Fondamenti di automatica
Note sull'analisi dei sistemi tempo discreto

Vediamo ora come molti dei concetti introdotti per sistemi tempo continuo (analisi modale, stabilità interna e esterna, equilibri, ecc.) valgano anche per sistemi tempo discreto (TD) con poche modifiche. Partiremo considerando il caso di sistemi LTI TD per poi generalizzare l'analisi al caso di sistemi non lineari TD.

2.13 Analisi dei sistemi tempo discreto

Un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto (LTI TD) è un sistema di *equazioni alle differenze lineari* a coefficienti costanti, che può essere scritto in forma matriciale e in maniera del tutto generale nel seguente modo:

$$\begin{cases} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + Du\,(t) \end{cases}$$

Come visto in precedenza nel dominio del tempo l'evoluzione complessiva assume la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{A^t\,x(0)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)}_{x_f(t)} \\ y(t) &= \underbrace{C\,A^t\,x(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu(\tau) + D\,u(t)}_{y_f(t)} \end{aligned}$$

dove si può notare la scomposizione della risposta in una parte di evoluzione libera $x_\ell(t)$, $y_\ell(t)$ dipendente dalla condizione iniziale $x(0)$ e una parte di evoluzione forzata $x_f(t)$, $y_f(t)$ dipendente dall'ingress $u(t)$. Per meglio comprendere come sono fatte le traiettorie associate a una soluzione di questo tipo e per studiarne le proprietà possiamo, analogamente a quanto fatto per sistemi TC, studiare la forma della soluzione in un dominio trasformato. Per sistemi TD, invece della trasformata di Laplace, si utilizza la trasformata Zeta.

Trasformata zeta e risposta dei sistemi LTI TD

Data una successione $f(0), f(1), \ldots$, la sua trasformata zeta è definita nel seguente modo:

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}, \quad z \in \mathbb{C}$$

La trasformata zeta associa ad una sequenza nel tempo $f(t)$ un'altra funzione $F(z)$ di variabile complessa, ed essa risulta ben definita ogni volta che la sommatoria esiste finita. L'utilità della trasformata zeta deriva dal modo in cui potenze di numeri reali o complessi vengono mappate del dominio zeta. In particolare, è facile verificare il seguente fatto:

$$\mathcal{Z}\left\{\lambda^t \cdot 1(t)\right\} = \frac{z}{z-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

dove in questo caso $1(t)$ indica il gradino unitario TD. Si vede quindi che, nel dominio zeta, un polo in λ dà luogo nel tempo a un modo di evolvere del tipo λ^t.

La trasformata zeta gode di tre importanti proprietà che possono essere facilmente verificate:

1. **Linearità**: $\mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F(z) + \alpha_2 F_2(z)$ per ogni coppia di sequenze $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2 reali o complesse

2. **Anticipo**: $\mathcal{Z}\{f(t+1)\} = zF(z) - zf(0)$

3. **Ritardo**: $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \dfrac{F(z)}{z}$

Dalle proprietà 2 e 23 notiamo che la variabile z può essere interpretata simbolicamente come un operatore di anticipo unitario nel tempo, mentre la sua inversa $1/z$ può essere interpretata simbolicamente come un operatore di ritardo unitario nel tempo. La trasformata zeta risulta estremamente utile nello studio dei sistemi LTI TD proprio grazie alle proprietà 1 e 2 che consentono di trasformare equazioni alle differenze nel tempo in equazioni algebriche nel dominio zeta. Indichiamo con $X(z)$, $U(z)$ e $Y(z)$ le trasformate di Laplace di stato, ingresso e uscita, rispettivamente. Applicando la trasformata zeta, l'equazione di transizione dello stato nel dominio trasformato diventa

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}\left\{x(t+1)\right\} & = & \mathcal{Z}\left\{Ax(t) + Bu(t)\right\} \\ & \Downarrow & \\ zX(z) - zx(0) & = & AX(z) + BU(z) \end{array}$$

