Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

2 Analisi dei sistemi dinamici

2.13 Analisi dei sistemi tempo discreto

Risposta dei sistemi LTI TD

- Consideriamo un sistema LTI TD

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + Du\,(t) \end{aligned}$$

- Forma della soluzione nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{A^t\,x(0)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)}_{x_f(t)} \\ y(t) &= \underbrace{C\,A^t\,x(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + D\,u(t)}_{y_f(t)} \end{aligned}$$

Nota: in alternativa, possiamo calcolare la soluzione utilizzando la **trasformata Zeta**

Trasformata Zeta

Definizione: Dato un segnale $f(t)$ causale TD, la sua **trasformata Zeta** è

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}$$

con z variabile complessa

- **Notazione:** usiamo la lettera maiuscola per indicare la trasformata Zeta di un segnale
$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}$$
- $F(z)$ è definita per tutti i $z \in \mathbb{C}$ tale che la serie converge
- La trasformata Zeta è l'equivalente della trasformata di Laplace per segnali TD

Proprietà della trasformata Zeta

1. **Linearità:** per ogni coppia di segnali causali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)$$

2. **Anticipo di tempo**: $\mathcal{Z}\{f(t+1)\} = zF(z) - zf(0)$

3. **Ritardo di tempo**: $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \dfrac{F(z)}{z}$

- z può essere interpretato simbolicamente come un operatore di **anticipo unitario** nel tempo
- $1/z$ può essere interpretato simbolicamente come un operatore di **ritardo unitario** nel tempo

Risposta libera e risposta forzata nel dominio Zeta

- Consideriamo un sistema LTI TD

$$\begin{cases} x(t+1) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

- Definiamo

$$\mathcal{Z}\{x(t)\} = X(z) \qquad \mathcal{Z}\{u(t)\} = U(z) \qquad \mathcal{Z}\{y(t)\} = Y(z)$$

- Applicando le proprietà 1 e 2 della trasformata Zeta

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}\left\{x(t+1)\right\} & = & \mathcal{Z}\left\{Ax(t)+Bu(t)\right\} \\ & \Downarrow & \\ zX(z) - z\,x(0) & = & AX(z) + BU(z) \end{array}$$

- **Equazione alle differenze $\longleftrightarrow$ equazione algebrica**

Risposta libera e risposta forzata nel dominio Zeta

- Risolvendo l'equazione algebrica

$$
\begin{array}{rcl}
zX(z) - z\,x(0) & = & AX(z) + BU(z) \\
& \Downarrow & \\
(zI - A)X(z) & = & z\,x(0) + BU(z) \\
& \Downarrow & \\
X(z) & = & \underbrace{(zI - A)^{-1}\,z\,x_0}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1}BU(z)}_{X_f(z)} \\
Y(z) & = & \underbrace{C(zI - A)^{-1}\,z\,x_0}_{Y_\ell(z)} + \underbrace{C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z)}_{Y_f(z)}
\end{array}
$$

- Anche nel dominio Zeta: evoluzione/risposta complessiva $=$ evoluzione/risposta **libera** $+$ evoluzione/risposta **forzata**

$$
\begin{array}{rcl}
X(z) & = & X_\ell(z) + X_f(z) \\
Y(z) & = & Y_\ell(z) + Y_f(z)
\end{array}
$$

Relazione tra dominio del tempo e Zeta

	Tempo	**Zeta**
Evoluzione libera nello stato $x_\ell(t)$	$A^t\, x(0)$	$(zI - A)^{-1}\, z\, x(0)$
Evoluzione forzata nello stato $x_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau)$	$(zI - A)^{-1} B\, U(z)$
Risposta libera $y_\ell(t)$	$C\, A^t\, x(0)$	$C(zI - A)^{-1}\, z\, x(0)$
Risposta forzata $y_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u(\tau) + D u(t)$	$\left[C(zI - A)^{-1} B + D\right] U(z)$

