une famille de difféomorphismes  $\phi_\nu$  de  $V$  dépendant d'un paramètre  $\nu$  qui décrit par exemple une boule dans  $\mathbb{R}^p$ . On peut alors évaluer la mesure de Lebesgue de l'ensemble des  $\nu$  tels que  $\phi_\nu$  est dans  $\mathcal{P}$ . Bien sûr, si la famille  $\phi_\nu$  est dégénérée, par exemple si elle ne dépend pas de  $\nu$ , elle peut éviter  $\mathcal{P}$  entièrement. On convient donc de dire que  $\mathcal{P}$  est *prévalent* si, pour une famille  $\phi_\nu$  générique au sens de Baire dans l'espace des familles, l'ensemble des  $\nu$  tels que  $\phi_\nu$  appartient à  $\mathcal{P}$  est de mesure de Lebesgue totale (dans l'espace des paramètres).

La *conjecture de finitude* de Palis est la suivante :

*Les propriétés suivantes sont prévalentes parmi les difféomorphismes ou les flots d'une variété compacte donnée :*

- il existe un nombre fini d'attracteurs  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  ;
- chaque attracteur supporte une mesure SRB ;
- la réunion des bassins d'attraction des mesures SRB recouvre presque toute la variété, au sens de Lebesgue.

En ce qui concerne l'espérance perdue de la générnicité de la stabilité structurelle, il est remplacé par la *stabilité stochastique*. On considère une famille de difféomorphismes  $\phi_\nu$  dépendant d'un paramètre  $\nu$  dans un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^p$  avec  $\phi_0 = \phi$ . Choissons un point  $x_0$  dans un attracteur  $\Lambda$ , un  $\varepsilon > 0$  petit, et considérons la suite aléatoire de points

$$x_0 \quad ; \quad x_1 = \phi_{\nu_1}(x_0) \quad ; \quad x_2 = \phi_{\nu_2}(x_1) \quad ; \quad x_k = \phi_{\nu_k}(x_{k-1}) \quad ; \quad \dots$$

où les paramètres  $\nu_i$  sont choisis aléatoirement dans la boule de rayon  $\varepsilon$ . On dit que la mesure SRB  $\mu$  sur l'attracteur  $\Lambda$  est stochastiquement stable si pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\mu$  dans la topologie faible sur les mesures, et pour toute famille  $\phi_\nu$ , on peut trouver un  $\varepsilon$  tel que pour presque tous les choix de la suite aléatoire précédente, la moyenne des masses de Dirac

$$\frac{1}{k+1}(\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k})$$

converge vers une limite dans  $\mathcal{U}$ . Par perturbation stochastique, le comportement statistique ne « change pas trop »...

Une seconde partie des conjectures de Palis affirme que *la stabilité stochastique est prévalente*.

Ces conjectures sont accompagnées d'une stratégie générale d'approche. Il s'agit d'expliquer la non-densité de l'hyperbolicité par l'apparition de quelques phénomènes paradigmatisques, dont celui de Lorenz est l'un des exemples.

Les phénomènes non hyperboliques connus (à ce jour !) sont peu nombreux :

- *Les cycles hétérodimensionnels.*

Il s'agit de deux points périodiques hyperboliques  $x, y$  dans le même ensemble transitif dont les variétés instables sont de dimensions différentes et tels que la variété stable de chacun rencontre transversalement la variété instable de l'autre. Il s'agit bien entendu d'une obstruction à l'hyperbolicité. Pour un difféomorphisme, ce type de cycle n'apparaît qu'à partir de la dimension 3.

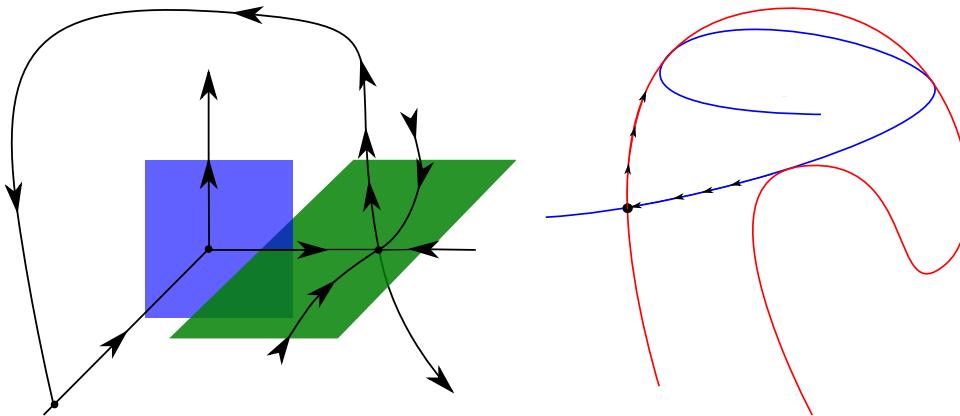


FIG. 24 – Une orbite hétérocline et une tangence homocline

- *Les tangences homoclines.*

Il s'agit d'une intersection non transverse entre les variétés stable et instable d'un même point périodique. Là encore, il s'agit bien sûr d'une obstruction à l'hyperbolicité.

