

**Fondamenti di Automatica**  
**Note sulla stabilità dei sistemi lineari a tempo continuo**

Nel linguaggio comune, per **stabilità** si intende l'*insensibilità* di *comportamento* rispetto a perturbazioni di vario genere. Nel contesto dei sistemi dinamici

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(sistemi TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(sistemi TD)} & x(t+1) \end{array} \right\} = f(t, x(t), u(t))$$

il comportamento preso in esame è solitamente l'evoluzione dell'ingresso o dell'uscita.

Lo studio della stabilità è di fatto un'analisi di *sensitività* in cui ci chiediamo se piccole perturbazioni di vario genere implicano o meno piccole variazioni della traiettoria nominale (cioè non perturbata).

Questo tipo di analisi è fondamentale dal punto di vista pratico. Infatti, molti sistemi naturali e artificiali devono essere in grado di restare nell'intorno delle condizioni di funzionamento nominali (punto di lavoro) anche in presenza di perturbazioni dovute a cause di vario genere quali disturbi dati dell'ambiente esterno, variazioni parametriche o altro. Nel seguito, vedremo alcuni concetti di stabilità. Questi concetti ci permetteranno anche di caratterizzare alcune proprietà per sistemi dinamici non lineari.

**Stabilità interna.** Considereremo inizialmente un concetto di stabilità denominato stabilità interna. La stabilità interna quantifica la robustezza del sistema rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali, quindi interne al sistema. Più precisamente, data una condizione iniziale  $x_0$  e un segnale d'ingresso  $u$ , indichiamo con  $x(t) = \Phi(t, x_0, u)$  la risposta nello stato al tempo  $t$ . Ad esempio, come visto, per sistemi LTI a tempo continuo o discreto vale

$$\Phi(t, x_0, u) = \begin{cases} e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \end{cases}$$

La funzione  $\Phi(t, x_0, u)$  è detta *mappa di transizione globale dello stato*. La stabilità interna quantifica l'effetto di una perturbazione  $\tilde{x}_0$  sulla condizione iniziale analizzando la discrepanza tra la traiettoria perturbata  $\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u)$  e quella nominale  $\Phi(t, x_0, u)$ .

**Stabilità esterna.** La stabilità esterna fornisce una misura della robustezza del sistema rispetto a perturbazioni dovute a segnali di ingresso, quindi esterne al sistema. È la proprietà per la quale perturbazioni limitate dell'ingresso producono perturbazioni limitate sull'uscita. Questo tipo di stabilità è anche detta *stabilità ILUL* (ingresso limitato uscita limitata) o, utilizzando l'acronimo inglese, *stabilità BIBO* (bounded input bounded output). Questa nozione trascura cosa succede internamente a sistema e si focalizza solo sul comportamento ingresso-uscita.

**Stabilità strutturale.** Questa nozione di stabilità studia la robustezza del comportamento del sistema rispetto a perturbazioni dei parametri interni (ad esempio, per sistemi lineari perturbazione delle matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ). Nel corso non ci occuperemo di questo tipo di stabilità per cui si rimanda a corsi più avanzati di Automatica.

## 2.6 Stabilità interna

### Concetti preliminari

Consideriamo il sistema LTI TC

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Data la matrice  $A$ , il polinomio

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

è detto polinomio caratteristico del sistema. Inoltre, le radici  $\lambda_i$  del polinomio caratteristico  $\varphi(s)$  sono dette autovalori del sistema. Come visto, alla matrice  $A$  è possibile associare anche un altro polinomio  $m(s)$ , detto polinomio minimo del sistema, ottenuto come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$ . Il polinomio minimo  $m(s)$  contiene come radici tutti gli autovalori del sistema (ovvero tutte le radici del polinomio caratteristico  $\varphi(s)$ ) eventualmente con molteplicità inferiore. In particolare,

- sia  $\lambda_i$  un generico autovalore del sistema;
- sia  $\mu_i$  la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico  $\varphi(s)$  ( $\mu_i$  è detta molteplicità algebrica);
- sia  $m_i$  la sua molteplicità come radice del polinomio minimo  $m(s)$ ;

allora vale la relazione  $1 \leq m_i \leq \mu_i$ .

Secondo la definizione di polinomio minimo, la molteplicità  $m_i$  rappresenta il massimo esponente con cui sono presenti termini del tipo  $(s - \lambda_i)^p$  al denominatore degli elementi di  $(sI - A)^{-1}$ . Di conseguenza, ricordando che l'evoluzione libera dello stato per un sistema LTI TC assume la forma

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} x(0),$$

è possibile concludere che ciascun autovalore  $\lambda_i$  (con molteplicità  $m_i$  come radice del polinomio minimo  $m(s)$ ) dà origine in  $x_\ell(t)$  a modi naturali del tipo  $t^p e^{\lambda_i t}$  con  $p = 0, 1, \dots, m_i - 1$ . Ne consegue che

- i modi naturali associati ad un autovalore  $\lambda_i$  sono tutti convergenti se e solo se la parte reale di  $\lambda_i$  è  $< 0$ ;
- i modi naturali associati ad un autovalore  $\lambda_i$  sono tutti limitati se e solo se la parte reale di  $\lambda_i$  è  $\leq 0$  e, nel caso tale parte reale sia 0, la molteplicità  $m_i$  sia unitaria.

### Condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità interna

Data un condizione iniziale  $x(0) = x_0$  e un ingresso  $u$  la soluzione assume la forma

$$\Phi(t, x_0, u) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Se considero una perturbazione  $\tilde{x}_0$  (con  $\tilde{x}_0$  vettore arbitrario) della condizione iniziale e pongo  $x(0) = x_0 + \tilde{x}_0$ , la soluzione diventa

$$\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u) = e^{At} (x_0 + \tilde{x}_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Si vede quindi che la differenza tra la traiettoria perturbata  $\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u)$  e la traiettoria nominale  $\Phi(t, x_0, u)$  risulta essere

$$\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u) - \Phi(t, x_0, u) = e^{At} \tilde{x}_0$$

Quindi tale differenza dipende solo dalla matrice  $A$  e dalla perturbazione  $\tilde{x}_0$  ma non dalla particolare traiettoria nominale considerata (ovvero non dipende dalla condizione iniziale  $x_0$  né dall'ingresso  $u$ ).