- Potenza di matrice $A^t \longleftrightarrow$ inversa $(zI - A)^{-1}\, z$
- Convoluzione discreta $\longleftrightarrow$ prodotto $(zI - A)^{-1} B\, U(z)$
- Funzione di trasferimento TD

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Calcolo della potenza di matrice

- Per la potenza di matrice vale

$$\mathcal{Z}\left\{A^t\right\} = (zI - A)^{-1}\, z$$

- $(zI - A)^{-1}$ matrice di funzioni razionali aventi come poli gli autovalori di A con la loro molteplicità nel polinomo minimo $m(z)$

Per calcolare la potenza di matrice A^t

1. Si calcola l'inversa $(zI - A)^{-1}$
2. Si scompongono in fratti semplici gli elementi di $(zI - A)^{-1}$
3. Si calcola l'**antitrasformata Zeta**

$$A^t = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1}\, z\right\}$$

Relazione tra posizione dei poli e andamento nel tempo

Tempo continuo	**Tempo discreto**
• Trasformata del gradino TC $$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$	• Trasformata del gradino TD $$\mathcal{Z}\{1(t)\} = \frac{z}{z-1}$$
• Trasformata dell'esponenziale TC $$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\,1(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$	• Trasformata della potenza TD $$\mathcal{Z}\{\lambda^t\,1(t)\} = \frac{z}{z-\lambda}$$
• Un polo in λ dà luogo al modo di evoluzione $$e^{\lambda\,t}\,1(t)$$	• Un polo in λ dà luogo al modo di evoluzione $$\lambda^t\,1(t)$$
• Un polo in λ di molteplicità m dà luogo ai modi di evoluzione $$e^{\lambda\,t},\ t\,e^{\lambda\,t},\ \ldots,\ t^{m-1}\,e^{\lambda\,t}$$	• Un polo in λ di molteplicità m dà luogo ai modi di evoluzione $$\lambda^t,\ t\,\lambda^t,\ \ldots,\ t^{m-1}\,\lambda^t$$

Modi naturali

- La matrice inversa $(zI - A)^{-1}$ ha come poli gli autovalori del sistema
$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$
con le molteplicità
$$m_1, \dots, m_k$$
- Ricordiamo che per per l'evoluzione libera vale
$$x_\ell(t) = A^t x(0) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1} z\right\} x(0)$$

Teorema 2.7 A^t è una matrice avente come elementi opportune **combinazioni lineari** di
$$\lambda_i^t,\ t\,\lambda_i^t,\ \dots,\ t^{m_i-1}\,\lambda_i^t$$
per $i = 1, \dots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.

- Di conseguenza $x_\ell(t) = A^t x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,A^t x(0)$ evolvono secondo una opportuna **combinazione dei modi naturali** del sistema (al variare delle **condizioni iniziali**)

