Fondamenti di automatica

Esercizi di riepilogo sul controllo in retroazione sull'uscita

Esercizio 1

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2\,x_2 - 3\,x_3 + u \\ y &= (1-\alpha)\,x_1 + \alpha\,x_2 \end{cases}$$

a) Si determinino il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di α;

b) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 0$ e si consideri la legge di controllo in retroazione statica sull'uscita $u = -K\,y + H\,y^{\circ}$.

c) Dire per quali valori di K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;

d) Progettare, se possibile, i due guadagni K e H in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 3\,s + 2 & s+3 & 1 \\ 0 & s^2 + 3\,s & s \\ 0 & -2\,s & s^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -12\,x_1 + 16\,x_2 - 3\,x_3 + u \\ y &= \alpha\,x_1 + x_2 \end{cases}$$

a) Si determinino il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di α;

b) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 0$ e si consideri la legge di controllo in retroazione statica sull'uscita $u = -K\,y + H\,y^{\circ}$.

c) Dire per quali valori di K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;

d) Progettare, se possibile, i due guadagni K e H in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Suggerimenti:

Vale la fattorizzazione $s^3 + 3s^2 - 16s + 12 = (s^2 - 3s + 2)(s + 6)$

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 3\,s - 16 & s + 3 & 1 \\ -12 & s^2 + 3\,s & s \\ -12\,s & 16\,s - 12 & s^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha\, u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 4\, x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u \\ y &= x_3 \end{cases}$$

a) Si determinino il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di α;

b) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 1$ e si consideri la legge di controllo in retroazione statica sull'uscita $u = -K\, y + H\, y^{\circ}$.

c) Dire per quali valori di K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;

d) Progettare, se possibile, i due guadagni K e H in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 4 & 0 & 0 \\ s & s^2 & -4\, s \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2\,x_3 + \alpha\,u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 2\,x_3 \\ y &= x_3 \end{cases}$$

a) Si determinino il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di α;

b) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 1$ e si consideri la legge di controllo in retroazione statica sull'uscita $u = -K\,y + H\,y^{\circ}$.

c) Dire per quali valori di K si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;

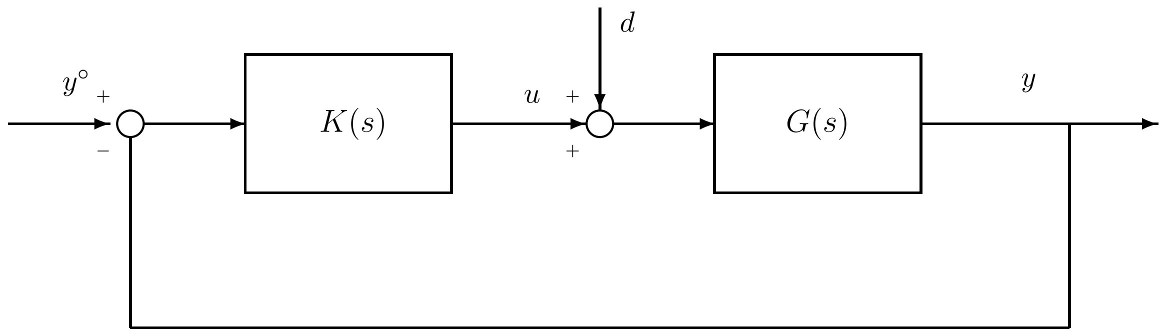
d) Progettare, se possibile, i due guadagni K e H in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Suggerimenti:

Vale la fattorizzazione $s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s+2)(s^2+1)$

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 2\,s + 1 & -2 & -2\,s \\ s + 2 & s^2 + 2\,s & -s - 2 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5



Si consideri il sistema a retroazione in figura con

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 - 9\,s}$$

Si consideri un controllore puramente proporzionale $K(s) = K_P$, corrispondente a una retroazione statica sull'uscita.

a) Si determinino il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ e le funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento e uscita $G^*_{y^\circ y}(s)$ e tra disturbo e uscita $G^*_{d\,y}(s)$.

b) Si verifichi che il sistemi in ciclo chiuso risulta instabile per ogni K_P.

Si consideri ora un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento

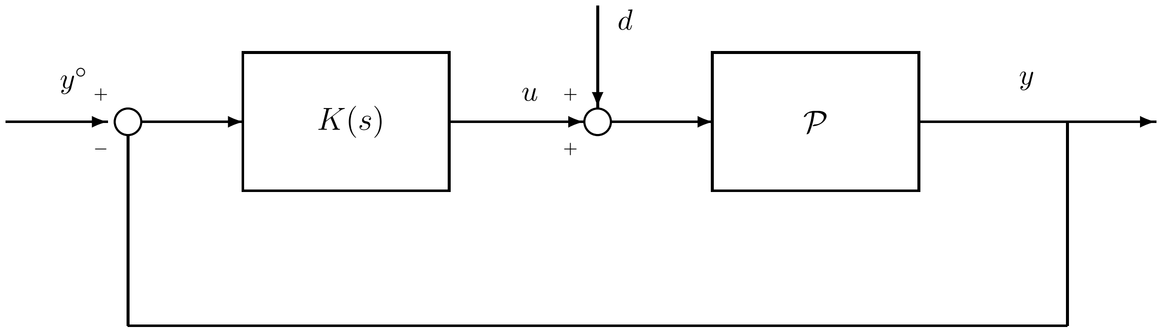
$$K(s) = \frac{K\,(s+3)}{s+10}$$

c) Si determinino il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ e le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento e uscita $G^*_{y^\circ y}(s)$ e tra disturbo e uscita $G^*_{d\,y}(s)$.

d) Si studi la stabilità in ciclo chiuso al variare di K.

e) Si fissi ora K tale da avere stabilità in ciclo chiuso e si supponga che $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 3 \cdot 1(t)$. Si determini il regime permanente per l'uscita $y(t)$ e l'errore di inseguimento $y(t) - y^\circ(t)$ a regime.