- *Les cycles singuliers.*

Dans le cas des flots, la présence éventuelle de singularités offre de nouvelles possibilités. Un *cycle* est la donnée d'une suite finie  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  de singularités hyperboliques ou d'orbites périodiques hyperboliques qui sont cycliquement connectées par des orbites régulières : il existe des points  $x_1, \dots, x_l$  tels que l'ensemble  $\alpha$ -limite de  $x_i$  est  $\gamma_i$  et l'ensemble  $\omega$ -limite de  $x_i$  est  $\gamma_{i+1}$  (avec  $\gamma_{l+1} = \gamma_1$ ). Le cycle est singulier si au moins l'un des  $\gamma_i$  est une singularité. Ces cycles singuliers apparaissent de manière dense dans la famille des modèles de Lorenz : les deux courbes instables qui émanent du point singulier spiralent dans l'attracteur et elles peuvent être situées dans la variété stable de ce point singulier. Il suffit pour cela que le point 0 soit périodique pour l'application  $f$  de l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$  dont nous avons vu l'importance.

Palis propose que *l'ensemble des champs de vecteurs sur une variété compacte*

*qui sont hyperboliques ou présentent l'un de ces phénomènes est dense (dans la topologie  $C^r$ ).*

En dimension 3, il conjecture que *la réunion des champs de vecteurs hyperboliques, de ceux qui présentent une tangence homocline et de ceux qui possèdent des attracteurs (ou des répulseurs) de type Lorenz est dense (dans la topologie  $C^r$ ).*

Arroyo et Rodriguez-Hertz ont fait un pas dans cette direction en montrant qu'un champ en dimension 3 peut être approché dans la topologie  $C^1$  par un champ hyperbolique ou qui présente une tangence homocline ou un cycle singulier [10].

Quoi qu'il en soit, l'attracteur de Lorenz exhibe des phénomènes qui pourraient bien être significatifs du « chaos typique ». Typique tout au moins dans le domaine du chaos mathématique car la question de l'intérêt du modèle de Lorenz pour expliquer les phénomènes météorologiques reste largement ouverte [64].

### 8.3 Une belle et très longue phrase

Pour terminer, voici une citation de Buffon datant de 1783 montrant que sa vision d'un monde ergodique et mélangeant était bien proche de celle de Lorenz [20].

[...] tout s'opère, parce qu'à force de temps tout se rencontre, et que dans la libre étendue des espaces et dans la succession continue du mouvement, toute matière est remuée, toute forme donnée, toute figure imprimée ; ainsi tout se rapproche ou s'éloigne, tout s'unit ou se fuit, tout se combine ou s'oppose, tout se produit ou se détruit par des forces relatives ou contraires, qui seules sont constantes, et se balançant sans se nuire, animent l'Univers et en font un théâtre de scènes toujours nouvelles, et d'objets sans cesse renaissants.

## Références

- [1] R. Abraham, et S. Smale, *Nongenericity of  $\Omega$ -stability*, 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 5–8 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [2] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, et L. P. Shil'nikov, *The origin and structure of the Lorenz attractor*, (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **234** (1977), 2, p. 336–339.
- [3] D. V. Anosov, *Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **145** (1962), 707–709.
- [4] D. V. Anosov, *Dynamical systems in the 1960s : the hyperbolic revolution*. Mathematical events of the twentieth century, 1–17, Springer, Berlin, 2006.
- [5] A. Andronov. et L. Pontrjagin, *Systèmes grossiers*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **14** (1937).
- [6] V. Araújo, E.R. Pujals, M.J. Pacifico, et M. Viana, *Singular-hyperbolic attractors are chaotic*, *Transactions of the A.M.S.* **361** (2009), 2431–2485.
- [7] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, *Annales de l'institut Fourier*, **16** no. 1 (1966), 319–361.