Modi naturali TD

- Scomponento gli autovalori in termini di **modulo** e **fase**

$$\lambda_i = \rho_i e^{j\theta_i}$$

  con

$$\rho_i = |\lambda_i| \qquad \theta_i = \angle\lambda_i$$

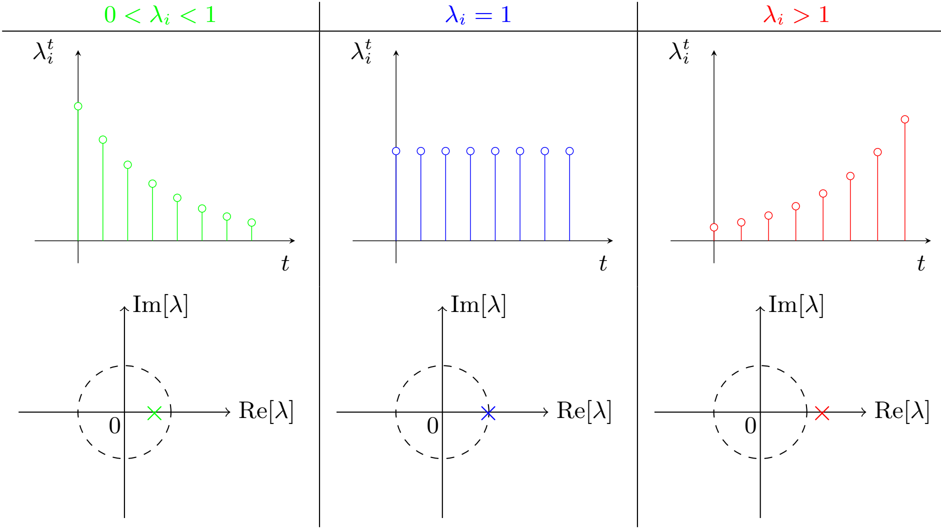
- Modo naturale

$$\begin{aligned} t^\ell\,\lambda_i^t &= t^\ell\,\rho_i^t e^{j\theta_i\,t} \\ &= t^\ell\,\rho_i^t\,[\cos(\theta_i\,t) + j\sin(\theta_i\,t)] \end{aligned}$$

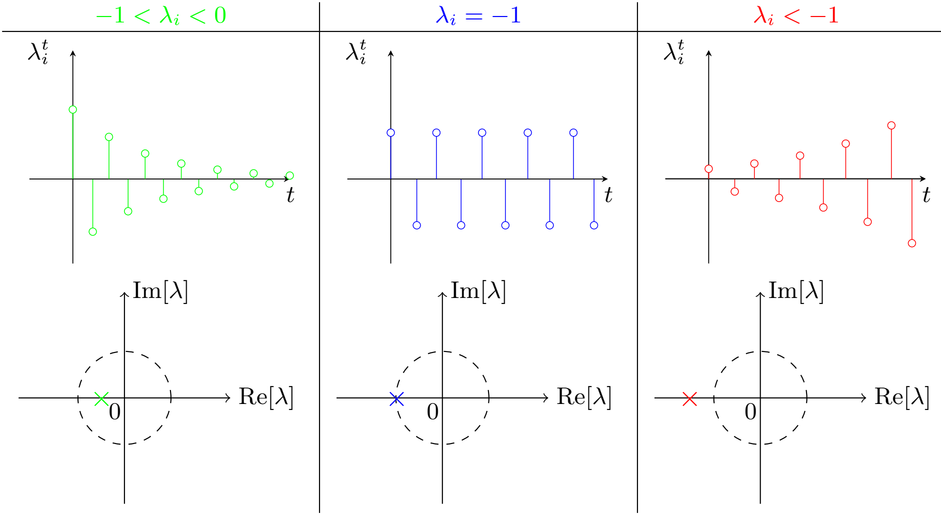
- Modulo $\rho_i = |\lambda_i|$ dell'autovalore determina la **convergenza/divergenza** del modo naturale
- Fase $\theta_i = \angle\lambda_i$ dell'autovalore determina la presenza o meno di **oscillazioni**
- **Attenzione:** se λ_i autovalore complesso allora anche il suo complesso coniugato $\overline{\lambda}_i = \rho_i e^{-j\theta_i}$ è autovalore con la stessa molteplicità
  $\Rightarrow$ i modi $t^\ell\,\lambda_i^t$ e $t^\ell\,\overline{\lambda_i}^t$ sono presenti sempre in coppia e si combinano per dare luogo ai modi reali

$$t^\ell\,\rho_i^t\,\cos(\theta_i\,t) \qquad t^\ell\,\rho_i^t\,\sin(\theta_i\,t)$$

Modi naturali TD per λ_i reale positivo



Modi naturali TD per λ_i reale negativo



Classificazione dei modi naturali TD $t^\ell \, \lambda_i^t \, 1(t)$

	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\lvert\lambda_i\rvert > 1$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

- **Modulo** $|\lambda_i|$ e **molteplicità** m_i (nel caso $|\lambda_i| = 1$) determinano la **convergenza/divergenza**
- **Fase** $\angle\lambda_i$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $A^t = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}\, z\}$ è sufficiente guardare la **posizione degli autovalori** nel piano z e la loro **molteplicità** nel polinomio minimo