Esercizio 6



Si consideri il sistema a retroazione in figura in cui il processo $\mathcal{P}$ è descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 2\dot{u} + 2u$$

Si consideri una legge di controllo proporzionale-integrale (PI) del tipo

$$u(t) = K_P\,[y^\circ(t) - y(t)] + K_I \int_0^t [y^\circ(\tau) - y(\tau)]d\tau$$

a) Si determini la funzione di trasferimento $K(s)$ del controllore.

b) Si determinino il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ e le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento e uscita $G^*_{y^\circ y}(s)$ e tra disturbo e uscita $G^*_{d\,y}(s)$.

c) Si studi la stabilità in ciclo chiuso al variare di K_P e K_I.

d) Si fissino ora K_P e K_I tali da avere stabilità in ciclo chiuso e si supponga che $y^\circ(t) = 12 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 4 \cdot 1(t)$. Si determini il regime permanente per l'uscita $y(t)$ e l'errore di inseguimento $y(t) - y^\circ(t)$ a regime.

Esercizio 7

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= \alpha\, x_1 + x_2 \end{cases}$$

a) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

b) Fissato $\alpha = 1$ si progetti, se possibile, un sistema di controllo con regolatore (osservatore dello stato più retroazione sullo stato stimato) che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Esercizio 8

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha\, x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= \alpha\, x_1 + 2\, u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

a) Si dica per quali valori di α il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

b) Fissato $\alpha = 1$ si progetti, se possibile, un sistema di controllo con regolatore (osservatore dello stato più retroazione sullo stato stimato) che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix} = s\,(s^2 + 3\,s + 2) = s\,(s+1)\,(s+2)$$

Quindi i tre autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B + D$$

Essendo

$$\mathrm{Adj}(sI - A)B \;\; = \;\; \begin{bmatrix} s^2 + 3\,s + 2 & s+3 & 1 \\ 0 & s^2 + 3\,s & s \\ 0 & -2\,s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B \;\; = \;\; \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = \alpha s + 1 - \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{\alpha s + 1 - \alpha}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

Per $\alpha = 0$ non ci sono zeri al numeratore e quindi la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

Per $\alpha \neq 0$ posso invece scrivere

$$G(s) = \frac{\alpha[s + (1-\alpha)/\alpha]}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

e quindi il numeratore ha una radice in $(\alpha - 1)/\alpha$. Ricordando che nel calcolo della funzione di trasferimento devo effettuare tutte le cancellazioni, notiamo che quando $(\alpha - 1)/\alpha$ coincide con uno degli autovalori del sistema avviene una cancellazione tra numeratore e denominatore in $G(s)$ e quindi si ha un modo nascosto. Se invece $(\alpha - 1)/\alpha$ non coincide con nessuno degli autovalori del sistema non ci sono cancellazioni e quindi non ci sono modi nascosti.
Ad esempio per $(\alpha - 1)/\alpha = 0$, corrispondente a $\alpha = 1$, la funzione di trasferimento risulta essere

$$G(s) = \frac{s}{s\,(s+1)\,(s+2)} = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}$$

e di conseguenza l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è nascosto.

b) Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). In questo caso ho un solo autovalore non asintoticamente stabile $\lambda_1 = 0$, che come visto al punto precedente non compare come polo della $G(s)$ solo per $\alpha = 1$. Di conseguenza possiamo concludere che il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto per $\alpha \neq 1$.

c) Per $\alpha = 0$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quindi posso esistere valori di K per cui si ha stabilità in ciclo chiuso. Come visto per $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

e di conseguenza si ha $b(s) = 1$ e $a(s) = s\,(s+1)\,(s+2)$. Poiché in questo caso non ci sono modi nascosti, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\varphi^*(s) = a(s) + K\,b(s) = s\,(s+1)\,(s+2) + K = s^3 + 3\,s^2 + 2\,s + K$$

Si tratta di un polinomio di terzo grado con coefficienti $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = 2$, $a_0 = K$. Per studiarne la stabilità al variare di K posso costruire la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

In questo caso la tabella di Routh risulta quindi essere

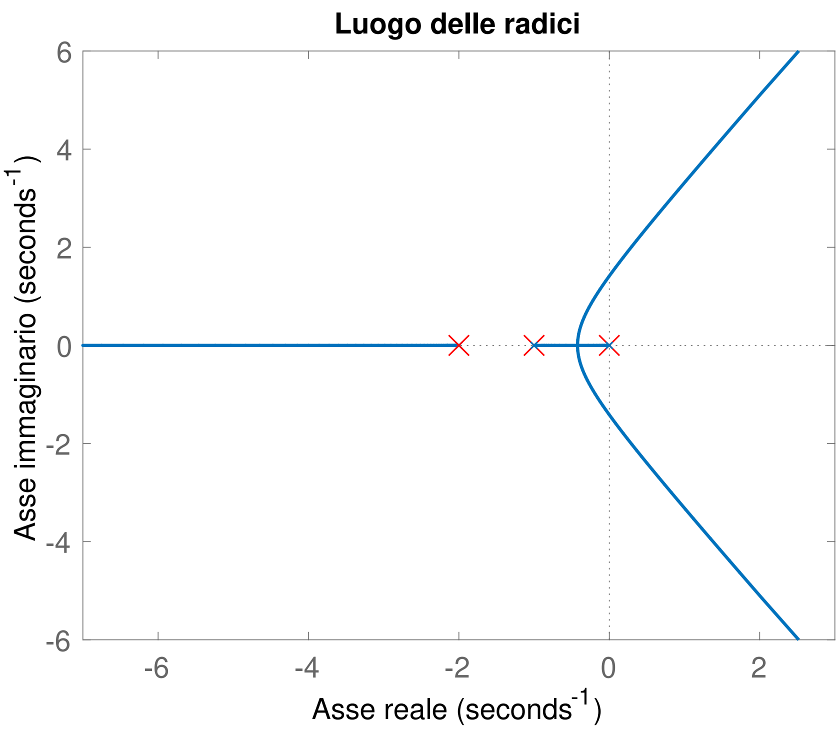
$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & K & 0 \\ 1 & (K-6)/3 & 0 & \\ 0 & K & 0 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $\varphi^*(s)$ abbia tutte le radici con $\mathrm{Re} < 0$ è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. In questo caso si ha quindi stabilità in ciclo chiuso quando $0 < K < 6$. In figura è riportato il corrispondente luogo delle radici in cui si conferma, come studiato analiticamente, che per $K > 6$ il sistema in ciclo chiuso diventa instabile.

d) Come visto al punto c) ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $0 < K < 6$. Fisso ad esempio $K = 3$. In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso risulta essere

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H = \frac{1}{s^3 + 3\,s^2 + 2\,s + 3}H$$

che ha guadagno in continua $G^*_{y^\circ y}(0) = H/3$. Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante pongo $G^*_{y^\circ y}(0)$ e quindi $H = 3$.


