

Fondamenti di Automatica
Note sulla stabilità nei sistemi non lineari

Per sistemi non lineari, l'analisi di stabilità diventa sostanzialmente più complessa. Le differenze rispetto al caso lineare sono principalmente due. Primo, non possiamo più parlare di stabilità del sistema. Per sistemi non lineari **il concetto di stabilità non è indipendente dal moto considerato**. Secondo, mentre per sistemi lineari le proprietà di stabilità sono di carattere **globale** (ossia valide per qualunque perturbazione), per sistemi non lineari **la stabilità è solitamente di tipo locale**, ovvero essa dipende dall'ampiezza delle perturbazioni.

2.11 Stabilità interna per sistemi non lineari tempo continuo

Nel seguito, studieremo la stabilità interna in riferimento ad una particolare classe di moti del sistema, ovvero gli equilibri.

Consideriamo un sistema nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad t \geq 0$$

dove u è l'ingresso, $x \in \mathbb{R}^n$ lo stato ed y l'uscita. Inoltre, f e h sono opportune funzioni.

Definizione (Equilibrio). Si definisce **punto di equilibrio** una coppia (x_e, u_e) tale che

$$\begin{aligned} x(0) &= x_e \\ u(t) &= u_e, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \implies x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

In altre parole, quando il sistema si trova inizialmente nello stato di equilibrio x_e e si applica l'ingresso di equilibrio $u(t) = u_e$, allora il sistema rimane in tale stato di equilibrio. Un punto di equilibrio corrisponde quindi a una **traiettoria costante** del sistema. Notiamo che a ciascun punto di equilibrio (x_e, u_e) possiamo associare la corrispondente uscita di equilibrio

$$y_e = h(x_e, u_e)$$

Dalla definizione di punto di equilibrio segue immediatamente il seguente risultato.

Fatto 2.16 I punti di equilibrio sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Dimostrazione: Quando il sistema si trova nello stato x_e e viene applicato l'ingresso u_e , lo stato non cambia se e solo la sua variazione $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))|_{x(t)=x_e, u(t)=u_e}$ è nulla. Ossia se e solo se $f(x_e, u_e) = 0$. \square

Naturalmente per sistemi autonomi in cui non è presente alcun ingresso la condizione necessaria sufficiente affinché uno stato x_e sia di equilibrio è che $f(x_e) = 0$.

Analogamente a quanto fatto per sistemi lineari, data una condizione iniziale $x(0)$ e un ingresso u , indichiamo con $x(t) = \Phi(t, x(0), u(\cdot))$ la risposta nello stato al tempo t . Chiaramente per un punto di equilibrio vale $\Phi(t, x_e, u_e) = x_e$ per ogni $t \geq 0$. Si possono quindi fornire definizioni di stabilità interna analoghe a quelle viste in precedenza per sistemi lineari considerando come traiettoria nominale quella di equilibrio. La differenza rispetto al caso lineare è che, per sistemi non lineari, il concetto di stabilità può essere associato allo stato di equilibrio solo localmente, analizzando l'evoluzione dello stato per piccole variazioni delle condizioni iniziali rispetto a tale stato di equilibrio. Infatti, come vedremo, in un sistema non lineare possono coesistere equilibri stabili e instabili.

Definizione. L'equilibrio (x_e, u_e) si dice:

- **Stabile alla Lyapunov** se comunque si fissa un $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|x(0) - x_e\| \leq \delta \implies \|\Phi(t, x(0), u_e) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- **Localmente attrattivo** se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|x(0) - x_e\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x(0), u_e) = x_e$$

- **Globalmente attrattivo** se per ogni condizione iniziale $x(0)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x(0), u_e) = x_e$$

Il significato intuitivo della stabilità alla Lyapunov è che perturbazioni $x(0) - x_e$ sufficientemente piccole delle condizioni iniziali danno luogo a perturbazioni arbitrariamente piccole delle traiettorie. È importante notare che per sistemi non lineari la stabilità alla Lyapunov e l'attrattività sono **concetti indipendenti**. In altre parole esistono sistemi lineari con equilibri stabili ma non attrattivi (ad esempio per il sistema $\dot{x} = 0$ tutti gli stati sono equilibri stabili ma non attrattivi in quanto $x(t) = x(0)$ per ogni $t \geq 0$) e anche sistemi lineari con equilibri attrattivi ma non stabili (succede quando le traiettorie si allontanano sempre dall'equilibrio prima di tornarci, si veda l'esempio in figura).

