Fondamenti di automatica

Esercizi di riepilogo sull'analisi dei sistemi non lineari

Esercizio 1

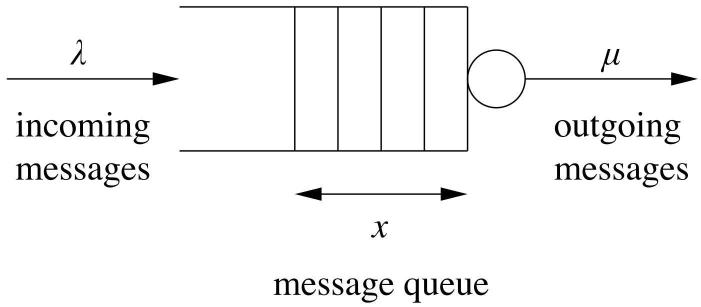
Si consideri un sistema non lineare tempo continuo descritto dall'equazione differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^3(t) + x_2(t) \\ \\ \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) + x_2^3(t) \\ \\ y(t) = 2x_1(t) \end{cases}$$

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema;

b) Si studi la stabilità degli equilibri.

Esercizio 2



La dinamica di una coda in un server può essere descritta da un sistema non lineare del tipo

$$\dot{x} = \lambda - \mu_{\max} \frac{x}{x+1}$$

con x lunghezza media della coda, $\lambda > 0$ tasso di messaggi in ingresso, $\mu_{\max} > 0$ tasso massimo con cui i messaggi vengono serviti, $x/(x+1)$ effettivo tasso di servizio in funzione della dimensione della coda.

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema per $x > 0$ al variare dei parametri λ e $\mu_{\max}$.

b) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 3

Come visto, la dinamica di un ecosistema in cui interagiscono due specie animali può essere descritta in prima approssimazione tramite le equazioni di Lotka-Volterra, note anche come equazioni o modello preda-predatore:

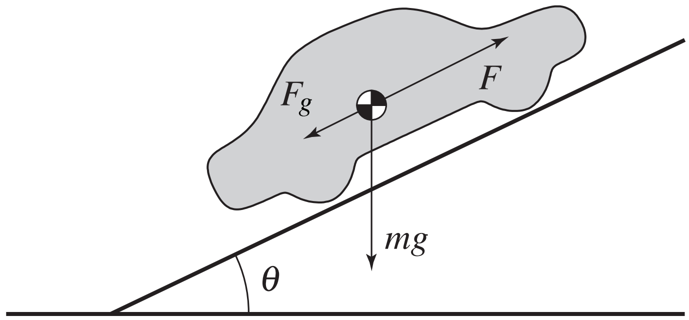
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_1(t)\, x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\delta\, x_2(t) + \gamma\, x_1(t)\, x_2(t) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ costanti opportune, dove $x_1(t)$ rappresenta la popolazione della specie preda al tempo t, mentre $x_2(t)$ rappresenta la popolazione della specie predatore al tempo t. Si supponga per semplicità $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ e $\gamma = 1$.

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema.

b) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 4



Si consideri il problema del controllo della velocità v (cruise control) di un veicolo di massa m. La dinamica della velocità v in funzione dell'apertura u della valvola del motore e della pendenza θ della strada è del tipo

$$\dot{v} = -(\alpha + \beta \sin(\theta)) - \gamma v^2 + \delta u$$

dove la costante $\alpha > 0$ tiene conto dell'attrito, $\beta > 0$ tiene conto dell'effetto della forza di gravità, γ tiene conto della componente aerodinamica e $\delta > 0$ esprime la relazione tra l'apertura della valvola e l'accelerazione impressa al veicolo.

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema al variare di u e θ.

b) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 5

Si consideri la dinamica di un virus informatico in una rete di computer. Sia $a \geq 0$ la frazione di computer infetti e sia $K > 0$ il numero di computer vulnerabili che possono essere infettati da ciascun computer infetto nell'unità di tempo. Poiché il numero di computer vulnerabili è $1 - a$, la dinamica del virus è del tipo

$$\dot{a} = Ka(1 - a)$$

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema.

b) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

Supponendo ora che i computer infetti possano essere immunizzati mediante un anti-virus con un rate γ tale che $0 < \gamma < K$ la dinamica diventa del tipo

$$\begin{aligned} \dot{a} &= K\,a\,(1 - a - r) - \dot{r} \\ \dot{r} &= \gamma\,a \end{aligned}$$

dove r indica la frazione di computer immunizzati.

c) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema così modificato.

d) Se ne studi la stabilità.