Luogo delle radici
Asse immaginario (seconds^{-1})
Asse reale (seconds^{-1})
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2

Esercizio 2

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 16 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 12 & -16 & s+3 \end{bmatrix} = s\,(s^2 + 3\,s - 16) + 12 = s^3 + 3\,s^2 - 16\,s + 12$$

che può essere fattorizzato come $\varphi(s) = s^3 + 3s^2 - 16s + 12 = (s^2 - 3s + 2)\,(s+6) = (s-1)\,(s-2)\,(s+6)$.
Quindi i tre autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -6$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B + D$$

Essendo

$$\mathrm{Adj}(sI - A)B = \begin{bmatrix} s^2 + 3\,s - 16 & s+3 & 1 \\ -12 & s^2 + 3\,s & s \\ -12\,s & 16\,s - 12 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = s + \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{s+\alpha}{(s-1)\,(s-2)\,(s+6)}$$

Osservo che il numeratore ha una radice in $-\alpha$. Ricordando che nel calcolo della funzione di trasferimento devo effettuare tutte le cancellazioni, notiamo che quando $-\alpha$ coincide con uno degli autovalori del sistema avviene una cancellazione tra numeratore e denominatore in $G(s)$ e quindi si ha un modo nascosto. Se invece $-\alpha$ non coincide con nessuno degli autovalori del sistema non ci sono cancellazioni e quindi non ci sono modi nascosti.
Ad esempio per $\alpha = -1$ la funzione di trasferimento risulta essere

$$G(s) = \frac{s-1}{(s-1)\,(s-2)\,(s+6)} = \frac{1}{(s-2)\,(s+6)}$$

e di conseguenza l'autovalore $\lambda_1 = 1$ è nascosto.

b) Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). In questo caso ho due autovalori non asintoticamente stabili $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Come visto al punto precedente, $\lambda_1 = 1$ non compare come polo della $G(s)$ quando $\alpha = -1$. Analogamente si vede che l'altro autovalore instabile $\lambda_2 = 2$ è nascosto quando $\alpha = -2$. Negli altri casi non ho modo nascosti o al massimo per $\alpha = 6$ ho un modo nascosto asintoticamente stabile. Di conseguenza possiamo concludere che il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto per $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq -2$.

c) Per $\alpha = 0$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quindi posso esistere valori di K per cui si ha stabilità in ciclo chiuso. Come visto per $\alpha = 0$ la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s}{(s-1)\,(s-2)\,(s+6)}$$

e di conseguenza si ha $b(s) = s$ e $a(s) = (s-1)\,(s-2)\,(s+6)$. Poiché in questo caso non ci sono modi nascosti, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\varphi^*(s) = a(s) + K\,b(s) = (s-1)\,(s-2)\,(s+6) + K\,s = s^3 + 3\,s^2 + (K-16)\,s + 12$$

Si tratta di un polinomio di terzo grado con coefficienti $a_3 = 1$, $a_2 = 3$, $a_1 = K - 16$, $a_0 = 12$. Per studiarne la stabilità al variare di K posso costruire la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

In questo caso la tabella di Routh risulta quindi essere

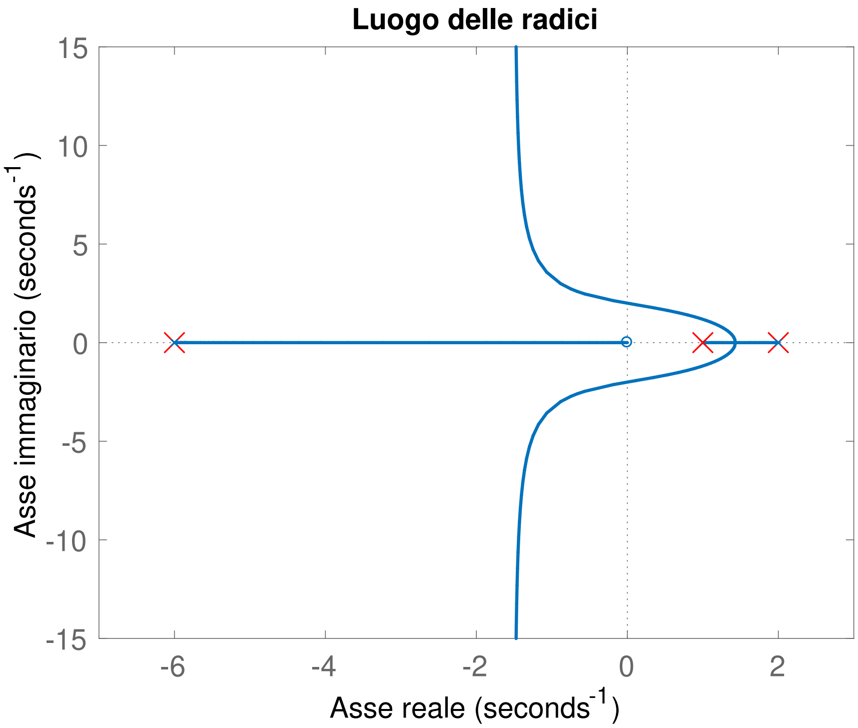
$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & K-16 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & K-20 & 0 & \\ 0 & 12 & 0 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $\varphi^*(s)$ abbia tutte le radici con Re < 0 è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. In questo caso si ha quindi stabilità in ciclo chiuso quando $K > 20$. In figura è riportato il corrispondente luogo delle radici in cui si conferma, come studiato analiticamente, che per $K > 20$ il sistema in ciclo chiuso diventa stabile.

d) Come visto al punto c) ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $K > 20$. Fisso ad esempio $K = 30$. In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso risulta essere

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H = \frac{s}{s^3 + 3\,s^2 + 14\,s + 12}H$$

Di conseguenza non posso avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante perché $G^*_{y^\circ y}(0) = 0$ per ogni H. Come si vede chiaramente dall'espressione di $G^*_{y^\circ y}(s)$ variando il guadagno K non posso infatti modificare lo zero in 0. Posso quindi concludere che non è possibile progettare un controllore in retroazione sull'uscita che garantisca congiuntamente stabilità in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante. Posso comunque applicare una legge di controllo stabilizzante ponendo ad esempio $H = K = 30$.


