

1.1 Modelli di sistemi dinamici: le equazioni di stato

L'Automatica studia i sistemi dinamici usando il linguaggio e gli strumenti della matematica. Alla base dell'automatica e della teoria dei Sistemi vi è la nozione di modello. Un **modello** è una descrizione matematica *quantitativa* di un sistema dinamico, che permette di studiare le proprietà del sistema d'interesse. Vi sono varie tipologie di modelli matematici, ad esempio gli *automi* nell'ambito dell'Informatica oppure i *modelli grafici* nell'ambito delle Scienze Statistiche. Nell'ambito dell'Automatica, i modelli matematici vengono tradizionalmente rappresentati mediante *equazioni differenziali* o *equazioni alle differenze*,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(sistemi TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(sistemi TD)} & x(t+1) \end{array} \right\} = f(t, x(t), u(t))$$

dove t rappresenta la variabile temporale che può assumere valori reali o interi. Nel primo caso si parla di sistemi a tempo continuo (TC) mentre nel secondo caso si parla di sistemi a tempo discreto (TD). La variabile $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è il cosiddetto *stato* del sistema. Esso rappresenta tutte le quantità che caratterizzano il sistema dinamico d'interesse, ed in generale assume valori vettoriali. La variabile $u(t) \in \mathbb{R}^m$ è il cosiddetto *ingresso* del sistema. Esso rappresenta l'insieme di tutte le quantità che influenzano il comportamento del sistema dinamico d'interesse. Queste quantità possono essere manipolabili o meno. La funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ specifica la *legge* in accordo alla quale il sistema evolve nel tempo. Essa contiene i *parametri* del sistema e specifica come i vari elementi dello stato si combinano tra loro, con gli ingressi e con i parametri del sistema in modo da generare l'evoluzione complessiva dello stato. Ad un sistema dinamico si può inoltre associare un'equazione algebrica di uscita

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

la quale assume diversi significati a seconda dei contesti. Essa può rappresentare un *indice di prestazione* che quantifica il comportamento del sistema rispetto a determinati obiettivi, oppure un *insieme di misure* che specifica l'informazione disponibile al mondo esterno.

Si noti che i modelli considerati soddisfano il cosiddetto **Principio di causalità** per il quale l'evoluzione dello stato del sistema dipende esclusivamente dai valori presenti e passati delle variabili ma non da quelli futuri.

Tipologie di sistemi dinamici

I sistemi dinamici possono essere classificati a seconda delle loro proprietà. Tra le più importanti tipologie di sistemi dinamici vi sono:

1. **Sistemi TC e TD.** Una delle più importanti classificazioni riguarda la scala temporale su cui un sistema viene rappresentato. Un sistema è detto a tempo continuo (TC) quando $t \in \mathbb{R}$, mentre è detto a tempo discreto (TD) quando $t \in \mathbb{Z}$.
2. **Sistemi autonomi e non-autonomi.** Una classificazione molto importante riguarda la presenza o meno di ingressi esterni. Un sistema si dice autonomo quando non vi sono ingressi esterni, ovvero quando $f(t, x(t), u(t)) = f(t, x(t))$, altrimenti si dice non autonomo.
3. **Sistemi tempo invarianti e tempo varianti.** Un'altra importante classificazione riguarda la funzione f . Un sistema si dice tempo invariante quando

$$f(t_1, x, u) = f(t_2, x, u) \quad \forall t_1, t_2 \text{ e } \forall x, u$$

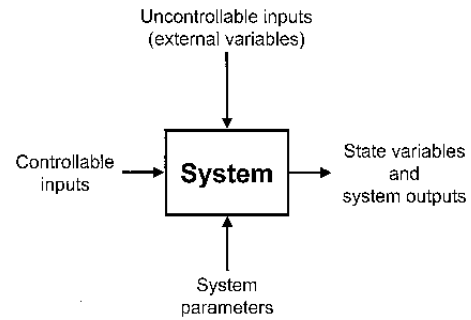


Figura 1: Rappresentazione schematica di un sistema/modello

altrimenti si dice tempo variante. Per sistemi tempo invarianti la funzione f non cambia nel tempo. A fronte allo stesso valore dello stato e dell'ingresso il sistema risponde sempre nello stesso modo. Per sistemi tempo invarianti si scrive $f(t, x(t), u(t)) = f(x(t), u(t))$.

Esempio 1.1 (Dinamica di un robot mobile).

Un semplice modello per descrivere la dinamica di un robot mobile è il cosiddetto *modello dell'uniciclo*. In questo modello, rappresentato in figura, lo stato del sistema robot è descritto dalle sue coordinate nel piano cartesiano (p_x, p_y) e dalla sua orientazione α rispetto all'asse delle ascisse. Queste tre variabili forniscono una descrizione completa della configurazione in cui si trova il robot al tempo corrente. Di conseguenza si ha

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$$

Lo stato del robot, ossia la sua posizione e la sua orientazione, cambiano in funzione della velocità di avanzamento v e della velocità angolare ω (che dipendono dai comandi inviati ai motori dal sistema di controllo). In questo modello, tali variabili rappresentano ingressi al sistema robot

$$u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

In particolare, gli ingressi influenzano l'evoluzione dello stato robot, ossia la sua traiettoria nel piano, secondo il modello cinematico

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \cos[\alpha(t)] v(t) \\ \dot{p}_y(t) = \sin[\alpha(t)] v(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \omega(t) \end{cases}$$

La velocità angolare ω definisce la velocità di variazione dell'orientazione α . Inoltre la velocità di avanzamento si distribuisce sulle due componenti della posizione in funzione dell'orientazione del robot. Ad esempio quando $\alpha = 0$ l'avanzamento avviene lungo l'asse delle ascisse in quanto $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$. Al contrario quando $\alpha = \pi/2$ l'avanzamento avviene lungo l'asse delle ordinate in quanto $\cos(\pi/2) = 0$ e $\sin(\pi/2) = 1$. Nel complesso il modello cinematico sopra descritto è del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

con uscita

$$y(t) = x(t)$$

in quanto tutto lo stato (posizione e orientazione) deve essere controllato per imporre una traiettoria desiderata. Si tratta quindi di un sistema non autonomo tempo-invariante TC.

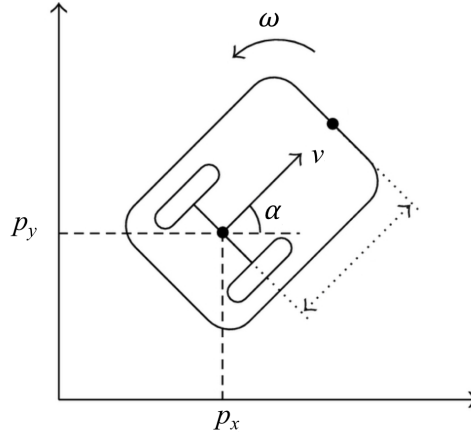


Figura 2: Modella dell'uniciclo per la dinamica di un robot mobile.

1.2 Modelli di trasferimento di risorse

Nell'ambito dell'ingegneria si ha spesso a che fare con *risorse*, siano esse risorse umane, beni di consumo, servizi, dati, ecc. Le risorse possono essere definite in base ad una vasta gamma di attributi, che vengono specificati in base al contesto applicativo. Gli attributi possono essere di vario tipo e coinvolgere la natura stessa di una risorsa ma anche la sua collocazione geografica. Trattando beni di consumo, le risorse possono essere distinte in base alla collocazione lungo la catena produttiva, mentre risorse umane possono essere distinte su basi anagrafiche o livello stipendiale. Nei modelli di trasferimento di risorse ogni stato rappresenta un *compartimento* che contiene risorse dello stesso tipo. Il modello specifica la legge in accordo alla quale le varie risorse vengano trasferite da un compartimento all'altro. Questi modelli

vengono anche detti *modelli compartimentali*. In questo modelli possono anche avvenire trasferimenti di risorse da e verso l'esterno, nel qual caso il modello prevede anche segnali d'ingresso. I modelli di trasferimento di risorse si distinguono a seconda che il trasferimento avvenga su base continua o discreta.

Modelli tempo discreto

Come detto in precedenza, nei modelli di trasferimento di risorse ogni stato rappresenta un *compartimento* che contiene risorse dello stesso tipo. Pertanto lo stato $x_i(t)$ rappresenta la quantità di risorse contenute nel compartimento i al tempo t . La variazione di risorse tra due istanti temporali nel compartimento i è definita come

$$x_i(t+1) - x_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

dove $f_i^{\text{in}}(t)$ rappresenta le risorse totali entranti nel compartimento i al tempo t , e dove $f_i^{\text{out}}(t)$ rappresenta le risorse totali uscenti dal compartimento i al tempo t .

