

Eléments de mécanique analytique

*La mécanique analytique est une reformulation de la mécanique de Newton qui joue un rôle crucial en mécanique quantique, mécanique statistique et théorie des champs. L'objectif de ces notes est de résumer quelques éléments de base de la mécanique analytique concernant, en particulier, la mécanique de Lagrange et celle de Hamilton.*¹

Mécanique de Lagrange

1.1 Contraintes et coordonnées généralisées

On considère un système de N particules ponctuelles dans \mathbb{R}^3 . A chaque particule sont associés une masse m_i et un vecteur position à trois composantes: $\vec{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, ($i = 1, \dots, N$). Il faut donc $3N$ coordonnées pour spécifier totalement la configuration du système.

Contraintes mécaniques: ce sont des relations entre les coordonnées qui traduisent le fait qu'elles n'évoluent pas indépendamment les unes des autres. Les contraintes reliant les $3N$ coordonnées sont dites *holonomes* lorsqu'elles s'expriment sous forme d'un certain nombre, disons K , d'équations algébriques faisant intervenir les coordonnées et, éventuellement, le temps:

$$f_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (a = 1, \dots, K). \quad (1)$$

Exemple: considérons un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à une tige de longueur l oscillant dans le plan xOy . La masse est soumise à deux contraintes ($K = 2$) qui s'expriment, en coordonnées cylindriques, comme: $f_1 = r - l = 0$ et $f_2 = z = 0$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Degrés de liberté: c'est le nombre de coordonnées qui évoluent indépendamment les unes des autres. Pour un système de $3N$ coordonnées soumises à K contraintes holonomes seules $n = 3N - K$ coordonnées sont réellement indépendantes. On dit que:

$$n = 3N - K \quad \text{est le nombre de degrés de liberté du système mécanique.} \quad (2)$$

Coordonnées généralisées: ce sont les variables qui évoluent indépendamment les unes des autres. Leur nombre est égal au nombre de degrés de liberté du système. Le changement de variables des $3N$ coordonnées \vec{r}_i aux coordonnées généralisées consiste à introduire K variables de contrainte f_a ainsi que

$$n = 3N - K \quad \text{variables} \quad q_\alpha \equiv q_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (\alpha = 1 \dots, n). \quad (3)$$

Les variables q_α sont les *coordonnées généralisées* du système. Le changement de variables inverse donne: $\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_\alpha, f_a, t)$. Si les contraintes sont satisfaites, on a: $f_a = 0$ d'après l'équation (1), et l'on obtient:

$$\vec{r}_i \equiv \vec{r}_i(q_\alpha, t). \quad (4)$$

¹**Remarques concernant la bibliographie:** Les références de base en mécanique analytiques sont les livres: [1, 2, 3]. La traduction française de [1] existe mais est difficilement trouvable. La référence [3] est d'un niveau avancé et met en avant les arguments physiques plutôt que le formalisme. Sur le web, il existe de nombreux documents concernant la mécanique analytique. Nous recommandons tout particulièrement la lecture de la référence [4].

Exemple: dans le cas du pendule simple la masse est repérée par trois coordonnées (r, θ, z) en coordonnées cylindriques où θ est l'angle entre le pendule et l'axe y , $\theta = \arctan(x/y)$. Les 3 coordonnées sont soumises à deux contraintes: $r = l$ et $z = 0$. Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté; la coordonnée généralisée est: $q_1 = \theta$.

Espace des configurations: c'est l'espace associé à l'ensemble des positions que le système peut atteindre en tenant compte des contraintes mécaniques. Sa dimension est égale au nombre de degrés de liberté, n , du système. Il est défini par la donnée des n coordonnées généralisées q_α ($\alpha = 1 \dots, n$). La configuration du système à un instant donné est définie par un vecteur dans l'espace des configurations que l'on peut noter

$$q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (5)$$

et dont les n composantes sont les q_α .

1.2 Principe de d'Alembert, forces de contraintes et déplacements virtuels

Principe de d'Alembert: l'ensemble des forces de contraintes appliqué à un système mécanique ne travaille pas (ne consomme ni ne produit d'énergie) lors d'un déplacement virtuel.

Forces de contraintes: ce sont les forces qui sont associées aux contraintes $f_a = 0$. Notons \vec{F}_i^c la force de contrainte agissant sur la particule i et supposons qu'elle dérive d'un potentiel V^c :

$$\vec{F}_i^c = -\frac{\partial V^c}{\partial \vec{r}_i}. \quad (6)$$

Le potentiel V^c a pour particularité qu'il ne s'exprime qu'en fonction des variables f_a . On a alors:

$$\vec{F}_i^c = -\frac{\partial V^c}{\partial \vec{r}_i} = -\sum_{a=1}^K \frac{\partial V^c}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} = \sum_{a=1}^K c_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \quad \left(c_a = -\frac{\partial V^c}{\partial f_a} \right). \quad (7)$$

Déplacement virtuel: c'est une variation de la position qui est compatible avec les contraintes mais qui ne provient pas de forces extérieures appliquées au système. Le déplacement infinitésimal de la particule i pendant le temps dt prenant en compte les contraintes, voir l'équation (4), peut s'écrire

$$d\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \quad (8)$$

où le déplacement virtuel $\delta\vec{r}_i$ est défini par

$$\delta\vec{r}_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha. \quad (9)$$

Expression mathématique du principe de d'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^c \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (10)$$

Preuve:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^c \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{\partial V^c}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial V^c}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = 0, \quad (11)$$

puisque V_c ne dépend pas des q_α .

