Fondamenti di automatica

Esercizi di riepilogo sull'analisi dei sistemi LTI tempo continuo

Esercizio 1

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_3 \\ y &= -5\,x_2 - 5\,x_3 + u \end{cases}$$

a) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema;

b) Studiare la stabilità interna e i modi naturali del sistema;

c) Trovare, se esiste, una condizione iniziale $x(0)$ per cui la risposta libera risulta essere $y_\ell(t) = e^{-t}\,1(t)$;

d) Studiare la stabilità esterna.

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + s - 2 & 0 & 0 \\ s - 1 & s^2 - 1 & 3s + 3 \\ 0 & 0 & s^2 + 3s + 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\,x_2 - 5\,u \\ \dot{x}_3 &= x_2 + x_3 - 5\,u \\ y &= x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

a) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema;

b) Studiare la stabilità interna e i modi naturali del sistema;

c) Trovare, se esiste, una condizione iniziale $x(0)$ per cui la risposta libera risulta essere $y_\ell(t) = e^{-3\,t}\,1(t)$;

d) Studiare la stabilità esterna;

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + s - 2 & s - 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 1 & 0 \\ 0 & s + 1 & s^2 + 3s + 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -(\alpha+2)\,x_2 + (\alpha-3)\,x_3 + u \\ y &= -x_2 + x_3 \end{cases}$$

con α parametro reale.

a) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema;

b) Studiare la stabilità interna del sistema al variare di α;

c) Determinare i modi del sistema per $\alpha = -3$ e tracciarne l'andamento in modo qualitativo;

d) Studiare la stabilità esterna al variare di α;

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2 & s - \alpha + 3 & 1 \\ 0 & s^2 + (3-\alpha)s & s \\ 0 & -(\alpha+2)s & s^2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 \\ y &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

a) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema;

b) Determinare i modi naturali del sistema, tracciarne l'andamento temporale, classificarli e concludere sulla stabilità interna del sistema;

c) Trovare, se esiste, una condizione iniziale per cui la risposta libera risulta essere $y_\ell(t) = 2 \cdot 1(t)$;

d) Trovare, se esiste, una condizione iniziale per cui la risposta libera risulta essere $y_\ell(t) = e^t \cdot 1(t)$;

e) Dire se esistono ingressi limitati tali da far divergere la risposta forzata dell'uscita e, nel caso in cui esistano, determinarne almeno uno.

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 1 & s + 1 & 0 \\ s + 1 & s^2 + 2s + 1 & 0 \\ 1 & s + 1 & s^2 + 2s \end{bmatrix}$$

Esercizio 5

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 - u \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 + 2\,u \\ y &= 2\,x_1 + x_3 \end{cases}$$

a) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema;

b) Determinare i modi naturali del sistema, classificarli e tracciarne l'andamento qualitativo; concludere sulla stabilità interna del sistema;

c) Trovare, se esiste, una condizione iniziale $x(0)$ per cui la risposta libera risulta essere $y_\ell(t) = 2\,\sin(t)1(t)$;

d) Dire se esistono ingressi limitati tali da far divergere l'uscita e, nel caso esistano, determinarne almeno uno;

e) Determinare la risposta impulsiva del sistema.

Suggerimento:

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 & s & s \\ -s-1 & s^2+s & s-1 \\ 1 & -s & s^2-s+1 \end{bmatrix}$$

Soluzioni

Esercizio 1

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad D = 1$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & -3 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2)(s-1)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C \, \mathrm{Adj}(sI - A)\, B + D$$

Essendo

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+s-2 & 0 & 0 \\ s-1 & s^2-1 & 3s+3 \\ 0 & 0 & s^2+3s+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5(s-1) & -5(s^2-1) & -5(s^2+6s+5) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B &= \begin{bmatrix} -5(s-1) & -5(s^2-1) & -5(s^2+6s+5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -5(s-1+s^2-1) = -5(s-1)(s+2) \end{aligned}$$

Di conseguenza, ricordando che devo effettuare tutte le semplificazioni, si ha

$$G(s) = \frac{-5(s-1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s-1)} + 1 = \frac{-5}{(s+1)} + 1 = \frac{s-4}{s+1}$$

b) Gli autovalori del sistema sono le radici del polinomio caratteristico $\varphi(s)$. In questo caso ci sono 3 autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ tutti di molteplicità algebrica unitaria $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Poiché ho un autovalore λ_3 con parte reale maggiore di 0 il sistema è internamente instabile.
Poiché le molteplicità algebriche sono unitarie anche quelle geometriche lo saranno $m_1 = m_2 = m = 1$. Di conseguenza ho solo i modi di evoluzioni semplici $e^{\lambda_1 t}\, 1(t) = e^{-t}\, 1(t)$, $e^{\lambda_2 t}\, 1(t) = e^{-2t}\, 1(t)$, $e^{\lambda_3 t}\, 1(t) = e^{t}\, 1(t)$. Ho quindi due modi convergenti a 0 e un modo (esponenzialmente) divergente.