Esempio 1.2 (Corso di laurea magistrale). Si consideri un semplice sistema che modella l'andamento di un corso di laurea magistrale. Gli studenti possono iscriversi al corso di laurea nell'anno t per l'anno $t+1$. Gli studenti del primo anno accedono al secondo anno con un tasso pari α , mentre gli studenti del secondo anno completano gli studi con un tasso β . In questo sistema non si modella il tasso di abbandono. Indichiamo con: $x_1(t)$ il numero di studenti che frequentano il primo anno di corsi nell'anno t ; $x_2(t)$ il numero di studenti che frequentano il secondo anno di corsi nell'anno t ; $u(t)$ il numero di nuovi iscritti nell'anno t ; $y(t)$ il numero di nuovi laureati nell'anno t . Possiamo modellare questo sistema nel seguente modo,

$$\begin{aligned} f_1^{\text{in}}(t) &= u(t) \\ f_1^{\text{out}}(t) &= \alpha x_1(t) \\ f_2^{\text{in}}(t) &= \alpha x_1(t) \\ f_2^{\text{out}}(t) &= \beta x_2(t) \\ y(t) &= \beta x_2(t) \end{aligned}$$

e sostituendo i termini si ottengono le equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-\alpha)x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_1(t) + (1-\beta)x_2(t) \\ y(t) = \beta x_2(t) \end{cases} \implies \begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Questo modello pertanto definisce un sistema dinamico non autonomo TD.

In generale, in un modello di trasferimento di risorse si ha

$$f_i^{\text{in}}(t) = u_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji} x_j(t) + \gamma_i x_i(t)$$

dove $\alpha_{ji}x_j(t)$ con $\alpha_{ji} \in [0, 1]$ indica le risorse trasferite dal compartimento j al compartimento i e $\gamma_i x_i(t)$ rappresenta la generazione di risorse all'interno del compartimento i . Non si considera α_{ii} in quanto il trasferimento di risorse all'interno di uno stesso compartimento è nullo ($\alpha_{ii} = 0$). In modo del tutto analogo,

$$f_i^{\text{out}}(t) = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_i(t) + \beta_i x_i(t)$$

dove $\beta_i x_i(t)$ rappresenta le risorse che escono dal sistema nel compartimento i al tempo t .

Esempio 1.3 (Catena di produzione con test di qualità). Si consideri un sistema che modella l'andamento di una catena di produzione con test di qualità. Un processo di lavorazione di un impianto industriale consiste in una serie di operazioni che assumiamo avere la stessa durata, eseguite in successione a partire da un pezzo grezzo. Alla fine di uno stadio di lavorazione si passa allo stadio successivo. Supponiamo vi siano quattro stadi di produzione: grezzo, verniciato, essiccato e confezionato. Supponiamo inoltre che al terzo stadio venga effettuato un controllo di qualità i cui possibili esiti sono accettazione, scarto o riverniciatura. Infine, supponiamo che nella catena di produzione vengano inseriti ad ogni passo un certo numero di pezzi grezzi e che ad ogni passo un certo numero di pezzi confezionati sia venduto. Indicando con s la frazione di pezzi che viene scartata e applicando il bilancio delle risorse entranti e uscenti in ogni stadio, il sistema può quindi essere modellato attraverso un modello di decisione,

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u(t)$$

con il vincolo $1 - \alpha_{32} - \alpha_{34} = s$.

Modelli tempo continuo

Nel caso di sistemi TC, dal momento che la variabile tempo assume valori continui i modelli di trasferimento di risorse non descrivono la variazione di risorse tra due istanti temporali, ma bensì descrivono la velocità di variazione delle risorse nei compartimenti. In particolare, la velocità di variazione della risorsa i può essere scritta nella forma

$$\dot{x}_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

dove $f_i^{\text{in}}(t)$ rappresenta il flusso totale di risorse entranti nel compartimento i al tempo t , e dove $f_i^{\text{out}}(t)$ rappresenta il flusso totale di risorse uscenti dal compartimento i al tempo t .

Esempio 1.4 (Traffico automobilistico). Si consideri l'esempio in figura. Quattro città sono collegate tra di loro mediante autostrade e strade provinciali. Supponiamo di essere interessati a capire come varia il numero di veicoli nelle varie città su base continua. Le variabili di stato rappresentano allora il numero di veicoli presenti in ogni singola città al tempo t . Si assume che la densità di flusso automobilistico sulle strade provinciali sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sulle autostrade sia 2α . Tenendo conto dei flussi tra le diverse città rappresentate in figura, per la città 1 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f_1^{\text{in}}(t) &= 2\alpha x_2(t) + \alpha x_3(t) + \alpha x_4(t) \\ f_1^{\text{out}}(t) &= 2\alpha x_1(t) + \alpha x_1(t) + \alpha x_1(t) \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\dot{x}_1(t) = -4\alpha x_1(t) + 2\alpha x_2(t) + \alpha x_3(t) + \alpha x_4(t)$$

Ripetendo lo stesso procedimento anche per le altre città, il sistema dinamico complessivo può essere descritto come

$$\dot{x}(t) = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}}_{f(x(t))} x(t)$$

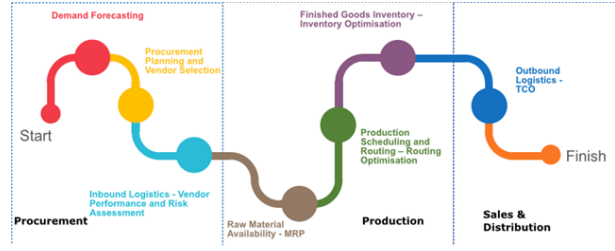


Figura 3: Schema di una catena di produzione.

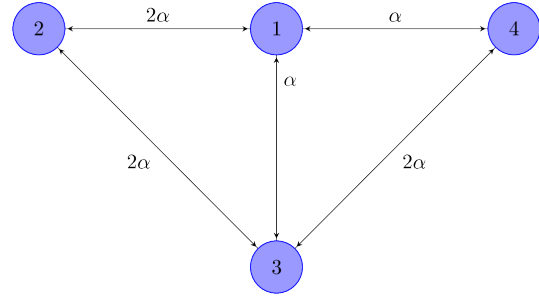


Figura 4: Problema di traffico automobilistico.

che definisce un sistema dinamico autonomo tempo-invariante TC.

È opportuno notare che non sempre i trasferimenti di risorse/flussi tra i diversi compartimenti possono essere espressi secondo semplici leggi di proporzionalità visti in precedenza, ma in alcuni casi le relazioni tra le quantità sono più complesse e possibilmente tempo-varianti.

Esempio 1.5 (Modello della coda di un router). La dinamica di una coda in un router può essere descritta da una legge di bilancio del tipo

$$\dot{x}(t) = f^{\text{in}}(t) - f^{\text{out}}(t)$$

dove $x(t)$ rappresenta la lunghezza della coda al tempo t , il flusso in ingresso è uguale al tasso $\lambda(t)$ con cui i pacchetti entrano nella coda, il flusso in uscita è uguale al tasso $\mu(t)$ con cui i pacchetti vengono instradati dal router. Il massimo tasso con cui il router riesce ad instradare i pacchetti è pari a un valore μ_{max} che dipende dal router considerato. In un caso tipico, l'effettivo tasso con cui vengono instradati i pacchetti segue una legge de tipo

$$\mu = \mu_{\text{max}} \frac{x}{x + 1}$$

che tiene conto del fatto che l'efficienza del router diminuisce al crescere della dimensione della coda. Si noti che quando la coda è vuota ($x = 0$) si ha $\mu = 0$ perché nessun pacchetto può essere instradato. Quando invece $x \rightarrow \infty$ il tasso tende a quello massimo possibile $\mu \rightarrow \mu_{\text{max}}$. La dinamica complessiva della coda può quindi essere descritta come

$$\dot{x}(t) = \lambda(t) - \mu_{\text{max}} \frac{x(t)}{x(t) + 1} = f(x(t), \lambda(t))$$

che definisce un sistema dinamico non-autonomo tempo-invariante TC. In questo modello $\lambda(t)$ rappresenta un ingresso non manipolabile per il sistema. Inoltre, in questo semplice modello non tiene conto del fatto che le code reali hanno una capacità finita.