Esercizio 6

Molti sistemi biologici, ad esempio le reti di neuroni, possono essere rappresentati come oscillatori accoppiati. Il modello più semplice per due oscillatori accoppiati è del tipo

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega + K \sin(\theta_2 - \theta_1)\\ \dot{\theta}_2 &= \omega + K \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

dove θ_1 e θ_2 indicano le fasi dei due oscillatori, ω la loro frequenza di oscillazione, e $K > 0$ l'intensità dell'accoppiamento.

a) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema.

b) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

c) Si consideri ora lo sfasamento tra i due oscillatori $\varphi = \theta_1 - \theta_2$. La dinamica dello sfasamento si ottiene a partire dalle dinamiche di θ_1 e θ_2 e risulta essere

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = K \sin(\theta_2 - \theta_1) - K \sin(\theta_1 - \theta_2) = -2\,K \sin(\varphi)$$

Si calcolino i punti di equilibrio del nuovo sistema così ottenuto.

d) Si studi la stabilità degli equilibri al punto c).

Soluzioni

Esercizio 1

a) Si calcolano gli equilibri risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = x_1^3 + x_2 \\ 0 = -x_1^3 + x_2^3 \\ y = 2x_1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trova $x_1 = x_2$. Imponendo tale eguaglianza, la prima equazione diventa $x_1^3 + x_1 = x_1(x_1^2 + 1) = 0$ che ha come unica soluzione $x_1 = 0$. Quindi il sistema non lineare ammette un unico equilibrio dato da $x_e = (0, 0)$ e $y_e = 0$.

b) Per studiare la stabilità di questo equilibrio, calcoliamo la matrice A_e del sistema linearizzato attorno all'origine. Si ha $f_1(x) = x_1^3 + x_2$ e $f_2(x) = -x_1^3 + x_2^3$, quindi

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice A_e ha quindi un autovalore in 0 di molteplicità 2. Siamo dunque nel caso critico (non tutti gli autovalori hanno parte reale < 0 ma non ci sono autovalori con parte reale > 0). Quindi, non si possono trarre conclusioni circa la stabilità con il metodo di linearizzazione.

Esercizio 2

a) In questo caso il sistema ha una sola variabile di stato, la lunghezza della coda x, e una sola variabile di ingresso $u = \lambda$ tasso di messaggi in ingresso. Risulta quindi

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad \text{con } f(x, u) = u - \mu_{\max} \frac{x}{x+1}$$

I punti di equilibrio sono tutte e solo le coppie (x_e, u_e) tali che $f(x_e, u_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e, u_e) = 0 \iff u_e - \mu_{\max} \frac{x_e}{x_e + 1} = 0 \iff u_e(x_e + 1) - \mu_{\max} x_e = 0$$
$$\iff x_e = \frac{u_e}{\mu_{\max} - u_e} = \frac{\lambda}{\mu_{\max} - \lambda}$$

Notiamo che solo quando $0 < \lambda < \mu_{\max}$ lo stato di equilibrio x_e è > 0 e quindi corrisponde ad un valore compatibile con il valore fisico della lunghezza della coda. Per $\lambda = \mu_{\max}$ non ho nessun stato di equilibrio e quando $\lambda > \mu_{\max}$ ho uno stato di equilibrio $x_e < 0$ non compatibile con il valore fisico della lunghezza della coda.

b) Considero solo il caso $x_e > 0$ compatibile con il valore fisico della lunghezza della coda. Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio (x_e, u_e) devo linearizzare il sistema nell'intorno di (x_e, u_e) calcolando $A_e = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_e, u=u_e}$. In questo caso

$$A_e = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_e, u=u_e} = -\mu_{\max} \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=\lambda/(\mu_{\max}-\lambda), u=\lambda} = -\frac{(\mu_{\max} - \lambda)^2}{\mu_{\max}}$$

Poiché $\mu_{\max} > 0$ si vede che A_e risulta sempre < 0. Di conseguenza il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile, e quindi tali punti di equilibrio sono tutti localmente asintoticamente stabili.

Esercizio 3

a) Riscrivendo le equazioni nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\,(1 - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t)\,(1 - x_1(t)) \end{cases}$$

è facile verificare che il sistema ammette due punti d'equilibrio

$$x_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Si ha

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & -1 + x_1 \end{pmatrix}$$

Per l'equilibrio x_{e1} si ha

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_{e1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha un autovalore a parte reale > 0. Pertanto l'equilibrio x_{e1} risulta instabile.
Per l'equilibrio x_{e2} si ha

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_{e2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha una coppia di autovalori puramente immaginari $\pm j$. Di conseguenza non si possono trarre conclusioni circa l'equilibrio x_{e2}. Utilizzando metodi di analisi più avanzati si potrebbe verificare che l'equilibrio x_{e2} è marginalmente stabile e le due popolazioni tendono ad oscillare periodicamente intorno a tale equilibrio senza però convergere ad esso.