c) Poiché $e^{-t}\, 1(t)$ è un modo naturale del sistema, una condizione iniziale di questo tipo potrebbe esistere. Ricordando che in termini di trasformata di Laplace si ha

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

devo trovare un vettore $x(0)$ tale che

$$C(sI - A)^{-1}x(0) = \frac{1}{s+1}$$

Ricordando quanto visto al punto a) si ha

$$\begin{aligned}
C(sI-A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} C \operatorname{Adj}(sI-A) \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} -5(s-1) & -5(s^2-1) & -5(s^2+6s+5) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{-5}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-5}{(s+2)} & \dfrac{-5(s+5)}{(s+2)(s-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Di conseguenza devo porre

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-5}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-5}{(s+2)} & \dfrac{-5(s+5)}{(s+2)(s-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

ovvero

$$\frac{-5}{(s+1)(s+2)} x_1(0) + \frac{-5}{(s+2)} x_2(0) + \frac{-5(s+5)}{(s+2)(s-1)} x_3(0) = \frac{1}{s+1}$$

Calcolando il minimo comune multiplo l'equazione diventa

$$\frac{-5(s-1)x_1(0) - 5(s+1)(s-1)x_2(0) - 5(s+5)(s+1)x_3(0)}{(s+1)(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

Per eguagliare i due termini, il denominatore al primo membro deve soddisfare la relazione

$$-5(s-1)x_1(0) - 5(s+1)(s-1)x_2(0) - 5(s+5)(s+1)x_3(0) = (s+2)(s-1)$$

che è soddisfatta quando $x_3(0) = 0$ e $x_1(0) = x_2(0) = -1/5$. Quindi la condizione iniziale che garantisce una risposta libera $y_\ell(t) = e^{-t}\, 1(t)$ risulta essere

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) La funzione di trasferimento $G(s)$ ha un unico polo in -1 e quindi a parte reale minore di 0. Di conseguenza il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 2

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 1$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2)(s-1)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C \, \mathrm{Adj}(sI - A) \, B + D$$

Essendo

$$\begin{aligned} C \, \mathrm{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + s - 2 & s - 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 1 & 0 \\ 0 & s + 1 & s^2 + 3s + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^2 + s - 2 & s^2 + s - 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} C \, \mathrm{Adj}(sI - A) \, B &= \begin{bmatrix} s^2 + s - 2 & s^2 + s - 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= -5(s^2 - +s - 2) = -5(s-1)(s+2) \end{aligned}$$

Di conseguenza, ricordando che devo effettuare tutte le semplificazioni, si ha

$$G(s) = \frac{-5(s-1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s-1)} + 1 = \frac{s-4}{s+1}$$

b) Vedi punto b) dell'esercizio 1.

c) Ricordando che $y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)$ per $t \geq 0$, chiaramente nella risposta libera possono essere presenti solo i modi naturali del sistema. In questo caso, i modi naturali del sistema sono $e^{\lambda_1 t}\,1(t) = e^{-t}\,1(t)$, $e^{\lambda_2 t}\,1(t) = e^{-2t}\,1(t)$, $e^{\lambda_3 t}\,1(t) = e^{t}\,1(t)$. Quindi poiché $e^{-3t}\,1(t)$ non è un modo naturale del sistema non può esistere nessuna condizione iniziale tale per cui $y_\ell(t) = e^{-3t}\,1(t)$.

d) La funzione di trasferimento $G(s)$ ha un unico polo in -1 e quindi a parte reale minore di 0. Di conseguenza il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 3

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(\alpha+2) & \alpha-3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \alpha+2 & s+3-\alpha \end{bmatrix} = s(s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2)$$

Poiché $D = 0$, la funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C \operatorname{Adj}(sI - A)\, B$$

Essendo

$$\begin{aligned} C \operatorname{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2 & s - \alpha + 3 & 1 \\ 0 & s^2 + (3-\alpha)s & s \\ 0 & -(\alpha+2)s & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5(s-1) & -s^2 - 5s & s^2 - s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$C \operatorname{Adj}(sI - A)\, B = \begin{bmatrix} -5(s-1) & -s^2 - 5s & s^2 - s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s^2 - s$$