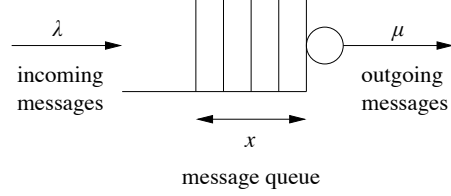


Figura 5: Modello di una coda in un router.

Esempio 1.6 (Modello di diffusione di un virus). I modelli epidemiologici sono stati sviluppati per comprendere come avvenga la diffusione di un virus all'interno di una popolazione. Consideriamo ad esempio il cosiddetto modello SIR in cui si suppone che ciascun elemento della popolazione possa essere in uno dei seguente tre stati: stato **S** non infetto ma suscettibile di essere infettato; stato **I** infetto; stato **R** recuperato, ossia guarito dall'infezione e non più suscettibile di essere infettato. Indichiamo con $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ la frazione della popolazione nello stato S, I e R, rispettivamente con $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$. Il trasferimento può avvenire da S a I e poi da I a R secondo le seguenti regole.

1. Ogni individuo nello stato S entra in contatto con un individuo infetto secondo un tasso di contatto $\beta_c x_2(t)$ proporzionale alla frazione di individui infetti $x_2(t)$. Ogni contatto risulterà in una infezione con una probabilità β_t . Il flusso da S a I sarà quindi

$$\begin{aligned} f_1^{\text{out}}(t) = f_2^{\text{in}}(t) &= \beta_t \beta_c x_2(t) x_1(t) \\ &= \beta x_1(t) x_2(t) \end{aligned}$$



Figura 6: Grafo di trasferimento per il modello SIR

con $\beta = \beta_t \beta_c$ **tasso di infezione**.

2. La guarigione degli individui infetti avviene con un tasso γ . Il flusso da I a R sarà quindi

$$f_2^{\text{out}}(t) = f_3^{\text{in}}(t) = \gamma x_2(t)$$

con γ **tasso di guarigione**.

3. Gli individui guariti rimangono nello stato R con probabilità 1

$$f_3^{\text{out}}(t) = 0$$

Le equazioni di transizione dello stato saranno quindi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1^{\text{in}}(t) - f_1^{\text{out}}(t) = -\beta x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= f_3^{\text{in}}(t) - f_3^{\text{out}}(t) = \gamma x_2(t)\end{aligned}$$

Modelli epidemiologici di questo tipo consentono ad esempio di fare previsioni sull'evoluzione dei contagi. A questo riguardo, un parametro molto importante è il cosiddetto **numero di riproduzione** $\mathcal{R}(t)$ che definisce il numero atteso di casi secondari generati da un individuo infetto:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) &= \beta \times 1/\gamma \times x_1(t) \\ &= \text{tasso di infezione} \times \text{periodo di infettività} \times \text{individui suscettibili}\end{aligned}$$

Infatti, se consideriamo la variazione di individui infetti

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t) \\ &= [\beta x_1(t) - \gamma] x_2(t)\end{aligned}$$

possiamo notare come un numero di riproduzione $\mathcal{R}(t) > 1$ comporti $\dot{x}_2(t) > 0$ che corrisponde a una crescita dei contagi, mentre un numero di riproduzione $\mathcal{R}(t) < 1$ comporti $\dot{x}_2(t) < 0$ che corrisponde a una diminuzione dei contagi.

Si noti come sia possibile ridurre il numero di riproduzione $\mathcal{R}(t)$ sia riducendo la frazione $x_1(t)$ di individui suscettibili (ad esempio con le vaccinazioni) sia riducendo il tasso di infezione β (ad esempio mediante politiche di restrizione finalizzate al contenimento dei contagi). In questo secondo caso il parametro β diventa funzione delle politiche di restrizione attive al tempo $u(t)$ e quindi il sistema diventa non autonomo.

Un parametro importante per comprendere se un determinato agente patogeno possa dare origine o meno a una epidemia è il cosiddetto **numero di riproduzione di base** β/γ . Notiamo infatti che al tempo 0 quasi tutti gli individui sono suscettibili

$$x_1(0) \approx 1$$

Di conseguenza l'evoluzione iniziale dell'epidemia dipende proprio dal numero di riproduzione di base

$$\mathcal{R}(0) = \beta \times 1/\gamma \times x_1(0) \approx \beta/\gamma$$

Se $\mathcal{R}(0) > 1$ si ha inizialmente una crescita esponenziale degli infetti $x_2(t)$ ossia si ha il cosiddetto **out-break**.

Fissato il numero di riproduzione di base β/γ , la cosiddetta immunità di gregge si raggiunge quando il numero di individui suscettibili $x_1(t)$ diventa sufficientemente piccolo in modo che il numero di riproduzione $\mathcal{R}(t)$ diventi minore di 1

$$\mathcal{R}(t) = (\beta/\gamma)x_1(t) < 1 \iff x_1(t) < \gamma/\beta$$

Ad esempio, secondo il modello SIR, per un agente patogeno avente un numero di riproduzione di base pari a 4, l'immunità di gregge si raggiunge quando il numero di individui suscettibili diventa inferiore al 25% della popolazione.

Grafo di trasferimento

Ad un certo modello è possibile associare un **grafo** che descrive quali sono le interazioni tra i vari elementi di un sistema. In particolare, un grafo *orientato* (o grafo diretto) è un insieme $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, dove \mathcal{N} è l'insieme dei nodi e \mathcal{A} è l'insieme degli archi orientati. Un arco orientato è un arco caratterizzato da una direzione. Esso è composto da una “testa” (rappresentata dalla punta di una freccia) che raggiunge un nodo in entrata, e da una “coda” che lo lascia in uscita. Con la notazione $i \rightarrow j$ si indica un arco orientato dove i è il nodo in uscita ed j è il nodo in entrata. La notazione $i \rightarrow i$ rappresenta un *auto-anello*. Due nodi distinti i e j sono *adiacenti* se esiste un arco che li connette. Un grafo *non orientato* (o grafo indiretto) è un insieme di vertici e archi dove la connessione $i \rightarrow j$ ha lo stesso significato di $j \rightarrow i$. In generale, il significato di un arco o di un auto-anello dipende dal contesto applicativo.

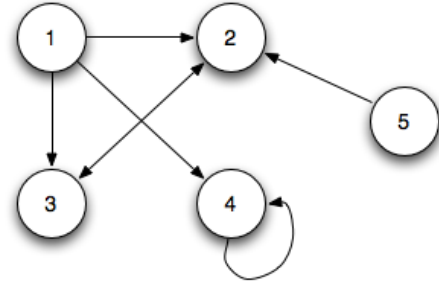


Figura 7: Grafo diretto.

Nei modelli di trasferimento di risorse, un arco orientato $i \rightarrow j$ rappresenta un trasferimento di risorse dal compartimento i al compartimento j . In questo modelli un auto-anello nel nodo i rappresenta una generazione interna di risorse nel compartimento i . È opportuno sottolineare che le rappresentazioni grafiche sono un strumento molto utile per comprendere in modo veloce il macro comportamento di un sistema. Tuttavia il significato delle transizioni in un grafo cambia in base al contesto applicativo. Per questo motivo, è sempre necessario ricorrere in ultima analisi alle equazioni del modello che forniscono una descrizione del sistema non ambigua.

1.3 Modelli di transizione tra stati

Questi modelli non si basano sul concetto di risorse, bensì di *attributi* e *qualità*. In questi modelli, gli stati rappresentano i vari attributi o qualità di un certo fenomeno d'interesse, ed evolvono secondo una regola che definisce come si passa da uno stato ad un altro. Un classico esempio sono le previsioni meteorologiche in cui gli stati rappresentano possibili condizioni meteorologiche, ad esempio “soleggiato” o “nuvoloso” ed il modello descrive come si passi da uno stato ad un altro. Una caratteristica di questi modelli è che, facendo riferimento ad attributi e qualità, essi sono solitamente di tipo **probabilistico**, ovvero il valore assunto da uno stato al tempo t indica la probabilità che il sistema possieda al tempo t il corrispondente attributo o qualità. Inoltre, sebbene esistano eccezioni, questi modelli sono solitamente a **tempo discreto**.