Stabilità interna e modi naturali

- Un autovalore λ_i con molteplicità m_i come radice del polinomio minimo $m(z)$ dà origine ai modi naturali

$$t^\ell \lambda_i^t \qquad \ell = 0, 1, \ldots, m_i - 1$$

- Modi naturali associati ad un autovalore λ_i tutti **convergenti**

$$\Leftrightarrow \qquad |\lambda_i| < 1$$

  se e solo se il modulo di λ_i è < 1

- Modi naturali associati ad un autovalore λ_i tutti **limitati**

$$\Leftrightarrow \qquad |\lambda_i| \leq 1$$

  e, nel caso il modulo sia 1, la molteplicità m_i sia unitaria

- Negli altri casi esiste almeno un modo naturale **divergente**

Condizioni per la stabilità interna

Teorema 2.8 Un sistema LTI TD è

- **asintoticamente stabile**
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno modulo < 1
- **marginalmente stabile**
  $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori del sistema hanno modulo ≤ 1
  AND quelli con modulo $= 1$ hanno molteplicità $= 1$ come radici del polinomio minimo
- **internamente instabile** negli altri casi
  $\Leftrightarrow$ esiste almeno un autovalore con modulo > 1
  OR con modulo $= 1$ e molteplicità > 1 nel polinomio minimo

- La regione di stabilità asintotica nel piano z corrisponde al cerchio unitario

$$\mathbb{C}_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Condizioni per la stabilità esterna

- Consideriamo un sistema LTI tempo discreto SISO con funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

  con $b(z)$ e $a(z)$ polinomi coprimi (senza radici comuni)

- Poli di $G(z) =$ radici di $a(z)$

Teorema 2.4 Sistema LTI TD SISO **stabile esternamente** $\Leftrightarrow$ tutti i poli di $G(z)$ hanno modulo < 1

- Anche per sistemi TD, stabilità asintotica $\quad\Rightarrow\quad$ stabilità esterna
- L'implicazione inversa in generale non vale (conoscere $G(z)$ non è sufficiente per concludere sulla stabilità interna)

Tabella riassuntiva sulla stabilità dei sistemi LTI TD

STABILITÀ	Quantità di interesse	Condizione
Asintotica	Polinomio caratteristico $\varphi(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$
Marginale	Polinomio minimo $m(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$ & $m_i = 1$ nel caso in cui $\lvert\lambda_i\rvert = 1$
Esterna	Funzione di trasferimento $G(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $a(\lambda_i) = 0$

Nota: per verificare se le radici di un polinomio hanno tutte modulo < 1 si può utilizzare ad esempio il **criterio di Jury** (equivalente TD del criterio di Routh-Hurwitz)

Punti di equilibrio

- Consideriamo un sistema TI TD

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

- Studiamo la stabilità di una particolare classe di traiettorie del sistema: i **punti di equilibrio**

Definizione: Si definisce **punto di equilibrio** una coppia (x_e, u_e) tale che

$$\begin{aligned} x(0) &= x_e \\ u(t) &= u_e, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

- punto di equilibrio $=$ **traiettoria costante** del sistema
- Dato un punto di equilibrio (x_e, u_e) definiamo l'**uscita di equilibrio**

$$y_e = h(x_e, u_e)$$

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio di un sistema TD sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che

$$f(x_e, u_e) = x_e$$

- Questo risultato è una conseguenza immediata della definizione
- La definizione di punti di equilibrio non cambia, rispetto al caso TC, ma cambia la condizione da verificare
- **Per sistemi autonomi:** x_e equilibrio $\Leftrightarrow$ $f(x_e) = x_e$
  In questo caso, uno stato di equilibrio è un **punto fisso** della funzione f
- Per gli equilibri di un sistema TD, possiamo definire gli stessi concetti di stabilità già introdotti per il caso TC

Punti di equilibrio nei sistemi LTI TD

Nota: possiamo rivisitare i concetti di stabilità interna visti per sistemi LTI TD in termini di stabilità degli equilibri.

