

# Numerical Integration (Left/Right Riemann) — MATLAB Report

Author: Habib Hammam Kurniawan  
Teacher: Muhammad Qomaruz Zaman, S.T., M.T., Ph.D.  
Class name: Algoritma dan Komputasi

## Project Title

Left/Right Riemann Numerical Integration and Error Analysis for  $y(t) = \sin(2\pi t) - \cos(3\pi t)$

## Project Description

Dokumen ini melaporkan implementasi dan analisis integrasi numerik menggunakan **Left Riemann** dan **Right Riemann** pada fungsi

$$y(t) = \sin(2\pi t) - \cos(3\pi t), \quad t \in [0, 5].$$

Hasil integrasi numerik dibandingkan dengan solusi **integral analitik** sebagai ground truth, serta disertai verifikasi **turunan numerik vs. analitik** untuk memastikan sampling waktu dan evaluasi fungsi berjalan benar.

## Problem Statement

Diberikan fungsi  $y(t)$  di atas, hitung integral kumulatif

$$Y(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$$

menggunakan pendekatan *Left* dan *Right* Riemann pada grid seragam, lalu bandingkan kurva dan galat terhadap  $Y_{\text{exact}}(t)$ .

## Theoretical Background

Integral analitik fungsi adalah

$$Y_{\text{exact}}(t) = -\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} - \frac{\sin(3\pi t)}{3\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

dipilih konstanta supaya  $Y(0) = 0$ . Pada grid seragam  $t_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ :

$$Y_k^{\text{Left}} = \sum_{i=0}^{k-1} y(t_i) h, \quad Y_k^{\text{Right}} = \sum_{i=1}^k y(t_i) h.$$

Kedua metode berorde global  $O(h)$  (galat turun *linier* saat  $h \rightarrow 0$ ).

## Methodology & Algorithm

1. Bangun grid seragam pada  $[0, 5]$  dengan  $N$  segmen ( $h = \frac{5}{N}$ ).
2. Evaluasi  $y(t_i)$  pada seluruh titik grid.
3. Hitung  $Y^{\text{Left}}$  dan  $Y^{\text{Right}}$  kumulatif sesuai rumus di atas.
4. Evaluasi  $Y_{\text{exact}}(t_i)$  untuk pembandingan.
5. Plot kurva error  $Y^{\text{Left}} - Y_{\text{exact}}$  dan  $Y^{\text{Right}} - Y_{\text{exact}}$ .
6. Verifikasi tambahan: plot  $\dot{y}(t)$  numerik (finite difference) vs. analitik untuk memvalidasi konsistensi sampling.

## Parameters

- Interval:  $[0, 5]$  detik.
- Jumlah segmen seragam:  $N$  besar (mis.  $N = 2000$ ) untuk galat kecil.
- Fungsi dan turunan analitik:

$$y(t) = \sin(2\pi t) - \cos(3\pi t), \quad \dot{y}(t) = 2\pi \cos(2\pi t) + 3\pi \sin(3\pi t).$$