Consideriamo un modello di transizione tra stati in cui l'equazione che governa l'evoluzione dell' i -esimo stato è data da

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} x_j(t)$$

dove $x_i(t)$ rappresenta la probabilità di trovarsi nello stato i al tempo t ed n è il numero di stati possibili. Il coefficiente α_{ji} rappresenta dunque la probabilità di passare allo stato i dopo un evento, condizionata al fatto di trovarsi nello stato j prima dell'evento stesso. Si noti che in questi modelli non si specifica la dinamica che regola le transizioni tra i vari stati. Questo modelli risultano pertanto molto utili nel descrivere fenomeni soggetti ad incertezza. In generale, nei modelli probabilistici, la probabilità di passare da uno stato ad un altro dipende da tutta una serie di eventi precedenti. In altri termini, $x_i(t+1)$ può non dipendere solo da $x(t)$ ma anche da $x(t-1), x(t-2), \dots$ ovvero da tutta una serie di eventi precedenti. Il modello considerato assume che le probabilità di transizione dipendano soltanto dalla stato precedente. Questa proprietà viene detta **Proprietà di Markov** di tipo **omogeneo**.¹

¹Formalmente, chiamiamo *processo stocastico* a tempo discreto e stati discreti una successione di variabili aleatorie discrete X_0, X_1, \dots che assumono valori in un insieme S detto spazio degli stati. L'indice $t \in \mathbb{Z}$ di X_t rappresenta il tempo. Indichiamo con $P(X_t = i)$ la probabilità che il sistema (processo stocastico) si trovi nello stato $i \in S$ al tempo t . Consideriamo adesso una generica sequenza X_0, X_1, \dots, X_t e indichiamo con $i_k \in S$ il valore assunto dal processo stocastico al tempo k . Il processo stocastico si dice di *Markov* se

$$P(X_{t+1} = i | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = P(X_{t+1} = i | X_t = i_t)$$

Si noti che questa classe di sistemi è soggetta a *vincoli*. Infatti, se ad certo istante il sistema si trova nello stato i , allora all'istante successivo il sistema o rimane nello stato i oppure si porta in un nuovo stato. Pertanto,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Inoltre,

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1 \quad \forall t$$

ovvero la somma degli stati rimane costante nel tempo al valore 1. Questa proprietà deriva dalla proprietà precedente ed è consistente con il fatto che ad ogni istante temporale il sistema si deve necessariamente trovare in uno dei suoi stati. Infatti, inizialmente la somma degli stati iniziali è necessariamente pari al valore 1. Inoltre,

$$x_i(t+1) = \alpha_{1i}x_1(t) + \alpha_{2i}x_2(t) + \dots + \alpha_{ni}x_n(t)$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n x_i(t+1) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_{1i} x_1(t)}_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_{2i} x_2(t)}_1 + \dots + \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_{ni} x_n(t)}_1 = \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

ovvero la somma degli stati rimane costante nel tempo al valore 1.

Esempio 1.7 (Previsioni meteo). Un modello semplice che descrive l'evoluzione delle condizioni meteorologiche prevede tre stati: soleggiato, nuvoloso e piovoso. Gli stati evolvono secondo la seguente regola:

1. se il giorno è soleggiato, allora il giorno successivo sarà soleggiato o nuvoloso con la stessa probabilità del 50%;
2. se il giorno è nuvoloso, al 50% il giorno successivo sarà soleggiato, al 25% nuvoloso e al 25% piovoso;
3. se il giorno è piovoso, il giorno successivo sarà nuvoloso o piovoso con la stessa probabilità del 50%.

Il sistema dinamico corrispondente può essere rappresentato mediante il grafo di transizione in figura. In termini di equazioni,

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 0.5 x_1(t) + 0.5 x_2(t) \\ x_2(t+1) &= 0.5 x_1(t) + 0.25 x_2(t) + 0.5 x_3(t) \\ x_3(t+1) &= 0.25 x_2(t) + 0.5 x_3(t) \end{aligned}$$

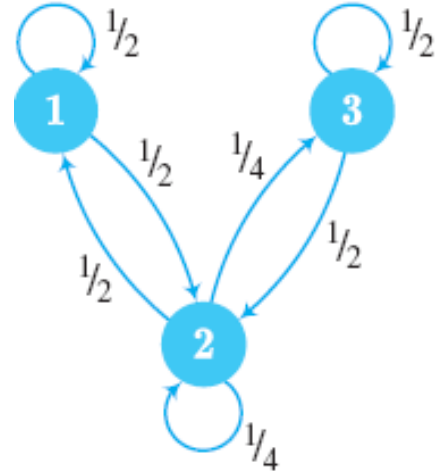


Figura 8: Grafo di transizione per il modello di previsioni del tempo.

dove la variabile t rappresenta il giorno t ; $x_1(t)$ rappresenta la probabilità che il giorno t sia soleggiato, $x_2(t)$ che sia nuvoloso e $x_3(t)$ che sia piovoso. Ad esempio, la probabilità che il giorno $t+1$ sia piovoso è quindi data dalla probabilità che il giorno t sia piovoso, moltiplicato per la probabilità 0.5 di transizione piovoso→piovoso, più la probabilità che il giorno t sia nuvoloso, moltiplicato per la probabilità 0.25 di transizione nuvoloso→piovoso. Le equazioni di stato possono essere scritte in forma matriciale come

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} x(t)$$

per tutti t e $i_0, i_1, \dots, i_t \in S$. In altri termini, un processo Markoviano non ha memoria in quanto la probabilità di passare in un certo stato dipende esclusivamente dallo stato corrente. Per un processo Markoviano,

$$\alpha_{ji}^t = P(X_{t+1} = i \mid X_t = j)$$

rappresenta quindi la probabilità di passare allo stato i al tempo $t+1$ condizionata al fatto di trovarsi in j al tempo t . Un processo di Markov si dice poi *omogeneo* se $P(X_{t+1} = i \mid X_t = j)$ non dipende da t .

Esempio 1.8 (Google PageRank). Un qualsiasi motore di ricerca, una volta trovate le pagine che contengono il testo richiesto dall'utente, ha il problema di decidere l'ordine (ranking) in cui presentare all'utente l'elenco dei riferimenti alle pagine trovate. Uno degli algoritmi di ranking di maggior successo è il cosiddetto *PageRank* il cui nome si deve a Larry Page, uno dei fondatori di Google. L'idea base è la seguente. Immaginiamo che un utente visiti le pagine della rete scegliendo i link uscenti da ciascuna pagina visitata in modo del tutto casuale. Se la j -esima pagina ha L_j collegamenti ad altre pagine, la probabilità che l'utente passi dalla pagina j alla pagina i è data pertanto da $\alpha_{ji} = 1/L_j$. Indichiamo con $x_i(t)$ la probabilità che l'utente si trovi nella pagina i al tempo t . Quindi

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j}$$

dove \mathcal{N}_i rappresenta l'insieme delle pagine che puntano a i . Infatti, $x_i(t+1)$ è dato dalla somma delle probabilità che a t l'utente si trovi in una pagina che punta a i , ciascuna moltiplicata per la probabilità che l'utente passi alla pagina i . Questo definisce un sistema TD con $x_i(0) = 1/n$ per ogni i , dove n è il numero totale di pagine.

Un esempio di PageRank è il seguente:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

con stato iniziale $x_i(0) = 0.25$ per ogni i . In questo caso, la prima pagina ha collegamenti alla seconda pagina ed alla quarta, la seconda ha un solo collegamento alla terza pagina e così via. Lo schema completo delle transizioni è riportato in figura. Sotto certe ipotesi lo stato converge ad un valore costante, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \bar{x}_i$$

Questo valore \bar{x}_i definisce il PageRank della pagina i e rappresenta la probabilità di essere nella pagina i dopo un periodo di navigazione sufficientemente lungo. L'algoritmo PageRank calcola queste probabilità asintotiche simulando il sistema dinamico e quindi ordina le pagine web sulla base di tali probabilità.

Il modello sopra illustrato non garantisce sempre la convergenza, per questo viene modificato introducendo il cosiddetto *damping factor* $d \in [0, 1]$. In questo nuovo modello si suppone che un utente che si trova nella pagina i possa cliccare su uno dei link uscenti con probabilità d mentre con probabilità $1-d$ possa scegliere casualmente una pagina della rete (non necessariamente linkata dalla pagina i). Quindi l'equazione del modello diventa

$$x_i(t+1) = d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j} + (1-d) \sum_{j=1}^n \frac{x_j(t)}{n}$$

dove si è supposto che nel secondo caso tutte le pagine possano essere scelte con la stessa probabilità $1/n$. Ricordando che $\sum_{j=1}^n x_j(t) = 1$ tale modello può anche essere scritto nella forma semplificata

$$x_i(t+1) = d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j} + \frac{1-d}{n}$$

Il modello di PageRank con damping factor garantisce l'esistenza delle probabilità asintotiche \bar{x}_i per ogni valore di $d > 0$. Nell'esempio in figura, la dinamica del PageRank diventa

$$x(t+1) = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1-d}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

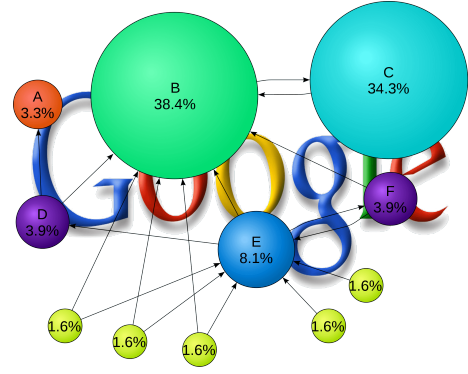


Figura 9: Google PageRank.