Luogo delle radici
Asse immaginario (seconds^{-1})
Asse reale (seconds^{-1})
15
10
5
0
-5
-10
-15
-6
-4
-2
0
2

Esercizio 3

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 4 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = s\,(s^2+4) = s\,(s-2\,j)\,(s+2\,j)$$

Quindi i tre autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,j$ e $\lambda_3 = -2\,j$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI-A)\,B + D$$

Essendo

$$C\mathrm{Adj}(sI-A) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+4 & 0 & 0 \\ s & s^2 & -4\,s \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI-A)\,B \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s^2 + \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{s^2+\alpha}{s\,(s^2+4)}$$

Osservo che il numeratore ha due radici in $\pm\sqrt{\alpha}\,j$. Ricordando che nel calcolo della funzione di trasferimento devo effettuare tutte le cancellazioni, notiamo che:

- quando $\alpha = 0$ una radice del numeratore cancella l'autovalore $\lambda_1 = 0$ e quindi si ha

$$G(s) = \frac{s}{(s^2+4)}$$

- quando $\alpha = 4$ le due radici del numeratore cancellano i due autovalori puramente immaginari $\lambda_{2,3} = \pm 2\,j$ e quindi si ha

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

- Per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 4$ non avvengono cancellazioni e quindi non ci sono modi nascosti.

b) Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). In questo caso tutti e tre gli autovalori sono non asintoticamente stabili. Di conseguenza il problema di controllo è ben posto quando non ci sono modi nascosti, ovvero come visto al punto precedente quando $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 4$.

c) Per $\alpha = 1$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quindi posso esistere valori di K per cui si ha stabilità in ciclo chiuso. Come visto per $\alpha = 1$ la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s\,(s^2 + 4)}$$

e di conseguenza si ha $b(s) = s^2 + 1$ e $a(s) = s\,(s^2 + 4)$. Poiché in questo caso non ci sono modi nascosti, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\varphi^*(s) = a(s) + K\,b(s) = s\,(s^2 + 4) + K\,(s^2 + 1) = s^3 + K\,s^2 + 4\,s + K$$

Si tratta di un polinomio di terzo grado con coefficienti $a_3 = 1$, $a_2 = K$, $a_1 = 4$, $a_0 = K$. Per studiarne la stabilità al variare di K posso costruire la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

In questo caso la tabella di Routh risulta quindi essere

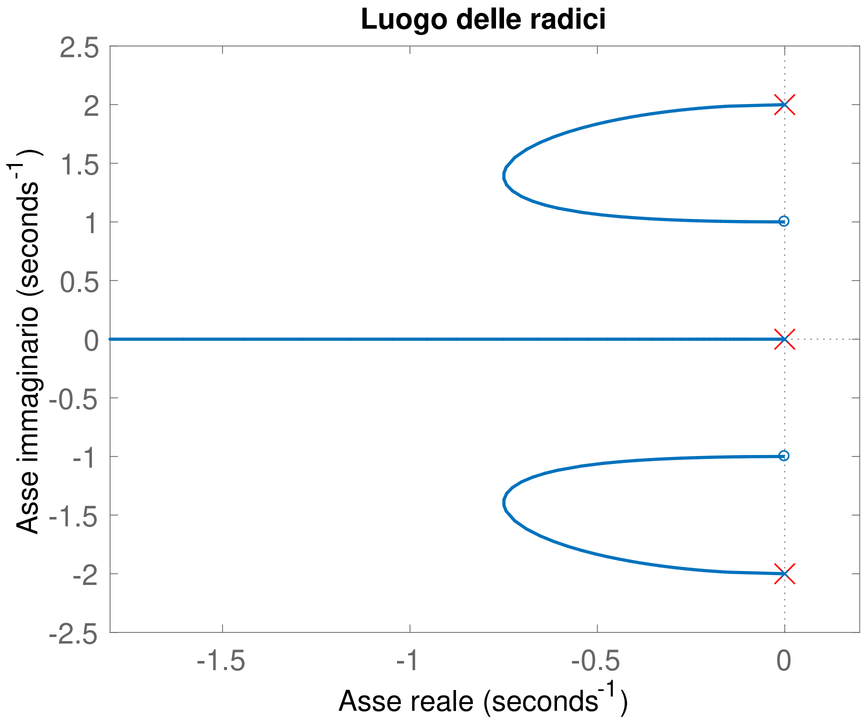
$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & K & K & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \\ 0 & K & 0 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $\varphi^*(s)$ abbia tutte le radici con Re < 0 è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. In questo caso si ha quindi stabilità in ciclo chiuso quando $K > 0$. In figura è riportato il corrispondente luogo delle radici in cui si conferma, come studiato analiticamente, che per $K > 0$ il sistema in ciclo chiuso diventa stabile.

d) Come visto al punto c) ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $K > 0$. Fisso ad esempio $K = 1$. In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso risulta essere

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 4\,s + 1}H$$

che ha guadagno in continua $G^*_{y^\circ y}(0) = H$. Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante pongo quindi $H = 1$.