Exemple: dans le cas du pendule simple la particule est repérée par $\vec{r} = l\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est un vecteur unitaire radial tel que: $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$, et orthogonal à: $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$. Le déplacement virtuel est alors donné par: $\delta\vec{r} = l d\theta\vec{e}_\theta$ et est bien compatible avec les contraintes: $f_1 = r - l = 0$ et $f_2 = z = 0$. La force de contrainte est, quant à elle, donnée par: $\vec{F}^c = c_1\vec{e}_r + c_2\vec{e}_z$; on peut la visualiser comme une force maintenant la particule dans le plan xOy à une distance l de l'origine. On a bien: $\vec{F}^c \cdot \delta\vec{r} = 0$.

1.3 Lagrangien et équations de Lagrange

Fonction de Lagrange ou lagrangien: c'est une fonction des coordonnées généralisées q_α , des vitesses généralisées \dot{q}_α et du temps t qui permet de décrire la dynamique d'un système. Elle est définie par:

$$L(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q, \dot{q}, t) - V(q, t), \quad (12)$$

qui correspond à la différence entre l'énergie cinétique totale du système $T \equiv T(q, \dot{q}, t)$ et l'énergie potentielle du système: $V \equiv V(q, t)$ et où: $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ et $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$. Notons que, au niveau de L , les coordonnées généralisées q sont supposées être indépendantes des vitesses généralisées \dot{q} . De plus, l'énergie potentielle ne dépend pas de \dot{q} ce qui traduit le fait que, au niveau du lagrangien (12), les forces appliquées dérivant de V sont supposées être conservatives.²

Equations de Lagrange (ou équations d'Euler-Lagrange): ce sont les équations du mouvement du système dans le cadre de la mécanique de Lagrange. Pour un système à n degrés de liberté, décrit par un lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$, ces équations forment un ensemble de n équations différentielles du second ordre donné par:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n). \quad (13)$$

Les équations de Lagrange sont une reformulation des équations du mouvement de Newton faisant intervenir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système via le lagrangien et s'exprimant en fonction des coordonnées généralisées.

Equations de Lagrange en présence de forces non conservatives: en présence de forces appliquées non conservatives, $\vec{F}_i^{a(nc)} \equiv \vec{F}_i^{a(nc)}(q, \dot{q}, t)$,³ les équations de Lagrange (13) deviennent:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad Q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{a(nc)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (14)$$

où Q_α est la *force généralisée*.

Eléments de preuve (pour une preuve complète voir, par exemple, la référence [4] disponible en ligne ou le livre [1] pages 16-24): Tenant compte de la force de contrainte \vec{F}_i^c et d'éventuelles forces appliquées \vec{F}_i^a la force totale s'exerçant sur la particule i est donnée par:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c. \quad (15)$$

La 2ème loi de Newton pour la particule i s'écrit alors:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^a - \vec{F}_i^c = 0. \quad (16)$$

En combinant la loi de Newton (16) au principe de d'Alembert (10) la force de contrainte s'élimine et il vient:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^a) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (17)$$

où l'on a tenu compte du fait que les n coordonnées généralisées q_α varient indépendamment les unes des autres. Dans (17), le premier terme peut s'exprimer comme:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \quad (18)$$

où T est l'énergie cinétique totale du système: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ qui peut, en toute généralité, s'exprimer en fonction des coordonnées généralisées q_α , des vitesses généralisées \dot{q}_α et du temps t . Dans le deuxième terme de (17), la force appliquée

²Un cas particulier est celui du champ électromagnétique. La force de Lorentz dépend de la vitesse: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, où \vec{E} est le champ électrique et \vec{B} le champ magnétique. Dans ce cas l'équation (12) est toujours valable à condition d'introduire un "potentiel généralisé" ou "potentiel dépendant des vitesses": $U \equiv U(\vec{r}, \vec{v}, t)$. On a alors: $L = T - U$, où: $U(\vec{r}, \vec{v}, t) = q\phi(\vec{r}, t) - q\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}$, ϕ est le potentiel scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur. Ces derniers sont reliés aux champs \vec{E} et \vec{B} par les équations: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

³Un exemple de force non-conservative est donné par les forces de frottement fluide: $\vec{F}_i^{a(nc)} = -k\vec{v}_i$, où k représente le coefficient de résistance du système dans le fluide en question.