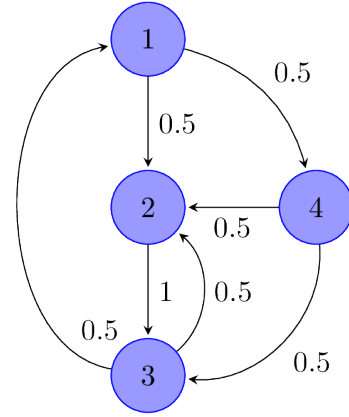


Figura 10: Grafo di transizione.

Il damping factor d è un parametro di progetto. Una scelta tipica è $d = 0.85$. Con tale scelta, per l'esempio in figura, le probabilità asintotiche risultano essere

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1922 \\ 0.3246 \\ 0.3640 \\ 0.1192 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza l'ordine di importanza delle pagine web è 3, 2, 1, 4.

In entrambi gli esempi sopra illustrati le probabilità di transizione α_{ji} sono costanti. In altri casi, invece, tali probabilità possono variare nel tempo o essere funzioni dello stato $x(t)$ o di eventuali ingressi $u(t)$.

Grafo di transizione

Nei modelli di transizione, un arco orientato $i \rightarrow j$ rappresenta quindi la probabilità di passare allo stato j dopo un evento, condizionata al fatto di trovarsi nello stato i prima dell'evento stesso. Si noti che, diversamente dai modelli di trasferimento di risorse, nei modelli di transizione gli auto-anelli rappresentano la probabilità di rimanere nello stesso stato.

1.4 Modelli di influenza

Nei modelli di influenza, lo stato rappresenta una generica grandezza che varia nel tempo in virtù di interazioni con altre grandezze presenti nel sistema. Un classico esempio di modelli d'influenza sono le *reti sociali* (amicizie, forum, etc...) nelle quali le persone interagiscono tra di loro parlando di un certo prodotto, evento o partito politico per esempio. Come risultato delle interazioni con altri individui, una persona potrà modificare la propria opinione (stato) circa il soggetto in questione. Questi modelli sono molto importanti per comprendere i comportamenti sociali, non solo umani. Una particolarità di questi modelli è che essi non mirano a descrivere nel dettaglio come si formino le interazioni quanto piuttosto come evolve un sistema a seguito di interazioni. I modelli d'influenza possono essere probabilistici o deterministici. Noi considereremo modelli di tipo deterministico. Assumendo n stati e m ingressi, l'equazione che governa l'evoluzione dell' i -esimo stato è data da

$$\begin{aligned} \text{(sistemi TC)} \quad \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^m g_{ji}(u_j(t), x_i(t)) \\ \text{(sistemi TD)} \quad x_i(t+1) &= f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^m g_{ji}(u_j(t), x_i(t)) \end{aligned}$$

dove $f_i(x_i)$ è una funzione che descrive la dinamica locale della grandezza i -esima; $f_{ji}(x_j, x_i)$ è una funzione che descrive come la grandezza j -esima influenza la grandezza i -esima; infine $g_{ji}(u_j, x_i)$ è una funzione che descrive come l'ingresso j -esimo influenza la grandezza i -esima.

Esempio 1.9 (Modello preda-predatore). Le equazioni di Lotka-Volterra, note anche come equazioni o modello preda-predatore, sono un sistema di equazioni differenziali che forniscono un modello matematico in grado di descrivere la dinamica di un ecosistema in cui interagiscono due specie animali: una delle due come predatore, l'altra come preda. Un semplice modello è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - \beta x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\delta x_2(t) + \gamma x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ costanti opportune, dove $x_1(t)$ rappresenta la popolazione della specie preda al tempo t , mentre $x_2(t)$ rappresenta la popolazione della specie predatore al tempo t . Con riferimento al modello generale si ha: $f_1(x_1) = \alpha x_1$ per modellare il fatto che in assenza di predatori la popolazione delle prede aumenta; $f_{21}(x_2, x_1) = -\beta x_1 x_2$ per modellare il fatto che le prede diminuiscono proporzionalmente al prodotto $x_1 x_2$ (in quanto al crescere di $x_1 x_2$ è più probabile che prede e predatori si incontrino); $f_2(x_2) = -\delta x_2$ per modellare il fatto che in assenza di prede la popolazione dei predatori diminuisce; infine $f_{12}(x_1, x_2) = \gamma x_1 x_2$ per modellare il fatto che i predatori aumentano proporzionalmente al prodotto $x_1 x_2$.

Il modello visto corrisponde a un sistema tempo-invariante TC autonomo. Il sistema diventa non autonomo se consideriamo, ad esempio, la presenza di un intervento di ripopolamento della specie prede

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - \beta x_1(t) x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\delta x_2(t) + \gamma x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

dove l'ingresso $u(t)$ rappresenta il tasso di ripopolamento.

Esempio 1.10 (Dinamiche di opinione). Le reti sociali sono un sistema d'influenza tra i più studiati nel marketing ed in politica. I modelli di reti sociali permettono infatti di comprendere come evolvono le dinamiche di opinione (su un prodotto, partito politico, etc.) e come queste possono essere influenzate. Un semplice modello di rete sociale può essere descritto tramite

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), \quad w_{ij} > 0$$

dove $x_i(t)$ rappresenta lo stato del nodo i della rete (l'utente i -esimo), il cui valore rappresenta l'opinione del nodo i circa un prodotto, partito politico, etc. L'insieme \mathcal{N}_i rappresenta l'insieme di nodi (utenti) con cui il nodo i interagisce nella rete. L'equazione differenziale definisce come evolve l'opinione del nodo i a causa dell'interazione con altri nodi, ovvero come essa viene influenzata. Se $x_j(t) > x_i(t)$ allora j influenzerà l'opinione di i positivamente nel senso che fornirà un contributo positivo all'opinione di i . Ad esempio, se $x_i(t)$ rappresenta l'opinione di i al tempo t circa un dato prodotto, allora $x_k(t) > x_i(t)$ porterà i ad aumentare la propria opinione circa il prodotto. I coefficienti w_{ij} definiscono il peso che il nodo i attribuisce all'opinione del nodo j . Esso può essere interpretato come la reputazione di j agli occhi di i . Con riferimento al modello generale, in questo caso si ha $f_{ji}(x_j, x_i) = w_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$ mentre $f_i(x_i) = 0$ per modellare il fatto che, in assenza di interazioni, l'opinione del nodo i non cambia.



Figura 11: Problema di dinamiche di opinione.

Si potrebbe obiettare che in un modello di questo tipo appare irrealistico assumere di conoscere i parametri w_{ij} o l'esatta rete delle interazioni. Tuttavia, non è necessario conoscere esattamente il valore dei parametri per determinare il macro comportamento del sistema. Si possono infatti stabilire condizioni generiche sulla struttura della rete e sui pesi sotto le quali si forma un *consenso delle opinioni*. Inoltre, è molto facile comprendere come la presenza di individui con elevatissima reputazione, le cosiddette “*highly influential persons*” possono essere in grado, da sole, di influenzare profondamente l'evoluzione della rete. Vedremo anche come le dinamiche di opinione siano profondamente influenzate anche dalla presenza di utenti che diffondono notizie e commenti, talvolta falsi, in modo continuo. Questo è il tipico fenomeno che va sotto in nome di “*Internet trolls*” e simili che, nel modello di dinamiche di opinione, possono essere rappresentati come ingressi di disturbo al sistema.

Esempio 1.11 (Corsa agli armamenti). Lo scienziato inglese Lewis Fry Richardson studiò a lungo il fenomeno della corsa agli armamenti in modo formale nella speranza di comprendere la dinamica dei conflitti internazionali. Il suo ragionamento si basava sulle seguenti considerazioni. Una nazione con basso potenziale difensivo è un possibile obiettivo di un invasore esterno. Questo fa sì che tale nazione inizi un programma di armamento in risposta alla minaccia esterna. Il potenziale invasore a sua volta percepisce tale programma come una minaccia e quindi aumenterà i propri armamenti. Questo fenomeno è noto con *corsa agli armamenti*.