- [8] D. Aubin, et A. Dahan Dalmedico, *Writing the history of dynamical systems and chaos : longue durée and revolution, disciplines and cultures*, Historia Math. **29** (2002), no. 3, 273–339.
- [9] A. Arroyo et E. Pujals, *Dynamical properties of singular-hyperbolic attractors*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (2007), no. 1, 67–87.
- [10] A. Arroyo, et F. Rodriguez Hertz, *Homoclinic bifurcations and uniform hyperbolicity for three-dimensional flows*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003), no. 5, 805–841.
- [11] J. Barrow-Green, *Poincaré and the three body problem*. History of Mathematics, **11**. American Mathematical Society, Providence, RI ; London Mathematical Society, London, 1997. xvi+272 pp.
- [12] F. Béguin, *Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar*, in L'héritage scientifique de Poincaré, éd. Charpentier, Ghys, Lesne, éditions Belin 2006.
- [13] G.D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Mem. Pont. Acad. Sci. Nov. Lyncae **53** (1935), 85–216.
- [14] J. Birman, et I. Kofman, *A new twist on Lorenz links*, J. Topol. **2** (2009), no. 2, 227–248.
- [15] J. Birman, et R. F. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems, I. Lorenz's equations*, Topology **22** (1983), no. 1, 47–82.
- [16] C. Bonatti, L. Díaz, et M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **102**. Mathematical Physics, III. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [17] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics **470**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [18] R. Bowen, *On Axiom A diffeomorphisms*, Regional Conference Series in Mathematics, No. 35. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978. vii+45 pp.
- [19] R. Bowen, et D. Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 181–202.
- [20] G.L. Buffon, *Du Soufre*, Histoire Naturelle des minéraux, tome 2, 1783.
- [21] L.A. Bunimovich, *Statistical properties of Lorenz attractors*, Nonlinear dynamics and turbulence, Pitman, p. 7192, 1983.
- [22] P. Dehornoy, *Les nœuds de Lorenz*, prépublication ENS Lyon, 2009.
- [23] P. Duhem, *La théorie physique ; son objet, sa structure*, 1906 (réimp. Vrin, 2007).
- [24] S. Galatolo, et M.J. Pacifico, *Lorenz-like flows : exponential decay of correlations for the Poincaré map, logarithm law, quantitative recurrence*, prépublication 2009.
- [25] R. Ghrist, *Branched two-manifolds supporting all links*, Topology **36** (1997), no. 2, 423–448.
- [26] E. Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, p. 247–277, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [27] E. Ghys, *Right-handed vector fields & the Lorenz attractor*, Jpn. J. Math **4** (2009), no. 1, 47–61.

- [28] E. Ghys, et J. Leys, : *Lorenz and modular flows : a visual introduction*, [www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html](http://www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html)., American Math. Soc. Feature Column, November 2006.
- [29] J. Gleick, *Chaos : Making a New Science*, Viking Penguin, 1987.
- [30] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, Enseign. Math. **46** (2002) no. 3-4, 391–402.
- [31] J. Guckenheimer, *A strange, strange attractor*, The Hopf Bifurcation, Marsden and McCracken, eds. Appl. Math. Sci. , Springer-Verlag, (1976).
- [32] J. Guckenheimer, : Reviews : The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors, Amer. Math. Monthly **91** (1984), no. 5, 325–326.
- [33] J. Guckenheimer, et R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. **50** (1979), 59–72.
- [34] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série **4** (1898), 27–74.
- [35] J.T. Halbert, et J.A. Yorke, *Modeling a chaotic machine's dynamics as a linear map on a “square sphere”* , <http://www.math.umd.edu/~halbert/taffy-paper-1.pdf>.
- [36] B. Hasselblatt, *Hyperbolic dynamical systems*, Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, p. 239–319, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [37] M. Holland, et I. Melbourne, *Central limit theorems and invariance principles for Lorenz attractors*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 2, 345–364.
- [38] J.P. Kahane, *Hasard et déterminisme chez Laplace*, Les Cahiers Rationalistes **593** - mars–avril 2008.
- [39] S. Kuznetsov, *Plykin-type attractor in nonautonomous coupled oscillators*, Chaos **19** (2009), 013114.
- [40] O. Lanford, *An introduction to the Lorenz system*, Papers from the Duke Turbulence Conference (Duke Univ., Durham, N.C., 1976), Paper No. 4, i+21 pp. Duke Univ. Math. Ser., Vol. III, Duke Univ., Durham, N.C., 1977.
- [41] P.S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814.
- [42] E.N. Lorenz, *Maximum simplification of the dynamic equations*, Tellus **12** (1960), 243–254.
- [43] E.N. Lorenz, *The statistical prediction of solutions of dynamic equations*, Proc. Internat. Sympos. Numerical Weather Prediction, Tokyo, p. 629–635.
- [44] E.N. Lorenz, *Deterministic non periodic flow*, J. Atmosph. Sci. **20** (1963), 130–141.
- [45] E.N. Lorenz, *Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?*, 139th Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science (29 Dec 1972), in *Essence of Chaos* (1995), Appendix 1, 181.
- [46] S. Luzzatto, I. Melbourne, et F. Paccaut, *The Lorenz attractor is mixing*, Comm. Math. Phys. **260** (2005), no. 2, 393–401.
- [47] R. Mañé, *An ergodic closing lemma*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 3, 503–540.