Luogo delle radici
Asse immaginario (seconds^-1)
Asse reale (seconds^-1)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-1.5
-1
-0.5
0

Esercizio 4

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 2 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} = s\,(s^2 + 2\,s + 1) + 2 = s^3 + 2\,s^2 + s + 2$$

che può essere fattorizzato come $\varphi(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s+2)(s^2+1)$. Quindi i tre autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = j$ e $\lambda_3 = -j$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B + D$$

Essendo

$$C\mathrm{Adj}(sI - A) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 2\,s + 1 & -2 & -2\,s \\ s+2 & s^2 + 2\,s & -s-2 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B \;=\; \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = s + \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{s + \alpha}{(s+2)\,(s^2+1)}$$

Osservo che il numeratore ha una radice reale in $-\alpha$. Ricordando che nel calcolo della funzione di trasferimento devo effettuare tutte le cancellazioni, noto che la radice reale del numeratore non può mai cancellare i due autovalori immaginari. Di conseguenza ho solo due casi.
Per $\alpha = 2$ la radice del numeratore cancella l'autovalore reale $\lambda_1 = 1$ e quindi si ha

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+1)}$$

Per $\alpha \neq 2$ non avvengono cancellazioni e quindi non ci sono modi nascosti.

b) Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). In questo caso il sistema ha due autovalori con $\mathrm{Re} \geq$ ovvero $\lambda_{2,3} = \pm\,j$. Tuttavia come visto al punto precedente tali autovalori non si cancellano mai e quindi compaiono sempre come poli della funzione di trasferimento. Di conseguenza il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto per ogni α.

c) Per $\alpha = 1$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quindi posso esistere valori di K per cui si ha stabilità in ciclo chiuso. Come visto per $\alpha = 1$ la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s^2+1)}$$

e di conseguenza si ha $b(s) = s+1$ e $a(s) = (s+2)\,(s^2+1)$. Poiché in questo caso non ci sono modi nascosti, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\varphi^*(s) = a(s) + K\,b(s) = (s+2)\,(s^2+1) + K\,(s+1) = s^3 + 2\,s^2 + (K+1)\,s + K + 2$$

Si tratta di un polinomio di terzo grado con coefficienti $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = K+1$, $a_0 = K+2$. Per studiarne la stabilità al variare di K posso costruire la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

In questo caso la tabella di Routh risulta quindi essere

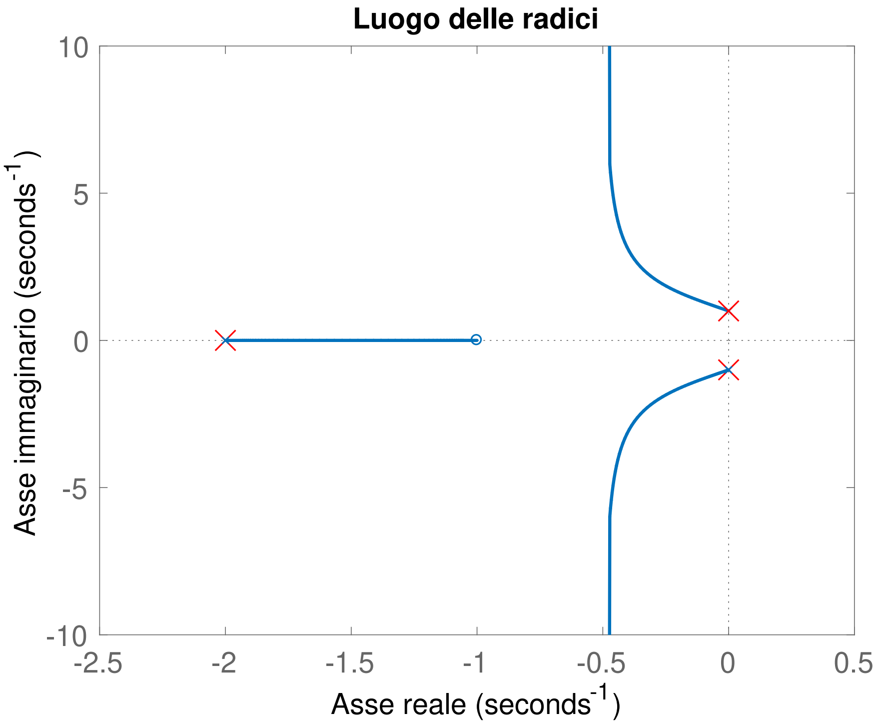
$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & K+1 & 0 \\ 2 & 2 & K+2 & 0 \\ 1 & K/2 & 0 & \\ 0 & K+2 & 0 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $\varphi^*(s)$ abbia tutte le radici con $\mathrm{Re} < 0$ è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. In questo caso si ha quindi stabilità in ciclo chiuso quando $K > 0$. In figura è riportato il corrispondente luogo delle radici in cui si conferma, come studiato analiticamente, che per $K > 0$ il sistema in ciclo chiuso è sempre stabile.

d) Come visto al punto c) ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $K > 0$. Fisso ad esempio $K = 1$. In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso risulta essere

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H = \frac{s+1}{s^3 + 2\,s^2 + 2\,s + 3}H$$

che ha guadagno in continua $G^*(0) = H/3$. Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante pongo quindi $H = 3$.


Luogo delle radici
10
5
0
-5
-10
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Asse immaginario (seconds^{-1})
Asse reale (seconds^{-1})

Esercizio 5

a) Per l'impianto si ha $G(s) = b(s)/a(s)$ con $b(s) = s+2$ e $a(s) = s^3 - 9\,s$. Suppongo che l'impianto non abbia autovalori nascosti e quindi $\varphi(s) = a(s) = s^3 - 9\,s$. Per il controllore, essendo $K(s) = K_P$, ho $K(s) = q(s)/p(s)$ con $q(s) = K_P$ e $p(s) = 1$. Per il sistema a retroazione, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è

$$\varphi^*(s) = a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s) = s^3 - 9\,s + K_P\,(s+2) = s^3 + (K_P - 9)\,s + 2\,K_P$$

