# Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

DINFO DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

# 3 Sistemi di controllo

# 3.6 Osservabilità, controllabilità e autovalori nascosti

# Evoluzione libera e forzata

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

- Soluzione del sistema nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}B\,U(s)}_{X_f(s)} \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s)}_{Y_f(s)} \end{aligned}$$

- $X_\ell(s)$ **evoluzione libera dello stato** dipende dalla matrice $(sI - A)^{-1}$
- $(sI - A)^{-1}$ ha come poli tutti e soli gli autovalori del sistema, radici del polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

# Evoluzione forzata dello stato e autovalori controllabili

- **Evoluzione forzata dello stato**

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

dipende dalla matrice $(sI - A)^{-1}B$

- **Poli di** $(sI - A)^{-1}B$ $=$ **autovalori controllabili del sistema**, radici di $\varphi_c(s)$ polinomio caratteristico di controllo
- Autovalori non controllabili si cancellano nella moltiplicazione per $B$ e non compaiono come poli in $X_f(s)$
- Per sistemi singolo ingresso $\dim(u) = 1$
  - $\varphi_\mathrm{c}(s)$ = minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1}\, B$
  - $\varphi_\mathrm{nc}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_\mathrm{c}(s)}$

# Risposta libera e autovalori osservabili

- $Y_\ell(s)$ **Risposta libera**

$$Y_\ell(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,x(0)$$

dipende dalla matrice $C(sI - A)^{-1}$

- **Poli di** $C(sI - A)^{-1}$ $=$ **autovalori osservabili del sistema**

**Definizione:** un autovalore $\lambda_i$ della matrice $A$ si dice

- **osservabile** se compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ e quindi si vede nella risposta libera $Y_\ell(s)$
- **non osservabile** se non compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ (in quanto si cancella nel prodotto per $C$) e quindi non si vede nella risposta libera $Y_\ell(s)$

# Polinomio caratteristico di osservazione

- Possiamo fattorizzare il polinomio caratteristico come

$$\varphi(s) = \varphi_{\mathrm{o}}(s)\,\varphi_{\mathrm{no}}(s)$$

  - $\varphi_{\mathrm{o}}(s)$ **polinomio caratteristico di osservazione** ha come radici tutti e soli gli autovalori osservabili
  - $\varphi_{\mathrm{no}}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_{\mathrm{o}}(s)}$ ha come radici tutti e soli gli autovalori non controllabili

- Per sistemi singola uscita $\dim(y) = 1$, $\varphi_{\mathrm{o}}(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $C\,(sI - A)^{-1}$

- Per sistemi con più uscite $\dim(y) > 1$ invece degli elementi di $C\,(sI - A)^{-1}$ dobbiamo considerare i determinanti delle sottomatrici quadrate

# Funzione di trasferimento e poli del sistema

- **Risposta forzata**
$$Y_f(s) = C(sI - A)^{-1} B\, U(s)$$
dipende dalla funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$

- **Poli di $G(s)$** $=$ **poli del sistema**
$=$ autovalori del sistema che non si cancellano né nella moltiplicazione per $C$ né in quella per $B$

**Fatto 3.7**

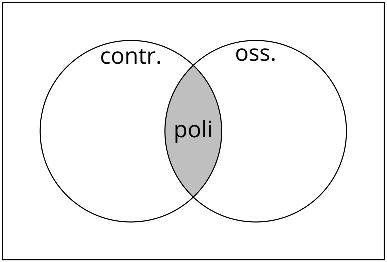
$$\{\text{Poli del sistema}\} = \{\text{Autovalori controllabili}\} \cap \{\text{ Autovalori osservabili}\}$$

- Per sistemi SISO $\dim(u) = \dim(y) = 1$
$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$\Rightarrow$ Poli del sistema $=$ radici di $a(s)$

# Autovalori nascosti

Autovalori del sistema




- Autovalori non controllabili e/o non osservabili non compaiono come poli della $G(s)$, quindi non si vedono in $Y_f(s)$, e sono detti **autovalori nascosti**
- Vale la relazione

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{nascosti} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non controllabili} \end{array} \right\} \bigcup \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non osservabili} \end{array} \right\}$$

- Per sistemi SISO $\dim(u) = \dim(y) = 1$, autovalori nascosti radici del polinomio

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

dove il pedice $h$ sta per *hidden* (nascosto)

# Esempio di studio della controllabilità/osservabilità

- Consideriamo il sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0]$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)\,(s+1)$$

- Autvalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$
- Matrice inversa

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Esempio di studio della controllabilità/osservabilità

- Per studiare la controllabilità

$$
\begin{aligned}
(sI-A)^{-1}B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{s}{(s-1)(s+1)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Polinomio caratteristico di controllo

$$\varphi_c(s) = (s-1)(s+1)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ autovalori controllabili
$\Rightarrow$ sistema completamente controllabile

# Esempio di studio della controllabilità/osservabilità

- Per studiare l'osservabilità

$$C\,(sI-A)^{-1} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico di osservazione

$$\varphi_{\mathrm{o}}(s) = s-1$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ autovalore osservabile e $\lambda_2 = -1$ autovalore non osservabile
$\Rightarrow$ sistema non completamente osservabile

- Funzione di trasferimento

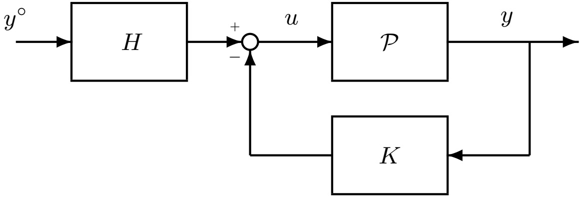
$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}\,B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$$

$\Rightarrow$ $a(s) = s-1 \qquad \varphi_{\mathrm{h}}(s) = s+1$

**Nota:** ho un solo polo in $p_1 = 1$ coincidente con l'unico autovalore controllabile e osservabile. L'altro autovalore $\lambda_2 = -1$, seppur controllabile, è nascosto perché non osservabile.