sur la particule i peut s'écrire comme la somme d'une force conservative dérivant d'un potentiel: $\vec{F}_i^{(c)} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$ et d'une force non-conservative: $\vec{F}_i^{(nc)}$. Le deuxième terme peut alors s'écrire:

$$-\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(nc)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(c)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (19)$$

où l'énergie potentielle V peut s'exprimer en fonction des coordonnées généralisées q_α et du temps t mais ne dépend pas des vitesses généralisées \dot{q}_α . En substituant (18) et (19) dans l'équation (17) on voit alors apparaître la *fonction de Lagrange ou lagrangien* du système (12) et les équations du mouvement de Newton peuvent alors s'écrire sous la forme (14) qui sont les *équations de Lagrange* en présence de forces non-conservatives. Lorsque ces dernières sont nulles, $Q_\alpha = 0$, on retrouve bien sûr les équations (13).

Exemple 1: lagrangien et équations de Lagrange d'un pendule simple. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle (d'origine gravitationnelle) sont données par: $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ et $V = -mgl \cos \theta$, respectivement, où θ est la coordonnée généralisée. Le lagrangien du pendule simple s'écrit donc:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (20)$$

L'équation de Lagrange associée est donnée par:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \right). \quad (21)$$

Dans le régime des faibles oscillations, l'équation (21) devient linéaire en θ :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0. \quad (22)$$

L'équation (22) est celle d'un **oscillateur harmonique** à une dimension de pulsation ω . Elle admet une solution simple qui peut se mettre sous la forme: $\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ où A et φ sont déterminées par les conditions initiales. Notons que dans le régime des faibles oscillations l'énergie potentielle peut s'écrire (à une constante additive près): $V = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \theta^2$. Si l'on note par $q = l\theta$ la coordonnée généralisée, le lagrangien correspondant peut s'écrire de manière plus générale:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (23)$$

et est une fonction quadratique non seulement de la vitesse généralisée \dot{q} mais aussi de la coordonnée généralisée q . Le lagrangien (23) est le **lagrangien de l'oscillateur harmonique** à une dimension.

Exemple 2: le lagrangien d'une particule de masse m soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ dans \mathbb{R}^3 s'écrit (*en l'absence de toute contrainte*):

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}). \quad (24)$$

Les équations de Lagrange associées à (24) sont données par:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(\vec{r}), \quad (25)$$

qui correspond bien à la deuxième loi de Newton. Différents systèmes de coordonnées peuvent être utilisés suivant la symétrie du problème considéré:

- *lagrangien en coordonnées cartésiennes:* en l'absence de toute contrainte, les coordonnées généralisées sont les coordonnées de la particule: x , y et z . L'équation (24) se réécrit simplement:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z), \quad (26)$$

et les trois équations de Lagrange correspondantes sont données par:

$$m\ddot{u} = -\frac{\partial V}{\partial u} \quad (u = x, y, z). \quad (27)$$

Notons que dans le cas où la particule est dans un piège harmonique on a: $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$. Le lagrangien correspondant est celui de l'oscillateur harmonique à trois dimensions. Ce dernier peut s'écrire comme la somme de trois lagrangiens d'oscillateurs harmoniques à une dimension:

$$L = \sum_{u=x,y,z} L_u, \quad L_u = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 u^2. \quad (28)$$

- *lagrangien en coordonnées cylindriques*: en l'absence de toute contrainte, les coordonnées généralisées sont r , θ et z . L'équation (24) se réécrit:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) - V(r, \theta, z). \quad (29)$$

et les trois équations de Lagrange correspondantes sont données par:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (30)$$

Ces coordonnées sont particulièrement utiles lorsque le potentiel a une symétrie cylindrique: $V \equiv V(r)$ puisque dans ce cas les équations de Lagrange sont plus simples:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0, \quad m\ddot{z} = 0 \quad (V \equiv V(r)). \quad (31)$$

- *lagrangien en coordonnées sphériques*: en l'absence de toute contrainte, les coordonnées généralisées sont r , θ et φ . L'équation (24) se réécrit:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right) - V(r, \theta, \varphi), \quad (32)$$

et les trois équations de Lagrange correspondantes sont données par:

$$m\ddot{r} = mr \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right) - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2 \cos\theta \sin\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{dt} (mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (33)$$

Ces coordonnées sont particulièrement utiles lorsque le potentiel a une symétrie sphérique: $V \equiv V(r)$. C'est le cas de l'oscillateur harmonique à trois dimensions: $V(\vec{r}) \equiv V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

1.4 Principe de moindre action

Les lois de la physique peuvent se déduire d'un principe fondamental: le principe de moindre action ou principe de l'action stationnaire. Il joue un rôle central en mécanique analytique puisque, dans l'étude des systèmes mécaniques, ce principe est un point de départ équivalent à la deuxième loi de Newton. En particulier, les équations de Lagrange peuvent être considérées comme une conséquence de ce principe.