**Fatto 2.8** Per un sistema LTI tutti le traiettoria del sistema hanno le stesse identiche proprietà di stabilità rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali. Si può quindi parlare in modo generico di stabilità del sistema.

Si noti inoltre come, per un sistema LTI, la stabilità interna risulta essere una proprietà della sola evoluzione libera dello stato.

**Definizione.** Un sistema LTI TC si dice

- **asintoticamente stabile** se l'effetto di perturbazioni  $\tilde{x}_0$  nelle condizioni iniziali svanisce, ovvero converge a 0 per ogni  $\tilde{x}_0$ .
- **marginalmente stabile** se non ho stabilità asintotica, ma l'effetto di perturbazioni  $\tilde{x}_0$  nelle condizioni iniziali si mantiene comunque limitato per ogni  $\tilde{x}_0$ .
- **internamente instabile** se non ho stabilità asintotica né marginale, ovvero se esistono perturbazioni  $\tilde{x}_0$  il cui effetto non si mantiene limitato.

Poiché la perturbazione  $\tilde{x}_0$  della condizione iniziale è arbitraria, allora per studiare la stabilità interna del sistema devo studiare l'andamento nel tempo di  $e^{At}$ . A questo proposito è opportuno osservare che

i) se e solo se tutti i modi naturali del sistema sono convergenti, allora si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At} \tilde{x}_0\| = 0, \quad \forall \tilde{x}_0.$$

Inoltre quando si ha convergenza dei modi questa è sempre esponenziale;

ii) se e solo se tutti i modi naturali del sistema sono limitati, allora esiste un reale  $M > 0$  tale che

$$\|e^{At} \tilde{x}_0\| \leq M \|\tilde{x}_0\|, \quad \forall t \geq 0, \forall \tilde{x}_0.$$

Sulla base di tale osservazione e ricordando le definizioni di stabilità interna introdotte, è quindi possibile enunciare il seguente.

**Fatto 2.9** Un sistema LTI TC è asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi naturali del sistema sono convergenti.

Un sistema LTI TC è marginalmente stabile se e solo se tutti i modi naturali del sistema sono limitati (ma non tutti sono convergenti).

Un sistema LTI TC è internamente instabile se e solo se esiste almeno un modo naturale divergente.

Ricordando i punti a) e b) di pagina 2, risulta quindi possibile enunciare il seguente teorema che fornisce condizioni necessarie e sufficienti operative per lo studio della stabilità interna di un sistema LTI.

**Teorema 2.3** Un sistema LTI TC è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori del sistema (ovvero tutte le radici del polinomio caratteristico  $\varphi(s)$ ) hanno parte reale  $< 0$ .

Un sistema LTI TC è marginalmente stabile se e solo se tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale  $\leq 0$  e quelli con parte reale  $= 0$  hanno molteplicità unitaria come radici del polinomio minimo  $m(s)$ .

Negli altri casi il sistema è internamente instabile.

In pratica, per studiare la stabilità interna si procede calcolando il polinomio caratteristico  $\varphi(s) = \det(sI - A)$  e distinguendo quattro casi:

1. Se tutte le radici di  $\varphi(s)$  hanno parte reale  $< 0$ , allora il sistema risulta asintoticamente stabile.
2. Se esiste almeno una radice di  $\varphi(s)$  con parte reale  $> 0$ , allora il sistema risulta internamente instabile.
3. Se tutte le radici di  $\varphi(s)$  hanno parte reale  $\leq 0$  e quelle con parte reale  $= 0$  hanno molteplicità unitaria come radici di  $\varphi(s)$ , allora il sistema risulta marginalmente stabile.  
[Infatti tali radici dovranno necessariamente avere molteplicità unitaria anche come radici del polinomio minimo  $m(s)$ , in quanto  $1 \leq m_i \leq \mu_i$ ]
4. Se invece tutte le radici di  $\varphi(s)$  hanno parte reale  $\leq 0$  e ne esiste almeno una con parte reale  $= 0$  e molteplicità  $> 1$  come radice di  $\varphi(s)$ , allora occorre andare a calcolare il polinomio minimo  $m(s)$  e distinguere due sottocasi:
  - (a) se tutte le radici con parte reale  $= 0$  hanno molteplicità unitaria come radici di  $m(s)$ , allora il sistema risulta marginalmente stabile;
  - (b) se invece esiste almeno una radice con parte reale  $= 0$  e molteplicità  $> 1$  come radice di  $m(s)$ , allora il sistema risulta internamente instabile.

## Alcuni esempi

**Esempio 2.7** Si consideri un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s + 1$$

Quindi i due autovalori  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$  hanno parte reale  $< 0$  e il sistema risulta asintoticamente stabile.

**Esempio 2.8** Si consideri un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1$$

Quindi ci sono due autovalori puramente immaginari  $\pm j$  (quindi con parte reale  $= 0$ ) e molteplicità unitaria e, di conseguenza, il sistema risulta marginalmente stabile ma non asintoticamente stabile.

**Esempio 2.9** Si consideri un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

Quindi c'è un autovalore in 0 con molteplicità 2 e, di conseguenza, occorre andare a calcolare il polinomio minimo. Poiché

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

si ha  $m(s) = s^2$ . Quindi l'autovalore in 0 conserva la sua molteplicità 2 anche nel polinomio minimo e di conseguenza il sistema risulta internamente instabile. Si noti come, in effetti, la matrice di transizione del sistema

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

presenta un elemento divergente per  $t$  tendente ad infinito.

**Esempio 2.10** Si consideri un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

Anche questa volta c'è un autovalore in 0 con molteplicità 2 e, di conseguenza, occorre andare a calcolare il polinomio minimo. Poiché

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

si ha  $m(s) = s$ . Quindi l'autovalore in 0 ha molteplicità unitaria come radice del polinomio minimo e, di conseguenza, il sistema risulta marginalmente stabile ma non asintoticamente stabile.

Come osservazione conclusiva sulla stabilità interna notiamo che, poiché per un sistema LTI TC l'evoluzione libera dello stato è del tipo  $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$ , allora

- per un sistema LTI asintoticamente stabile l'evoluzione libera dello stato converge a zero per  $t$  tendente a infinito per ogni condizione iniziale (ossia l'effetto della condizione iniziale svanisce asintoticamente);
- per un sistema LTI marginalmente stabile l'evoluzione libera, in generale, non tende a zero ma comunque si mantiene limitata per  $t$  tendente a infinito.