# 3.7 Retroazione algebrica sull’uscita

# Retroazione algebrica sull'uscita




**Legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita**

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -K\, y(t) + H\, y^\circ(t)$$

- **Controllo in feedback**: $-Ky(t)$
  con $F$ **guadagno in feedback** (retroazione)
- **Controllo in feedforward**: $Hy^\circ(t)$
  con $H$ **guadagno in feedforward**
- **Informazione parziale**: non abbiamo accesso allo stato $x$ ma solo all'uscita $y$

# Guadagno in feedback e in feedforward

- Retroazione algebrica sull'uscita

$$u(t) = -K\,y(t) + H\,y^{\circ}(t)$$

- Guadagni $K$ e $H$ sono **parametri di progetto** da scegliere per soddisfare le specifiche di controllo
- In generale $K$ e $H$ matrici di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$
- **Per sistemi SISO** $\dim(u) = \dim(y) = 1$, $K$ e $H$ sono parametri scalari
- Poiché $y = Cx$, retroazione algebrica sull'uscita corrisponde a una particolare retroazione algebrica sullo stato con $F = K\,C$

$$\begin{aligned} u(t) &= -K\,y(t) + H\,y^{\circ}(t) \\ &= -K\,C\,x(t) + H\,y^{\circ}(t) \end{aligned}$$

**Nota:** nel guadagno in retroazione algebrica sull'uscita abbiamo a disposizione meno parametri di progetto rispetto alla retroazione algebrica sullo stato (nel caso SISO possiamo scegliere solo lo scalare $K$ invece del vettore riga $F$)

# Sistema in ciclo chiuso

- Processo

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Controllore

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -K\,y(t) + H\,y^\circ(t)$$

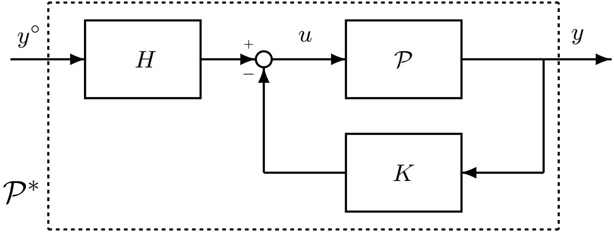
- Sostituendo la legge di controllo nell'equazione del processo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + B\left[-Ky(t) + Hy^\circ(t)\right] = (A - BKC)\,x(t) + BH\,y^\circ(t) \end{aligned}$$

- **Sistema in ciclo chiuso**

$$\mathcal{P}^*: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B\,K\,C)x(t) + B\,Hy^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

# Sistema in ciclo chiuso




**Sistema in ciclo chiuso**

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BKC$ e $B^* = BH$

- Sistema in ciclo chiuso: sistema LTI TC con ingresso $y^\circ$ e uscita $y$
- Matrice della **dinamica in ciclo chiuso** $A^* = A - BKC$ dipende dal guadagno in feedback $K$

# Sistema in ciclo chiuso

- Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BKC$ e $B^* = BH$

- **Polinomio caratteristico in ciclo chiuso**

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BKC)$$

- **Funzione di trasferimento in ciclo chiuso**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A^*)^{-1} B^* = C(sI - A + BKC)^{-1} BH$$

**Nota:** al variare del guadagno $K$ possiamo **spostare gli autovalori** nel piano $s$
$\Rightarrow$ possiamo utilizzare $K$ per modificare il comportamento dinamico e in particolare le proprietà di stabilità del sistema

# Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- Equazione del processo nel dominio di Laplace (supponendo $x(0) = 0$)

$$\mathcal{P}: \quad Y(s) = Y_f(s) \; = \; G(s)\,U(s)$$

- Equazione del controllore nel dominio di Laplace

$$\mathcal{C}: \quad U(s) = -K\,Y(s) + H\,Y^\circ(s)$$

- Di conseguenza, per sistemi SISO

$$Y(s) = -K\,G(s)\,Y(s) + G(s)\,H\,Y^\circ(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}\,H\,Y^\circ(s)$$

**Funzione di trasferimento in ciclo chiuso**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}\,H$$

# Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

- La funzione di trasferimento in ciclo chiuso può anche essere scritta come

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}H = \frac{b(s)/a(s)}{1 + K\,b(s)/a(s)}H = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}H$$

- Si ricorda che vale la fattorizzazione $\varphi(s) = \varphi_h(s)\,a(s)$ con
  - radici di $a(s)$ $=$ poli del sistema (autovalori controllabili e osservabili)
  - radici di $\varphi_h(s)$ $=$ autovalori nascosti (autovalori non controllabili e/o non osservabili)
- Retroazione algebrica sull'uscita
  - modifica i poli del sistema assegnandoli come radici del polinomio

$$a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$$

  - **non** modifica gli autovalori nascosti del sistema, radici di $\varphi_h(s)$

**Polinomio caratteristico in ciclo chiuso**

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\,a^*(s) = \varphi_h(s)\,[a(s) + K\,b(s)]$$

# Proprietà del sistema in ciclo chiuso

**Fatto 3.8** Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita $u = -Ky + Hy^\circ$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\, a^*(s) = \varphi_h(s)\, [a(s) + K\, b(s)]$$

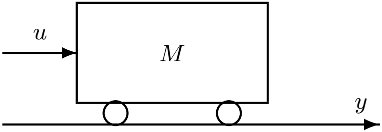
- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K\, G(s)} H = \frac{b(s)}{a(s) + K\, b(s)} H$$

- La retroazione algebrica sull'uscita modifica i poli ma **non** modifica gli zeri di $G^*_{y^\circ y}(s)$
- Poiché abbiamo solo il parametro scalare $K$ a disposizione, i poli in ciclo chiuso non possono essere scelti liberamente, ma ci sono dei vincoli!

# Esempio: controllo di posizione

- Carrello di massa $M$ soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo $t$
- $b$ coefficiente di attrito viscoso




**Obiettivo**: portare il carrello in una posizione desiderata $Y_0$ tramite il controllo $u$ misurando solo la posizione $y$

- Problema di controllo con riferimento costante

$$y^{\circ}(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

- Retroazione algebrica sull'uscita

$$u = -K\, y + H\, y^{\circ}$$

# Esempio: controllo di posizione

- Equazioni di stato per $M = 1$ e $b = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\, x(t) \end{aligned}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s\,(s+1)$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s\,(s+1)}$$

- Entrambi gli autovalori sono poli di $G(s)$

  $\Rightarrow$ non ci sono autovalori nascosti (sistema completamente controllabile e osservabile)

$$a(s) = s\,(s+1) \qquad b(s) = 1 \qquad \varphi_{\mathrm{h}}(s) = 1$$

# Esempio: controllo di posizione

- Applichiamo la retroazione sull'uscita $u = -Ky + H\, y^{\circ}$
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^{*}_{y^{\circ} y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K\, b(s)} H = \frac{1}{s^2 + \ s + K}\, H$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^{*}(s) = \varphi_h(s)\, [a(s) + K\, b(s)] = s^2 + s + K$$