Principe de moindre action: un système à n degrés de liberté est décrit par un lagrangien, $L(q, \dot{q}, t)$, où $q \equiv (q_1, \dots, q_n)$ est un vecteur à n composantes spécifiant la configuration du système à un instant donné. Supposons que le mouvement du système prenne place entre un instant initial t_i et un instant final t_f et qu'à ces instants le système soit dans des configurations bien déterminées: $q_i \equiv q(t_i)$ et $q_f \equiv q(t_f)$, respectivement. On peut alors définir une *action* associée à L :

$$S[q(t)] \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t), \quad (34)$$

et le mouvement effectivement suivi par le système, compte tenu des conditions aux limites, est celui qui minimise l'action S .

Remarques:

- des crochets ont été utilisés pour noter l'argument de l'action: $S \equiv S[q(t)]$ ou, plus simplement: $S[q]$. L'utilisation des crochets permet de différencier S qui est une *fonctionnelle*, i.e., une fonction qui prend d'autres fonctions (ici l'ensemble des $q_\alpha(t)$) en argument, d'une fonction ordinaire, disons une fonction $f(x)$ de la variable x . La raison pour laquelle la fonctionnelle S ne dépend que des q_α est que la donnée des q_α sur l'intervalle temporel $[t_1, t_2]$ fixe sans ambiguïté la valeur des \dot{q}_α dans ce même intervalle.

- la dimension de l'action S est:

$$[S] = \text{énergie} \times \text{temps}.$$

Notons que la constante de Planck $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ a la dimension d'une action. Le moment cinétique, $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, où \times désigne le produit vectoriel, a aussi les dimensions d'une action.

- on peut ajouter au Lagrangien du système un terme correspondant à une dérivée totale en temps:

$$L \longrightarrow L + \frac{d}{dt}F(q, \dot{q}, t), \quad (35)$$

sans que les équations du mouvement ne soient modifiées.

Preuve du principe de moindre action: imposons une variation infinitésimale $\delta q(t)$ à $q(t)$. L'action correspondante est donnée par:

$$S[q + \delta q] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t). \quad (36)$$

On dit que la configuration $q(t)$ minimise l'action S si:

$$S[q + \delta q] = S[q] + \mathcal{O}(\delta q^2), \quad (37)$$

c'est-à-dire si les termes linéaires en δq s'annulent. En suivant [4], on peut comprendre (37) au moyen d'un équivalent pour une fonction ordinaire, $f(x)$, que l'on développe au voisinage d'un extremum, x_0 : $f(x) = f(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$; le terme linéaire en $x - x_0$ n'apparaît pas puisque: $f'(x_0) = 0$. Notons que, pour une fonction ordinaire, le signe de la dérivée seconde permet de déterminer la nature (maximum ou minimum) de l'extremum, x_0 . En toute rigueur, la configuration q qui satisfait au critère (37) est donc celle qui rend l'action stationnaire. Revenant à l'équation (36), le développement au premier ordre en δq se fait comme suit:

$$\begin{aligned} S[q + \delta q] &= S[q] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} \right) + \mathcal{O}(\delta q^2) \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} S[q] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \cdot \delta q + \mathcal{O}(\delta q^2), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ pour intégrer le dernier terme par parties (IPP) ainsi que des notations du type:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha. \quad (38)$$

Compte tenu des conditions aux limites: $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$, le terme tout intégré s'annule et on obtient:

$$S[q + \delta q] = S[q] + \int_{t_i}^{t_f} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{=0 \quad (\forall t)} \cdot \delta q(t) + \mathcal{O}(\delta q^2). \quad (39)$$

Le critère (37) impose alors à l'intégrale de s'annuler quelle que soit la variation $\delta q(t)$. En prenant un $\delta q(t)$ nul partout sauf dans un voisinage infinitésimal d'un temps quelconque $t \in [t_i, t_f]$, on peut annuler le terme en facteur de $\delta q(t)$ dans l'intégrand pour tout t . Par ailleurs, puisque les q_α varient indépendamment les unes des autres, l'intégrand doit aussi s'annuler pour chaque valeur de α . On trouve donc bien que la configuration qui rend l'action stationnaire est celle qui est solution des équations de Lagrange (13). Notons enfin que si l'on ajoute au lagrangien une dérivée totale en temps (35) les arguments ci-dessus montrent que cette dernière ne modifie pas les équations de Lagrange.