## 2.7 Risposta forzata e funzione di trasferimento

### Funzione di trasferimento

Prima di studiare le proprietà di stabilità di un sistema LTI rispetto a perturbazioni dell'ingresso occorre introdurre alcune nozioni. Ricordiamo che, nel dominio di Laplace, la risposta forzata dell'uscita è nella forma

$$Y_f(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Quindi, per un sistema LTI TC, il legame tra ingresso e uscita è dato dalla cosiddetta **funzione di trasferimento** del sistema

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Notiamo che in generale, per sistemi con più ingressi e più uscite,  $U(s)$  e  $Y_f(s)$  sono vettori e di conseguenza  $G(s)$  è una matrice di dimensione  $\dim(y) \times \dim(u)$ . In particolare l'elemento  $(i, \ell)$  di  $G(s)$  esprime la relazione esistente tra l' $\ell$ -esimo ingresso del sistema e l' $i$ -esima uscita. Nel seguito considereremo, per semplicità, sistemi con un singolo ingresso e una singola uscita  $\dim(y) = \dim(u) = 1$ . Tali sistemi sono usualmente indicati con l'acronimo inglese **SISO (single input single output)**. Tuttavia la maggior parte dei risultati che vedremo possono essere direttamente generalizzati anche al caso di sistemi con più ingressi e più uscite applicando le medesime considerazioni a ciascuno degli elementi di  $G(s)$ .

Consideriamo quindi il caso SISO supponendo  $\dim(y) = \dim(u) = 1$ . Ricordando la formula per il calcolo dell'inversa di una matrice, la funzione di trasferimento può essere scritta nella forma equivalente

$$G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A)B + D$$

Osserviamo che

- $D$  è una costante;
- $\varphi(s)$  è per costruzione un polinomio di grado pari all'ordine del sistema  $\dim(x)$  (dimensione del vettore di stato  $x$ );
- $\text{Adj}(sI - A)$  è per costruzione una matrice di polinomi di grado strettamente minore di  $\dim(x)$ ;
- $C \text{Adj}(sI - A)B$  è per costruzione un polinomio di grado strettamente minore di  $\dim(x)$ ;
- $\frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A)B$  è una funzione razionale strettamente propria (ossia con grado del numeratore strettamente inferiore al grado del denominatore);

Quindi, nel caso SISO, la funzione di trasferimento è una funzione razionale

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

dove  $b(s)$  e  $a(s)$  sono polinomi coprimi (ossia senza radici comuni). Le radici di  $a(s)$  sono dette **poli** del sistema. Le radici di  $b(s)$  sono dette **zeri** del sistema. Sulla base delle considerazioni precedenti, si ha

$$\begin{aligned} \text{grado } b(s) &< \text{grado } a(s) && \text{se } D = 0 \\ \text{grado } b(s) &= \text{grado } a(s) && \text{se } D \neq 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che al denominatore della funzione di trasferimento si trova il polinomio caratteristico del sistema  $\varphi(s)$ . Tuttavia possono esserci cancellazioni dovute a fattori comuni tra  $\varphi(s)$  e il polinomio  $C\text{Adj}(sI - A)B$ . Quindi, in generale, il polinomio  $a(s)$  è un sottomultiplo del polinomio caratteristico  $\varphi(s)$ . In particolare, dato il polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  gli autovalori del sistema e  $\mu_1, \dots, \mu_k$  le corrispondenti molteplicità algebriche, il denominatore della funzione di trasferimento sarà quindi nella forma

$$a(s) = \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\nu_i}$$

Le molteplicità  $\nu_i$  soddisfano la relazione

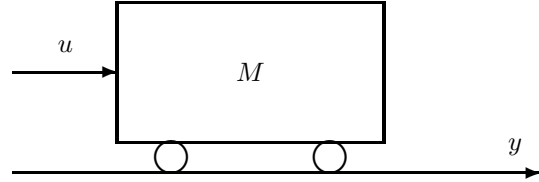
$$0 \leq \nu_i \leq \mu_i$$

ovvero, per effetto delle moltiplicazioni per  $B$  e  $C$ , un autovalore del sistema può anche essere completamente cancellato nel prodotto  $\frac{1}{\varphi(s)} C\text{Adj}(sI - A)B$  e quindi non comparire come polo del sistema.

**Fatto 2.10** Per un sistema LTI TC, i poli del sistema (radici di  $a(s)$ ) sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema (radici di  $\varphi(s)$ ). Gli autovalori del sistema che non compaiono come poli di  $G(s)$  sono detti **autovalori nascosti**.

**Esempio 2.11 (Sistema meccanico)** Considero il sistema meccanico in figura che descrive il moto di un carrello di massa  $M$  soggetto ad una forza esterna  $u(t)$ . Sia  $y(t)$  la posizione del carrello al tempo  $t$ . Come visto, scegliendo come stato posizione e velocità

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{posizione} \\ \text{velocità} \end{bmatrix}$$



le equazioni di stato sono descritte dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

con  $D = 0$ . Ponendo per semplicità  $M = 1$  e  $b = 1$  si ha

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)} \end{aligned}$$

Quindi in questo caso  $b(s) = 1$  e  $\varphi(s) = a(s) = s(s+1)$ , di conseguenza non ci sono autovalori nascosti. Se considero però come uscita la velocità invece della posizione, allora cambia la matrice  $C$  che descrive l'equazione di uscita. In particolare, in questo caso, si ha

$$C = [0 \quad 1]$$

perché sto supponendo di osservare la seconda componente dello stato. Di conseguenza, a seguito di questa modifica, la funzione di trasferimento diventa

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Di conseguenza, in questo caso, si ha  $b(s) = 1$  e  $a(s) = s+1$ . L'autovalore  $\lambda_1 = 0$  è quindi nascosto in quanto non compare nella funzione di trasferimento del sistema.

Notiamo che nei due casi considerati il sistema internamente non cambia, ma cambia la quantità che sto osservando (misurando): in un caso la posizione nell'altro la velocità. In generale, gli autovalori nascosti dipendono dalle matrici  $B$  e  $C$ , ovvero da come l'ingresso agisce sul sistema (matrice  $B$ ) e da quali quantità sto osservando (matrice  $C$ ).