Indichiamo con $x_i(t)$ la spesa per gli armamenti della nazione i -esima, e consideriamo per semplicità il caso di tre nazioni. Il modello proposto da Richardson è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) \end{cases}$$

dove a_{ii} sono quantità negative dette *coefficienti di saturazione* e misurano il rallentamento della crescita della spesa per armamenti quando quest'ultima cresce troppo; a_{ij} , $i \neq j$, sono quantità non negative dette *coefficienti di difesa* e misurano la sensibilità di una nazione al livello di armamenti di un potenziale nemico. Questo è un altro perfetto esempio di modello d'influenza.

Grafo d'influenza

Nei modelli d'influenza, un arco orientato $i \rightarrow j$ indica quindi il fatto che i esercita un'influenza su j . Si noti che anche in questa classe di modelli ci possono esserci auto-anelli. Per questi modelli, un auto-anello indica la resistenza di un agente nei confronti degli altri agenti e/o dell'ambiente esterno, per esempio la tendenza di un individuo a persistere sulle proprie opinioni.

1.5 Algoritmi iterativi

Come visto in precedenza nell'esempio del PageRank, i sistemi dinamici non nascono esclusivamente dalla descrizione di fenomeni fisici, ma anzi possono anche descrivere il comportamento di dinamiche artificiali come gli algoritmi iterativi. Un generico algoritmo iterativo (come ad esempio il metodo di Newton, il metodo della bisezione, l'algoritmo del gradiente, ecc.) può infatti essere scritto come un sistema dinamico TD

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

In questo caso il tempo t rappresenta l'iterazione dell'algoritmo. Lo stato $x(t)$ rappresenta le variabili che devono essere salvate in memoria per passare dal passo t al passo $t+1$ dell'algoritmo. L'ingresso $u(t)$, quando presente, rappresenta gli input esterni forniti all'algoritmo al passo t . Infine l'uscita $y(t)$ rappresenta l'output dell'algoritmo al passo t .

Esempio 1.12 (Algoritmo del gradiente). Si tratta di un metodo iterativo per il calcolo del punto di minimo di una funzione $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ossia per risolvere il *problema di ottimizzazione*

$$\min_x J(x)$$

L'algoritmo parte da una soluzione di tentativo $x(0)$ e aggiorna iterativamente il valore della soluzione $x(t)$ con l'obiettivo, al crescere del numero di iterazioni t , di avvicinarsi sempre di più a un punto di minimo della funzione $J(x)$. In particolare l'algoritmo si basa sull'osservazione che dato un punto x la direzione di massima discesa per la funzione $J(x)$ è quella opposta al suo gradiente

$$\nabla J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Infatti, come noto, il gradiente $\nabla J(x)$ è perpendicolare alle curve di livello della funzione $J(x)$. Quindi, data una soluzione di tentativo $x(t)$, una nuova soluzione di tentativo $x(t+1)$ può essere trovata muovendosi nella direzione opposta al gradiente

$$x(t+1) = x(t) - \gamma \nabla J(x(t))$$

o, scritto componente per componente,

$$x_i(t+1) = x_i(t) - \gamma \frac{\partial J(x(t))}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

In questo algoritmo, il vettore $-\nabla J(x(t))$ è detta *direzione di discesa*, mentre lo scalare γ è detto *passo di discesa* e rappresenta un parametro di progetto che influenza la velocità di convergenza verso il punto di minimo. Il metodo del gradiente viene anche detto metodo della *discesa più ripida* (*steepest descent*). L'algoritmo sopra descritto corrisponde a un sistema dinamico autonomo tempo-invariante TD $x(t+1) = f(x(t))$ con $f(x(t)) = x(t) - \gamma \nabla J(x(t))$.

Nell'algoritmo sopra descritto il passo di discesa γ era costante. Tuttavia, per ottimizzare la convergenza al punto di minimo, può essere utile variare γ in funzione dell'iterazione

$$x(t+1) = x(t) - \gamma(t) \nabla J(x(t))$$

Con questa modifica, l'algoritmo del gradiente diventa un sistema dinamico autonomo tempo-variante TD.

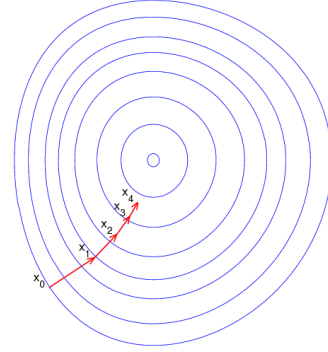


Figura 12: Curve di livello della funzione $V(x)$ e traiettoria della soluzione di tentativo $x(t)$.

Il metodo del gradiente in generale converge a un minimo locale della funzione $J(x)$. Per rendere il metodo in grado di sfuggire ai minimi locali e convergere quindi verso il minimo globale, può essere utile inserire nell'equazione di aggiornamento una perturbazione stocastica, ossia una componente di rumore,

$$x(t+1) = x(t) - \gamma(t) \nabla J(x(t)) + u(t)$$

dove la perturbazione stocastica $u(t)$ in genere diminuisce di intensità al crescere dell'iterazione t . Con questa modifica, l'algoritmo del gradiente diventa un sistema dinamico non autonomo.

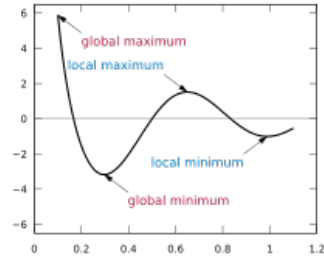


Figura 13: Estremi locali e globali di una funzione.

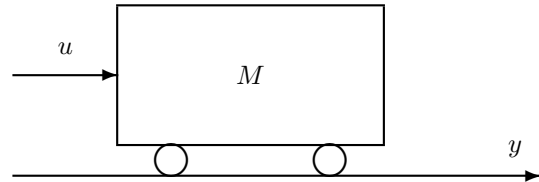
1.6 Modelli di sistemi fisici

Tutti i sistemi fisici che evolvono nel tempo sono sistemi dinamici. Ad esempio in ingegneria meccanica modelli di sistemi dinamici si trovano nello studio delle varie componenti dei veicoli, ad esempio nelle sospensioni meccaniche. In ambito elettrico, i sistemi dinamici sono fondamentali per comprendere il funzionamento dei circuiti. Per i sistemi fisici lo stato è rappresentato da tutte le variabili che caratterizzano elementi in grado di immagazzinare energia

- per i circuiti elettrici: correnti sugli induttori e tensioni sui condensatori;
- per i sistemi meccanici: posizioni e velocità;
- per i sistemi termici: temperature;
- per sistemi idraulici: pressioni e flussi.

Esempio 1.13 (Sistema meccanico). Considero un carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$. Sia $y(t)$ la posizione del carrello al tempo t . Secondo il principio di Newton, il moto del carrello può essere descritto dall'equazione differenziale

$$M \ddot{y}(t) = u(t) - b \dot{y}(t)$$



dove $-b\dot{y}(t)$ rappresenta la forza di attrito che si oppone al moto e b è il coefficiente di attrito viscoso. Come anticipato, per sistemi meccanici la scelta tipica delle variabili di stato è rappresentato da posizione e velocità. In questo caso possiamo quindi scegliere

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\frac{b}{M} \dot{y}(t) + \frac{1}{M} u(t) = -\frac{b}{M} x_2(t) + \frac{1}{M} u(t) \end{aligned}$$

Nel complesso, le equazioni di stato del sistema risultano essere nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t) \end{aligned}$$

Esempio 1.14 (circuito RLC). Si consideri il circuito elettrico in figura, dove si vuole caratterizzare la relazione tra la corrente di ingresso $I(t)$ e la tensione sul carico $v_R(t)$. Per i tre componenti in figura valgono le note relazioni

$$\begin{aligned}v_R(t) &= R I_R(t) \\v_L(t) &= L \dot{I}_L(t) \\I_C(t) &= C \dot{v}_C(t)\end{aligned}$$

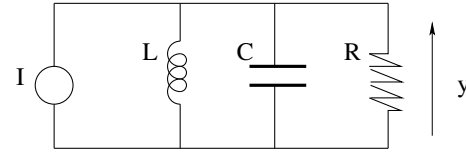


Figura 14: Circuito RLC.