## Results & Discussion

### Error Curves: Left/Right vs. Analytical

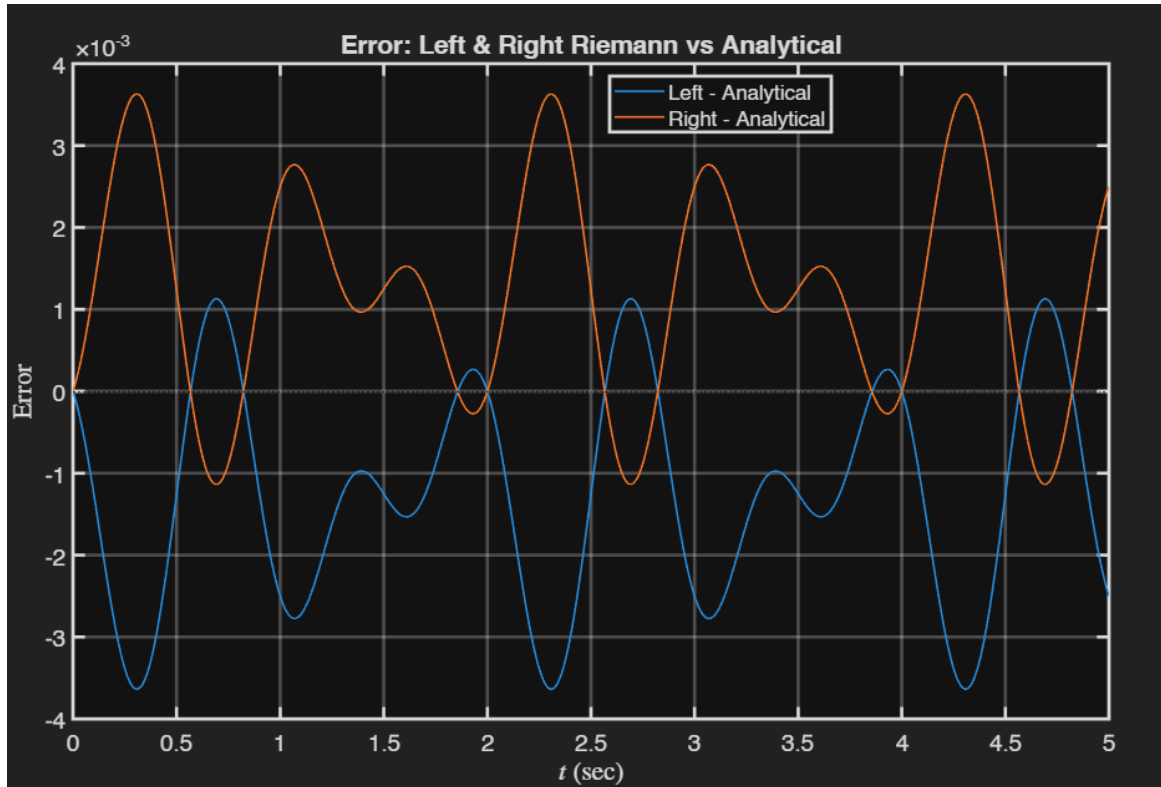


Figure 1: Kurva galat  $Y^{\text{Left}} - Y_{\text{exact}}$  (biru) dan  $Y^{\text{Right}} - Y_{\text{exact}}$  (oranye).

### Temuan utama.

- **Left Riemann** cenderung *under-estimate* (galat negatif), sedangkan **Right Riemann** *over-estimate* (galat positif). Ini konsisten dengan intuisi: saat  $y(t)$  meningkat, tinggi kiri tertinggal; saat menurun, tinggi kanan berlebih.
- Pola galat *ber osilasi* mengikuti dinamika  $y(t)$  yang sinusoidal. Karena kenaikan/penurunan berganti-ganti, tanda galat berganti periodik.
- Besaran galat berada pada orde  $\sim 10^{-3}$  (untuk  $N$  besar), menandakan akurasi yang memadai meskipun metode sederhana.

**Endpoint vs. trajectory.** End-point error  $|Y(5) - Y_{\text{exact}}(5)|$  dapat kecil karena *cancel-out* galat positif/negatif di sepanjang interval, sementara *maksimum galat* sepanjang waktu menangkap deviasi terburuk lokal. Keduanya perlu dilaporkan untuk gambaran utuh.