Si vede quindi che l'equazione alle differenze nell'incognita $x(t)$ è diventata nel dominio trasformato un'equazione algebrica nell'incognita $X(z)$. Risolvendo tale equazione algebrica rispetto al vettore incognito $X(z)$ si ottiene la forma della soluzione nel dominio trasformato

$$\begin{array}{rcl} X(z) & = & (zI - A)^{-1} z\, x_0 + (zI - A)^{-1} BU(z) \\ Y(z) & = & C\, X(z) + D\, U(z) \\ & = & C(zI - A)^{-1} z\, x_0 + \left[C(zI - A)^{-1} B + D\right] U(z) \end{array}$$

Notiamo come le espressioni trovate siano del tutto analoghe a quelle viste per sistemi TC con l'aggiunta di un fattore z nelle evoluzioni libere. In particolare, anche per sistemi LTI TD, possiamo definire la funzione di trasferimento

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Si ha quindi lo schema riportato in Tabella che lega le soluzioni nei due domini.

Tabella 1: Relazione tra dominio del tempo e zeta

	Evoluzione libera nello stato x_ℓ	**Risposta libera nell'uscita** y_ℓ	**Evoluzione forzata nello stato** x_f	**Risposta forzata nell'uscita** y_f
Tempo	$A^t\, x(0)$	$CA^t\, x(0)$	$\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)$	$\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Du(t)$
Zeta	$(zI - A)^{-1}\, z\, x(0)$	$C(zI - A)^{-1}\, z\, x(0)$	$(zI - A)^{-1} BU(z)$	$\left[C(zI - A)^{-1} B + D\right] U(z)$

Analisi modale per sistemi LTI TD

Dalla tabella, si vede che la soluzione nel dominio del tempo coinvolge la potenza di matrice A^t, mentre nel dominio zeta la soluzione coinvolge il termine $(zI - A)^{-1} z$. Si ha infatti

$$\mathcal{Z}\left\{A^t\right\} = (zI - A)^{-1} z$$

dove risulta evidente l'analogia con la trasformata della potenza $\mathcal{Z}\left\{\lambda^t\right\} = z/(z - \lambda)$. Quindi un modo possibile per determinare la potenza di matrice A^t consiste nel calcolare preliminarmente la matrice $(zI - A)^{-1} z$ e quindi applicare la cosiddetta anti-trasformata zeta $\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$ che consente di ritornare nel dominio del tempo a partire da quello zeta

$$A^t = \mathcal{Z}^{-1}\left\{(zI - A)^{-1} z\right\}$$

A questo proposito, ricordiamo che $(zI - A)^{-1}$ è una matrice i cui elementi sono funzioni razionali aventi come poli gli autovalori λ_i della matrice A. In particolare, analogamente a quanto visto nell'analisi modale per sistemi TC, $(zI - A)^{-1}$ può essere scritta nella forma

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(zI - A)}{\varphi(z)} = \frac{Q(z)}{m(z)}$$

con $\varphi(z) = \det(zI - A)$ polinomio caratteristico della matrice A, $Q(z)$ matrice di polinomi e $m(z)$ polinomio minimo della matrice A.

Poiché un polo in λ_i nel dominio zeta dà luogo nel tempo a un modo di evolvere del tipo $\lambda_i^t \cdot 1(t)$, allora vale il seguente risultato (per la dimostrazione relativa al caso di poli con molteplicità maggiore di 1 si rimanda a un qualunque testo di base di teoria dei sistemi/fondamenti di automatica).

Teorema 2.7 (Modi naturali TD) Dato un sistema LTI TD, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori del sistema e siano $m_1, \dots, m_k$ le corrispondenti molteplicità nel polinomio minimo $m(z)$. Allora A^t è una matrice avente come elementi opportune combinazioni lineari di λ_i^t, $t\lambda_i^t$, ..., $t^{m_i-1}\lambda_i^t$ per $i = 1, \dots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.
Di conseguenza $x_\ell(t) = A^t x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,A^t x(0)$ evolvono secondo una opportuna combinazione dei modi naturali del sistema (al variare delle condizioni iniziali).

