

Contents

1	Trasformata Laplace	1
1.1	Teoremi	1
1.2	Notevoli	1
2	Antitrasformata laplace / Analisi modale	2
2.1	Residui	2
2.2	Risposta per poli...	2
2.3	Poli a molteplicità multipla	2
3	Sistemi LTI TC	2
3.1	Evoluzione stato e uscita	3
3.1.1	Evoluzioni nel tempo	3
3.1.2	Evoluzioni in Laplace	3
3.1.3	Funzione di trasferimento	4

Fonti usate:

esercizi di riepilogo (non ha pubblicato un programma, che io sappia)

e/o slide e/o la cazzo di cane

1 Trasformata Laplace

- Definizione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

1.1 Teoremi

- Ritardo

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\} = F(s - \lambda)$$

1.2 Notevoli

- Gradino (ricavi con definizione)

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

- Esponenziale causale (ricavi col teorema del ritardo)

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}1(t)\} = \frac{1}{s - \lambda}$$

- Seno causale (ricavi con l'esponenziale)

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Coseno causale (ricavi con l'esponenziale)

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Impulso di dirac (ricavi con definizione) (usata per funzioni semplicemente proprie)

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

- Rampa unitaria (ricavi prodotto per t) (usata per poli nulli a molteplicità 2)
- Rampa parabolica (ricavi prodotto per t) (usata per poli nulli a molteplicità 3)
- Esponenziale \times monomio (usata per poli non nulli a molteplicità multipla)

2 Antitrasformata laplace / Analisi modale

2.1 Residui

2.2 Risposta per poli...

- Reali Modo naturale $e^{polo \ t}$, con $t \geq 0$
- Complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$ (I complessi sono per forza coniugati qui)
Detti:
 - K e \overline{K} i residui corrispondenti ai poli, che saranno coniugati complessi
 - α e β le parti reali e immaginarie di K (o \overline{K} tanto la formula torna lo stesso)

$$e^{\sigma t}(2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t))1(t)$$

2.3 Poli a molteplicità multipla

- Reali con molteplicità l Modi naturali $1(t), t1(t), \dots, t^{l-1}1(t)$
- Complessi coniugati con molteplicità l Modi naturali (da rivedere)

3 Sistemi LTI TC

- Definizione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

per i sistemi SISO (Single Input, Single Output) B è un vettore colonna, C è un vettore riga, $D \in \mathbb{R}$

3.1 Evoluzione stato e uscita

3.1.1 Evoluzioni nel tempo

- Evoluzione stato nel tempo

– libera

$$x_l(t) = e^{At}x_0$$

– forzata

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

– complessiva

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

- Evoluzione uscita nel tempo

– libera

$$y_l(t) = Cx_l(t) = Ce^{At}x_0$$

– forzata

$$y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

– complessiva

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

3.1.2 Evoluzioni in Laplace

- Evoluzione stato nel tempo

- libera

$$X_l(s) = \mathcal{L}\{e^{At}x_0\} = (sI - A)^{-1}x_0$$

- forzata

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- complessiva

$$X(s) = X_l(s) + X_f(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- Evoluzione uscita nel tempo

- libera

$$Y_l(s) = CX_l(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

- forzata

$$Y_f(s) = CX_f(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

- complessiva

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

3.1.3 Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$