## Risposta impulsiva

Dato un sistema LTI TC con funzione di trasferimento  $G(s)$  si definisce **risposta impulsiva** il segnale

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}$$

Poiché  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  e ricordando quanto visto per l'anti-trasformata di Laplace, si verifica immediatamente che

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{C(sI - A)^{-1}B + D\} = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

con  $\delta(t)$  l'impulso di Dirac. Da questo si vede che la  $g(t)$  contiene una componente impulsiva se e solo se  $D \neq 0$ . Notiamo che in generale, per sistemi con più ingressi e più uscite,  $G(s)$  è una matrice di funzioni razionali di dimensione  $\dim(y) \times \dim(u)$  e, di conseguenza, la risposta impulsiva è una matrice di segnali nel tempo. Nel caso SISO, quando  $\dim(y) = \dim(u) = 1$ ,  $G(s)$  è una funzione razionale e, di conseguenza,  $g(t)$  è un segnale nel tempo.

Notiamo che, per sistemi SISO, la risposta impulsiva coincide proprio con la risposta forzata del sistema quando l'ingresso è un impulso unitario  $u(t) = \delta(t)$ . Infatti, in questo caso, vale  $U(s) = 1$  e di conseguenza

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \Rightarrow y_f(t) = g(t)$$

Proprio da questa osservazione deriva il nome di risposta impulsiva.

Ricordando che per un sistema SISO la funzione di trasferimento può essere scritta nella forma

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\nu_i}}$$

allora abbiamo che soltando gli autovalori che compaiono come poli (per cui  $\nu_i \neq 0$ ) danno un contributo alla risposta impulsiva. In particolare,  $g(t)$  evolve secondo i modi  $e^{\lambda_i t}$ ,  $t e^{\lambda_i t}$ ,  $\dots$ ,  $t^{\nu_i-1} e^{\lambda_i t}$  per  $i = 1, \dots, k$  tale che  $\nu_i \neq 0$ . Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

**Fatto 2.11** La risposta impulsiva  $g(t)$  evolve secondo un sottoinsieme dei modi naturali del sistema (quelli corrispondenti agli autovalori non nascosti). I modi naturali che non compaiono nella risposta impulsiva sono detti **modi nascosti**.

**Esempio 2.11 (continua)** Riprendendo l'esempio del sistema meccanico in figura, il sistema ha due autovalori  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = -1$  entrambi di molteplicità unitaria. Di conseguenza i modi naturali sono  $e^{\lambda_1 t} = 1$  (limitato) e  $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$  (convergente). Se prendiamo come uscita la velocità abbiamo

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow g(t) = e^{-t} 1(t)$$

Quindi solo uno dei due modi naturali (quello associato a  $\lambda_2 = -1$ ) è presente nella risposta impulsiva. L'altro modo naturale (quello associato a  $\lambda_1 = 0$ ) è nascosto.

## Forma della risposta forzata

Consideriamo ora la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) \tag{1}$$

Supponendo che l'ingresso  $u(t)$  sia un segnale con trasformata di Laplace  $U(s)$  razionale, allora nel dominio di Laplace la risposta forzata  $Y_f(s)$  avrà come poli i poli della funzione di trasferimento più i poli dell'ingresso. Questo significa che in generale la risposta forzata evolve secondo una combinazione lineare dei modi della risposta impulsiva e dei modi dell'ingresso. Tuttavia

- alcuni modi possono non comparire a seguito di cancellazioni tra zeri e poli nel prodotto  $G(s)U(s)$  (si veda l'esempio 13);

- possono comparire nuovi modi di evolvere dovuti ad un aumento di molteplicità quando  $G(s)$  e  $U(s)$  hanno poli coincidenti (si veda l'esempio 14).

**Esempio 2.12** Considero un sistema LTI con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  e ingresso a gradino  $u(t) = 1(t)$ . In questo caso, si ha  $U(s) = \frac{1}{s}$  e quindi

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow y_f(t) = 1(t) - e^{-t} 1(t)$$

La risposta forzata evolve secondo una combinazione lineare dei modi  $1(t)$  (associato al polo dell'ingresso) e  $e^{-t} 1(t)$  (associato al polo della funzione di trasferimento).

**Esempio 2.13** Considero un sistema LTI con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{1}{s-1}$  e ingresso  $u(t) = [\cos(t) - \sin(t)] 1(t)$ . In questo caso, si ha  $U(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$  e quindi

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y_f(t) = \sin(t) 1(t)$$

Nella risposta forzata compare solo il modo  $\sin(t) 1(t)$  in quanto il polo della funzione di trasferimento è cancellato da uno zero dell'ingresso. Di conseguenza il modo  $e^t$  associato al polo in 1 della funzione di trasferimento non compare nella risposta forzata. Naturalmente cambiando ingresso (ad esempio  $u(t) = 1(t)$ ) tale modo comparirebbe.

**Esempio 2.14** Considero un sistema LTI con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{1}{s}$  e ingresso a gradino  $u(t) = 1(t)$ . In questo caso, si ha  $U(s) = \frac{1}{s}$  e quindi

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_f(t) = t \cdot 1(t)$$

Nella risposta forzata compare dunque un modo  $t \cdot 1(t)$  che non era presente né nella risposta all'impulso  $g(t) = 1(t)$  né nell'ingresso  $u(t) = 1(t)$ . Questo è dovuto al fatto che, per questa particolare scelta dell'ingresso, si ha un aumento della molteplicità del polo in zero della funzione di trasferimento.