Per concludere, notiamo che anche nel caso TD quando ho un autovalore complesso λ_i anche il suo complesso coniugato $\overline{\lambda}_i$ è autovalore con la stessa molteplicità m_i. Quindi i due modi $t^\ell \lambda_i^t$ e $t^\ell \overline{\lambda}_i^t$ sono sempre presenti in coppia e danno luogo ai due modi reali $t^\ell \sin(\angle\lambda_i t)\,|\lambda_i|^t$ e $t^\ell \cos(\angle\lambda_i t)\,|\lambda_i|^t$.

Stabilità interna e esterna nei LTI TD

Poiché i modi naturali TD sono diversi da quelli TC (si ha λ_i^t invece di $e^{\lambda_i t}$), allora la regione di convergenza nel piano z è diversa dalla regione di convergenza nel piano s. In particolare, per modi semplici λ_i^t, poiché $|\lambda_i^t| = |\lambda_i|^t$, possiamo immediatamente concludere che Il modo naturale λ_i^t associato all'autovalore λ_i è **convergente a zero** per $|\lambda_i| < 1$, **limitato** per $|\lambda_i| = 1$, **divergente** per $|\lambda_i| > 1$. Si vedano, a titolo di esempio, gli andamenti riportati in Figura 1 relativi al caso di autovalori reali.

Rispetto al caso TC l'analisi rimane quindi la stessa. La differenza sostanziale consiste nel fatto che le condizioni per la convergenza, limitatezza e divergenza non dipendono più dalla posizione degli autovalori rispetto all'asse reale, bensì dipendono dalla posizione rispetto al cerchio unitario. Questo è semplicemente dovuto al fatto che la soluzione non dipende dall'esponenziale di matrice e^{At} bensì dalla potenza di matrice A^t. Si noti inoltre che a differenza del caso TC, a TD si possono avere traiettorie di tipo oscillatorio anche in presenza di autovalori reali negaivi.

Consideriamo ora il generico modo naturale $t^\ell \lambda_i^t$. Notando che $|t^\ell \lambda_i^t| = t^\ell\,|\lambda_i|^t$, possiamo immediatamente concludere che

i. i modi naturali $t^\ell \lambda_i^t$ associati ad un autovalore λ_i con $|\lambda_i| < 1$ sono tutti convergenti (in quanto il termine convergente $|\lambda_i|^t$ domina sul termine divergente t^ℓ);

ii. un modo naturale $t^\ell \lambda_i^t$ associato ad un autovalore λ_i con $|\lambda_i| = 1$ è limitato se e solo se $\ell = 0$, mentre diverge (polinomialmente) per $\ell > 0$;

iii. i modi naturali $t^\ell \lambda_i^t$ associati ad un autovalore λ_i con $|\lambda_i| > 1$ sono tutti divergenti (esponenzialmente).

Sulla base di queste considerazioni, possiamo quindi enunciare il seguente risultato che riassume le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità interna di un sistema LTI TD (le definizioni di stabilità asintotica e marginale sono del tutto analoghe a quelle viste per sistemi LTI TC).
Quindi l'equivalente a TD del Teorema 1 risulta essere il seguente.

Teorema 2.8 (Stabilità interna TD) Un sistema LTI TD è asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi naturali sono convergenti, ossia se e solo se tutti gli autovalori del sistema (radici del polinomio caratteristico $\varphi(z)$) hanno modulo < 1.
Un sistema LTI TD è marginalmente stabile se e solo se tutti i modi naturali sono limitati (ma non tutti sono convergenti), ossia se e solo se tutti gli autovalori del sistema hanno modulo ≤ 1 e quelli con modulo $= 1$ hanno molteplicità unitaria come radici del polinomio minimo $m(z)$.
Negli altri casi il sistema è internamente instabile.