1.5 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Les contraintes holonomes sont les plus simples. Il existe d'autres types de contraintes qui sont dites *non-holonomes*. C'est le cas lorsqu'elles font intervenir les vitesses (on dit alors qu'elles sont *semi-holonomes*):

$$f_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 \quad (a = 1, \dots, M), \quad (40)$$

ou qu'elles s'expriment sous forme d'une inégalité

$$f_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \leq 0 \quad (a = 1, \dots, S). \quad (41)$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de prendre en compte les contraintes semi-holonomes (40) en ajoutant au lagrangien initial, $L(q, \dot{q}, t)$, une combinaison linéaire de ces contraintes. En présence de M contraintes semi-holonomes, le nouveau lagrangien s'écrit alors

$$L(q, \dot{q}, \lambda, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{a=1}^M \lambda_a(t) f_a(q, \dot{q}, t), \quad (42)$$

où les λ_a sont les **multiplicateurs de Lagrange** qui sont à déterminer au même titre que $q(t)$. L'avantage de cette méthode est que, en présence de contraintes semi-holonomes, on peut toujours considérer les coordonnées généralisées q_α ($\alpha = 1, \dots, n$) comme étant indépendantes les unes des autres (ainsi que des λ_a).

L'application du principe de moindre action consiste alors à rendre l'action:

$$S[q(t), \lambda(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, \lambda, t), \quad (43)$$

associée au lagrangien (42) stationnaire vis à vis de $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ainsi que des paramètres variationnels λ_a . Le résultat est donné par:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{a=1}^M \left\{ \lambda_a \left(\frac{\partial f_a}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}} \right) - \dot{\lambda}_a \frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}} \right\}, \quad (44a)$$

$$f_a(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (a = 1, \dots, M), \quad (44b)$$

où l'équation (44a) provient de la minimisation de l'action par rapport à q tandis que les M équations de contraintes (44b) proviennent de la minimisation de l'action par rapport aux λ_a ($a = 1, \dots, M$). Pour davantage de détails et des exemples, on pourra consulter [4] ou [1] pages 45-51.

2 Mécanique de Hamilton

2.1 Moment conjugué, hamiltonien et équations de Hamilton

Moment conjugué (ou impulsion généralisée): pour un système à n degrés de liberté décrit par un lagrangien, $L(q, \dot{q}, t)$, le moment conjugué est défini par:

$$p_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \quad (45)$$

Variable cyclique et constante du mouvement: une coordonnée généralisée, disons q_β , est dite cyclique si le lagrangien du système n'en dépend pas. En l'absence de forces non-conservatives, les équations de Lagrange (13) alliées à la définition du moment conjugué (45) montrent alors que le moment conjugué à cette variable est une *constante du mouvement*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0 \quad (q_\beta \text{ est une variable cyclique}) \implies \dot{p}_\beta = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = 0 \quad (p_\beta \text{ est une constante du mouvement}). \quad (46)$$

Transformation de Legendre: la transformée de Legendre d'une fonction $f(x)$ est une autre fonction, $f^*(p)$, définie par:

$$f^*(p) \stackrel{\text{déf}}{=} px(p) - f(x(p)) \quad \text{où} \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (47)$$

Dans la définition de $f^*(p)$, la variable x est une fonction implicite de p que l'on note, $x(p)$. Elle est obtenue au moyen de la relation de droite dans (47) en exprimant x en fonction de p . En substituant cette expression dans la relation de gauche, f^* est alors bien une fonction de p seulement. On peut d'ailleurs se convaincre que $f^*(p)$ ne dépend pas de x puisque: $\partial_x f^*(p) = p - \partial_x f(x) = 0$.

Fonction de Hamilton (ou hamiltonien): c'est la transformée de Legendre du lagrangien, $L(q, \dot{q}, t)$, par rapport à la vitesse généralisée

$$H(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot \dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p), t), \quad (48)$$

où les variables q et t ne sont pas affectées par la transformation et l'on utilise des notations du type: $p \cdot \dot{q} = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}$. Les fonctions implicites $\dot{q}(q, p)$ sont obtenues au moyen du système d'équations (45) en exprimant les \dot{q}_{α} en fonction des q_{α} et p_{α}

L'hamiltonien est égal à l'énergie totale du système. Pour le voir, supposons que: $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$.⁴ Le moment conjugué est alors donné par: $p = m \dot{q}$ d'où l'on tire: $\dot{q} = p/m$. La transformée de Legendre du lagrangien donne alors: $H = p \dot{q} - L = p^2/2m + V(q)$, qui correspond bien à l'énergie totale (cinétique + potentielle) du système: $H = T + V$. Notons que l'on a supposé ici que la fonction de Hamilton ne dépend pas explicitement du temps. Ceci implique que l'énergie du système est conservée et que H est une constante du mouvement.

Equations de Hamilton: ce sont les équations du mouvement du système dans le cadre de la mécanique de Hamilton. Pour un système à n degrés de liberté, décrit par un hamiltonien $H(q, p, t)$, ces équations forment un ensemble de $2n$ équations différentielles du premier ordre donné par:

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, n). \quad (49)$$

La mécanique de Hamilton est donc une reformulation de la mécanique de Lagrange dans le sens où les $2n$ équations différentielles du 1er ordre que sont les équations de Hamilton (49) sont équivalentes aux n équations de Lagrange du 2ème ordre (13). Dans les deux cas, la résolution de ces équations fait intervenir $2n$ conditions initiales.