Le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso sono

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)} = \frac{K_P\,(s+2)}{s^3+(K_P-9)\,s+2\,K_P}$$

$$G^*_{d\,y}(s) = \frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)} = \frac{(s+2)}{s^3+(K_P-9)\,s+2\,K_P}$$

b) Osservando il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ noto che il coefficiente del termine di grado 2 è sempre pari a 0 per ogni K_P. Come noto condizioni necessaria affinché tutte le radici di un polinomio abbiamo tutte $\mathrm{Re} < 0$ è che tutti i coefficienti siano non nulli e abbiano segno concorde. In questo caso quindi la condizione necessaria non è mai soddisfatta per ogni K_P e posso immediatamente concludere che il sistema in ciclo non è asintoticamente stabile per ogni K_P. Posso confermare questa conclusione provando a costruire la tabella di Routh del polinomio

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

che in questo caso risulta essere non regolare

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & K_P - 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2\,K_P & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{array}$$

c) In questo caso, per il controllore si ha $K(s) = q(s)/p(s)$ con $q(s) = K\,(s+3)$ e $p(s) = s+10$. Per il sistema a retroazione, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s) = (s^3 - 9\,s)\,(s+10) + K\,(s+3)(s+2) \\ &= s\,(s+3)\,(s-3)\,(s+10) + K\,(s+3)(s+2) \\ &= (s+3)[s\,(s-3)\,(s+10) + K\,(s+2)] \\ &= (s+3)\,(s^3 + 7\,s^2 + (K-30)\,s + 2\,K) \end{aligned}$$

Le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso sono

$$\begin{aligned} G^*_{y^\circ y}(s) &= \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)} \\ &= \frac{K\,(s+3)\,(s+2)}{(s+3)\,(s^3+7\,s^2+(K-30)\,s+2\,K)} = \frac{K\,(s+2)}{s^3+7\,s^2+(K-30)\,s+2\,K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^*_{d\,y}(s) &= \frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s)+b(s)\,q(s)} \\ &= \frac{(s+2)\,(s+10)}{(s+3)\,(s^3+7\,s^2+(K-30)\,s+2\,K)} \end{aligned}$$

d) Osservo che il polinomio caratteristico in ciclo chiuso ha sempre una radice in -3 che non dipende dal parametro K ma che comunque ha $\mathrm{Re} < 0$ (tale radice corrisponde a un polo dell'impianto cancellato da un zero del controllore). Gli altri 3 autovalori in ciclo chiuso sono le radici del polinomio di terzo grado $s^3 + 7\,s^2 + (K - 30)\,s + 2\,K$. Per studiare la stabilità del polinomio al variare di K posso costruire la sua tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & E_{01} & 0 & \end{array} \qquad \text{con } E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{01} = a_0$$

Essendo per il polinomio considerato $a_3 = 1$, $a_2 = 7$, $a_1 = K - 30$ e $a_0 = 2\,K$ si ha

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & K - 30 & 0 \\ 2 & 7 & 2\,K & 0 \\ 1 & (5\,K - 210)/7 & 0 & \\ 0 & 2\,K & 0 & \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $\varphi^*(s)$ abbia tutte le radici con $\mathrm{Re} < 0$ è che tutti gli elementi della prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. In questo caso si ha quindi stabilità in ciclo chiuso quando $5\,K > 210$ e $K > 0$, ovvero per $K > 42$.

e) Come visto al punto precedente ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $K > 42$. Fisso ad esempio $K = 50$ che assegna come funzioni di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ\, y}(s) = \frac{50\,(s+2)}{s^3 + 7\,s^2 + 20\,s + 100}$$

$$G^*_{d\,y}(s) = \frac{(s+2)\,(s+10)}{(s+3)\,(s^3 + 7\,s^2 + 20\,s + 100)}$$

La risposta complessiva ai due ingressi $d(t)$ e $y^\circ(t)$ è

$$Y(s) = G^*_{y^\circ\, y}(s)\, Y^\circ(s) + G^*_{d\,y}(s)\, D(s)$$

Poiché entrambe le funzioni di trasferimento sono BIBO stabili e poiché entrambi gli ingressi sono a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 3 \cdot 1(t)$, posso applicare il teorema fondamentale della risposta in frequenza e concludere che regime permanente per l'uscita sarà

$$y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) = G^*_{y^\circ\, y}(0)\, 2 \cdot 1(t) + G^*_{d\,y}(0)\, 3 \cdot 1(t)$$

I due guadagni in continua sono $G^*_{y^\circ\, y}(0) = 1$ e $G^*_{d\,y}(0) = 1/5$, di conseguenza il regime permanente per l'uscita è $y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) = 2 \cdot 1(t) + 3/5 \cdot 1(t) = 13/5 \cdot 1(t)$. L'errore di inseguimento a regime sarà quindi $y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) - y^\circ(t) = 3/5 \cdot 1(t)$.

Esercizio 6

a) Passando nel dominio di Laplace e ponendo a zero le condizioni iniziali (lo posso fare perché sto calcolando la funzione di trasferimento che riguarda la sola risposta forzata) ho

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P[Y^\circ(s) - Y(s)] + \frac{K_I}{s}[Y^\circ(s) - Y(s)] = \left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)[Y^\circ(s) - Y(s)] \\ &= \frac{K_P\, s + K_I}{s}[Y^\circ(s) - Y(s)] \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del controllore è quindi

$$K(s) = \frac{K_P\, s + K_I}{s}$$

b) Riscriviamo la relazione ingresso-uscita del processo $\mathcal{P}$ in forma standard

$$\ddot{y} = 2\dot{y} + 3y + 2\dot{u} + 2u$$

Si tratta quindi di un sistema di ordine $n = 2$

$$\ddot{y} = \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$$

con $\alpha_1 = 2$, $\alpha_0 = 3$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 2$ e $\beta_0 = 2$. Il polinomio caratteristico risulta quindi essere

$$\varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 = s^2 - 2s - 3 = (s-3)(s+1)$$

mentre la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{2s+2}{s^2 - 2s - 3} = \frac{2(s+1)}{(s+1)(s-3)} = \frac{2}{s-3}$$