Vediamo quindi che la regione di stabilità asintotica nel piano z corrisponde al cerchio unitario, ossia all'insieme $\mathbb{C}_z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Per quanto riguarda la stabilità esterna, anche per sistemi LTI TD la stabilità esterna corrisponde ad avere una risposta forzata $Y_f(z) = G(z)U(z)$ limitata quando l'ingresso è limitato. In particolare, come per i sistemi LTI TC, anche nel caso di sistemi LTI TD si ha stabilità

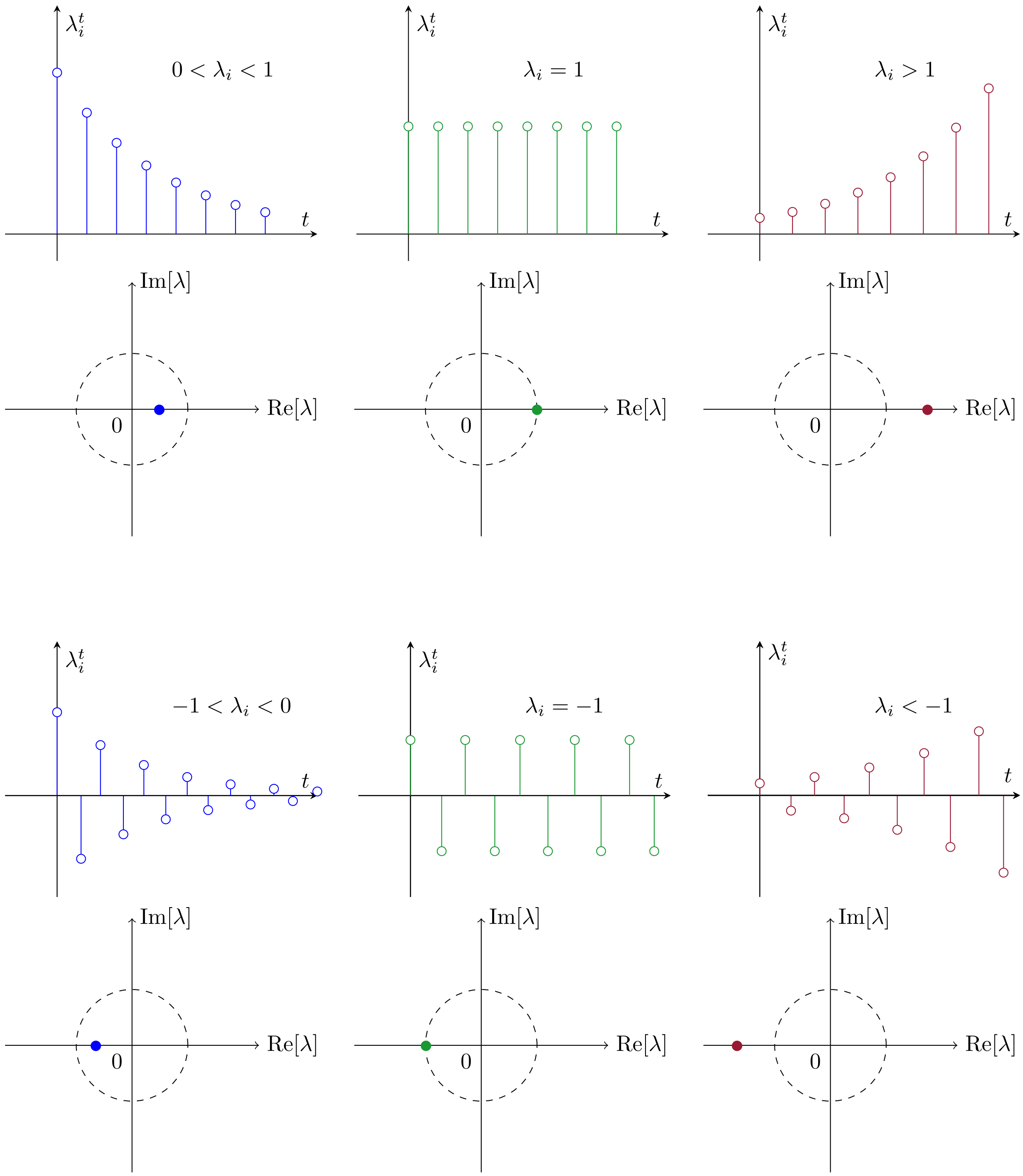

Figura 1: Modi naturali nel caso di autovalori distinti reali e posizione nel piano complesso.

esterna quando tutti i poli della funzione di trasferimento $G(z)$ appartengono alla regione di stabilità asintotica $\mathbb{C}_z$.

Teorema 2.9 (Stabilità esterna TD) Considero un sistema LTI TD SISO con funzione di trasferimento $G(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$ dove $b(z)$ e $a(z)$ sono polinomi coprimi. Allora il sistema è stabile esternamente se e solo se tutti i poli di $G(z)$, radici di $a(z)$, hanno modulo < 1.

Per concludere, notiamo che anche per sistemi LTI TD, la stabilità asintotica implica la stabilità esterna. La seguente tabella riassume le nozioni di stabilità per sistemi LTI TD e le relative condizioni. Per verificare l'appartenenza delle radici di un polinomio alla regione di stabilità asintotica $\mathbb{C}_z$ si può utilizzare il cosiddetto **criterio di Jury**, che rappresenta l'equivalente TD del criterio di Routh.

Tabella 2: Tabella riassuntiva sulla stabilità TD.

STABILITÀ	Quantità di interesse	Condizione
Stabilità Asintotica	Polinomio caratteristico $\varphi(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$
Stabilità Marginale	Polinomio minimo $m(z)$	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$ & $m_i = 1$ nel caso in cui $\lvert\lambda_i\rvert = 1$