Preuve: en utilisant l'équation (48), il vient:

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p} = \dot{q} + p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \stackrel{(45)}{=} \dot{q} + p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}, \quad (50)$$

qui correspond à la première équation de Hamilton dans (49) et où la notation $\stackrel{(45)}{=}$ signifie que l'on a utilisé l'équation (45). De même:

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} = p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \stackrel{(45)}{=} p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \stackrel{(13)}{=} -\dot{p}, \quad (51)$$

qui correspond à la deuxième équation de Hamilton dans (49).

Espace des phases: c'est l'espace qui définit l'état dynamique du système, *i.e.*, l'ensemble des positions accessibles et des impulsions que peut prendre le système en tenant compte des contraintes mécaniques. Sa dimension est égale au double du nombre de degrés de liberté, n , du système. Un point de l'espace des phases est défini par:

$$\eta = (q, p) \quad \text{où} \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{et} \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (52)$$

Les équations de Hamilton étant linéaires en temps, la donnée d'un point de l'espace des phases, disons $\eta(t_0)$, suffit à déterminer l'état du système, $\eta(t)$, à tout instant t , après résolution des équations.

Exemple: le lagrangien d'une particule de masse m soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ dans \mathbb{R}^3 s'écrit (en l'absence de toute contrainte): $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$, voir l'équation (24). Le moment conjugué est donné par:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}}. \quad (53)$$

⁴Cette forme de l'énergie cinétique est imposée par le principe de relativité de Galilée, voir [3] chapitre 1.

On en déduit donc que: $\dot{\vec{r}} = \vec{p}/m$ et la transformée de Legendre du lagrangien donne le hamiltonien associé à la particule:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}). \quad (54)$$

Les équations de Hamilton associées sont données par:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(\vec{r}). \quad (55)$$

Notons que l'hamiltonien (54) et les équations de Hamilton (55) peuvent s'écrire dans différents systèmes de coordonnées, le choix étant généralement dicté par des considérations de symétrie. Les résultats sont semblables à ceux obtenus en mécanique de Lagrange, voir les équations (26-33), et nous ne nous y attarderons donc pas. Considérons plutôt le cas particulier où $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$, qui conduit à l'**hamiltonien de l'oscillateur harmonique** à trois dimensions de pulsation ω :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2 = \sum_{u=x,y,z} H_u, \quad H_u = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2. \quad (56)$$

Cet hamiltonien est égal à la somme des hamiltoniens de trois oscillateurs harmoniques à une dimension, H_u où $u = x, y, z$. Si l'on considère, pour simplifier, l'hamiltonien H_x d'un oscillateur harmonique à une dimension, les équations de Hamilton correspondantes s'écrivent:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H_x}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad (57)$$

et des équations similaires peuvent être obtenues pour H_y et H_z . Les équations (49) sont des équations différentielles du premier ordre couplées pour les variables x et p_x qui peuvent se réécrire:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad p_x = m\dot{x}. \quad (58)$$

La première équation dans (58) est l'équivalent de l'équation (22) obtenue pour le pendule simple dans le régime des faibles oscillations au moyen des équations de Lagrange. La solution est de la forme: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ où les constantes A et φ sont fixées par les conditions initiales. L'impulsion est alors entièrement déterminée par la deuxième équation dans (58) qui donne: $p_x(t) = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi)$.

2.2 Equations de Hamilton à partir du principe de moindre action

Principe de moindre action en mécanique de Hamilton: un système à n degrés de liberté est décrit par un hamiltonien, $H(p, q, t)$, où $q \equiv (q_1, \dots, q_n)$ et $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Supposons que le mouvement du système prenne place entre un instant initial t_i et un instant final t_f et qu'à ces instants le système soit dans des états bien déterminés: $\eta_i \equiv \eta(t_i) = (q(t_i), p(t_i))$ et $\eta_f \equiv \eta(t_f) = (q(t_f), p(t_f))$, respectivement. Le mouvement effectivement suivi par le système, compte tenu des conditions aux limites, est alors celui qui minimise l'action S :

$$S[q(t), p(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt (p \cdot \dot{q} - H(q, p, t)). \quad (59)$$