Di conseguenza, ricordando che devo effettuare tutte le semplificazioni, si ha

$$G(s) = \frac{s^2 - s}{s(s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2)} = \frac{s - 1}{s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2}$$

Infatti, per nessun valore di α, $s = 1$ è radice del denominatore $a(s)$ (essendo $a(1) = 6$ per ogni α) e quindi non ci sono altre semplificazioni da effettuare.

b) Il polinomio caratteristico del sistema è $\varphi(s) = s(s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2)$. Quindi indipendentemente da α ho sempre un autovalore $\lambda_1 = 0$. Di conseguenza il sistema non è mai asintoticamente stabile per nessun α.
Per capire quando posso avere stabilità marginale devo studiare le radici del polinomio $a(s) = s^2 + (3-\alpha)s + \alpha + 2$. Essendo un polinomio di secondo grado posso applicare la regola di Cartesio (condizione necessaria e sufficiente per i polinomi di secondo grado) e concludere che entrambe le radici di $a(s)$ hanno parte reale < 0 se e solo se tutti i coefficienti al denominatore hanno lo stesso segno, ovvero se e solo se

$$3 - \alpha > 0 \text{ e } \alpha + 2 > 0$$

Applicando sempre la regola di Cartesio ho i seguenti casi:

- Per $-2 < \alpha < 3$ entrambe le radici di $a(s)$hanno parte reale < 0 e quindi corrispondono a modi convergenti. L'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità 1 nel polinomio caratteristico e quindi anche nel polinomio minimo. Di consequenza nel complesso ho stabilità marginale.

- Quando $\alpha < -2$ oppure $\alpha > 3$ il polinomio $a(s)$ presenta variazioni di segno e di conseguenza si hanno radici a parte reale > 0. Di conseguenza il sistema è internamente instabile.
- Quando $\alpha = 3$, il polinomio caratteristico diventa $\varphi(s) = s(s^2 + 5)$. Ci sono tre autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = j\sqrt{5}$, $\lambda_3 = -j\sqrt{5}$, tutti con parte reale $= 0$ e con molteplicità 1 nel polinomio caratteristico (e quindi anche nel polinomio minimo). Di conseguenza ho stabilità marginale.
- Quando $\alpha = -2$, il polinomio caratteristico diventa $\varphi(s) = s^2(s + 5)$ di conseguenza l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità $\mu_1 = 2$ nel polinomio caratteristico. In questo caso per capire se ho stabilità devo andare a calcolare la molteplicità m_1 nel polinomio minimo. In questo caso

$$\begin{aligned}
\mathrm{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} s^2+5s & s+5 & 1 \\ 0 & s^2+5s & s \\ 0 & 0s & s^2 \end{bmatrix} \\
(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 1/(s^2(s+5)) \\ 0 & 1/s & 1/(s(s+5)) \\ 0 & 0 & 1/(s+5) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

  Quindi il polinomio minimo, calcolato come minimo comune multiplo dei denominatori di $(sI - A)^{-1}$, coincide con il polinomio caratteristico. Di conseguenza l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità $m_1 = 2$ e quindi il sistema è internamente instabile.

c) Per $\alpha = -3$ il polinomio caratteristico diventa $\varphi(s) = s(s^2 + 6s - 1)$. Quindi i tre autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3 + \sqrt{40}/2$ e $\lambda_3 = -3 - \sqrt{40}/2$. I modi naturali sono quindi $e^{\lambda_1 t}1(t) = 1(t)$, limitato non oscillante, $e^{\lambda_2 t}1(t) = e^{(-3+\sqrt{40}/2)t}1(t)$, divergente non oscillante, e $e^{\lambda_3 t}1(t) = e^{(-3-\sqrt{40}/2)t}1(t)$, convergente a 0 non oscillante. Per i grafici si vedano le dispense.

d) Ho stabilità esterna quando tutti i poli del sistema hanno parte reale < 0. Essendo il denominatore di $G(s)$ di secondo grado posso applicare la regola di Cartesio (condizione necessaria e sufficiente per i polinomi di secondo grado) e concludere che entrambi i poli hanno parte reale < 0 se e solo se tutti i coefficienti al denominatore hanno lo stesso segno ovvero se e solo se

$$3 - \alpha > 0 \text{ e } \alpha + 2 > 0$$

Quindi ho stabilità BIBO se e solo se $-2 < \alpha < 3$.