Stabilità esterna	Funzione di trasferimento $G(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$ per ogni λ_i tale che $a(\lambda_i) = 0$

Equilibri nei sistemi TD

Consideriamo ora un generico sistema TD tempo-invariante

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Anche per i sistemi TD è interessante studiare le proprietà della soluzione nell'intorno delle soluzione di equilibrio. La definizione di punto di equilibrio è analoga a quella vista per sistemi TC.

Definizione (Equilibrio). Si definisce **punto di equilibrio** una coppia (x_e, u_e) tale che

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & x_e \\ u(t) & = & u_e, \quad \forall t \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

Notiamo che a ciascun punto di equilibrio (x_e, u_e) possiamo associare la corrispondente uscita di equilibrio $y_e = h(x_e, u_e)$. Dalla definizione di punto di equilibrio segue immediatamente che i punti di equilibrio di un sistema TD sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che

$$f(x_e, u_e) = x_e$$

Quindi rispetto al caso TC, la definizione non cambia ma cambia invece l'equazione da risolvere per calcolare gli equilibri. Naturalmente per sistemi autonomi in cui non è presente alcun ingresso la condizione necessaria sufficiente affinché uno stato x_e sia di equilibrio è che $f(x_e) = x_e$. In questo caso, quindi, uno stato di equilibrio corrisponde a un **punto fisso** della mappa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Notiamo anche che, per sistemi LTI TD in cui $f(x, u) = A\,x + B\,u$, la condizione di equilibrio diventa

$$A\,x_e + B\,u_e = x_e$$

Di conseguenza per sistemi lineari $x_e = 0$ e $u_e = 0$ è sempre un punto di equilibrio. Inoltre, dato un ingresso costante $u(t) = u_e$, i corrispondenti stati di equilibrio sono tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$(I - A)\,x_e = B\,u_e$$