- Consideriamo un sistema LTI TD

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- Funzione di transizione dello stato $f(x,u) = Ax + Bu$
- (x_e, u_e) punto di equilibrio $\quad \Leftrightarrow \quad f(x_e, u_e) = Ax_e + Bu_e = x_e$
- Dato un segnale di ingresso **costante**

$$u(t) = u_e \qquad \forall t \geq 0$$

  i corrispondenti stati di equilibrio sono le soluzioni del **sistema di equazioni lineari**

$$(I - A)\, x_e = B\, u_e$$

Punti di equilibrio nei sistemi LTI TD

- Ingresso costante $u(t) = u_e$ per $t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ stati di equilibrio soluzioni di

$$(I - A)\,x_e = B\,u_e$$

- Per sistemi LTI $x_e = 0$ e $u_e = 0$ è **sempre** un punto di equilibrio (corrisponde alla situazione di quiete in cui il sistema rimane nello stato 0)

Quando $I - A$ **invertibile**, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un **unico** stato di equilibrio

$$x_e = (I - A)^{-1}\,B\,u_e$$

- Notiamo che

$$I - A \text{ invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ non ha autovalori in } 1$$

Stabilità dei punti di equilibrio nei sistemi LTI TD

- Per un sistema LTI TD, stabilità asintotica $\Leftrightarrow$ tutti autovalori di A hanno modulo < 1
- Di conseguenza, stabilità asintotica $\Rightarrow$ $I - A$ invertibile
- Per un sistema LTI TD asintoticamente stabile, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un **unico** stato di equilibrio

$$x_e = (I - A)^{-1} B\, u_e$$

- Per sistemi LTI la stabilità è una proprietà globale
  $\Rightarrow$ Per un sistema LTI asintoticamente stabile, l'equilibrio $x_e = (I - A)^{-1} B\, u_e$ risulta essere **globalmente asintoticamente stabile**

Per un sistema LTI TD **asintoticamente stabile** si ha che

$$u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_e = (I - A)^{-1} B\, u_e \\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y_e = [C(I - A)^{-1} B + D]\, u_e \end{array}$$

Guadagno in continua nei sistemi LTI TD

- Per un sistema LTI TD **asintoticamente stabile** la risposta ad un ingresso costante $u(t) = u_e$ converge asintoticamente a

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_e = \left[C(I - A)^{-1} B + D\right] u_e$$

- Notiamo che

$$G(1) = \left. G(z) \right|_{z=1} = C(I - A)^{-1} B + D$$

- In risposta ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, l'uscita complessiva $y(t)$ converge al **regime permanente**

$$y_f^U(t) = \left[C(I - A)^{-1} B + D\right] u_e = G(1)\, u_e$$

- La quantità $G(1)$ rappresenta il **guadagno in continua** per sistemi LTI TD

Esempio: analisi dell'algoritmo di PageRank

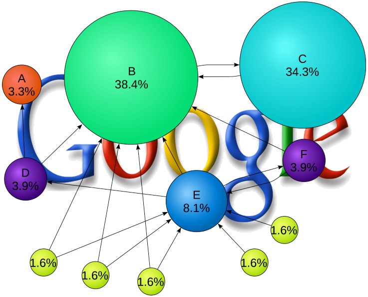
PageRank: algoritmo per assegnare un peso a ciascuna pagina web che ne quantifica l'importanza relativa
Utile per decidere l'**ordine** (ranking) con cui presentare i risultati di una ricerca

PageRank si basa su

- Modello dinamico per descrivere la navigazione di un utente nel World Wide Web (modello tipo *random walk*)
- PageRank della pagina i = probabilità asintotica