Esercizio 4

a) In questo caso il sistema ha una sola variabile di stato, la velocità $x = v$, e una sola variabile di ingresso u apertura della valvola del motore. Risulta quindi

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{con } f(x, u) = -(\alpha + \beta \sin\theta) - \gamma\, x^2 + \delta u$$

I punti di equilibrio sono tutte e solo le coppie (x_e, u_e) tali che $f(x_e, u_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e, u_e) = 0 \iff -(\alpha + \beta \sin\theta) - \gamma\, x_e^2 + \delta u_e = 0 \iff \gamma\, x_e^2 = \delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)$$

Occorre dunque distinguere due casi. Se $\delta u_e < (\alpha + \beta \sin\theta)$ l'equazione non ha soluzioni e quindi non ci sono punti di equilibrio. Se invece $\delta u_e > (\alpha + \beta \sin\theta)$ ci sono due stati di equilibrio

$$x_e = \pm\sqrt{\frac{\delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)}{\gamma}}$$

b) Considero solo il caso $\delta u_e > (\alpha + \beta \sin\theta)$ perché altrimenti non ci sono punti di equilibrio. Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio (x_e, u_e) devo linearizzare il sistema nell'intorno di (x_e, u_e) calcolando $A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e, u=u_e}$. In questo caso

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e, u=u_e} = -2\gamma\, x|_{x=x_e u=u_e} = -2\gamma\, x_e$$

Occorre quindi distinguere due casi. Per velocità di equilibrio positive $x_e = \sqrt{\frac{\delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)}{\gamma}}$ si ha

$$A_e = -2\gamma\sqrt{\frac{\delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)}{\gamma}} < 0$$

Di conseguenza, nei punti di equilibrio per velocità positive, il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile, e quindi tali punti di equilibrio sono localmente asintoticamente stabili.
Per velocità di equilibrio negative $x_e = -\sqrt{\frac{\delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)}{\gamma}}$ si ha invece

$$A_e = 2\gamma\sqrt{\frac{\delta u_e - (\alpha + \beta \sin\theta)}{\gamma}} > 0$$

Di conseguenza, nei punti di equilibrio per velocità negative, il sistema linearizzato risulta esponenzialmente instabile, e quindi tali punti di equilibrio sono instabili.

Esercizio 5

a) In questo caso il sistema ha una sola variabile di stato $x = a$, frazione di computer infetti, e non ci sono ingressi. Risulta quindi

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{con } f(x) = Kx(1-x)$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli gli stati x_e tali che $f(x_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e) = 0 \Longleftrightarrow Kx_e(1-x_e) = 0$$

Ci sono dunque solo due punti di equilibrio: $x_e = 0$ e $x_e = 1$.

b) Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio x_e devo linearizzare il sistema nell'intorno di x_e calcolando $A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$. In questo caso

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = K - 2Kx_e$$

Poiché $K > 0$ si vede che per il punto di equilibrio $x_e = 0$ (corrispondente al caso in cui non c'è infezione nella rete) si ha $A_e = K > 0$. Di conseguenza, il sistema linearizzato risulta esponenzialmente instabile e quindi tale punto di equilibrio è instabile.
Viceversa per il punto di equilibrio $x_e = 1$ (corrispondente al caso in cui tutti i computer sono infetti) si ha $A_e = -K < 0$. Di conseguenza, il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile e quindi tale punto di equilibrio è localmente asintoticamente stabile.

c) Scegliendo come stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ r \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = Kx_1(1-x_1-x_2) - \dot{x}_2 = Kx_1(1-x_1-x_2) - \gamma\, x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma\, x_1 \end{aligned}$$

Di conseguenza le equazioni di stato del sistema sono

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{con } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kx_1(1-x_1-x_2) - \gamma\, x_1 \\ \gamma\, x_1 \end{bmatrix}$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli i vettori x_e tali che $f(x_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Kx_{e,1}(1-x_{e,1}-x_{e,2}) - \gamma\, x_{e,1} = 0 \\ \gamma\, x_{e,1} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x_{e,1} = 0$$

Quindi i punti di equilibrio sono tutti e soli i vettori del tipo

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,e} \end{bmatrix} \quad \text{con } x_{2,e} \in \mathbb{R}$$

Notiamo che ovviamente solo i valori $x_{2,e} \in [0,1]$ sono consistenti con il modello essendo x_2 la frazione di computer infetti.

d) Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio x_e devo linearizzare il sistema nell'intorno di x_e calcolando $A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$. In questo caso poiché ho due variabili di stato

$$
\begin{aligned}
A_e &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_{e,1},x_2=x_{e,2}} \\
&= \left.\begin{bmatrix} K-\gamma-2K\,x_1-K\,x_2 & -Kx_1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}\right|_{x_1=0,x_2=x_{2,e}} = \begin{bmatrix} K-\gamma-K\,x_{2,e} & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice A_e ha quindi come autovalori 0 e $K - \gamma - Kx_{2,e}$. Occorre distinguere due casi. Quando $K - \gamma - Kx_{2,e} > 0$ uno dei due autovalori ha Re > 0, di conseguenza il sistema linearizzato risulta esponenzialmente instabile e il corrispondente punto di equilibrio è instabile.
Quando invece $K - \gamma - Kx_{2,e} < 0$ allora non ci sono autovalori con Re > 0 ma non tutti gli autovalori hanno Re< 0, di conseguenza il metodo di linearizzazione non è sufficiente per concludere sulla stabilità del punto di equilibrio.