Inoltre dalle leggi di Kirchhoff si ha che

$$\begin{aligned}I(t) &= I_L(t) + I_C(t) + I_R(t) \\v_R(t) &= v_C(t) = v_L(t)\end{aligned}$$

Nel circuito considerato ho solo due elementi in grado di immagazzinare energia (un induttore e un condensatore). Di conseguenza posso scegliere $x(t) = [v_C(t), i_L(t)]'$, $u(t) = I(t)$ e $y(t) = v_R(t)$. Di conseguenza, notando che le precedenti equazioni possono essere riscritte come

$$\begin{aligned}I(t) &= I_L(t) + C \dot{v}_C(t) + v_C/R \\v_C(t) &= L \dot{I}_L(t)\end{aligned}$$

e riarrangiando i termini, le equazioni di stato risultano essere nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\y(t) &= [1 \ 0] x(t)\end{aligned}$$

Considerazioni pratiche sulla modellistica

La modellistica rappresenta un processo molto complesso in quanto spesso si deve costruire un modello a partire da considerazioni di tipo qualitativo, ovvero discorsive. Noi abbiamo visto un approccio alla modellistica in cui la creazione di un modello si basa su considerazioni di tipo fisico, ad esempio su equazioni di bilancio o probabilistico. Vi sono altri approcci alla modellistica basati sui dati. In questi approcci, i modelli vengono identificati mediante procedure di ottimizzazione in cui, ad esempio, si sceglie una struttura candidata per il modello e si determinano i parametri (ovvero la legge che regola l'evoluzione del sistema) in modo che il modello ottenuto corrisponda il più possibile al sistema che genera le osservazioni. Questa branca dell'Automatica va sotto il nome di **identificazione**. In molti casi pratici, la modellazione viene effettuata combinando identificazione e considerazioni di tipo fisico. Ad esempio, nel problema di flusso automobilistico un approccio pratico consiste nel definire diversi coefficienti α_k per ciascuna tratta provinciale e autostradale. Questi coefficienti possono poi essere stimati (ad esempio in valor medio) monitorando il traffico automobilistico su un dato periodo.

È opportuno ricordare che i modelli che descrivono sistemi fisici non forniscono mai una rappresentazione esatta del fenomeno che si vuole descrivere. I modelli, talvolta anche quelli molto semplici, risultano tuttavia molto utili per comprendere almeno in modo macroscopico il tipo di comportamento che un sistema può esibire, ad esempio se un sistema perviene sul lungo periodo a una condizione di stazionarietà oppure se esibisce un comportamento persistentemente oscillatorio.

1.7 Rappresentazione ingresso/uscita

I sistemi dinamici visti finora erano tutti descritti mediante equazioni di stato, ossia mediante un rappresentazione di tipo ingresso/stato/uscita (i/s/u). Tali rappresentazioni sono particolarmente utili per analizzare il comportamento di un sistema dinamico in quanto mettono in evidenza la struttura interna del sistema, ossia il suo stato $x(t)$. A volta tuttavia, in fase di modellizzazione, può essere conveniente descrivere un sistema nella cosiddetta rappresentazione ingresso/uscita (i/u), ossia esprimere il sistema come una funzione che associa ad ogni segnale di ingresso un segnale di uscita. Si tratta di rappresentazioni che non mettono in evidenza la struttura interna del sistema ma si basano unicamente sull'osservazione esterna della relazione tra ingressi (cause) e uscite (effetti).

Sistemi TD

Per sistemi TD, tali rappresentazioni nella loro forma più generale corrispondono a equazioni alle differenze del tipo

$$y(t) = g(t, y(t-1), \dots, y(t-n), u(t), \dots, u(t-m))$$

Nel caso di sistema autonomo, non è presente alcun ingresso e quindi si hanno equazioni alle differenze puramente autoregressive del tipo

$$y(t) = g(t, y(t-1), \dots, y(t-n))$$

Nei casi sopra illustrati, se la funzione g non dipende esplicitamente dal tempo t allora si parla di sistema tempo-invariante, altrimenti il sistema è tempo variante.

Quando si deve analizzare il comportamento di un sistema dinamico descritto mediante rappresentazione i/u può essere conveniente passare ad una rappresentazione di tipo i/s/u scrivendo le equazioni di stato del sistema. Il passaggio da rappresentazione i/s/u a rappresentazione i/u non è univoco (ad esempio ordinando in modo diverso le variabili di stato si ottengono rappresentazioni diverse ma del tutto equivalenti del sistema). Tuttavia per sistemi dinamici TD esiste sempre una scelta sistematica per il vettore di stato che consente di scrivere in modo immediato le equazioni di stato a partire dall'equazione alle differenze. Infatti, scegliendo come stato il cosiddetto *regressore* (o *vettore di regressione*)

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m}(t) \end{bmatrix},$$

la dinamica dello stato risulta essere

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) & = g(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t)) \\ x_2(t+1) = y(t-1) & = x_1(t) \\ \vdots & \\ x_n(t+1) = y(t-n+1) & = x_{n-1}(t) \\ x_{n+1}(t) = u(t) & = u(t) \\ x_{n+2}(t) = u(t-1) & = x_{n+1}(t) \\ \vdots & \\ x_{n+m}(t) = u(t-m+1) & = x_{n+m-1}(t) \end{cases}$$

mentre l'equazione di uscita assume la forma

$$y(t) = g(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), x_{n+1}(t), \dots, x_{n+m}(t))$$

Nel caso di sistema autonomo la rappresentazione in equazioni di stato può essere ottenuta semplicemente omettendo dallo stato le componenti relative all'ingresso $u(t)$.

Esempio 1.15 (successione di Fibonacci). La successione di Fibonacci, originalmente proposta come legge matematica che descrive la crescita di una popolazione di conigli, è definita ricorsivamente mediante l'equazione alle differenze

$$y(t) = y(t-1) + y(t-2)$$

dove la scelta tipica delle condizione iniziali corrisponde a $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$. Tale equazione corrisponde a un sistema dinamico autonomo TD in rappresentazione i/u con $n = 2$. Una rappresentazione in equazioni di stato della successione di Fibonacci può essere ottenuta ponendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e di conseguenza

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) & = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) = y(t-1) & = x_1(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Sistemi TC

Per sistemi TC, le rappresentazioni i/u nella loro forma più generale corrispondono a equazioni differenziali del tipo

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t))$$

dove si è usata la notazione $y^{(k)}(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$. In queste equazioni n e m corrispondono al massimo ordine di derivazione con cui compaiono uscita $y(t)$ e ingresso $u(t)$, rispettivamente (usualmente si impone il vincolo $m \leq n$). Un esempio di rappresentazione i/u è quella che si ottiene per il sistema meccanico (esempio 13) direttamente dall'applicazione del principio di Newton

$$\ddot{y}(t) = -\frac{b}{M} \dot{y}(t) + \frac{1}{M} u(t)$$

dove, con riferimento all'espressione generale, si ha $n = 2$ e $m = 0$. Nel caso di sistema autonomo, non è presente alcun ingresso e quindi si hanno equazioni differenziali del tipo

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t))$$

Anche in questo caso, se la funzione g non dipende esplicitamente dal tempo t allora si parla di sistema tempo-invariante, altrimenti il sistema è tempo variante.

Per quanto concerne il passaggio da rappresentazione i/u a rappresentazione i/s/u, nel caso TC la scrittura delle equazioni di stato è immediato per sistemi autonomi e per sistemi non autonomi in cui l'ingresso $u(t)$ non è derivato

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u(t))$$

Infatti, scegliendo come stato le derivate dell'uscita fino all'ordine $n - 1$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

la dinamica dello stato risulta essere

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = g(t, x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \end{cases}$$

mentre l'equazione di uscita assume la forma

$$y(t) = x_1(t)$$

Tale procedura corrisponde a quella seguita per scrivere le equazioni di stato nel caso del sistema meccanico (esempio 13). Nel caso invece in cui compaiano anche derivate dell'ingresso $u(t)$ allora la scrittura delle equazioni di stato dipende dalla particolare classe di sistemi considerati (ad esempio si può fare in modo sistematico nel caso di sistemi lineari).

1.8 Sistemi lineari

Nel seguito, ci focalizzeremo soprattutto su una particolare classe di sistemi dinamici, i cosiddetti **sistemi lineari tempo invarianti** (LTI). Questa classe di sistemi ha una particolare importanza in fisica ed ingegneria in quanto una vasta classe di sistemi dinamici può essere modellata con sufficiente accuratezza come sistemi lineari. Inoltre come vedremo nel seguito, anche alcune importanti proprietà dei sistemi non lineari possono essere studiate ricorrendo alla teoria dei sistemi lineari. L'ipotesi della tempo invarianza è tipicamente adottata in quanto molti sistemi d'interesse, seppure tempo varianti, esibiscono variazioni temporali sufficientemente lente da poter considerare la funzione f tempo invariante durante l'intervallo di osservazione considerato.