Abbiamo quindi $b(s) = 2$, $a(s) = s - 3$ e $\varphi_h(s) = s + 1$. Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto perché il polinomio $\varphi_h(s)$ è stabile. Per il controllore, si ha $K(s) = q(s)/p(s)$ con $q(s) = K_P\, s + K_I$ e $p(s) = s$. Per il sistema a retroazione, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) = \varphi_h(s)[a(s)\, p(s) + b(s)\, q(s)] &= (s+1)[(s-3)\, s + 2\,(K_P\, s + K_I)] \\ &= (s+1)[s^2 + (2\, K_P - 3)\, s + 2\, K_I] \end{aligned}$$

Le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso sono

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\, q(s)}{a(s)\, p(s) + b(s)\, q(s)} = \frac{2\,(K_P\, s + K_I)}{s^2 + (2\, K_P - 3)\, s + 2\, K_I}$$

$$G^*_{d\, y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\, p(s)}{a(s)\, p(s) + b(s)\, q(s)} = \frac{2\, s}{s^2 + (2\, K_P - 3)\, s + 2\, K_I}$$

c) Poiché $\varphi_h(s)$ è stabile, la stabilità in ciclo chiuso dipende dal polinomio dei poli in ciclo chiuso $a^*(s) = a(s)\, p(s) + b(s)\, q(s) = s^2 + (2\, K_P - 3)\, s + 2\, K_I$. Il polinomio $a^*(s)$ ha grado 2 e quindi per studiarne la stabilità posso applicare la regola di Cartesio. Quindi condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $a^*(s)$ abbia tutte le radici con $\mathrm{Re} < 0$ è che tutti i coefficienti siano non nulli e abbiano segno concorde. In questo caso avrò quindi stabilità asintotica in ciclo chiuso quando $2\, K_P - 3 > 0$ e $2\, K_I > 0$, ovvero per $K_P > 3/2$ e $K_I > 0$.

d) Come visto al punto precedente ho stabilità asintotica in ciclo chiuso per $K_P > 3/2$ e $K_I > 0$. Fisso ad esempio $K_P = 2$ e $K_I = 1$ che assegna come funzioni di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{2\,(2\,s+1)}{s^2+s+2}$$

$$G^*_{d\,y}(s) = \frac{2\,s}{s^2+s+2}$$

La risposta complessiva ai due ingressi $d(t)$ e $y^\circ(t)$ è

$$Y(s) = G^*_{y^\circ y}(s)\,Y^\circ(s) + G^*_{d\,y}(s)\,D(s)$$

Poiché entrambe le funzioni di trasferimento sono BIBO stabili e poiché entrambi gli ingressi sono a gradino $y^\circ(t) = 12 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 4 \cdot 1(t)$, posso applicare il teorema fondamentale della risposta in frequenza e concludere che regime permanente per l'uscita sarà

$$y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) = G^*_{y^\circ y}(0)\,12 \cdot 1(t) + G^*_{d\,y}(0)\,4 \cdot 1(t)$$

I due guadagni in continua sono $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ e $G^*_{d\,y}(0) = 0$, di conseguenza il regime permanente per l'uscita è $y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) = 12 \cdot 1(t) + 0 \cdot 1(t) = 12 \cdot 1(t)$. L'errore di inseguimento a regime sarà quindi $y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t) - y^\circ(t) = 0$. Ho quindi inseguimento perfetto del riferimento costante anche in presenza di un disturbo costante (avrei potuto raggiungere immediatamente la stessa conclusione notando che il controllore presenta un'azione integrale).

Esercizio 7

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s\,(s+1)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B + D$$

Essendo

$$\mathrm{Adj}(sI - A)B \quad = \quad \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B \quad = \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = s + \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{s + \alpha}{s^2 + s}$$

Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). In questo caso l'unico autovalore non asintoticamente stabile è $\lambda_1 = 0$. Tale autovalore non compare come polo della funzione di trasferimento (e quindi è nascosto) solo per $\alpha = 0$. Di conseguenza posso concludere che il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto per ogni $\alpha \neq 0$.

b) Per $\alpha = 1$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto e quindi posso effettuare il progetto. Considero una legge di controllo con regolatore del tipo

$$\begin{cases} u &= -F\,\hat{x} + H\,y^{\circ} \\ \dfrac{d\hat{x}}{dt} &= A\,\hat{x} + B\,u + L\,(y - C\,\hat{x}) \end{cases}$$

Per progettare il regolatore devo

- scegliere F guadagno in *feedback* (retroazione) tale che la matrice $A - B\,F$ sia asintoticamente stabile;
- scegliere H guadagno in *feedforward* tale che $G^*_{y^{\circ}y}(0) = 1$ con $G^*_{y^{\circ}y}(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BH$ (in modo da avere inseguimento perfetto di un riferimento costante);
- scegliere L guadagno dell'*osservatore* tale cha la matrice $A - L\,C$ sia asintoticamente stabile.

Partiamo con il progetto di F. La matrice $A - B\,F$ assume la forma

$$\begin{aligned} A - \,BF &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_1 & -1 - f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\det(sI - A + B\,F) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ f_1 & s + 1 + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1 + f_2)\,s + f_1$$

Per la regola di Cartesio la matrice $A - B\,F$ è asintoticamente stabile per $f_1 > 0$ e $f_2 > -1$. Ad esempio posso porre $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$ così da avere

$$\det(sI - A + B\,F) = s^2 + 2\,s + 1 = (s + 1)^2$$

assegnando quindi entrambe le radici in -1.
Consideriamo ora il progetto di H. La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C\,(sI - A + B\,F)^{-1}\,BH = \frac{1}{\det(sI - A + B\,F)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F)\,BH$$

Essendo

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s + 1 & s + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F)\,B = \begin{bmatrix} s + 1 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s + 1$$

Di conseguenza, si ha

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2} = \frac{1}{s + 1} H$$

Per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante devo porre $H = 1$.
Concludiamo con il progetto di L. La matrice $A - L\,C$ assume la forma

$$\begin{aligned} A - L\,C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_1 \\ \ell_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\ell_1 & 1 - \ell_1 \\ -\ell_2 & -1 - \ell_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \det(sI - A + L\,C) &= \det \begin{bmatrix} s + \ell_1 & -1 + \ell_1 \\ \ell_2 & s + 1 + \ell_2 \end{bmatrix} = (s + \ell_1)\,(s + 1 + \ell_2) + \ell_2 - \ell_1\,\ell_2 \\ &= s^2 + (\ell_1 + \ell_2 + 1)\,s + \ell_1 + \ell_2 \end{aligned}$$