- Per Cartesio, stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1) quando tutti i coefficienti di $\varphi^{*}(s)$ hanno stesso segno
  $\Rightarrow$ possiamo stabilizzare scegliendo $K > 0$
- Poli in ciclo chiuso

$$p^{*}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4\, K}}{2}$$

**Nota**: al variare di $K$ i poli in ciclo chiuso non posso essere assegnati liberamente ma seguono un percorso prestabilito sul piano complesso detto **luogo delle radici**

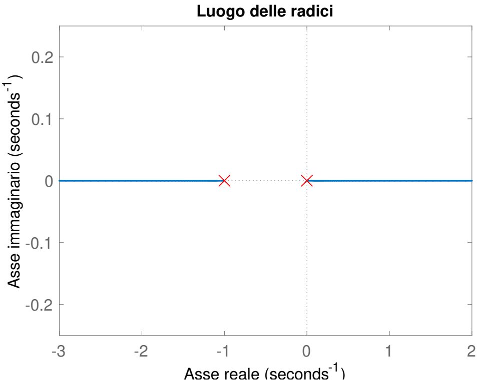
# Esempio: controllo di posizione

- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\,K}}{2}$$

- Per $K < 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 poli reali

$$p_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4\,K}}{2} \qquad p_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4\,K}}{2}$$



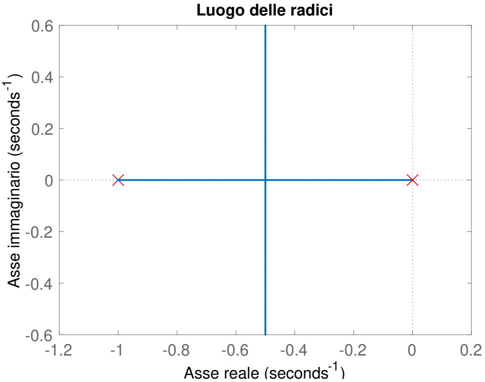

- Luogo delle radici per $K < 0$
- Per $K = 0$ si parte dai poli in anello aperto $p_1 = -1$ e $p_2 = 0$
- $p_1$ tende a $-\infty$ per $K \to -\infty$
- $p_2$ tende a $+\infty$ per $K \to -\infty$

# Esempio: controllo di posizione

- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\,K}}{2}$$

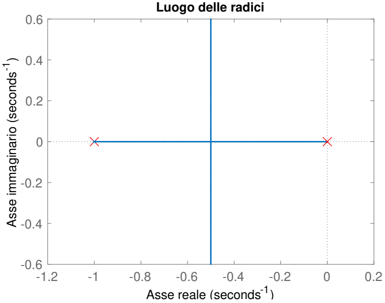
- Per $0 < K \leq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 2 poli reali
- Per $K > \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ 2 poli complessi coniugati



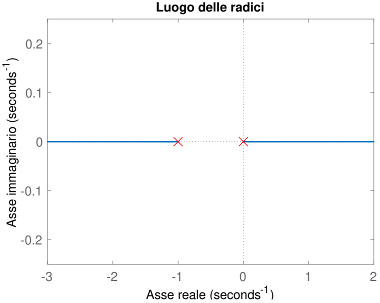

- Luogo delle radici per $K > 0$
- Per $K = 0$ si parte dai poli in anello aperto $p_1 = -1$ e $p_2 = 0$
- Per $K = \frac{1}{4}$ abbiamo 2 poli coincidenti in $-\frac{1}{2}$
- Per $K \to +\infty$ abbiamo 2 poli complessi coniugati con parte reale $-\frac{1}{2}$ e parte immaginaria tendente a $\pm\infty$

# Luogo delle radici

- I poli in ciclo chiuso sono le radici di $a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$
- **Luogo della radici** descrive come si spostano nel piano complessi i poli in ciclo chiuso al variare del guadagno in feedback $K$
- Di solito due grafici: uno per $K > 0$ e l'altro per $K < 0$
- Per tracciare il luogo delle radici: MATLAB `rlocus`, Python `control.root_locus`
- Nell'esempio del controllo di posizione




Luogo delle radici per $K > 0$




Luogo delle radici per $K < 0$

# Buona posizione del problema di controllo

- Polinomio caratteristico in anello aperto

$$\varphi(s) = \varphi_h(s)\, a(s)$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\, [a(s) + K\, b(s)]$$

- Retroazione sull'uscita **non** modifica le radici di $\varphi_h(s)$, autovalori nascosti del sistema (non controllabili e/o non osservabili)

**Definizione**: un problema di controllo in retroazione sull'uscita si dice **ben posto** quando $\varphi_h(s)$ ha tutte radici con Re$< 0$

**Nota:** la buona posizione del problema di controllo è condizione necessaria per l'esistenza di un guadagno $K$ stabilizzante ma in generale **non** sufficiente!

# Controesempio

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

  e quindi $\quad a(s) = s^2 - 1 \qquad b(s) = 1$

- Supponiamo che non ci siano autovalori nascosti, ossia $\varphi_{\mathrm{h}}(s) = 1$
  $\Rightarrow$ problema di controllo in retroazione sull'uscita **ben posto**

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\,[a(s) + K\,b(s)] = s^2 - 1 + K$$

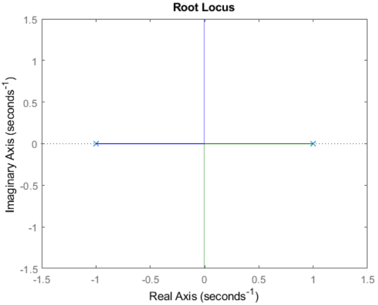
  $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $K$ in modo da rendere tutti i coefficienti di segno concorde (coefficiente del termine $s$ sempre pari a $0$
  $\Rightarrow$ non esiste $K$ stabilizzante

- Questo sistema **non** può essere stabilizzato mediante retroazione algebrica sull'uscita nonostante il problema di controllo sia ben posto

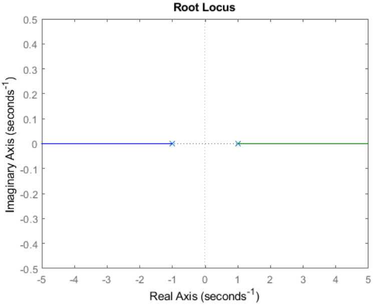
**Nota:** questo non vuol dire che il sistema non possa essere controllato, ma piuttosto che dobbiamo considerare strutture di controllo più generali!