I sistemi LTI possono sempre essere espressi in una forma particolarmente semplice. Infatti, si ricordi che una generica funzione $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se valgono le seguenti due proprietà

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

$$J(\alpha x) = \alpha J(x) \quad \forall x, \alpha \text{ (}\alpha \text{ scalare)}$$

altrimenti si dice non lineare. La prima proprietà è detta *additività* mentre la seconda è detta *omogeneità*. Le due proprietà garantiscono che valga anche la seguente

$$J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2)$$

per tutte le coppie x_1, x_2 e tutte le coppie di scalari α_1, α_2 . Come noto una funzione lineare può sempre essere scritta nella forma

$$J(x) = Mx$$

con M matrice opportuna di dimensione $m \times n$.

I sistemi lineari sono sistemi in cui la mappa di transizione dello stato $f(t, x, u)$ e la mappa di uscita $h(t, x, u)$ sono funzioni lineari di x e u .

Fatto 1.1 (Rappresentazione di sistemi lineari e LTI) Un sistema lineare TD può essere rappresentato come

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

dove le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ non dipendono né dalle variabili di stato né dagli ingressi. Analogamente un sistema lineare TC può essere rappresentato come

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Un sistema LTI può essere rappresentato come un sistema lineare in cui $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$, e $D(t) = D$ ovvero in cui le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ non dipendono dal tempo.

La matrice A ha dimensione $\dim(x) \times \dim(x)$. La matrice B ha dimensione $\dim(x) \times \dim(u)$. La matrice C ha dimensione $\dim(y) \times \dim(x)$. Infine la matrice D ha dimensione $\dim(y) \times \dim(u)$. Molti degli esempi di sistemi dinamici illustrati in precedenza sono sistemi LTI (esempi 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14 e 15).

Rappresentazione ingresso/uscita

Per quanto riguarda i sistemi TD descritti mediante rappresentazione i/u si ha linearità quando la funzione g dipende in modo lineare dalla sequenza di uscite $y(t-1), \dots, y(t-n)$ e dalla sequenza di ingressi $u(t), \dots, u(t-m)$ (quando presenti), ossia

$$y(t) = a_1(t)y(t-1) + \dots + a_n(t)y(t-n) + b_0(t)u(t) + \dots + b_m(t)u(t-m)$$

Si parla di sistema LTI quando tutti i coefficienti $a_1(t), \dots, a_n(t)$ e $b_0(t), \dots, b_m(t)$ (quando presenti) non dipendono dal tempo

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) + b_0 u(t) + \dots + b_m u(t-m)$$

Analogamente, per quanto riguarda i sistemi TC descritti mediante rappresentazione i/u si ha linearità quando la funzione g dipende in modo lineare dalle derivate dell'uscita $y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t)$ e dalle derivate dell'ingresso $u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)$ (quando presenti)

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) + b_m(t)u^{(m)}(t) + \dots + b_0(t)u(t)$$

Anche in questo caso, si parla di sistema LTI quando tutti i coefficienti $a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ e $b_m(t), \dots, b_0(t)$ (quando presenti) non dipendono dal tempo

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

1.9 Cenni sulla simulazione dei sistemi dinamici

La **simulazione** rappresenta uno strumento molto semplice per approssimare lo studio di un dato sistema dinamico e per predirne il comportamento. Simulare un sistema dinamico significa calcolare per via numerica l'andamento di stato $x(t)$ e uscita $y(t)$ in un certo intervallo di tempo di interesse $[t_0, t_f]$ conoscendo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e, per sistemi non autonomi, l'andamento delle variabili di ingresso $u(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_f]$.

Tale calcolo è immediato nel caso di sistemi TD, anche se per sistemi dinamici in cui la dimensione dello stato è molto grande occorre adottare accorgimenti particolari per la gestione della memoria. Al contrario, nel caso di sistemi TC si tratta di un problema complicato in quanto richiede il calcolo della soluzione di un sistema di equazioni differenziali. Come vedremo per alcune classi di sistemi (ad esempio i sistemi LTI) tale soluzione può essere trovata in forma esplicita (analiticamente) risolvendo il sistema di equazioni differenziali. Tuttavia, in generale, una soluzione in forma esplicita può non esistere o comunque non essere facile da trovare. Di conseguenza, in questi casi, si ricorre a tecniche di analisi numerica per il calcolo approssimato della soluzione. Tale tecnica si basa sull'idea di approssimare il sistema di equazioni differenziali con un opportuno sistema di equazioni alle differenze ottenuto mediante *discretizzazione* (campionamento) del tempo continuo. Il più semplice tra tali metodi di discretizzazione è il cosiddetto *metodo di Eulero*.

Metodo di Eulero

L'obiettivo è quello di calcolare in modo approssimato la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

discretizzando la variabile tempo t . Indichiamo con $\Delta > 0$ il passo di discretizzazione temporale e con $t_k = t_0 + k \Delta$ il k -esimo istante di tempo discreto. Ricordando che, da definizione, la derivata $\dot{x}(t)$ coincide con il limite del rapporto incrementale

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta},$$

l'idea del metodo di Eulero è quella di sostituire la derivata con il rapporto incrementale per Δ fissato

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta}$$

Naturalmente, tale approssimazione è tanto più accurata quanto più Δ è piccolo. Considerando un generico istante di tempo discreto t_k , le equazioni di stato TC possono essere approssimate dalla seguente relazione

$$\frac{x(t_k + \Delta) - x(t_k)}{\Delta} = f(t_k, x(t_k), u(t_k))$$

Definendo $x_k = x(t_k)$, $x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x(t_k + \Delta)$, $u_k = u(t_k)$, $y_k = y(t_k)$ e riarrangiando i termini, si ottengono quindi le equazioni di stato discretizzate mediante il metodo di Eulero

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta f(t_k, x_k, u_k) \\ y_k &= h(t_k, x_k, u_k) \end{aligned}$$

Tali equazioni descrivono un sistema dinamico TD in cui l'indice temporale discreto k corrisponde a una discretizzazione (o campionamento) del tempo continuo.

Considerazione finali su simulazione e analisi

La simulazione rappresenta uno strumento molto semplice per approssimare lo studio di un dato sistema dinamico. Tuttavia, la simulazione presenta dei limiti. Il comportamento di un sistema dinamico, inclusi i sistemi LTI, dipende dalle condizioni iniziali. Inoltre, molti sistemi dinamici possono presentare parametri che non sono sempre noti con esattezza (si pensi per esempio al coefficiente α nel modello di traffico automobilistico). Ci si potrebbe aspettare che cambiando le condizioni iniziali o un parametro il macro comportamento del sistema non cambi molto. Questo tuttavia non è sempre vero. Infatti i sistemi dinamici LTI possono:

- esibire o meno una forte dipendenza (ovvero cambiare il loro macro comportamento) dalle condizioni iniziali, nel breve e lungo periodo;
- esibire o meno una forte dipendenza dai parametri del sistema, nel breve e lungo periodo;
- esibire o meno una forte dipendenza dagli ingressi esterni;
- esibire o meno una forte sensibilità agli errori numerici (errori di discretizzazione temporale per i sistemi TC, errori di quantizzazione dovuti alla precisione finita).

In conclusione, le simulazioni, sebbene utili, non permettono di comprendere fino in fondo i meccanismi che regolano il comportamento di un sistema dinamico. Questo indica che per comprendere in modo esaustivo il comportamento di un sistema dinamico si deve ricorrere ad un approccio di tipo analitico.

Ad esempio, un contesto in cui si fa ampio uso di metodi numerici di simulazione per la predizione dell'evoluzione temporale delle variabili di interesse è quello delle previsioni meteorologiche. Infatti, la risoluzione analitica delle equazioni del modello che descrive l'evoluzione temporale delle variabili meteorologiche non risulta attualmente possibile per via analitica a causa della loro complessità (non linearità). Anche in questi casi, tuttavia, l'analisi rimane uno strumento fondamentale per la comprensione quantomeno macroscopica delle leggi che regolano un certo fenomeno. Ad esempio, nel contesto dei modelli meteorologici, l'analisi ha evidenziato come, anche ammettendo di saper risolvere analiticamente le equazioni fondamentali dell'atmosfera, risulta in pratica impossibile predire sul lungo periodo lo stato dell'atmosfera a causa della natura caotica delle equazioni della dinamica dei fluidi, la quale amplifica esponenzialmente l'errore nello stato iniziale del modello.