Preuve: imposons des variations infinitésimales δq à q et δp à p . L'action transformée et développée au premier ordre en δq et δp s'écrit alors:

$$\begin{aligned} S[q + \delta q, p + \delta p] &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left((p + \delta p) \cdot (\dot{q} + \delta \dot{q}) - H(q + \delta q, p + \delta p, t) \right) \\ &= S[q, p] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p \cdot \delta \dot{q} + \delta p \cdot \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta p \right) + \dots \end{aligned}$$

où les ... désignent les termes d'ordre plus élevé. Le terme contenant $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ dans la deuxième ligne peut être intégré par parties (IPP). Ceci conduit à:

$$\begin{aligned} S[q + \delta q, p + \delta p] &\stackrel{\text{IPP}}{=} S[q] + \underbrace{p \cdot \delta q}_{=0} \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \cdot \delta q \right) + \dots \\ &= S[q, p] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\underbrace{\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right)}_{=0 \text{ } (\forall t)} \cdot \delta p(t) - \underbrace{\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right)}_{=0 \text{ } (\forall t)} \cdot \delta q(t) \right) + \dots, \end{aligned}$$

où le terme tout intégré est nul puisque $\delta q_i = \delta q_f = 0$ et, dans la dernière ligne, nous avons utilisé l'indépendance de δq et δp pour annuler les deux termes de l'intégrand. Ces termes conduisent bien aux équations de Hamilton (49).

2.3 Formalisme canonique

La mécanique de Hamilton est parfois qualifiée de formalisme canonique. Nous en présentons brièvement quelques éléments.

Crochet de Poisson: le crochet de Poisson de deux fonctions $A(q, p, t)$ et $B(q, p, t)$ de l'espace des phases est défini par:

$$\{A, B\}_{q,p} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial A}{\partial q} \cdot \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \cdot \frac{\partial A}{\partial p} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial B}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial A}{\partial p_{\alpha}} \right). \quad (60)$$

Il est parfois noté plus simplement: $\{A, B\}$ et a pour propriétés:

- antisymétrie: $\{A, B\} = -\{B, A\}$,
- identité de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$,
- produit: $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$.

Variables canoniquement conjuguées (ou variables canoniques): deux variables $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ d'un espace des phases à $2n$ dimensions sont dites canoniquement conjuguées (ou canoniques) lorsqu'elles satisfont aux relations:

$$\{a_{\alpha}, b_{\beta}\} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \{a_{\alpha}, a_{\beta}\} = \{b_{\alpha}, b_{\beta}\} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n), \quad (61)$$

où $\{a_{\alpha}, b_{\beta}\}$ est le crochet de Poisson entre a_{α} et b_{β} et $\delta_{\alpha,\beta}$ est le symbole de Kronecker: $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ et 0 sinon.

Exemple: les coordonnées généralisées q_{α} et les impulsions généralisées p_{α} satisfont aux relations (61) et sont donc des variables canoniquement conjuguées. Explicitement:

$$\{q_{\alpha}, p_{\beta}\} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \{q_{\alpha}, q_{\beta}\} = \{p_{\alpha}, p_{\beta}\} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n), \quad (62)$$

Preuve: en utilisant l'équation (60) il vient par exemple:

$$\{q_{\alpha}, p_{\beta}\} = \sum_{\gamma=1}^n \left(\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_{\gamma}} \frac{\partial p_{\beta}}{\partial p_{\gamma}} - \frac{\partial p_{\beta}}{\partial q_{\gamma}} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_{\gamma}} \right) = \sum_{\gamma=1}^n (\delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\gamma} - 0) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (63)$$

où l'on a utilisé le fait que les q_{α} et p_{α} sont des variables indépendantes, d'où:

$$\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_{\gamma}} = \delta_{\alpha,\gamma}, \quad \frac{\partial p_{\beta}}{\partial p_{\gamma}} = \delta_{\beta,\gamma}, \quad \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_{\gamma}} = \frac{\partial p_{\beta}}{\partial q_{\gamma}} = 0. \quad (64)$$

Par des arguments similaires on montre que $\{q_{\alpha}, q_{\beta}\} = \{p_{\alpha}, p_{\beta}\} = 0$.

Equation du mouvement associée à une fonction de l'espace des phases: soit $F(q, p, t)$ une fonction de l'espace des phases. L'équation du mouvement associée à F s'écrit:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (65)$$

où H est l'hamiltonien associé au système considéré.

Preuve:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (66)$$

où l'on a utilisé les équations de Hamilton (49).

Constante du mouvement et variable cyclique: on dit d'une variable a_β de l'espace des phases que c'est une constante du mouvement lorsque:

$$\boxed{\frac{da_\beta}{dt} = 0 \quad (a_\beta \text{ est une constante du mouvement}) \iff \{a_\beta, H\} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0,} \quad (67)$$

où l'équivalence provient de l'équation (65). Si a_β est une constante du mouvement, la variable b_β *canoniquement conjuguée* à a_β , au sens de (61), est alors une variable cyclique pour l'hamiltonien du système:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial b_\beta} = 0 \quad (b_\beta \text{ est une variable cyclique}),} \quad (68)$$

mais aussi, voir (46), pour le lagrangien. Une fonction C de l'espace des phase peut aussi être une constante du mouvement à condition de satisfaire des relations analogues à (67). En particulier, pour que l'hamiltonien d'un système soit une constante du mouvement, il suffit qu'il ne dépende pas explicitement du temps.

