Fondamenti di automatica

Esercizi di riepilogo sull'analisi modale

1 Polinomio caratteristico e minimo, e funzione di trasferimento

Si consideri il sistema dinamico LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con x stato, u ingresso e y uscita. Si determinino il polinomio caratteristico $\varphi(s)$, il polinomio minimo $m(s)$, e la funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

per il sistema dinamico nei seguenti casi:

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 1$
2. $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0$
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0$
4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0$

2 Modi naturali

Si considerino gli stessi sistemi dinamici considerati nella Sezione 1. Determinare i modi naturali del sistema.

Soluzioni

1 Polinomio caratteristico e minimo, e funzione di trasferimento

1. $\varphi(s) = m(s) = (s+1)(s-1),\ G(s) = \frac{s+3}{s+1}$
2. $\varphi(s) = m(s) = s^2 + 4s + 6,\ G(s) = -\frac{4}{s^2+4s+6}$
3. $\varphi(s) = s^3,\ m(s) = s,\ G(s) = \frac{1}{s}$
4. $\varphi(s) = s^3,\ m(s) = s^2,\ G(s) = \frac{s+1}{s^2}$

2 Modi naturali

1. e^t, e^{-t}
2. $e^{-2t}\cos(\sqrt{2}\,t),\ e^{-2t}\sin(\sqrt{2}\,t)$
3. 1
4. 1, t