Esercizio 4

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema (calcolato rispetto all'ultima colonna) è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s^2+2s) = s(s+1)(s+2)$$

Poiché $D = 0$, la funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B$$

Essendo

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+2s+1 & s+1 & 0 \\ s+1 & s^2+2s+1 & 0 \\ 1 & s+1 & s^2+2s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s^2+3s+2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B &= \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s^2+3s+2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= s^2+3s+2 = (s+1)(s+2) \end{aligned}$$

Di conseguenza, ricordando che devo effettuare tutte le semplificazioni, si ha

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s}$$

b) Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$, tutti di molteplicità unitaria nel polinomio caratteristico e quindi anche nel polinomio minimo. I modi naturali sono quindi $e^{\lambda_1 t}1(t) = 1(t)$, limitato non oscillante, $e^{\lambda_2 t}1(t) = e^{-t}1(t)$, convergente a 0 non oscillante, e $e^{\lambda_3 t}1(t) = e^{-2t}1(t)$, convergente a 0 non oscillante. Per i grafici si vedano le dispense. Il sistema risulta quindi marginalmente stabile (in quanto tutti i modi sono limitati) ma non asintoticamente stabile (in quanto esiste un modo non convergente a 0).

c) Poiché $1(t)$ è un modo naturale del sistema, una condizione iniziale di questo tipo potrebbe esistere. Ricordando che in termini di trasformata di Laplace si ha

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

devo trovare un vettore $x(0)$ tale che

$$C(sI - A)^{-1}x(0) = 2/s$$

Ricordando quanto visto al punto a) si ha

$$\begin{aligned} C(sI-A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI-A) \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & (s+1)(s+2) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/s & 1/s & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza devo porre

$$\begin{bmatrix} 1/s & 1/s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = 2/s$$

ovvero

$$\frac{x_1(0)+x_2(0)}{s} = \frac{2}{s}$$

Vanno quindi bene tutte le condizioni iniziali tali per cui $x_1(0)+x_2(0)=2$. Ad esempio, posso prendere

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Ricordando che $y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)$ per $t \geq 0$, chiaramente nella risposta libera possono essere presenti solo i modi naturali del sistema. In questo caso, i modi naturali del sistema sono $e^{\lambda_1 t}1(t) = 1(t)$, $e^{\lambda_2 t}1(t) = e^{-t}1(t)$ e $e^{\lambda_3 t}1(t) = e^{-2t}1(t)$. Quindi poiché $e^t\,1(t)$ non è un modo naturale del sistema non può essere nessuna condizione iniziale tale per cui $y_\ell(t) = e^t\,1(t)$.

e) La funzione di trasferimento $G(s)$ ha un unico polo in 0 e quindi a parte reale uguale a 0. Di conseguenza il sistema è BIBO instabile. Quindi esistono ingressi limitati tali da far divergere l'uscita. Infatti, scegliendo l'ingresso limitato $u(t) = 1(t)$, ovvero $U(s) = 1/s$, si ha

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = 1/s^2\,, \quad y_f(t) = t\,1(t)$$

che infatti diverge per t tendente ad infinito. È stato scelto proprio un ingresso tale da andare in risonanza con il polo in 0 del sistema aumentandone la molteplicità.

Esercizio 5

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & -1 \\ 1 & s-1 & -1 \\ 0 & 1 & s+1 \end{bmatrix} = s(s^2 - 1 + 1) - 1(-1(s+1) + 1) = s^3 + s$$

Poiché $D = 0$, la funzione di trasferimento $G(s)$ si calcola come

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} C \,\mathrm{Adj}(sI - A)\, B$$

Essendo

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & s & s \\ -s-1 & s^2+s & s-1 \\ 1 & -s & s^2 - s + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2s^2 + 1 & s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\, B &= \begin{bmatrix} 2s^2 + 1 & s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -s + 2(s^2 + s + 1) = 2s^2 + s + 2 \end{aligned}$$

Di conseguenza, si ha

$$G(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s(s^2 + 1)}$$

dove non sono state effettuate semplificazioni non avendo numeratore e denominatore fattori comuni.

b) Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = j$, $\lambda_3 = -j$, tutti di molteplicitá unitaria nel polinomio caratteristico e quindi anche nel polinomio minimo. Di conseguenza i modi naturali sono $e^{\lambda_1 t} 1(t) = 1(t)$, limitato non oscillante, e $e^{\mathrm{Re}\{\lambda_2\}t} \sin(\mathrm{Im}\{\lambda_2\}t) 1(t) = \sin t\, 1(t)$, $e^{\mathrm{Re}\{\lambda_2\}t} \cos(\mathrm{Im}\{\lambda_2\}t) 1(t) = \cos t\, 1(t)$ limitati oscillanti. Essendo tutti i modi limitati si ha stabilità marginale. Non si ha però stabilità asintotica perché i modi non sono tutti convergenti.

c) Poiché $\sin t\, 1(t)$ è un modo naturale del sistema, una condizione iniziale di questo tipo potrebbe esistere. Ricordando che in termini di trasformata di Laplace si ha

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1} x(0)$$

devo trovare un vettore $x(0)$ tale che

$$C(sI - A)^{-1} x(0) = \frac{2}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{2 \sin t\, 1(t)\}$$

Ricordando quanto visto al punto a) si ha

$$\begin{aligned} C(sI-A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} C\,\mathrm{Adj}(sI-A) \\ &= \frac{1}{s\,(s^2+1)} \left[\begin{array}{ccc} 2s^2+1 & s & s^2+s+1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{2s^2+1}{s\,(s^2+1} & \dfrac{1}{(s^2+1)} & \dfrac{s^2+s+1}{s\,(s^2+1)} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Di conseguenza devo porre

$$\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{2s^2+1}{s\,(s^2+1)} & \dfrac{1}{(s^2+1)} & \dfrac{s^2+s+1}{s\,(s^2+1)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{array} \right] = \frac{2}{s^2+1}$$

ovvero

$$\frac{2s^2+1}{s\,(s^2+1)} x_1(0) + \frac{1}{(s^2+1)} x_2(0) + \frac{s^2+s+1}{s\,(s^2+1)} x_3(0) = \frac{2}{s^2+1}$$

Si vede subito che ponendo $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$ e $x_3(0) = 0$, l'eguaglianza risulta soddisfatta. Quindi la condizione iniziale che garantisce una risposta libera $y_\ell(t) = 2\,\sin t\,1(t)$ risulta essere

$$x(0) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right]$$

d) La funzione di trasferimento $G(s)$ ha 3 poli $p_1 = 0$, $p_2 = j$ e $p_3 = -j$. Poiché non sono a parte reale minore di 0, il sistema è BIBO instabile. Quindi esistono ingressi limitati tali da far divergere l'uscita. Ad esempio, scegliendo un ingresso $U(s) = (s^2+1)/(s(2s^2+s+2))$ che è limitato avendo un modo limitato e due convergenti a 0, si ha

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{2s^2+s+2}{s(s^2+1)} \frac{s^2+1}{s(2s^2+s+2)} = \frac{1}{s^2}\,, \quad y_f(t) = t\,1(t)$$

che infatti diverge per t tendente ad infinito. È stato scelto proprio un ingresso tale da andare in risonanza con il polo in 0 del sistema aumentandone la molteplicità. In alternativa, anche qualunque ingresso avente al denominatore un termine del tipo s^2+1 sarebbe tale da far divergere l'uscita.

e) La risposta impulsiva $g(t)$ si calcola antitrasformando la funzione di trasferimento $G(s)$. Effettuando la decomposizione in fratti semplici si ha

$$G(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-j} + \frac{\overline{K}_2}{s+j}$$

e quindi antitrasformando si ottiene

$$g(t) = K_1\,1(t) + K_2\,e^{jt}\,1(t) - \overline{K}_2\,e^{-jt}\,1(t) = K_1\,1(t) + 2\,\mathrm{Re}\{K_2\}\cos(t)1(t) - \mathrm{Im}\{K_2\}\sin(t)\,1(t)$$

dove le costanti K_1 e K_2 si calcolano applicando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \left. \frac{2s^2+s+2}{s^2+1} \right|_{s=0} = 2 \\ K_2 &= \lim_{s\to j} (s-j)\,G(s) = \left. \frac{2s^2+s+2}{s(s+j)} \right|_{s=0} = \frac{-2+j+2}{-2} = -\frac{j}{2} \end{aligned}$$

Essendo $\mathrm{Re}\{K_2\} = 0$ e $\mathrm{Im}\{K_2\} = -1/2$, si ha

$$\begin{aligned} g(t) &= K_1\,1(t) + 2\,\mathrm{Re}\{K_2\}\cos(t)1(t) - \mathrm{Im}\{K_2\}\sin(t)\,1(t) \\ &= 2\,1(t) + \sin(t)\,1(t) \end{aligned}$$