## 2.8 Stabilità esterna

Considereremo ora l'effetto sull'uscita del sistema di una perturbazione del segnale di ingresso. Tale perturbazione può rappresentare ad esempio un disturbo che agisce sul sistema. Intuitivamente, si ha stabilità esterna quando perturbazioni limitate dell'ingresso comportano variazioni limitate dell'uscita del sistema. Data una condizione iniziale  $x_0$  e un segnale d'ingresso  $u$ , indichiamo con  $y(t) = \Psi(t, x_0, u)$  la risposta in uscita al tempo  $t$ . Come visto, per sistemi LTI tempo continuo vale

$$\Psi(t, x_0, u) = Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

La funzione  $\Psi(t, x_0, u)$  è detta *mappa di transizione globale dell'uscita*. Se considero una perturbazione  $\tilde{u}$  (con  $\tilde{u}$  segnale arbitrario) dell'ingresso, la soluzione diventa

$$\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) = Ce^{At} (x_0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B [u(\tau) + \tilde{u}(\tau)] d\tau + D [u(t) + \tilde{u}(t)]$$

Si vede quindi che la differenza tra la traiettoria perturbata dell'uscita  $\Psi(t, x_0, u + \tilde{u})$  e la traiettoria nominale dell'uscita  $\Psi(t, x_0, u)$  risulta essere

$$\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau + D \tilde{u}(t)$$

Nel dominio di Laplace si ha quindi

$$\mathcal{L} \{ \Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) \} = [C(sI - A)^{-1}B + D] \tilde{U}(s) = G(s) \tilde{U}(s)$$



Tale differenza dipende solo dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  e dalla perturbazione  $\tilde{u}$  ma non dalla particolare traiettoria nominale considerata (ovvero non dipende dalla condizione iniziale  $x_0$  né dall'ingresso  $u$ ). Quindi, analogamente a quanto osservato per la stabilità interna, per un sistema LTI tutte le traiettorie hanno le stesse identiche proprietà di stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso. Si può quindi parlare in modo generico di stabilità esterna del sistema.

**Definizione.** Un sistema LTI TC si dice **esternamente stabile** se una perturbazione dell'ingresso  $\tilde{u}$  limitata comporta una variazione limitata dell'uscita  $y$ . Ovvero, se vale la seguente

$$\exists M : \|\tilde{u}(t)\| \leq M \quad \forall t \quad \implies \quad \exists L : \|\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\| \leq L \cdot M \quad \forall t$$

dove lo scalare  $L$  rappresenta la massima amplificazione possibile di una perturbazione sull'ingresso.

Si noti come, per un sistema LTI, la stabilità esterna risulta essere una proprietà della sola evoluzione forzata dell'uscita. Infatti, poiché la perturbazione  $\tilde{u}$  dell'ingresso è arbitraria e poiché l'effetto della perturbazione coincide con la risposta forzata all'ingresso  $\tilde{u}$ , allora si ha stabilità esterna quando la risposta forzata ad un ingresso limitato è sempre limitata.

**Fatto 2.12** Un sistema LTI è stabile esternamente se e solo se la risposta forzata ad un ingresso limitato è sempre limitata.

Per questo motivo, la stabilità esterna di sistemi LTI viene anche detta stabilità **ingresso-limitato uscita-limitata (ILUL)** o, utilizzando l'acronimo inglese, **stabilità BIBO (bounded input bounded output)**. Sulla base delle considerazioni precedenti risulta evidente che la stabilità esterna dipende dalla sola  $G(s)$ , funzione di trasferimento del sistema. In particolare vale il seguente risultato.

**Teorema 2.4** Considero un sistema LTI tempo continuo SISO con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$  dove  $b(s)$  e  $a(s)$  sono polinomi coprimi. Allora il sistema è stabile esternamente se e solo se tutti i poli di  $G(s)$ , radici di  $a(s)$ , hanno parte reale  $< 0$ .

*Dimostrazione:* Dimostriamo prima che avere tutti i poli con parte reale  $< 0$  è condizione sufficiente per la stabilità interna. Supponiamo quindi che l'ingresso  $u$  sia limitato, ovvero che esista  $M$  tale che  $|u(t)| \leq M$  per ogni  $t$ , e consideriamo la corrispondente risposta forzata

$$y_f(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau + D u(t)$$

dove per scrivere la seconda espressione abbiamo sfruttato il fatto che l'operatore di convoluzione è commutativo (può essere facilmente verificato sostituendo la variabile di integrazione  $\tau$  con  $t-\tau$ ). Allora possiamo maggiorare il modulo della risposta forzata nel seguente modo

$$\begin{aligned} |y_f(t)| &= \left| \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau + D u(t) \right| \\ &\leq \left| \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau \right| + |D| \cdot |u(t)| \\ &\leq \int_0^t |C e^{A\tau} B| \cdot |u(t-\tau)| d\tau + |D| \cdot |u(t)| \\ &\leq M \left( \int_0^t |C e^{A\tau} B| \cdot d\tau + |D| \right) \end{aligned}$$

dove la prima disequazione si ottiene sfruttando la disuguaglianza triangolare, mentre l'ultima disequazione si ottiene ricordando che l'ingresso è limitato per ipotesi. Ricordiamo ora che il segnale  $C e^{At} B$  evolve secondo i modi corrispondenti ai poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  (ovvero evolve secondo i modi non nascosti del sistema). Se tutti i poli della  $G(s)$  hanno parte reale  $< 0$ , allora tutti i modi corrispondenti convergono esponenzialmente a zero, di conseguenza il segnale  $C e^{At} B$  converge esponenzialmente a zero. Questo ci garantisce che l'integrale sia uniformemente limitato nel tempo

$$\int_0^t |C e^{A\tau} B| \cdot d\tau \leq \int_0^{+\infty} |C e^{A\tau} B| \cdot d\tau = N < +\infty$$

con  $N$  costante finita. Di conseguenza la risposta forzata ammette la seguente maggiorazione

$$|y_f(t)| \leq (N + |D|) M$$

valida per ogni  $t$ . La quantità  $N + |D|$  rappresenta la massima amplificazione possibile dell'ingresso per il sistema considerato.

Dimostriamo ora che avere tutti i poli con parte reale  $< 0$  è anche condizione necessaria per la stabilità esterno. In particolare, la necessità deriva semplicemente dal fatto che se  $p$  è un polo con parte reale  $\geq 0$ , di molteplicità anche unitaria, allora è sempre possibile trovare un ingresso limitato che faccia divergere l'uscita. In particolare se  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  contiene modi divergenti (associati a poli con parte reale  $> 0$  e/o a poli con parte reale  $= 0$  e molteplicità  $> 1$ ), allora qualunque ingresso limitato  $u(t)$  che non cancelli i corrispondenti poli comporterà una divergenza dell'uscita perché tali modi divergenti saranno presenti anche in  $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$ . Ad esempio, basta scegliere  $u(t) = 1(t)$  che corrisponde a  $U(s) = \frac{1}{s}$ . Inoltre se la  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  non contiene modi divergenti ma contiene almeno un modo limitato (associato a un polo con parte reale  $= 0$  e molteplicità unitaria) è comunque possibile scegliere un ingresso limitato che aumenti la molteplicità di questo polo, dando così luogo in  $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$  a un modo divergente.