# Controesempio: luogo delle radici

- Poli in ciclo chiuso
$$p^*_{1,2} = \pm\sqrt{1-K}$$
- Dal tracciamento del luogo delle radici si vede che per ogni $K$ ho sempre almeno un polo con Re$\geq 0$




Luogo delle radici per $K > 0$




Luogo delle radici per $K < 0$

# Progetto della retroazione algebrica sull'uscita

**Specifiche di progetto**

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

- Guadagno in continua in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{b(0)}{a(0) + K\,b(0)} H$$

$\Rightarrow$ per soddisfare la specifica 2 dobbiamo porre

$$H = \frac{a(0) + K\,b(0)}{b(0)}$$

# Progetto della retroazione algebrica sull'uscita

## Progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$
   **If** $\varphi_h(s)$ asintoticamente stabile (non ci sono autovalori nascosti instabili)
   il problema di controllo è *ben posto* e si va al passo 2
   **else** il problema di controllo *non* è ben posto
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina

2. **If** esiste $K$ tale che $a^*(s) = a(s) + K\,b(s)$ asintoticamente stabile
   si fissa $K$ (per soddisfare specifica 1 e possibilmente 3)
   si va al passo 3
   **else** la retroazione statica sull'uscita non è sufficiente per stabilizzare
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina

3. **If** $b(0) \neq 0$
   si pone $H = \frac{a(0)+Kb(0)}{b(0)}$ (per avere inseguimento perfetto di un riferimento $y^\circ$ costante)
   **else** non è possibile inseguire un riferimento costante
   si pone ad esempio $H = K$

# Considerazioni finali

- Se l'algoritmo termina al passo 1 il problema di controllo **non** è ben posto perché ci sono autovalori nascosti con Re $\geq 0$
  In questo caso dobbiamo **modificare** $B$ e/o $C$ per garantire che gli autovalori a Re $\geq 0$ non siano nascosti
- Autovalori nascosti = autovalori non controllabili e/o non osservabili
  - Autovalori non controllabili con Re $\geq 0$
    $\Rightarrow$ dobbiamo modificare B (cambiare/aggiungere variabili di controllo)
  - Autovalori non osservabili con Re $\geq 0$
    $\Rightarrow$ dobbiamo modificare C (cambiare/aggiungere sensori)
- Se l'algoritmo termina al passo 2 vuol dire che la retroazione statica sull'uscita non è sufficientemente potente per stabilizzare
  $\Rightarrow$ dobbiamo considerare leggi di controllo più generali:
  retroazione **dinamica** sull'uscita (controllore $=$ sistema dinamico)
- Condizione $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2) soddisfacibile $\Leftrightarrow$ $b(0) \neq 0$
  Se $b(0) = 0$ e vogliamo mantenere l'uscita a un valore costante, dobbiamo modificare $B$ e/o $C$ in modo da modificare $b(s)$

# Esempio di progetto

- Consideriamo un sistema LTI TC con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)}$$

- Obiettivo: progettare un controllore in retroazione algebrica sull'uscita

$$u = -K\,y + H\,y^{\circ}$$

**Nota:** quando il processo $\mathcal{P}$ viene dato in termini di funzione di trasferimento $G(s)$ si intende implicitamente che non ci siano autovalori nascosti $\varphi_{\mathrm{h}}(s) = 1$ e quindi che $\varphi(s) = a(s)$

- Per il sistema considerato $\quad a(s) = s\,(s-1) \quad b(s) = s+1$
  $\Rightarrow$ polinomio caratteristico in cilco chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_{\mathrm{h}}(s)\,[a(s) + K\,b(s)] = s\,(s-1) + K\,(s+1) = s^2 + (K-1)\,s + K$$

- Per Cartesio, stabilità quando $K > 1$ (tutti coefficenti di segno concorde)

# Esempio di progetto

- Ad esempio prendiamo $K = 6$ e quindi

$$\varphi^*(s) = s^2 + (K-1)\,s + K = s^2 + 5\,s + 6 = (s+2)\,(s+3)$$

$\Rightarrow$ autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = -2$ e $\lambda_2^* = -3$

- Guadagno in feedforward

$$H = \frac{a(0) + K\,b(0)}{b(0)} = K = 6$$

- Legge di controllo

$$u = -K\,y + H\,y^\circ = -6\,y + 6\,y^\circ = 6(y^\circ - y)$$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K\,b(s)}\,H = \frac{s+1}{s^2 + (K-1)\,s + K}\,H = \frac{6\,(s+1)}{s^2 + 5\,s + 6}$$

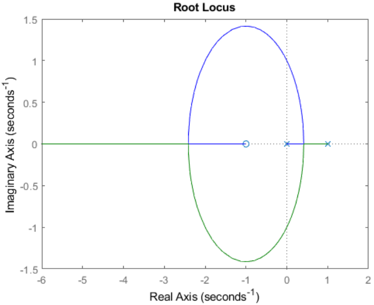
**Nota:** In generale, per fissare $K$ possiamo usare i criteri algebrici per studiare cosa succede alle radici di $\varphi^*(s)$ al variare di $K$

# Esempio di progetto

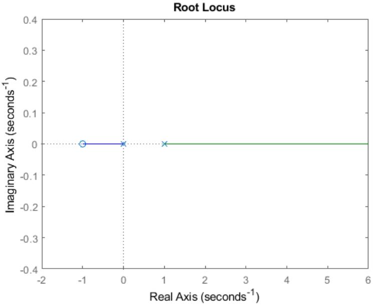
- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^2 + (K-1)\,s + K$$

- Per scegliere $K$, possiamo anche tracciare il luogo delle radici e fissare $K$ in modo che i poli in ciclo chiuso garantiscano un transitario soddisfacente




Luogo delle radici per $K > 0$




Luogo delle radici per $K < 0$

# Esercizi proposti

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 + \alpha^2\,u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2\,\alpha\,u \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u \\ y &= x_3 \end{cases}$$

- a) Determinare il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- b) Dire per quali valori di $\alpha$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto;

Si fissi ora $\alpha = 2$ e si consideri la legge di controllo in retroazione algenrica sull'uscita $u = -K\,y + H\,y^{\circ}$.