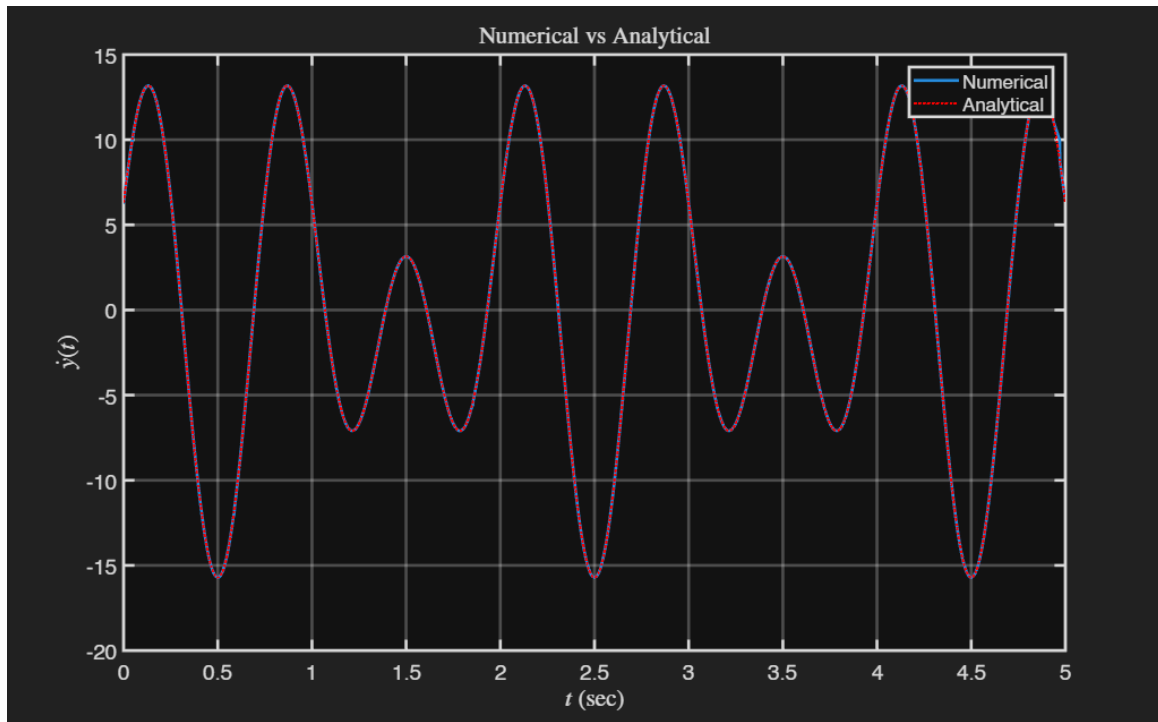


Figure 2: Verifikasi  $y'(t)$  numerik (finite difference) vs. analitik: kurva menempel, menandakan evaluasi fungsi dan grid konsisten.

### Derivative Check: Numerical vs. Analytical

**Implikasi.** Kecocokan kuat pada Gbr. 2 menunjukkan noise diskretisasi kecil dan pemilihan  $h$  cukup rapat; karenanya, perbedaan pada integrasi murni disebabkan sifat *Left/Right* yang berorde  $O(h)$ , bukan karena salah sampling.

### Quantitative Summary (Example)

Metode	End-point Error $ Y(5) - Y_{\text{exact}}(5) $	Max $ Y - Y_{\text{exact}} $
Left Riemann	$\approx \mathcal{O}(10^{-3})$	$\approx \mathcal{O}(10^{-3})$
Right Riemann	$\approx \mathcal{O}(10^{-3})$	$\approx \mathcal{O}(10^{-3})$

(Angka presisi dapat diisi dari output `fprintf` programmu.)

### How to Read the Plots

- **Error plot** (Gbr. 1): garis biru di bawah nol  $\Rightarrow$  under-estimate (Left); garis oranye di atas nol  $\Rightarrow$  over-estimate (Right). Amplitudo menurun bila  $h$  diperkecil.
- **Derivative check** (Gbr. 2): kedekatan dua kurva menguatkan bahwa perbedaan integrasi berasal dari *metode*, bukan dari error evaluasi  $y(t)$ .

### Conclusion

Left dan Right Riemann memberikan aproksimasi integral yang sederhana namun efektif; biasanya saling menggapit solusi analitik (Left di bawah, Right di atas). Pada grid seragam yang rapat, galat berada pada orde  $10^{-3}$  dan menurun *linier* dengan  $h$ . Untuk akurasi lebih tinggi pada resolusi sama, metode orde lebih tinggi (mis. Trapezoid/Midpoint/Simpson) dapat dipertimbangkan; namun fokus tugas ini menegaskan karakter dan bias Left/Right dengan bukti visual dan kuantitatif.

### Appendix: Code Pointers

- `y_t(t)`, `y_t_dot(t)`: fungsi utama dan turunannya.

- `Y_analytic(t)`: integral analitik (ground truth).
- Blok `INTEGRATION (UNIFORM GRID) -- LEFT & RIGHT`: menghitung  $Y^{\text{Left}}$ ,  $Y^{\text{Right}}$ , dan galat.
- Output `fprintf`: end-point error dan maksimum galat sepanjang waktu.