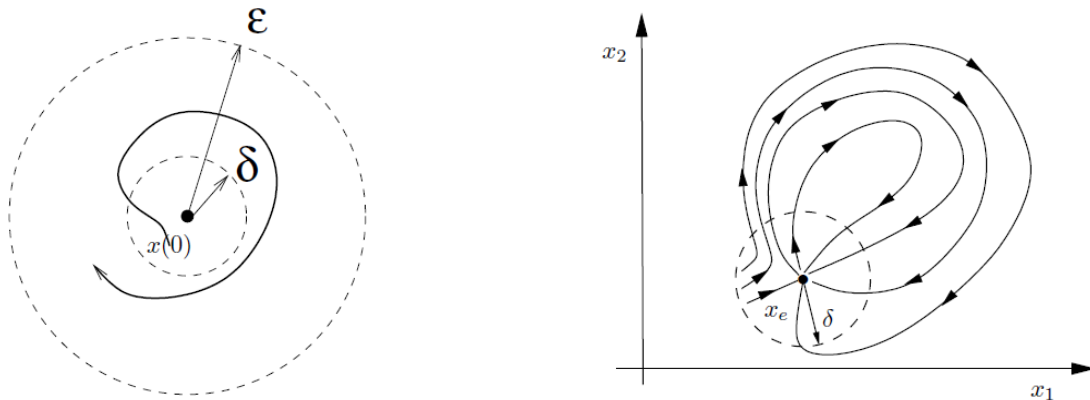


Figura 1: A sinistra: rappresentazione grafica del concetto di stabilità alla Lyapunov. A destra: esempio di un equilibrio attrattivo ma non stabile alla Lyapunov.

Definizione (Stabilità interna di un equilibrio). L'equilibrio (x_e, u_e) si dice:

- **Localmente asintoticamente stabile** se è stabile alla Lyapunov e localmente attrattivo.
- **Globalmente asintoticamente stabile** se è stabile alla Lyapunov e globalmente attrattivo.
- **Marginalmente stabile** se è stabile alla Lyapunov ma non attrattivo.

Per sistemi non lineari, lo studio delle proprietà di stabilità risulta in generale complesso. Vi è tuttavia un metodo semplice che permette di studiare la stabilità di un equilibrio guardando al **sistema linearizzato** attorno all'equilibrio stesso. Tale risultato viene indicato come **metodo di linearizzazione di Lyapunov** o **metodo indiretto di Lyapunov**.

Stabilità degli equilibri nei sistemi LTI TC

Prima di illustrare il metodo di linearizzazione, è opportuno rivisitare i concetti di stabilità visti per sistemi LTI in termini di stabilità degli equilibri. Consideriamo allora un sistema LTI TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

Applicando il Fatto 16 vediamo che per sistemi LTI TC la condizione di equilibrio è

$$A x_e + B u_e = 0$$

Di conseguenza per sistemi lineari $x_e = 0$ e $u_e = 0$ è sempre un punto di equilibrio. Inoltre, dato un ingresso costante $u(t) = u_e$, i corrispondenti stati di equilibrio sono tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$A x_e = -B u_e$$

Supponiamo ora che il sistema lineare sia asintoticamente stabile che, come visto, corrisponde ad avere la matrice A con tutti gli autovalori a parte reale < 0 . Allora la matrice A è invertibile, in quanto non può avere un autovalore in 0. Ne segue che, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un unico stato di equilibrio

$$x_e = -A^{-1} B u_e$$

Ricordando che per un sistema lineare tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, possiamo concludere che per un sistema lineare asintoticamente stabile lo stato di equilibrio $x_e = -A^{-1} B u_e$ corrispondente all'ingresso costante $u(t) = u_e$ risulta essere un equilibrio **globalmente asintoticamente stabile**. Di conseguenza per un sistema lineare asintoticamente stabile si ha che

$$u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \quad \implies \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= -A^{-1} B u_e \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= (-C A^{-1} B + D) u_e \end{aligned}$$