- c) Dire per quali valori di $K$ si ha stabilità asintotica in ciclo chiuso;
- d) Progettare, se possibile, i due guadagni $K$ e $H$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante $y^{\circ}$.
- e) Fissati $K$ e $H$ come al punto precedente, calcolare per il sistema in ciclo chiuso il regime permanente in risposta a un segnale di riferimento $y^{\circ}(t) = 5\sin(t)1(t)$

**Suggerimento:**

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 & 1 & s \\ s & s^2 & 1 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

# 3.8 Retroazione dinamica sull’uscita

# Retroazione dinamica sull'uscita

- Consideriamo un processo $\mathcal{P}$ avente

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad \varphi(s) = \varphi_h(s)a(s)$$

- Una legge di controllo in retroazione algebrica (statica) sull'uscita $u = -K\,y + Hy^\circ$ assegna

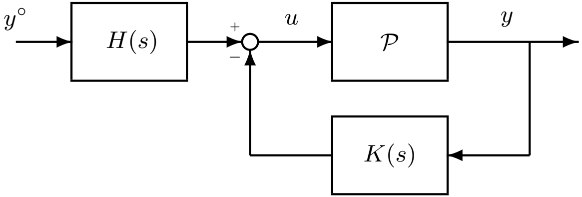
$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)[a(s) + K\,b(s)]$$

- Avendo a disposizione il solo parametro $K$, non possiamo assegnare liberamente i poli in ciclo chiuso
  $\Rightarrow$ anche quando problema di controllo ben posto [$\varphi_h(s)$ con tutte radici a Re$< 0$] non sempre esiste $K$ stabilizzante

**Idea:** Consideriamo una legge di controllo più generale in cui il segnale di controllo $u$ è una funzione dinamica dell'uscita $y$ e del riferimento $y^\circ$
$\Rightarrow$ **retroazione dinamica sull'uscita** del tipo (dominio di Laplace)

$$U(s) = -K(s)\,Y(s) + H(s)\,Y^\circ(s)$$

# Retroazione dinamica sull'uscita



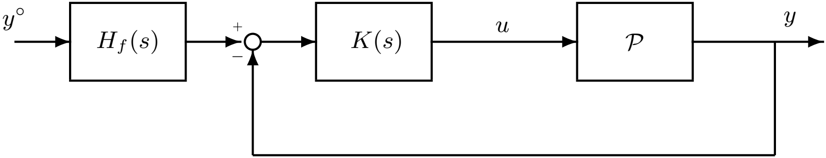

**Legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita** nel dominio di Laplace

$$\mathcal{C}: \quad U(s) = -K(s)\,Y(s) + H(s)\,Y^\circ(s)$$

- $K(s)$ guadagno in feedback e $H(s)$ guadagno in feedforward sono **funzioni di trasferimento proprie** (grado numeratore $\leq$ grado denominatore)
- Controllore $\mathcal{C}$ $=$ sistema dinamico con funzione di trasferimento $[-K(s)\;\, H(s)]$

$$U(s) = [-K(s)\;\, H(s)] \begin{bmatrix} Y(s) \\ Y^\circ(s) \end{bmatrix}$$

# Retroazione dinamica sull'uscita




- Scelta tipica

$$H(s) = H_f(s)\,K(s)$$

con $H_f(s)$ funzione di trasferimento propria e stabile (tutti i poli a Re$<0$) detta **prefiltro**

- Legge di controllo

$$\begin{aligned} U(s) = \quad &= -K(s)\,Y(s) + K(s)\,H_f(s)\,Y^\circ(s) \\ &= K(s)\,[H_f(s)\,Y^\circ(s) - Y(s)] \end{aligned}$$

**Nota**: prefiltro $H_f(s)$ deve essere stabile perché fuori dall'anello di retroazione

# Leggi di controllo a 1 e 2 gradi di libertà

- Nella retroazione dinamica sull'uscita

$$U(s) = K(s)\,[H_f(s)\,Y^\circ(s) - Y(s)]$$

si distinguono 2 casi

1. **Controllo a 1 grado di libertà**: $H_f(s) = 1$
   - in questo caso $H(s) = H_f(s)K(s) = K(s)$
   - azione di controllo
   $$U(s) = K(s)\,[Y^\circ(s) - Y(s)]$$
   funzione del solo **errore di inseguimento** $y^\circ(t) - y(t)$
2. **Controllo a 2 grado di libertà**: $H_f(s) \neq 1$
   - in questo caso $H(s) = H_f(s)K(s) \neq K(s)$
   - azione di controllo dipende separatamente da $y(t)$ e $y^\circ(t)$

**Nota**: nel seguito per semplicità $H_f(s) = H_f$ guadagno costante

# Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- Equazione del processo nel dominio di Laplace (supponendo $x(0) = 0$)

$$\mathcal{P}: \quad Y(s) = Y_f(s) \; = \; G(s)\, U(s)$$

- Equazione del controllore nel dominio di Laplace

$$\mathcal{C}: \quad U(s) = K(s)\, [H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)]$$

- Di conseguenza, per sistemi SISO

$$\begin{aligned} Y(s) &= -G(s)\, K(s)\, Y(s) + G(s)\, K(s)\, H_f\, Y^\circ(s) \\ &\Downarrow \\ Y(s) &= \frac{G(s)\, K(s)\, H_f}{1 + G(s)\, K(s)}\, Y^\circ(s) \end{aligned}$$

**Funzione di trasferimento in ciclo chiuso**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)\, G(s)}{1 + K(s)\, G(s)}\, H_f$$

# Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- Funzione di trasferimento del processo $\mathcal{P}$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con grado $b(s) <$ grado $a(s)$

- Funzione di trasferimento in feedback del controllore

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con grado $q(s) \leq$ grado $p(s)$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} G^*_{y^\circ y}(s) &= \frac{K(s)\,G(s)}{1 + K(s)\,G(s)}\,H_f = \frac{\frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}{1 + \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}\,H_f \\ &= \frac{\frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}{\frac{p(s)a(s)+q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}\,H_f = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)}\,H_f \end{aligned}$$

# Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

- Supponendo per semplicità $H_f(s) = H_f$, funzione di trasferimento in ciclo chiuso
$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)+q(s)b(s)}\, H_f$$
- Si ricorda che vale la fattorizzazione $\varphi(s) = \varphi_h(s)\, a(s)$ con
  - radici di $a(s)$ = poli del sistema (autovalori controllabili e osservabili
  - radici di $\varphi_h(s)$ = autovalori nascosti (autovalori non controllabili e/o non osservabili)
- Retroazione algebrica sull'uscita
  - modifica i poli del sistema assegnandoli come radici del polinomio
$$a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$$
  - **non** modifica gli autovalori nascosti del sistema, radici di $\varphi_h(s)$

**Polinomio caratteristico in ciclo chiuso**

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\, a^*(s) = \varphi_h(s)\, [p(s)a(s) + q(s)b(s)]$$

# Proprietà del sistema in ciclo chiuso

**Fatto 3.9** Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita $U(s) = K(s)[H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)]$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s)\, a^*(s) = \varphi_h(s)\, [p(s)a(s) + q(s)b(s)]$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)\, G(s)}{1 + K(s)\, G(s)}\, H_f = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)}\, H_f$$

**Nota**: si suppone che il controllore sia privo di autovalori nascosti (lo possiamo fare perché il controllore è progettato da noi)

# Esempio di retroazione dinamica

- Consideriamo un sistema LTI TC con
$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$
e quindi $\quad a(s) = s^2 - 1 \qquad b(s) = 1$
- Supponiamo che non ci siano autovalori nascosti, ossia $\varphi_\mathrm{h}(s) = 1$
$\Rightarrow$ problema di controllo in retroazione sull'uscita **ben posto**
- Come visto questo sistema **non** può essere stabilizzato con una retroazione algebrica sull'uscita $u = -Ky + Hy^\circ$
- Consideriamo invece un retroazione dinamica sull'uscita
$U(s) = K(s)[H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)]$ con
$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$$

**Nota**: con la retroazione algebrica avevamo a disposizione 1 solo parametro $K$ per assegnare i poli, con la retroazione dinamica abbiamo invece a disposizione 3 parametri $p_0$, $q_0$, $q_1$

# Esempio di retroazione dinamica

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(s) &= \varphi_h(s)\left[p(s)a(s)+q(s)b(s)\right] \\
&= (s+p_0)\left(s^2-1\right)+(q_1 s+q_0) \\
&= s^3+p_0 s^2-s-p_0+q_1 s+q_0 = s^3+p_0\, s^2+(q_1-1)\, s-p_0+q_0
\end{aligned}
$$

- Al variare di $p_0$, $q_0$, $q_1$ possiamo assegnare in modo arbitrario il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

- Ad esempio, se vogliammo posizionare i poli in ciclo chiuso in $-1$, $-10$ e $-10$ poniamo

$$
\varphi^*(s) = (s+1)\,(s+10)^2 = (s+1)\left(s^2+20s+100\right) = s^3+21s^2+120s+100
$$

Di conseguenza, eguagliando i due polinomi

$$
\left\{\begin{aligned} p_0 &= 21 \\ q_1-1 &= 120 \\ -p_0+q_0 &= 100 \end{aligned}\right.
\quad\Rightarrow\quad
\left\{\begin{aligned} p_0 &= 21 \\ q_1 &= 121 \\ q_0 &= 121 \end{aligned}\right.
$$

# Esempio di retroazione dinamica

- Con la scelta $p_0 = 21$, $q_0 = 121$, $q_1 = 121$

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{121s + 121}{s + 21}$$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)}\, H_f = \frac{121s + 121}{s^3 + 21s^2 + 120s + 100} H_f$$

- Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante dobbiamo imporre $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{121}{100} H_f = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_f = \frac{100}{121}$$

**Nota**: il procedimento visto può essere ripetuto per qualsiasi funzione di trasferimento $G(s)$ del processo

# Scelta dell'ordine del controllore

- Consideriamo un processo con funzione di trasferimento
$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$
con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi coprimi con grado $b(s) <$ grado $a(s)$
- Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento
$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$
con grado $q(s) =$ grado $p(s)$ = $n_K$ **ordine del controllore**
- $2n_K + 1$ parametri liberi in $K(s)$
- Procedendo come nell'esempio, si può dimostrare il seguente risultato

**Fatto 3.10** Se ordine del controllore $n_K$ tale che $n_K \geq$ grado $a(s) - 1$,
allora i coefficienti di $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ possono essere scelti in modo arbitrario al variare di $p(s)$ e $q(s)$
$\Rightarrow$ i poli in ciclo chiuso possono essere posizionati a piacere

# Progetto della retroazione dinamica sull'uscita

**Specifiche di progetto**

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

- Guadagno in continua in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{q(0)b(0)}{p(0)a(0) + q(0)b(0)}\, H_f$$

$\Rightarrow$ per soddisfare la specifica 2 dobbiamo porre

$$H_f = \frac{p(0)a(0) + q(0)b(0)}{q(0)\, b(0)}$$

# Progetto della retroazione dinamica sull'uscita

**Progetto di un sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita**

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$
   **If** $\varphi_h(s)$ asintoticamente stabile (non ci sono autovalori nascosti instabili)
   il problema di controllo è *ben posto* e si va al passo 2
   **else** il problema di controllo *non* è ben posto
   Il progetto non può essere concluso e l'algoritmo termina

2. Si prende un controllore di ordine $n_K \geq$ grado $a(s) - 1$
   Si fissano $p(s)$ e $q(s)$ per soddisfare specifica 1 e 3 con il vincolo $q(0) \neq 0$
   (per evitare problemi nel soddisfacimento della specifica 2)

3. **If** $b(0) \neq 0$
   si pone $H_f = \frac{p(0)a(0)+q(0)b(0)}{q(0)\,b(0)}$ (per avere inseguimento perfetto di un riferimento $y^\circ$ costante)
   **else** non è possibile inseguire un riferimento costante
   si pone ad esempio $H_f = 1$

# Implementazione della retroazione dinamica sull'uscita

- Consideriamo la legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita dell'esempio

