1 Trasformata Laplace

Definita come
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

1.1 Teoremi

- Traslazine in frequenza
$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\} = F(s-\lambda)$$
- Prodotto per t / derivata in frequenza
$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

1.2 Notevoli

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}\{e^{\lambda t}1(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$
$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad ; \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}\{t1(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad \mathcal{L}\{t^2 1(t)\} = \frac{2}{s^3} \quad ; \quad \mathcal{L}\{\frac{t^l}{l!}e^{at}1(t)\} = \frac{1}{(s-a)^{l+1}}$$

2 Antitrasformata Laplace

2.1 Poli Singoli

2.1.1 Teorema dei residui

$$F(s) = \sum_{i=0}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$
$$K_i = \lim_{s \to p_i}(s-p_i)F(s)$$

- In $0 \Rightarrow 1(s)$
- Else if $\in \mathbb{R} \Rightarrow e^{polo\ t}1(s)$
- Complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$ Detti:
  - K il polo corrispondente a $\sigma + j\omega$
  - α e β le parti reali e immaginarie di K

$$e^{\sigma t}(2\alpha\cos(\omega t) - 2\beta\sin(\omega t))1(t)$$

2.2 Poli Multipli

- In $0 \Rightarrow t^{\text{molteplicità polo}-1} 1(t)$
- Else if $\in \mathbb{R} \Rightarrow t^{\text{molteplicità polo}-1} 1(t)$
- Else $\Rightarrow$ mi sa lo vedo dopo

2.3 Sistemi LTI TC

Definizione :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

per i sistemi SISO (Single Input, Single Output) B è un vettore colonna, C è un vettore riga, $D \in \mathbb{R}$

- Evoluzioni nel tempo

$$\begin{aligned} x_l(t) &= e^{At}x_0 \\ x_f(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y_l(t) &= Cx_l(t) = Ce^{At}x_0 \\ y_f(t) &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

- Evoluzioni in Laplace

$$\begin{aligned} X_l(s) &= \mathcal{L}\{e^{At}x_0\} = (sI - A)^{-1}x_0 \\ X_f(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y_l(s) &= CX_l(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 \\ Y_f(s) &= CX_f(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

3 Sistemi di Controllo

3.1 Retroazione sullo Stato

- Uscita controllore

$$u(t) = Hy^0(t) - Fx(t)$$

- Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* = \begin{cases} \dot{x}(t) & = (A - BF)x(t) + BHy^0 \\ y(t) & = Cx(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}(t) & = A^*x(t) + B^*y^0(t) \\ y(t) & = Cx(t) \end{cases}$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^0y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)}$$

con

$$r(s) = CAdj(sI - A)B$$

nominatore della funzione di trasferimento di $\mathcal{P}$ normale

3.2 Retroazione sul'Uscita

3.2.1 Retroazione Algebrica sull'Uscita

- Uscita controllore

$$\begin{aligned} u(t) &= -Ky(t) + Hy^0(t) \\ &= -KCx(t) + Hy^0(t) \end{aligned}$$

- Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* = \begin{cases} \dot{x}(t) & = (A - BKC)x(t) + BHy^0(t) \\ y(t) & = Cx(t) \end{cases}$$

- Funzione di Trasferimento in Ciclo Chiuso

$$G^*_{y^0y}(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}\mathbf{H}$$

con

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$G^*_{y^0y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + Kb(s)}\mathbf{H} = \frac{b(s)}{a^*(s)}\mathbf{H}$$

non cambia autovalori nascosti, $\varphi^*(s) = \varphi_{normale}(s)$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)a^*(s) = \varphi^*(s)(a(s) + Kb(s))$$

3.2.2 Retroazione Dinamica sull'Uscita

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} G^*_{y^0 y}(s) &= \frac{G(s)}{1+KG(s)}\mathbf{H(s)} \\ &= \frac{G(s)K(s)\mathbf{H_f}}{1+K(s)G(s)} \end{aligned}$$

  Mettendo $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ e $K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$

$$G(s) = \frac{b(s)q(s)}{a(s)b(s) + b(s)q(s)}\mathbf{H_f} = \frac{b^*(s)}{a^*(s)}\mathbf{H_f}$$

  non cambia autovalori nascosti, $\varphi^*(s) = \varphi_{normale}(s)$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)a^*(s) = \varphi_h(s)a(s)b(s) + b(s)q(s)$$

3.2.3 Regolatore

- Osservatore di Luenberger

$$\begin{aligned} \mathcal{O}: \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + B\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} + B\hat{x} + L(C(x - \hat{x})) \end{aligned}$$

- Evoluzione dell'errore (ϵ è l'errore)

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= (x(t) - \hat{x}(t)) \\ \frac{d\epsilon(t)}{dt} &= \frac{d(x(t) - \hat{x}(t))}{dt} = (A - LC)(\epsilon(t)) \end{aligned}$$

Sistema in ciclo chiuso

- Uscita della retroazione sullo stato approssimato

$$u(t) = -F\hat{x}(t) + Hy^0(t) = -F(x(t) - \epsilon(t)) + Hy^0(t)$$

- Stato ed evoluzione completa del sistema in ciclo chiuso

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BF(x(t) - \epsilon(t)) + BHy^0(t) \\ \dot{\epsilon}(t) &= (A - LC)\epsilon(t) \\ y &= Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\epsilon}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A - BF) & BF \\ 0 & (A - LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y^0 \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)\,\det(sI - A + LC)$$