Metodo di linearizzazione di Lyapunov

Il metodo di linearizzazione si basa sull'idea di approssimare il comportamento del sistema non lineare nell'intorno dell'equilibrio considerando il sistema lineare ottenuto linearizzando le funzioni f e h . In particolare, un'approssimazione del primo ordine attorno all'equilibrio fornisce

$$\begin{aligned} f(x, u) &\approx f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (u - u_e) \\ h(x, u) &\approx h(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (x - x_e) + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (u - u_e) \end{aligned}$$

Ricordiamo che, data una funzione $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^m$, la corrispondente matrice Jacobiana delle derivate parziali è definita come

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1} & \frac{\partial f_n}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial v_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

dove f_i indica l' i -esima componente di f e v_j indica la j -esima componente di v .

Poiché per un punto di equilibrio vale $f(x_e, u_e) = 0$, allora si ha

$$\begin{aligned} f(x, u) &\approx A_e(x - x_e) + B_e(u - u_e) \\ h(x, u) &\approx y_e + C_e(x - x_e) + D_e(u - u_e) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$A_e = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}, \quad B_e = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}, \quad C_e = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}, \quad D_e = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}$$

Tale approssimazione è tanto migliore quanto più siamo vicini al punto di equilibrio e, in particolare, l'errore di approssimazione tende a zero per x e u tendenti a x_e e u_e , rispettivamente. Quindi, se

indichiamo con $\tilde{x} = x - x_e$, $\tilde{u} = u - u_e$ e $\tilde{y} = y - y_e$ le perturbazioni rispetto all'equilibrio, il sistema linearizzato attorno all'equilibrio può essere scritto come

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = A_e\tilde{x}(t) + B_e\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = C_e\tilde{x}(t) + D_e\tilde{u}(t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

dove si è sfruttato il fatto che $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}(x(t) - x_e) = \frac{d}{dt}x(t)$. Vale allora il seguente risultato.

Teorema 2.5 (Metodo di linearizzazione di Lyapunov). Consideriamo un sistema non lineare tempo-invariante TC ed un suo equilibrio (x_e, u_e) . Sia A_e la matrice di transizione dello stato del sistema linearizzato attorno a tale equilibrio. Allora:

- a) se tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale < 0 allora l'equilibrio è (localmente) asintoticamente stabile;
- b) se almeno un autovalore di A_e ha parte reale > 0 allora l'equilibrio è internamente instabile;
- c) (caso critico) se invece tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale ≤ 0 ed esiste almeno un autovalore a parte reale $= 0$, allora non si può concludere nulla.

Si noti che il Teorema 5 ha un carattere **locale** in quanto non specifica quanto sia grande la perturbazione che si può tollerare, ovvero non specifica il cosiddetto **dominio di attrazione**. Si noti inoltre che nel caso critico il risultato non fornisce conclusioni e si deve ricorrere ad altri metodi per studiare la stabilità (ad esempio il cosiddetto metodo diretto di Lyapunov). In questi casi, infatti, l'approssimazione del primo ordine non è sufficiente per concludere sul comportamento del sistema nell'intorno dell'equilibrio.

Per quanto riguarda lo studio della stabilità esterna ed il suo rapporto con la stabilità interna, Per sistemi non lineari questo è sensibilmente più complesso e materia di corsi avanzati sui sistemi non lineari.

Esempio 2.19 Si consideri il sistema SISO non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) - u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad t \geq 0$$

Gli equilibri del sistema sono le soluzioni dell'equazione

$$f(x_e, u_e) = x_e^2 - u_e = 0$$

Possiamo quindi distinguere tre casi: per $u_e < 0$ non si ha nessun stato di equilibrio; per $u_e = 0$ si ha un unico stato di equilibrio $x_e = 0$; infine per $u_e > 0$ si hanno due stati di equilibrio $\pm\sqrt{u_e}$.