- [48] J.C. Maxwell, *Matter and Motion*, 1876, rééd. Dover (1952).
- [49] C. A. Morales, M. J. Pacifico, et E. R. Pujals, *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers*, Annals of Math. Second Series (2), **160** (2004), 2, 375–432.
- [50] H.M. Morse, *H.M.A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature*, Amer. J. Math. **43** (1921), no. 1, 33–51.
- [51] J. Palis, *A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*, Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995), Astérisque No. 261 (2000), xiii–xiv, p. 335–347.
- [52] J. Palis, *A global perspective for non-conservative dynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), no. 4, 485–507.
- [53] J. Palis, *Open questions leading to a global perspective in dynamics*, Nonlinearity **21** (2008), no. 4, T37–T43.
- [54] J. Palis J. et F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. x+234 pp.
- [55] M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology **1** (1962), 101–120.
- [56] Ya. B. Pesin, *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors : hyperbolic, ergodic and topological properties*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), no. 1, 123–151.
- [57] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal de mathématiques pures et appliquées **7** (1881), 375–422.
- [58] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica **13** (1890), 1–270.
- [59] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 3, (1892–1899) .
- [60] H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 237–274.
- [61] H. Poincaré, *Le hasard*, Revue du Mois **3** (1907), 257–276.
- [62] H. Poincaré, : *Science et méthode*, Flammarion, (1908).
- [63] A. Robadey, *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques*, Thèse, Paris 7, 2005.
- [64] R. Robert, *L'effet papillon n'existe plus !*, Gaz. Math. No. **90** (2001), 11–25.
- [65] D. Ruelle, *The Lorenz attractor and the problem of turbulence*, Turbulence and Navier-Stokes equations (Proc. Conf., Univ. Paris-Sud, Orsay, 1975), pp. 146–158, Lecture Notes in Math., 565, Springer, Berlin, (1976).
- [66] D. Ruelle, *A measure associated with axiom-A attractors*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 3, 619–654.
- [67] D. Ruelle, D. et F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20** (1971), 167–192.
- [68] L. P. Shil'nikov, *Homoclinic trajectories : from Poincaré to the present*, Mathematical events of the twentieth century, 347–370, Springer, Berlin, 2006.

- [69] M. Shub, *What is... a horseshoe?*, Notices Amer. Math. Soc. **52** (2005), no. 5, 516–517.
- [70] M. Shub, et S. Smale, *Beyond hyperbolicity*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 587–591.
- [71] Ja. G. Sinai, *Gibbs measures in ergodic theory*, (en russe), Uspehi Mat. Nauk **27** (1972), no. 4(166), 21–64.
- [72] S. Smale, *On dynamical systems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **5** (1960), 195–198.
- [73] S. Smale, *A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points*, 1963 Qualitative methods in the theory of non-linear vibrations (Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations, Vol. II, 1961) pp. 365–366 Izdat. Akad. Nauk Ukrains. SSR, Kiev.
- [74] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, 1965 Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse) pp. 63–80, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- [75] S. Smale, *Structurally stable systems are not dense*, Amer. J. Math. **88** (1966), 491–496.
- [76] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.
- [77] S. Smale, *Finding a horseshoe on the beaches of Rio*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 1, 39–44.
- [78] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 2, 7–15.
- [79] C. Sparrow, *The Lorenz equations : bifurcations, chaos, and strange attractors*, Applied Mathematical Sciences, 41. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1982).
- [80] W. Tucker, *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*, Found. Comput. Math. **2** (2002), no. 1, 53–117.
- [81] M. Viana, *What's new on Lorenz strange attractors?*, Math. Intelligencer **22** (2000), no. 3, 6–19.
- [82] R. F. Williams, *The structure of Lorenz attractors*, Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. **50** (1979), 73–99.
- [83] R. F. Williams, *Lorenz knots are prime*, Ergodic Theory Dynam. Systems **4** (1984), no. 1, 147–163.
- [84] L.S. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?*, Dedicated to David Ruelle and Yasha Sinai on the occasion of their 65th birthdays. J. Statist. Phys. **108** (2002), no. 5–6, 733–754.