Per la regola di Cartesio la matrice $A - L\,C$ è asintoticamente stabile per $\ell_1 + \ell_2 + 1 > 0$ e $\ell_1 + \ell_2 > 0$. In particolare notiamo che vale la fattorizzazione

$$\det(sI - A + L\,C) = s^2 + (\ell_1 + \ell_2 + 1)\,s + \ell_1 + \ell_2 = (s + 1)\,(s + \ell_1 + \ell_2)$$

Quindi in questo caso l'autovalore in -1 non può essere modificato mediante la scelta di L (si tratta infatti di un autovalore non osservabile) ma è comunque stabile. Ponendo ad esempio $\ell_1 = 10$ e $\ell_2 = 0$ assegnamo l'altro autovalore di $A - L\,C$ in -10. Con le scelte fatte, nel complesso il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + B\,F)\,\det(sI - A + L\,C) = (s + 1)^2\,(s + 1)\,(s + 10) = (s + 1)^3\,(s + 10)$$

Esercizio 8

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-\alpha & 0 \\ -\alpha & s \end{bmatrix} = s\,(s-\alpha)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \alpha$.
La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B + D$$

Essendo

$$C\mathrm{Adj}(sI - A) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ \alpha & s-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s-\alpha \end{bmatrix}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B \quad = \quad \begin{bmatrix} \alpha & s-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha + 2\,s - 2\,\alpha = 2\,s - \alpha$$

Di conseguenza, essendo $D = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{2\,s - \alpha}{s\,(s-\alpha)}$$

Il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto quando tutti gli autovalori del sistema con $\mathrm{Re} \geq 0$ compaiono come poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (con la stessa molteplicità). Notiamo che l'unico caso in cui avviene una semplificazione tra numeratore e denominatore è per $\alpha = 0$. Quindi per $\alpha \neq 0$ non ci sono autovalori nascosti e di conseguenza il il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto. Al contrario, per $\alpha = 0$, si ha

$$G(s) = \frac{2\,s}{s^2} = \frac{2}{s}$$

e quindi uno dei due autovalori in 0 si cancella. Di conseguenza ho $\varphi_h(s) = \varphi(s)\ a(s) = s$ che non è asintoticamente stabile e quindi il il problema di controllo in retroazione sull'uscita non è ben posto.

b) Per $\alpha = 1$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto e quindi posso effettuare il progetto. Considero una legge di controllo con regolatore del tipo

$$\begin{cases} u &= -F\,\hat{x} + H\,y^\circ \\ \dfrac{d\hat{x}}{dt} &= A\,\hat{x} + B\,u + L\,(y - C\,\hat{x}) \end{cases}$$

Per progettare il regolatore devo

- scegliere F guadagno in *feedback* (retroazione) tale che la matrice $A - B\,F$ sia asintoticamente stabile;
- scegliere H guadagno in *feedforward* tale che $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ con $G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BH$ (in modo da avere inseguimento perfetto di un riferimento costante);

- scegliere L guadagno dell'*osservatore* tale cha la matrice $A - L\,C$ sia asintoticamente stabile.

Partiamo con il progetto di F. La matrice $A - B\,F$ assume la forma

$$\begin{aligned} A - \; BF &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 2\,f_1 & 2\,f_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - f_1 & -f_2 \\ 1 - 2\,f_1 & -2\,f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \det(sI - A + B\,F) &= \det \begin{bmatrix} s - 1 + f_1 & f_2 \\ -1 + 2\,f_1 & s + 2\,f_2 \end{bmatrix} \\ &= (s - 1 + f_1)\,(s + 2\,f_2) - f_2\,(-1 + 2\,f_1) \\ &= s^2 + (f_1 + 2\,f_2 - 1)\,s - f_2 \end{aligned}$$

Per la regola di Cartesio la matrice $A - B\,F$ è asintoticamente stabile per $f_1 + 2\,f_2 - 1 > 0$ e $f_2 > 0$. Ad esempio posso porre $f_1 = 5$ e $f_2 = -1$ così da avere

$$\det(sI - A + B\,F) = s^2 + 2\,s + 1 = (s + 1)^2$$

assegnando quindi entrambe le radici in -1.
Consideriamo ora il progetto di H. La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C\,(sI - A + B\,F)^{-1}\,BH = \frac{1}{\det(sI - A + B\,F)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F)\,BH$$

Essendo

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s + 4 & -1 \\ 9 & s - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - 2 & 1 \\ -9 & s + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & s + 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$C\,\mathrm{Adj}(sI - A + B\,F)\,B = \begin{bmatrix} -9 & s + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -9 + 2\,s + 8 = 2\,s - 1$$

Di conseguenza, si ha

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{2\,s - 1}{(s + 1)^2} H$$

Per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante devo porre $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ e quindi $H = -1$.
Concludiamo con il progetto di L. La matrice $A - L\,C$ assume la forma

$$A - L\,C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \ell_1 \\ 0 & \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\ell_1 \\ 1 & -\ell_2 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \det(sI - A + L\,C) &= \det \begin{bmatrix} s - 1 & \ell_1 \\ -1 & s + \ell_2 \end{bmatrix} = (s - 1)\,(s + \ell_2) + \ell_1 \\ &= s^2 + (\ell_2 - 1)\,s + \ell_1 - \ell_2 \end{aligned}$$

Per la regola di Cartesio la matrice $A - L\,C$ è asintoticamente stabile per $\ell_2 - 1 > 0$ e $\ell_1 - \ell_2 > 0$. Ad esempio posso porre $\ell_1 = 121$ e $\ell_2 = 21$ così da avere

$$\det(sI - A + L\,C) = s^2 + 20\,s + 100 = (s + 10)^2$$

assegnando quindi entrambe le radici in -10. Con le scelte fatte, nel complesso il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + B\,F)\,\det(sI - A + L\,C) = (s + 1)^2\,(s + 10)^2$$