Abbiamo già visto infatti nell'esempio 14 che in presenza di un polo in 0 anche di molteplicità unitaria, bastare scegliere un ingresso a gradino  $u(t) = 1(t)$  per avere un polo doppio in 0 in  $Y_f(s) = G(s)U(s)$  che comporta la presenza del modo divergente  $t \cdot 1(t)$ . Un comportamento analogo si ha in presenza di una coppia di poli puramente immaginari  $\pm j\omega_0$ , anche di molteplicità unitaria, scegliendo un ingresso che ne aumenti la molteplicità. Possiamo vederlo con un esempio. Consideriamo un sistema LTI con la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

Allora, scegliendo come ingresso  $u(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot 1(t)$ , ovvero  $U(s) = \omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$  si ottiene

$$Y_f(s) = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

a cui sono associati nel dominio del tempo i modi  $\cos(\omega_0 t)$ ,  $\sin(\omega_0 t)$ ,  $t \cos(\omega_0 t)$  e  $t \sin(\omega_0 t)$ , che contengono segnali divergenti.  $\square$

Il precedente risultato può essere facilmente esteso al caso di sistemi con più ingressi e più uscite. In questo caso  $G(s)$  è una matrice di funzioni razionali e si ha stabilità esterna quando tutti gli elementi di  $G(s)$  hanno poli con parte reale  $< 0$ . Notiamo che per un sistema instabile esternamente, quindi con poli a parte reale  $\geq 0$ , esistono sicuramente ingressi limitati tali da far divergere la risposta forzata. Tuttavia, la risposta forzata non diverge sempre (dipende dal particolare ingresso).

**Esempio 2.15** Si consideri un sistema LTI TC con funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ . Il sistema ha due poli puramente immaginari in  $\pm j$  ed è quindi esternamente instabile. Infatti, come visto nella dimostrazione del teorema, per tale sistema un ingresso del tipo  $u(t) = \sin(t) 1(t)$  comporta una divergenza dell'uscita

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y_f(t) = \frac{1}{2} \sin(t) 1(t) - \frac{1}{2} t \cos(t) 1(t)$$

a seguito dell'aumento della molteplicità dei poli immaginari. Si ha il fenomeno noto come **risonanza**. Tuttavia, scegliendo come ingresso una senoide di diversa frequenza, ad esempio  $u(t) = \sin(2t) 1(t)$ , la risposta forzata non diverge in quanto non si ha alcun aumento della molteplicità. Infatti, in questo caso vale

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2+1} \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} \Rightarrow y_f(t) = \frac{2}{3} \sin(t) 1(t) - \frac{1}{3} \sin(2t) 1(t)$$

Si noti che, in entrambi in casi, per prevedere in modo qualitativo l'evoluzione nel tempo della risposta forzata non era necessario calcolarla esplicitamente, ma era sufficiente osservare la posizione dei poli nel piano complesso e la loro molteplicità.

## Relazione tra stabilità interna e stabilità esterna

Come visto in precedenza, in generale i poli del sistema, radici di  $a(s)$ , sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema, radici di  $\varphi(s)$ . Di conseguenza, una condizione sufficiente per avere stabilità

esterna è che tutti gli autovalori del sistema abbiano parte reale  $< 0$ . Ricordando che questa corrisponde proprio alla condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema risulti internamente asintoticamente stabile, allora possiamo concludere che vale la seguente implicazione

$$\text{STABILITÀ ASINTOTICA} \implies \text{STABILITÀ ESTERNA}$$

Notiamo che l'implicazione inversa non necessariamente vale. Ovvero si possono avere sistemi non asintoticamente stabili ma stabili esternamente. Questo avviene quando tutti gli autovalori a parte reale  $\geq 0$  sono nascosti, ovvero non compaiono al denominatore della funzione di trasferimento a causa del prodotto di  $(sI - A)^{-1}$  con le matrici  $B$  e  $C$ .

**Esempio 2.16** Si consideri un sistema con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Per questo sistema vale

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$  a cui sono associati i modi naturali  $e^t$  (divergente) e  $e^{-t}$  (convergente). Il sistema risulta quindi internamente instabile. Tuttavia, se calcoliamo la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

notiamo che l'autovalore  $\lambda_1 = 1$  non compare come polo della funzione di trasferimento (è nascosto). Quindi la  $G(s)$  ha tutti i poli con parte reale  $< 0$  e il sistema risulta esternamente stabile.

L'esempio precedente ci mostra che osservare semplicemente la relazione ingresso-uscita di un sistema (ossia la funzione di trasferimento  $G(s)$ ) può non essere sufficiente per trarre conclusioni sul suo comportamento interno e quindi sulle sue proprietà di stabilità rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali. In particolare, la stabilità esterna implica la stabilità asintotica solo quando tutti gli autovalori nascosti (corrispondenti a modi naturali del sistema che non sono presenti nella risposta forzata) hanno parte reale  $< 0$ . La seguente tabella riassume le nozioni di stabilità considerate e le relative condizioni.

Tabella 1: Tabella riassuntiva sulla stabilità.

| <b>STABILITÀ</b>     | <b>Quantità di interesse</b>                            | <b>Condizione</b>   |
|----------------------|---|---|
| Stabilità Asintotica | Polinomio caratteristico $\varphi(s)$                   | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni $\lambda_i$ tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$   |
| Stabilità Marginale  | Polinomio minimo $m(s)$                                 | $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ per ogni $\lambda_i$ tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$<br>&<br>$m_i = 1$ nel caso in cui $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ |
| Stabilità esterna    | Funzione di trasferimento<br>$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ | $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni $\lambda_i$ tale che $a(\lambda_i) = 0$   |

## 2.9 Criteri algebrici per la stabilità

Come visto lo studio delle proprietà di stabilità di un sistema LTI TC richiede di analizzare il segno della parte reale delle radici di opportuni polinomi: il polinomio caratteristico  $\varphi(s)$  per la stabilità interna e il polinomio  $a(s)$ , denominatore della funzione di trasferimento, per la stabilità esterna.