Per studiare la stabilità degli equilibri esistenti per $u_e \geq 0$, calcoliamo la matrice A_e del sistema linearizzato attorno all'equilibrio. Si ha $f(x, u) = x^2 - u$, quindi

$$A_e = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(\pm\sqrt{u_e}, u_e)} = 2x|_{x=\pm\sqrt{u_e}} = \pm 2\sqrt{u_e}, \quad u_e \geq 0$$

Quindi si conclude che gli stati equilibri del tipo $x_e = \sqrt{u_e}$ sono internamente instabili per ogni $u_e > 0$, mentre gli stati di equilibrio del tipo $x_e = -\sqrt{u_e}$ sono asintoticamente stabili per ogni $u_e > 0$. Viceversa, per $u_e = 0$ non si possono trarre conclusioni circa la stabilità dell'unico stato di equilibrio $x_e = 0$.

Esempio 2.20 (moto del pendolo) Il pendolo rappresenta il più semplice modello di sistema meccanico con dinamica rotazionale e può, in prima approssimazione, essere usato come modello per un braccio robotico con un singolo grado di libertà. Il moto del pendolo di massa M e lunghezza ℓ in figura è descritto da un'equazione non lineare del tipo

$$M\ell\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta - c\ell\dot{\theta}$$

dove $c > 0$ è il coefficiente di attrito viscoso, $-Mg\sin\theta$ rappresenta la componente della forza peso tangenziale al moto e $-c\ell\dot{\theta}$ rappresenta la forza di attrito viscoso che si oppone al moto.

Prendendo come uscita y l'angolo θ , si ha

$$M\ell\ddot{y} = -Mg\sin y - c\ell\dot{y}$$

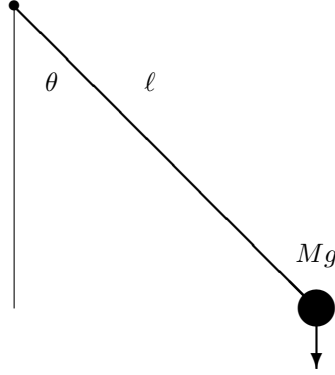


Figura 2: Rappresentazione grafica di un pendolo di massa M e lunghezza ℓ . La variabile θ rappresenta l'angolo tra il pendolo e la verticale.

Scegliendo come stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{g}{\ell} \sin y - \frac{c}{M} \dot{y} = -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{c}{M} x_2 \end{aligned}$$

Di conseguenza le equazioni di stato del sistema sono

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{con } f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{c}{M} x_2 \end{bmatrix} \quad h(x) = x_1$$

I punti di equilibrio sono tutti e soli gli stati x_e tali che $f(x_e) = 0$. In questo caso

$$f(x_e) = 0 \iff \begin{cases} x_{e,2} = 0 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_{e,1} - \frac{c}{M} x_{e,2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{e,2} = 0 \\ \sin x_{e,1} = 0 \end{cases}$$

Quindi i punti di equilibrio sono tutti e soli gli stati del tipo

$$x_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Si noti che valori pari di k corrispondono al caso in cui il pendolo si trova nella posizione verticale in basso con velocità nulla, mentre i k dispari corrispondono al caso in cui il pendolo si trova nella posizione verticale in alto con velocità nulla.

Per studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio x_e devo linearizzare il sistema nell'intorno di x_e calcolando $A_e = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e}$. Nel caso del pendolo

$$\begin{aligned} A_e &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{x_1=x_{e,1}, x_2=x_{e,2}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos x_{e,1} & -\frac{c}{M} \end{array} \right] \bigg|_{x_1=k\pi, x_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(k\pi) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Occorre quindi distinguere due casi. Per k pari si ha

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico $\varphi(s) = s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{g}{\ell}$. Applicando la regola di Cartesio, posso concludere che gli autovalori sono entrambi con parte reale < 0 . Di conseguenza, nei punti di equilibrio per k pari, corrispondenti al caso in cui il pendolo si trova nella posizione verticale in basso, il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile, e quindi tali punti di equilibrio sono localmente asintoticamente stabili. Per k dispari invece si ha

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico $\varphi(s) = s^2 + \frac{c}{M}s - \frac{g}{\ell}$. Applicando la regola di Cartesio, posso concludere che ho un autovalore con $\text{Re} > 0$ e uno con $\text{Re} < 0$. Di conseguenza, nei punti di equilibrio per k dispari, corrispondenti al caso in cui il pendolo si trova nella posizione verticale in alto, il sistema linearizzato risulta internamente instabile, e quindi tali punti di equilibrio sono instabili.