Supponiamo ora che il sistema lineare sia asintoticamente stabile che, come visto, corrisponde ad avere la matrice A con tutti gli autovalori a modulo < 1. Allora la matrice $I - A$ è invertibile, in quanto A non può avere un autovalore in 1. Ne segue che, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un **unico stato di equilibrio**

$$x_e = (I - A)^{-1}\,B\,u_e$$

Ricordando che per un sistema lineare tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, possiamo concludere che per un sistema LTI TD asintoticamente stabile lo stato di equilibrio $x_e = (I - A)^{-1}\,B\,u_e$

corrispondente all'ingresso costante $u(t) = u_e$ risulta essere un equilibrio **globalmente asintoticamente stabile**. Di conseguenza per un sistema LTI TD asintoticamente stabile si ha che

$$u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = (I - A)^{-1} B\, u_e \\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = [C(I - A)^{-1} B + D]\, u_e \end{array}$$

Notando che

$$G(1) = G(z)|_{z=1} = C(I - A)^{-1} B + D\,,$$

si vede quindi che, in risposta ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, l'uscita complessiva $y(t)$ converge al **regime permanente**

$$y_f^U(t) = [C(I - A)^{-1} B + D]\, u_e = G(1)\, u_e$$

La quantità $G(1)$ rappresenta il **guadagno in continua** per sistemi LTI TD.

Esempio 2.23 (Analisi del Google PageRank) Riprendiamo ora l'algoritmo PageRank visto in fase di modellistica. Tale algoritmo serve per decidere l'ordine (ranking) in cui presentare all'utente l'elenco dei riferimenti alle pagine trovate. Consideriamo, a titolo di esempio, la rete associata al grafo di transizione in figura. Come visto, per tale rete, la dinamica dell'algoritmo PageRank assume la forma

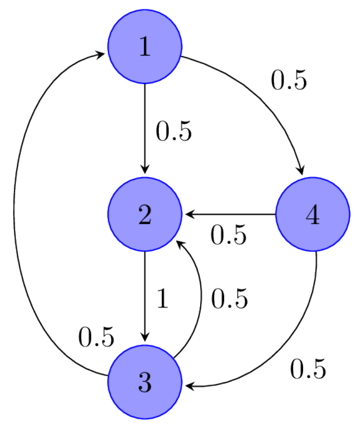

Figura 2: Grafo di transizione.

$$x(t+1) = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1-d}{4}$$

dove il damping factor $d \in (0, 1)$ è un parametro di progetto (una scelta tipica è $d = 0.85$). Definendo

$$A = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

l'algoritmo può essere visto come un sistema LTI TD

$$x(t+1) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

con ingresso costante $u(t) = (1 - d)/4$. La matrice A ha tutti gli autovalori con modulo < 1 per qualsiasi valore del damping factor $d \in (0, 1)$ (in particolare gli autovalori sono $\lambda_1 = d$, $\lambda_2 = -d/2$, $\lambda_3 = -d/4 + j\sqrt{3}\, d/4$, $\lambda_3 = -d/4 - j\sqrt{3}\, d/4$). Di conseguenza l'algoritmo risulta asintoticamente stabile e, in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = (1 - d)/4$, lo stato $x(t)$ converge al valore di equilibrio

$$x_e = (I - A)^{-1} B \frac{1-d}{4} = \begin{bmatrix} 0.1922 \\ 0.3246 \\ 0.3640 \\ 0.1192 \end{bmatrix}$$

Tali valori rappresentano i PageRank delle quattro pagine della rete considerata. Di conseguenza l'ordine di importanza è $3, 2, 1, 4$.
L'analisi effettuata può essere generalizzata a una qualsiasi rete di qualsiasi dimensione. Infatti, si dimostra che per costruzione la matrice A è sempre asintoticamente stabile e quindi l'algoritmo converge sempre per qualsiasi condizione iniziale (questo succede perché per costruzione la matrice A ha tutti elementi non negativi e tutte le colonne che sommano a d; si tratta quindi di una matrice sub-stocastica che ha sempre tutti gli autovalori con modulo < 1).