Esercizio 6

a) Scegliendo come stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega + K \sin(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \omega + K \sin(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Di conseguenza le equazioni di stato del sistema sono

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{con } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega + K \sin(x_2 - x_1) \\ \omega + K \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli i vettori x_e tali che $f(x_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega + K \sin(x_{e,2} - x_{e,1}) = 0 \\ \omega + K \sin(x_{e,1} - x_{e,2}) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(x_{e,2} - x_{e,1}) = -\omega/K \\ \sin(x_{e,1} - x_{e,2}) = -\omega/K \end{cases}$$

Poiché $\sin(x_{e,2} - x_{e,1}) = -\sin(x_{e,1} - x_{e,2})$ si vede che quando $\omega \neq 0$ il sistema non ha soluzioni e quindi non ci sono punti di equilibrio. Quando invece $\omega = 0$ tutti i valori di $x_{e,1}$ e $x_{e,2}$ tali per cui $\sin(x_{e,1} - x_{e,2}) = 0$ sono punti di equilibrio. Quindi per $\omega = 0$ tutti i vettori del tipo

$$x = \begin{bmatrix} x_{1,e} \\ x_{1,e} + \ell\,\pi \end{bmatrix} \text{ con } x_{1,e} \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

sono punti di equilibrio.

b) Considero solo il caso $\omega = 0$ perché per $\omega \neq 0$ non ci sono punti di equilibrio. Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio x_e devo linearizzare il sistema nell'intorno di x_e calcolando $A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$.
In questo caso poiché ho due variabili di stato

$$\begin{aligned} A_e &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_{e,1},x_2=x_{e,2}} \\ &= \left.\begin{bmatrix} -K\cos(x_2 - x_1) & K\cos(x_2 - x_1) \\ K\cos(x_1 - x_2) & -K\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_{1,e},x_2=x_{1,e}+k\,\pi} \\ &= \begin{bmatrix} -K\cos(\ell\,\pi) & K\cos(\ell\,\pi) \\ K\cos(-\ell\,\pi) & -K\cos(-\ell\,\pi) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} (-1)^{\ell+1} & (-1)^{\ell} \\ (-1)^{\ell} & (-1)^{\ell+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Occorre distinguere due casi. Quando ℓ è pari la matrice A_e diventa

$$A_e = K \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2\,K$. Quindi non essendo il sistema linearizzato asintoticamente stabile né essendoci autovalori con Re> 0 il metodo della linearizzazione non è sufficiente per concludere sulla stabilità locale dei punti di equilibrio per ℓ pari.
Quando ℓ è dispari la matrice A_e diventa

$$A_e = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2\,K$. Quindi essendoci un autovalore con Re> 0 possiamo concludere che i punti di equilibrio per ℓ dispari sono tutti instabili.

c) La dinamica dello sfasamento ha una sola variabile di stato $x = \varphi$. Risulta quindi

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{con } f(x) = -2\,K\,\sin(x)$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli gli stati x_e tali che $f(x_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e) = 0 \Longleftrightarrow -2\,K\,\sin(x_e) = 0$$

Tutti gli stati del tipo $x_e = \ell\,\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$, sono quindi punti di equilibrio.

d) Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio x_e devo linearizzare il sistema nell'intorno di x_e calcolando $A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$. In questo caso

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = -2\,K\,\cos(x)\big|_{x=\ell\,\pi} = -2\,K\,(-1)^{\ell}$$

Anche in questo caso quindi dobbiamo distinguere tra i punti di equilibrio per ℓ pari (corrispondenti al caso in cui i due oscillatori sono in fase) e i punti di equilibrio per ℓ dispari (corrispondenti al caso in cui i due oscillatori hanno fase contraria).
Per ℓ pari si ha $A_e = -2\,K < 0$, di conseguenza il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e i corrispondenti punti di equilibrio sono localmente asinntoticamente stabili.
Per ℓ dispari si ha $A_e = -2\,K > 0$, di conseguenza il sistema linearizzato è esponenzialmente instabile i corrispondenti punti di equilibrio sono localmente instabili.
Si vede quindi che i due oscillatori tendono a sincronizzarsi.