Esercizi su equazioni di stato

lunedì 15 marzo 2021 15:55

1) $y(t) = 2y(t-1)\,y(t-2)\,u(t-1)$

tempo discreto (TD)
non autonomo
tempo invariante (TI)
non lineare

$n=2 \qquad m=1$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

termine non lineare

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) = 2y(t-1)\,y(t-2)\,u(t-1) = 2\boxed{x_1(t)\,x_2(t)\,x_3(t)} \\ x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = u(t) = u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 2x_1(t)\,x_2(t)\,x_3(t)$$

2) $y(t) - 3y(t-2) = u(t)\,u(t-1)$

tempo discreto (TD)
tempo-invariante (TI)
non autonomo
non lineare

$y(t) = 3y(t-2) + u(t)\,u(t-1)$

$n=2 \qquad m=1$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

termine non lineare

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) = 3y(t-2) + u(t)\,u(t-1) = 3x_2(t) + \boxed{u(t)\,x_3(t)} \\ x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = u(t) = u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 3x_2(t) + u(t)\,x_3(t)$$

3) $y(t) = y(t-4)$

tempo discreto
autonomo
tempo-invariante
lineare

$n=4$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ y(t-3) \\ y(t-4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) = y(t-4) = x_4(t) \\ x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = y(t-2) = x_2(t) \\ x_4(t+1) = y(t-3) = x_3(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_4(t)$$

$$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

4) $y(t+2) = 3\,y(t+1) + u(t+1)$

$t+2 \rightarrow t$

$t+1 \rightarrow t-1$

$y(t) = 3\,y(t-1) + u(t-1)$ $\qquad x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ u(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$n = 1 \qquad m = 1$

$\vdots$

5) $y^{(3)} = -2\ddot{y} - \dot{y}\,u$ $\qquad y^{(3)}(t) = \dfrac{d^3 y(t)}{dt^3}$

$y^{(3)}(t) = -2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\,u(t)$

tempo continuo
non autonomo
tempo-invariante
non lineare

$n = 3$ $\boxed{m = 0}$ $\Rightarrow$ possiamo utilizzare il metodo visto per scrivere le eq. di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

termine non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = y^{(3)}(t) = -2\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\,u(t) = -2\,x_3(t) - \boxed{x_2(t)\,u(t)} \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = x_1(t)$$

6) $2\ddot{y} + 4y = u$

TC
TI
non autonomo
lineare

$n = 2 \qquad m = 0$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}(-4y + u) = -2y + \frac{1}{2}u$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -2y(t) + \frac{1}{2}u(t) = -2\,x_1(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

7) $\ddot{y} = 0$

TC
TI
autonomo
lineare

$n = 2$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = \quad = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = 0 \quad = 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

8) $\ddot{y} + \boxed{\cos(t)}\, u = 0$

dipendenza esplicita dal tempo

TC
tempo-variante
non autonomo

$n = 2 \qquad m = 0$

$$\ddot{y} = -\cos(t)\, u$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \quad = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\cos(t)u = -\cos(t)\, u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{-\cos(t)} \end{bmatrix}}_{B(t)} u(t)$$

elemento tempo-variante nella matrice

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$