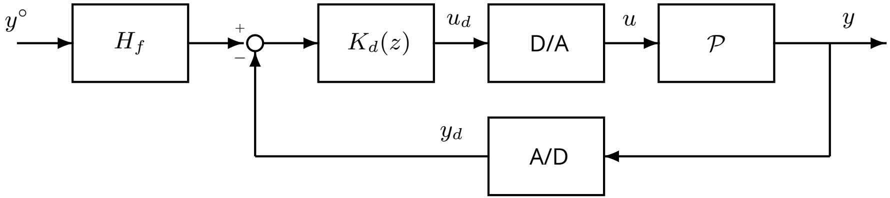
$$U(s) = K(s)[H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)] = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}\, [H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)]$$

- In termini di relazione ingresso-uscita del controllore

$$\begin{array}{rcl}
(s + p_0)U(s) & = & (q_1 s + q_0)\, [H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)] \\
sU(s) + p_0 U(s) & = & q_1 s\, [H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)] + q_0\, [H_f\, Y^\circ(s) - Y(s)] \\
 & \Downarrow & \\
\dot{u}(t) + p_0 u(t) & = & q_1\, [H_f \dot{y}^\circ(t) - \dot{y}(t)] + q_0\, [H_f y^\circ(t) - y(t)]
\end{array}$$

**Nota**: retroazione dinamica TC significa che l'azione di controllo $u$ è generata in funzione di $y^\circ$ e $y$ come soluzione di un'equazione differenziale

# Implementazione della retroazione dinamica sull'uscita




- Nella pratica, anche per sistemi TC la legge di controllo si implementa con **controllori digitali** e quindi a TD (in ambito indutriale: PLC controllori a logica programmabile)
- L'equazione differenziale che implementa il controllore viene approssimata con un'equazione alle differenze (ad esempio con metodo di Eulero o metodi più raffinati)
- Questo equivale ad approssimare la fdt TC $K(s)$ con una fdt TD $K_d(z)$ funzioni MATLAB `c2d`, Python `control.sample_system`
- In alternativa, possiamo discretizzare il processo $\mathcal{P}$ e progettare direttamente un controllore TD

# 3.9 Controllo PID e azione integrale

# Progetto mediante taratura di parametri

- Consideriamo una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita a $1$ grado di libertà
$$U(s) = K(s)\,[Y^\circ(s) - Y(s)]$$
- Per progettare la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$, in alternativa al metodo visto, si può procedere
    - assegnando a $K(s)$ una **forma prefissata** dipendente da un insieme di parametri
    - e quindi ottimizzando tali parametri mediante **tecniche di taratura**
- Scelta tipica in ambito industriale: **controllo PID**

**Nota**: progetto mediante taratura di parametri non garantisce sempre di poter stabilizzare e soddisfare le specifiche ma è molto usato in pratica perché semplice

# Controllo PID

**Controllo PID (proporzionale-integrale-derivativo)**

$$u(t) = K_P \left(y^\circ(t) - y(t)\right) + K_I \int_0^t \left(y^\circ(\tau) - y(\tau)\right) d\tau + K_D \frac{d}{dt}\left(y^\circ(t) - y(t)\right)$$

- Controllo $=$ combinazione di 3 azioni:
  - **Azione proporzionale:**
  $$K_P \left(y^\circ(t) - y(t)\right)$$
  - **Azione integrale:**
  $$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau)) d\tau$$
  - **Azione derivativa:**
  $$K_D \frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$$
- $3$ parametri di progetto: guadagno proporzionale $K_P$, guadagno integrale $K_I$ e guadagno derivativo $K_D$

# Funzione di trasferimento del PID

- Controllo PID nel dominio del tempo

$$u(t) = K_P \left( y^\circ(t) - y(t) \right) + K_I \int_0^t \left( y^\circ(\tau) - y(\tau) \right) d\tau + K_D \frac{d}{dt} \left( y^\circ(t) - y(t) \right)$$

- Ricordiamo che nel dominio di Laplace: $s$ operatore di derivazione e $1/s$ operatore di integrazione
- Controllo PID nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P \left( Y^\circ(s) - Y(s) \right) + \frac{K_I}{s} \left( Y^\circ(s) - Y(s) \right) + K_D\, s \left( Y^\circ(s) - Y(s) \right) \\ &= \frac{K_D\, s^2 + K_P\, s + K_I}{s} \left( Y^\circ(s) - Y(s) \right) \end{aligned}$$

**Funzione di trasferimento del PID (ideale):**

$$K(s) = \frac{K_D\, s^2 + K_P\, s + K_I}{s}$$

# PID ideale e PID reale

- Se $K_D \neq 0$, grado denominatore $<$ grado numeratore

$$K(s) = \frac{K_D\, s^2 + K_P\, s + K_I}{s}$$

$\Rightarrow$ funzione di trasferimento del PID **impropria**

- Questo succede perché per calcolare la derivata $\frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$ dobbiamo conoscere cosa succederà nell'immediato futuro

- Per rendere il controllore PID proprio, si aggiunge un polo
  $\Rightarrow$ **Funzione di trasferimento del PID (reale):**

$$K(s) = \frac{K_D\, s^2 + K_P\, s + K_I}{s\,(1 + s\,\tau)}$$

con $\tau > 0$

- Nella pratica
  - prima si progettano i guadagni $K_P$, $K_I$, $K_D$ considerando un PID ideale
  - poi si sceglie $\tau \ll 1$ in modo da non modificare in modo sostanziale le proprietà del sistema di controllo
    (polo in $-1/\tau$ con Re $\ll 0$ $\Rightarrow$ transitorio molto rapido)

# Controllo PID: ruolo delle 3 azioni

- **Azione proporzionale:**

$$K_P\,(y^\circ(t) - y(t))$$

corrisponde a una retroazione algebrica sull'uscita con $K = H = K_P$

- **Azione integrale:**

$$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau))d\tau$$

serve per

  - inseguimento perfetto di riferimenti $y^\circ$ costanti anche in assenza del prefiltro ($H_f = 1$)
  - reiezione perfetta di disturbi costanti

- **Azione derivativa:**

$$K_D\,\frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$$

serve per

  - rendere l'azione di controllo più pronta (prevede il trend di evoluzione dell'errore di inseguimento)
  - migliorare la stabilità in ciclo chiuso

# Legge di controllo con azione integrale

- Consideriamo una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita a $1$ grado di libertà

$$U(s) = K(s)\,[Y^{\circ}(s) - Y(s)]$$

- Funzione di trasferimento del controllore

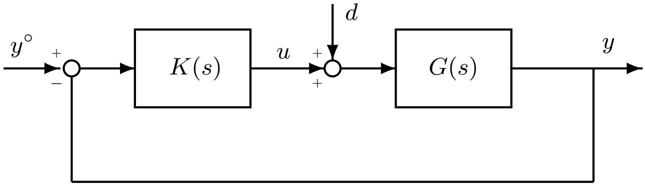
$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con $p(s)$ e $q(s)$ polinomi coprimi