Equations canoniques du mouvement: c'est le nom qui est parfois donné aux équations de Hamilton (49). Ces dernières sont un cas particulier de l'équation (65) dans les cas où: $F = q$ et $F = p$. Les équations de Hamilton peuvent donc se réécrire:

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\}. \quad (69)$$

Transformation canonique: c'est une transformation des variables de l'espace des phases: $q \rightarrow q'(q, p)$ et $p \rightarrow p'(q, p)$ qui préserve la forme des équations de Hamilton. Elle préserve aussi le crochet de Poisson dans le sens où, si F et G sont deux fonctions de l'espace des phases: $\{F, G\}_{q,p} = \{F, G\}_{q',p'}$.

Preuve: les arguments suivants sont standards et se trouvent dans tous les ouvrages sur le sujet, voir par exemple [4] ou [1] pages 346-347 et 391-399. Ecrivons les équations de Hamilton (49) sous forme matricielle:

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \eta = (q, p), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Ces équations, et les arguments qui suivent, sont tout autant valables pour un système à 1 degré de liberté que pour un système à n degrés de liberté. Dans ce dernier cas, le vecteur $\eta = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ a $2n$ composantes et la matrice antisymétrique J est une matrice $2n \times 2n$ où 1 désigne alors la matrice unité de dimension $n \times n$.

En notations matricielles, le changement de variables $q \rightarrow q'(q, p)$ et $p \rightarrow p'(q, p)$, correspond au changement: $\eta \rightarrow \eta'$. Ce changement de variables fait intervenir la matrice jacobienne, M , de la transformation:

$$M = \frac{\partial \eta'}{\partial \eta}, \quad M_{ij} = \frac{\partial \eta'_i}{\partial \eta_j}. \quad (71)$$

On a alors: $\dot{\eta}' = M \dot{\eta} = M J \frac{\partial H}{\partial \eta}$, soit, en explicitant les indices:

$$\dot{\eta}'_i = \sum_{j,k} M_{ij} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \sum_{j,k,l} M_{ij} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \eta'_l} \underbrace{\frac{\partial \eta'_l}{\partial \eta_k}}_{M_{lk} = M_{kl}^T} = \sum_{j,k,l} M_{ij} J_{jk} M_{kl}^T \frac{\partial H}{\partial \eta'_l}. \quad (72)$$

En revenant aux notations matricielles on a donc:

$$\dot{\eta}' = M J M^T \frac{\partial H}{\partial \eta'}. \quad (73)$$

De l'équation (73), on déduit que les équations de Hamilton sont préservées: $\dot{\eta}' = J \frac{\partial H}{\partial \eta'}$, à la condition que:

$$M J M^T = J. \quad (74)$$

Une matrice M satisfaisant à la condition (74) est dite *symplectique*. Cette condition implique que le jacobien de la transformation est égal à l'unité, i.e., $|\det(M)| = 1$. Ceci implique qu'une transformation canonique conserve le volume de l'espace des phases:

$$\int d^n q d^n p = \int |\det(M)| d^n q' d^n p' = \int d^n q' d^n p', \quad (75)$$

qui est une expression du théorème de Liouville dans le formalisme canonique.

Montrons enfin qu'une transformation canonique préserve le crochet de Poisson. Sous forme matricielle, ce dernier peut s'écrire:

$$\{F, G\}_{p,q} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta} J \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad (76)$$

où F et G sont deux fonctions de l'espace des phases. La transformation canonique: $\eta \rightarrow \eta'$ implique alors que ce même crochet de Poisson peut s'écrire:

$$\{F, G\}_{p,q} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta'} M^T J M \frac{\partial G}{\partial \eta'} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta'} J \frac{\partial G}{\partial \eta'}, \quad (77)$$

où nous avons utilisé le fait que la matrice jacobienne est symplectique (74). On a donc bien: $\{F, G\}_{p,q} = \{F, G\}_{q',p'}$.

2.4 Lien entre la mécanique de Hamilton et la mécanique quantique

Mécanique de Hamilton	Mécanique quantique (point de vue de Heisenberg)
Fonction F de l'espace des phases	Opérateur \hat{F} agissant dans l'espace des états
Crochet de Poisson $\{F, G\}$ où $\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p}$ $\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha,\beta}$	Commutateur: $\frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}]$ où $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$ $[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha,\beta}$
Equation d'évolution: $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$	Equation de Heisenberg: $i\hbar \frac{d\hat{F}}{dt} = [\hat{F}, \hat{H}] + i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}$

Références

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (1980). H. Goldstein, *Mécanique Classique* (traduit par Annette et Charles Moubacher), Presses universitaires de France (1964).
- [2] T. W. B. Kibble, *Classical Mechanics*, World Scientific Publishing Company (2004).
- [3] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique Théorique - Tome 1: Mécanique*, Ellipses Marketing (2012).
- [4] D. Sénéchal, *Mécanique II*
<https://www.physique.usherbrooke.ca/pages/sites/default/files/PHQ414.pdf>