A questo riguardo notiamo che determinare le radici di un polinomio non è sempre agevole. Infatti formule analitiche per determinare in modo esatto le radici di un polinomio esistono solo in casi particolari (ad esempio la ben nota formula per i polinomi di secondo grado). In generale, invece, occorre ricorrere ad algoritmi iterativi per determinare in modo approssimato le radici che non sempre risultano accurati, soprattutto per polinomi di ordine elevato e in presenza di radici di molteplicità non unitaria.

Tuttavia esistono **criteri algebrici** che consentono di determinare il segno delle radici di un polinomio senza doverle calcolare esplicitamente. Consideriamo un generico polinomio a coefficienti reali di grado  $n$

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

con  $a_n \neq 0$ . I criteri algebrici definiscono condizioni per l'appartenenza delle radici  $\lambda_i$  del polinomio  $p(s)$  alla regione di stabilità  $\mathbb{C}_s$  nel piano complesso

$$\mathbb{C}_s = \{s \in \mathbb{C} \text{ tali che } \operatorname{Re}[s] < 0\}$$

che si basano sull'analisi dei coefficienti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  del polinomio.

**Fatto 2.13 (condizione necessaria per la stabilità)** Condizione necessaria affinché tutte le radici del polinomio  $p(s)$  abbiano parte reale  $< 0$  è che tutti i coefficienti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  siano non nulli e abbiano lo stesso segno.

Per polinomi fino al secondo grado, ovvero per  $n \leq 2$ , la condizione è anche sufficiente (**Regola di Cartesio**).

*Dimostrazione:* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  le radici del polinomio  $p(s)$ . Supponiamo che tutte le radici siano reali e  $< 0$ . Allora possiamo scrivere  $\lambda_i = -r_i$  con  $r_i > 0$  per ogni  $i$  e fattorizzare il polinomio  $p(s)$  come

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = a_n \prod_{i=1}^n (s + r_i)$$

Poiché gli  $r_i$  sono tutti numeri positivi è immediato verificare che la produttoria dà luogo a un polinomio con coefficienti tutti positivi. Di conseguenza quando le radici sono tutte reali e negative il polinomio  $p(s)$  deve necessariamente avere tutte i coefficienti con lo stesso segno. La precedente dimostrazione può essere facilmente estesa anche al caso in cui vi siano radici complesse ma con parte reale  $< 0$ .

Per quanto concerne il fatto che la condizione sia anche sufficiente per polinomi fino al secondo grado, questo può essere facilmente dimostrato scrivendo in modo esplicito le radici e verificato che tali radici hanno tutte parte reale  $< 0$  se e solo se tutti i coefficienti sono non nulli e hanno lo stesso segno.  $\square$

Per polinomi fino al secondo grado la regola di Cartesio mi consente immediatamente di concludere sul segno delle radici semplicemente guardando i segni dei coefficienti del polinomio. Per polinomi di grado superiore al secondo,  $n > 2$ , la condizione necessaria può essere invece utilizzata come prima verifica. In particolare si ha che

- se la condizione necessaria non è verificata (ossia almeno uno dei coefficienti  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  è nullo e/o c'è almeno una variazione di segno nei coefficienti) allora sicuramente non tutte le radici hanno parte reale  $< 0$ ;
- se invece la condizione necessaria è verificata allora non posso concludere nulla.

Una condizione necessaria e sufficiente per l'appartenenza delle radici alla regione di stabilità  $\mathbb{C}_s$  può essere ottenuta costruendo la cosiddetta **Tabella di Routh** del polinomio  $p(s)$ . Per un generico polinomio di grado  $n$ , la sua tabella di Routh ha  $n + 1$  righe (numerata in ordine decrescente) in cui

- le prime due righe sono costruite mettendo a zig-zag i coefficienti del polinomio e completando con degli zeri;

- le righe successive sono costruite iterativamente a partire dalle prime due e, in particolare, la riga  $\ell$  è costruita partendo dalle righe  $\ell + 1$  e  $\ell + 2$ ;
- man mano che si costruisce la tabella il numero di elementi non nulla di ciascuna riga diminuisce.

In particolare, la tabella di Routh assume la forma

$$\begin{array}{c|cccc} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ n-2 & E_{n-2,1} & E_{n-1,2} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & E_{0,1} & 0 & & & \end{array}$$

dove

$$E_{n-2,1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \quad E_{n-2,2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}$$

e in generale

$$E_{\ell,i} = -\frac{1}{E_{\ell+1,1}} \det \begin{bmatrix} E_{\ell+2,1} & E_{\ell+2,i+1} \\ E_{\ell+1,1} & E_{\ell+1,i+1} \end{bmatrix}$$

Notiamo che la costruzione della tabella non può essere continuata quando per una certa riga  $\ell$  il primo elemento  $E_{\ell,1}$  risulta nullo. In questo caso si dice che la tabella è **non regolare**. A partire dalla tabella di Routh, è possibile concludere immediatamente sul segno delle radici semplicemente osservando gli elementi della prima colonna. Infatti si ha che ad ogni variazione di segno che si presenta nella prima colonna della tabella corrisponde una radice con parte reale positiva e ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa. Vale quindi il seguente risultato.

**Fatto 2.14 (criterio di Routh-Hurwitz)** Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici del polinomio  $p(s)$  abbiano parte reale  $< 0$  è che valgano entrambe le seguenti condizioni

- la tabella di Routh sia regolare (ovvero tutti i coefficienti della prima colonna siano non nulli);
- tutti i coefficienti della prima colonna abbiano lo stesso segno.

Tale risultato consente di generalizzare il criterio di Cartesio a polinomi di grado arbitrario.

**Esempio 2.17** Considero un sistema LTI TC con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

Per studiare la stabilità esterna devo andare a vedere se tutte le radici di  $a(s) = s^3 + 3s^2 + s + 2$  hanno parte reale  $< 0$ . Si tratta di un polinomio di terzo grado con coefficienti  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 2$ . In questo caso la condizione necessaria è verificata, quindi per concludere sul segno delle radici devo utilizzare il criterio di Routh-Hurwitz. Per un polinomio di terzo grado la tabella di Routh assume la forma

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{1,1} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array}$$

con

$$E_{1,1} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Quindi per il polinomio  $a(s) = s^3 + 3s^2 + s + 2$  si ha

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & E_{1,1} & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

con

$$E_{1,1} = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}$$

Poiché tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, il polinomio ha tutte le radici con parte reale  $< 0$ . Di conseguenza il sistema è stabile esternamente.