Stabilità degli equilibri nei sistemi TD

Vediamo ora, per concludere, lo studio della stabilità degli equilibri nei sistemi non lineari TD. Come per sistemi TC, anche nel caso di sistemi TD il metodo più semplice si basa sull'idea di approssimare il comportamento del sistema non lineare nell'intorno dell'equilibrio considerando il sistema lineare ottenuto linearizzando le funzioni f e h. Il sistema linearizzato si calcola in modo analogo a quanto visto per sistemi TC. In particolare, la matrice della dinamica linearizzata assume la forma

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}$$

e vale il seguente risultato.

<u>**Teorema 2.10**</u> **(Metodo di linearizzazione di Lyapunov TD)** Consideriamo un sistema non lineare tempo-invariante TD ed un suo equilibrio (x_e, u_e). Sia A_e la matrice di transizione dello stato del sistema linearizzato attorno a tale equilibrio. Allora:

a) se tutti gli autovalori di A_e hanno modulo < 1 allora l'equilibrio è (localmente) asintoticamente stabile;

b) se almeno un autovalore di A_e ha modulo > 1 allora l'equilibrio è internamente instabile;

c) (caso critico) se invece tutti gli autovalori di A_e hanno modulo < 1 ed esiste almeno un autovalore a modulo < 1, allora non si può concludere nulla.

Nel caso critico il risultato non fornisce conclusioni e si deve ricorrere ad altri metodi per studiare la stabilità (ad esempio il cosiddetto metodo diretto di Lyapunov).

Esempio 2.24 (Analisi del metodo babilonese) Consideriamo il seguente sistema dinamico autonomo TD

$$x(t+1) = \frac{1}{2}\left[x(t) + \frac{\alpha}{x(t)}\right]$$

con $\alpha > 0$ parametro reale. Vogliamo studiare il comportamento del sistema nel dominio $x = 0$. Per calcolare i punti di equilibrio x_e imponiamo la condizione che x_e sia un punto fisso della funzione di transizione dello stato $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$:

$$x_e \ \text{ equilibrio} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x_e + \frac{\alpha}{x_e}\right) = x_e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_e} = \frac{1}{2}x_e$$

Risolvendo rispetto a x_e si ottiene la condizione $x_e^2 = \alpha$. È quindi immediato verificare che l'unico punto di equilibrio con $x_e > 0$ risulta essere

$$x_e = \sqrt{\alpha}$$

Tale punto di equilibrio risulta essere localmente asintoticamente stabile. Infatto, linearizzando si ha

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{x^2}\right)|_{x=\sqrt{\alpha}} = 0$$

Trattandosi di un sistema scalare ho un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, avente modulo < 1 e quindi appartenente alla regione di stabilità asintotica a TD. Rientriamo quindi nel caso a) del Teorema 10 e il punto di equilibrio $x_e^2 = \alpha$ risulta essere almeno localmente asintoticamente stabile. Quindi, inizializzando opportunamente il sistema, lo stato $x(t)$ converge al valore di equilibrio $\sqrt{\alpha}$ (mediante strumenti di analisi più avanzati si può dimostrare che il sistema converge all'equilibrio per ogni stato iniziale $x(0) > 0$). Questo sistema, già noto ai matematici dell'antichità, fornisce quindi un algoritmo iterativo per calcolare la radice quadrata del parametro α (che può anche essere interpretato come l'ingresso dell'algoritmo iterativo).
Per concludere, notiamo che tale algoritmo coincide con il metodo di Newton per il calcolo degli zeri della funzione $x^2 - \alpha$. In modo analogo si potrebbe utilizzare il teorema di linearizzazione (o altri metodi più avanzati per lo studio dei sistemi dinamici non lineari) per analizzare le proprietà di convergenza del metodo di Newton per una funzione generica o di altri algoritmi iterativi (come il metodo del gradiente visto in fase di modellistica).