**Definizione:** un controllore in retroazione dinamica sull'uscita presenta **azione integrale** quando $K(s)$ ha almeno un polo in $0$, ossia

$$p(0) = 0$$

# Effetto di un disturbo sul sistema in ciclo chiuso




- Consideriamo un disturbo $d$ sull'ingresso
- Equazioni del processo e del controllore

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)\,[U(s) + D(s)] \\
U(s) &= K(s)\,[Y^\circ(s) - Y(s)]
\end{aligned}
$$

- Interconnessione in retroazione tra processo e controllore

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)\,\{K(s)\,[Y^\circ(s) - Y(s)] + D(s)\} \\
&\Downarrow \\
Y(s) &= \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}\,Y^\circ(s) + \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}\,D(s)
\end{aligned}
$$

# Funzioni di trasferimento in ciclo chiuso

- **Funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra riferimento $y^\circ$ e uscita $y$**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

- **Funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra disturbo $d$ e uscita $y$**

$$G^*_{d\,y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

- Denominatore delle funzioni di trasferimento in ciclo chiuso dipende dal **guadagno d'anello** $K(s)\,G(s)$
- In termini di polinomi $G(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$, $K(s) = \dfrac{q(s)}{p(s)}$ e quindi

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}$$

$$G^*_{d\,y}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}$$

# Regime permanente

- Per il principio di sovrapposizione degli effetti, regime permanente complessivo

$$y_f^{\mathrm{RP}}(t) = y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^{D}(t)$$

  - $y_f^{Y^\circ}$ regime permanente in risposta al riferimento $y^\circ$
  - $y_f^{D}$ regime permanente in risposta al disturbo $d$

- Supponiamo riferimento $y^\circ$ e disturbo $d^\circ$ costanti

$$y^\circ(t) = Y_0\, 1(t) \qquad d(t) = D_0\, 1(t)$$

$\Rightarrow$ regime permanente complessivo

$$y_f^{\mathrm{RP}}(t) = [G^*_{y^\circ y}(0)\, Y_0 + G^*_{dy}(0)\, D_0]\, 1(t)$$

con

$$\begin{aligned} G^*_{y^\circ y}(0) &= \frac{b(0)\, q(0)}{a(0)\, p(0) + b(0)\, q(0)} \\ G^*_{dy}(0) &= \frac{b(0)\, p(0)}{a(0)\, p(0) + b(0)\, q(0)} \end{aligned}$$

# Proprietà dell'azione integrale

- Supponiamo
  - $b(0) \neq 0$
  - controllore con azione integrale, ossia $p(0) = 0$
- Guadagni in continua in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} G^*_{y^\circ y}(0) &= \frac{b(0)\,q(0)}{a(0)\,p(0) + b(0)\,q(0)} = 1 \\ G^*_{dy}(0) &= \frac{b(0)\,p(0)}{a(0)\,p(0) + b(0)\,q(0)} = 0 \end{aligned}$$

- Regime permanente complessivo

$$y_f^{\mathrm{RP}}(t) = [G^*_{y^\circ y}(0)\,Y_0 + G^*_{dy}(0)\,D_0]\,1(t) = Y_0\,1(t)$$

- L'uscita converge al valore desiderato $Y_0$ anche in presenza di un disturbo costante $\Rightarrow$ **reiezione** perfetta del disturbo

# Proprietà dell'azione integrale

**Fatto 3.11** Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita a 1 grado di libertà

$$U(s) = K(s)[Y^\circ(s) - Y(s)]$$

con azione integrale e tale che $\varphi^*(s)$ sia asintoticamente stabile.
Allora tale controllore garantisce

- inseguimento perfetto di un riferimento costante
- reiezione perfetta di un disturbo costante

- In presenza di azione integrale, il prefiltro non è necessario per soddisfare la specifica 2 (inseguimento perfetto)
  $\Rightarrow$ per questo motivo si pone $H_f = 1$ considerando un sistema di controllo a 1 grado di libertà
- Questo approccio può essere applicato anche ad altri tipi di riferimenti/disturbi [esempio: inserendo un doppio integratore, ossia un polo doppio in $0$ in $K(s)$, si ottiene inseguimento perfetto di riferimenti a rampa $y^\circ(t) = Y^\circ \cdot t \cdot 1(t)$]

# Scelta dell'ordine del controllore

- Possiamo modificare il progetto del controllo in retroazione dinamica sull'uscita inserendo anche l'azione integrale

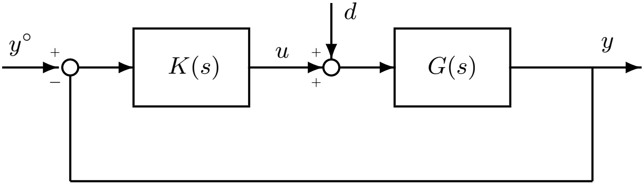
- Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento
$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$
con grado $q(s) =$ grado $p(s)$ = $n_K$ **ordine del controllore**

- $2n_K + 1$ parametri liberi in $K(s)$

- Imponiamo che il controllore abbia azione integrale ossia $p(0) = 0$
$\Rightarrow$ rimangono $2n_K$ parametri liberi

**Fatto 3.12** Consideriamo un processo tale che $b(0) \neq 0$ e un controllore con azione integrale. Se ordine del controllore $n_K$ tale che $n_K \geq$ grado $a(s)$, allora i coefficienti di $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ possono essere scelti in modo arbitrario al variare di $p(s)$ e $q(s)$
$\Rightarrow$ i poli in ciclo chiuso possono essere posizionati a piacere

# Esercizi proposti




Si consideri il sistema a retroazione in figura con

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 1}$$

a. Progettare la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ in modo tale che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.
b. Progettare un controllore con azione integrale tale che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.
c. Si supponga che

$$y^\circ(t) = 10 \cdot 1(t), \quad d(t) = 5 \cdot 1(t)$$

Per i controllori progettati ai punti a) e b), determinare il regime permanente per l'uscita $y(t)$ e l'errore di inseguimento $y(t) - y^\circ(t)$ a regime.