## 2.10 Analisi dei sistemi LTI in rappresentazione ingresso/uscita

Come visto in fase di modellistica, a volte i sistemi LTI TC possono essere rappresentati da relazioni ingresso/uscita del tipo

$$y^{(n)}(t) = \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

dove, per brevità, si è usata la notazione  $y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$ . Abbiamo già visto come, nel caso particolare in cui i coefficienti  $\beta_i$  siano tutti nulli per  $i > 0$  (ossia l'ingresso non sia derivato), sia possibile passare da tale rappresentazione i/u a una rappresentazione in equazioni di stato. Per sistemi LTI TC questo passaggio può essere fatto in modo sistematico anche nel caso generale in cui nell'equazione differenziale compaiono anche le derivate dell'ingresso. Infatti scegliendo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(n-1)} - \alpha_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \alpha_1 \dot{y} - \beta_n u^{(n-1)} - \dots - \beta_1 \dot{u} \\ \vdots \\ \dot{y} - \alpha_{n-1} y - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} u \\ y - \beta_n u \end{bmatrix}$$

è immediato verificare che l'equazione differenziale ammette una rappresentazioni in equazioni di stato nella cosiddetta **forma canonica di osservazione**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_n \alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_n \alpha_1 \\ \beta_2 + \beta_n \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad D = \beta_n$$

Notiamo in particolare che la matrice  $A$  si costruisce mettendo i coefficienti  $\alpha_i$  nell'ultima colonna, mettendo un 1 in corrispondenza degli elementi sotto la diagonale e ponendo tutti gli altri elementi a 0. La corrispondenza tra l'equazione differenziale di grado  $n$  e la forma canonica di osservazione può essere facilmente verificata derivando ciascuna componente dello stato. Ad esempio, per quanto riguarda l'ultima equazione di stato si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = \dot{y} - \beta_n \dot{u} &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u - \alpha_{n-1} \beta_n u + \alpha_{n-1} \beta_n u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} (y - \beta_n u) + (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n + (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) u \end{aligned}$$

Sfruttando la particolare struttura della forma canonica di osservazione, si può derivare il seguente risultato.

**Fatto 2.15** Per un sistema LTI TC in rappresentazione i/u il polinomio caratteristico  $\varphi(s)$ , il polinomio minimo  $m(s)$  e la funzione di trasferimento  $G(s)$  assumono la forma

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0 \\ m(s) &= \varphi(s) \\ G(s) &= \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0} \end{aligned}$$

*Dimostrazione:* Questo risultato può facilmente essere dimostrato osservando la particolare struttura della matrice  $sI - A$  e ricordando che  $\varphi(s) = \det(sI - A)$ ,  $m(s)$  è il minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di  $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \text{Adj}(sI - A)$  e  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ .  $\square$

Notiamo che, come di consueto, nel calcolo della funzione di trasferimento vanno fatte tutte le semplificazioni tra numeratore e denominatore quando esistono fattori comuni. Quindi la funzione di trasferimento sarà nella forma  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$  dove i polinomi  $b(s)$  e  $a(s)$  sono ottenuti dai polinomi  $\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0$  e  $s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_0$ , rispettivamente, dopo aver semplificato eventuali fattori comuni.

Notiamo anche che, in virtù del Fatto 15, per studiare le proprietà di stabilità interna e esterna di un sistema LTI TC in rappresentazione i/u **non** è necessario scrivere le equazioni di stato in quanto tutte le quantità di interesse possono essere immediatamente ottenute a partire dai coefficienti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  dell'equazione differenziale.

**Esempio 2.18** Considero un sistema LTI TC descritto dall'equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) + 3u(t)$$

Per tale sistema si ha:  $n = 2$ ,  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_1 = 3$  e  $\beta_0 = 0$ . Se voglio studiare la stabilità interna del sistema posso scrivere direttamente il corrispondente polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 = s^2 + 2s = s(s + 2)$$

che, come illustrato nel Fatto 15, coincide anche con il polinomio minimo  $m(s)$ . Tutti gli autovalori hanno quindi parte reale  $\leq 0$  e quello con parte reale  $= 0$  ha molteplicità unitaria. Di conseguenza il sistema è marginalmente stabile. Per quanto riguarda la stabilità esterna, si ha

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{3s}{s(s + 2)} = \frac{3}{s + 2}$$

Ho quindi un unico polo con parte reale  $< 0$  e, di conseguenza, il sistema è esternamente stabile. Saremmo potuti arrivare alle stesse conclusioni scrivendo le matrici del sistema corrispondenti alla forma canonica di osservazione

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_2 \alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_2 \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = \beta_2 = 0$$

ed effettuando la consueta analisi di stabilità.

Come osservazione conclusiva notiamo che l'espressione per la funzione di trasferimento illustrata nel Fatto 15 può anche essere ottenuta direttamente dalla rappresentazione i/u sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace. Infatti, come visto, vale

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0)$$

Applicando tale proprietà una seconda volta si ha

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\dot{y}(t)\right\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

e generalizzando si ha

$$\mathcal{L}\{y^{(i)}(t)\} = s^i Y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - sy^{(i-2)}(0) - y^{(i-1)}(0)$$

Se ci interessa il calcolo della sola risposta forzata possiamo porre le condizioni iniziali a 0 e scrivere semplicemente

$$\mathcal{L}\{y_f^{(i)}(t)\} = s^i Y_f(s)$$

Di conseguenza, passando nel dominio di Laplace, la relazione ingresso-uscita relativa alla sola risposta forzata assume la forma

$$s^n Y_f(s) = \alpha_{n-1} s^{n-1} Y_f(s) + \dots + \alpha_1 s Y_f(s) + \alpha_0 Y_f(s) + \beta_n s^n U(s) + \dots + \beta_1 s U(s) + \beta_0 U(s)$$

Risolvendo tale equazione rispetto a  $Y_f(s)$  si ottiene proprio

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0}}_{G(s)} U(s)$$