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \bar{x}_i$$

di essere nella pagina i dopo un periodo di navigazione sufficientemente lungo

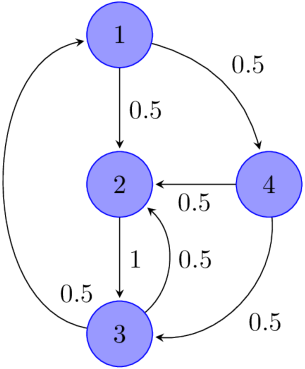


Esempio: analisi dell'algoritmo di PageRank

- PageRank con damping factor $d \in (0,1)$

$$x(t+1) \quad = \quad d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \frac{1-d}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Possiamo vedere l'algoritmo come un sistema LTI TD

$$x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

con

$$A = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e ingresso costante $u(t) = (1-d)/4$

Esempio: analisi dell'algoritmo di PageRank

- Autovalori di A:
  $\lambda_1 = d, \quad \lambda_2 = -d/2, \quad \lambda_3 = -d/4 + j\sqrt{3}\,d/4, \quad \lambda_4 = -d/4 - j\sqrt{3}\,d/4$
- Tutti autovalori con modulo < 1 per ogni $d \in (0,1)$
  $\Rightarrow$ sistema asintoticamente stabile
  $\Rightarrow$ in risposta all'ingresso costante $u(t) = (1-d)/4$, lo stato $x(t)$ converge al valore di equilibrio

$$x_e = (I - A)^{-1} B \frac{1-d}{4}$$

- Scegliendo $d = 0.85$

$$x_e = \begin{bmatrix} 0.1922 \\ 0.3246 \\ 0.3640 \\ 0.1192 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ordine di importanza $3, 2, 1, 4$

Nota: Per qualsiasi rete, **per costruzione** la matrice A ha sempre tutti gli autovalori con modulo < 1 per ogni $d \in (0,1)$
$\Rightarrow$ analisi può essere generalizzata a una **qualsiasi rete** di qualsiasi dimensione

Metodo indiretto (della linearizzazione di Lyapunov) TD

- Consideriamo la matrice A_e della dinamica del sistema linearizzato

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}$$

Teorema 2.10 (Metodo della linearizzazione di Lyapunov TD) Consideriamo un sistema TI TD. Sia A_e la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio (x_e, u_e).

a. Se tutti gli autovalori di A_e hanno modulo < 1
   $\Rightarrow$ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile
b. Se almeno un autovalore di A_e ha modulo > 1
   $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile
c. (**caso critico**) Se invece tutti gli autovalori di A_e hanno modulo ≤ 1 **AND** almeno un autovalore con modulo $= 1$ $\Rightarrow$ non si può concludere nulla

Esempio: algoritmo babilonese

- Consideriamo sistema dinamico autonomo TD

$$x(t+1) = \frac{1}{2}\left[x(t) + \frac{\alpha}{x(t)}\right]$$

con $\alpha > 0$ parametro reale

- Consideriamo il dominio $x > 0$
- Gli equilibri del sistema sono soluzione dell'equazione

$$f(x_e) = \tfrac{1}{2}\left(x_e + \frac{\alpha}{x_e}\right) = x_e$$
$$\Updownarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{x_e} = \frac{1}{2}x_e$$
$$\Updownarrow$$
$$x_e^2 = \alpha$$

- Per $x > 0$ esiste un unico punto di equilibrio

$$x_e = \sqrt{\alpha}$$

Esempio: algoritmo babilonese

- Per studiare la stabilità dell'equilibrio linearizziamo $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \left.\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{x^2}\right)\right|_{x=\sqrt{\alpha}} = 0$$

- $A_e = 0$ ha autovalore $\lambda_1 = 0$
  $\Rightarrow$ $A_e = 0$ ha tutti autovalori con modulo < 1
  $\Rightarrow$ equilibrio $x_e = \sqrt{\alpha}$ localmente asintoticamente stabile

- Utilizzando strumenti di analisi più avanzati si può dimostrare che il sistema converge all'equilibrio $x_e = \sqrt{\alpha}$ per ogni stato iniziale $x(0) > 0$

Nota: Questo sistema, già noto ai matematici dell'antichità, fornisce un algoritmo iterativo per calcolare la **radice quadrata** del parametro α (che può essere interpretato come l'ingresso dell'algoritmo iterativo)