

Nel caso in cui il sistema di controllo abbia un'informazione parziale, una particolare legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita è rappresentata dal **regolatore**. Questa tecnica di controllo consente di estendere l'applicazione della retroazione sullo stato anche al caso in cui lo stato non sia accessibile. Questa tecnica di progetto è alternativa a quelle viste nelle sezioni 3.8 e 3.9. La differenza fondamentale è che nelle sezioni 3.8 e 3.9 il controllore era rappresentato nel dominio di Laplace in termini di funzioni di trasferimento. Al contrario, come vedremo, nel progetto del regolatore il controllore è rappresentato nel dominio del tempo. Dal punto di vista pratico, la rappresentazione in termini di funzioni di trasferimento è più comune quando si devono controllare sistemi SISO. Nel caso, invece, di in cui si debbano controllare sistemi con più ingressi e/o più uscite è più comune ricorrere al regolatore.

3.10 Osservatore dello stato e regolatore

Come abbiamo visto, quando lo stato x è accessibile (**informazione completa**) possiamo applicare la legge di controllo in retroazione sullo stato

$$u(t) = -F x(t) + H y^\circ(t)$$

dove il guadagno in feedback F è scelto in modo da rendere la matrice della dinamica in ciclo chiuso $A^* = A - BF$ asintoticamente stabile (specifica 1) e garantire un transitorio soddisfacente (specifica 3), mentre il guadagno in feedforward H è scelto in modo da avere $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$ per garantire inseguimento perfetto di riferimenti costanti (specifica 2). In particolare, al variare del guadagno in feedback F , è possibile modificare a piacere la parte controllabile del sistema. Di conseguenza, quando il processo \mathcal{P} è stabilizzabile (cioè tutti gli eventuali autovalori non controllabili hanno $\text{Re} < 0$) allora esiste sempre un guadagno in feedback F stabilizzante.

Nella pratica, tuttavia, non sempre lo stato x è accessibile (spesso è troppo costoso inserire sensori per monitorare tutte le variabili di stato e alcune variabili di stato possono essere non misurabili). In molti casi, quindi, abbiamo a disposizione solo i dati ingresso/uscita (u, y) (**informazione parziale**).

L'idea alla base del **regolatore** è quella di cercare di applicare la retroazione sullo stato anche quando lo stato non è accessibile, determinando in tempo reale una **stima** $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$ sulla base dei dati ingresso/uscita a disposizione (u, y) . Per costruire la stima $\hat{x}(t)$ si utilizza un **osservatore dello stato**, cioè un particolare sistema dinamica \mathcal{O} che riceve in ingresso i dati ingresso/uscita (u, y) del processo e fornisce in uscita una stima $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$. Data la stima $\hat{x}(t)$, la legge di controllo è ottenuta applicando una retroazione sullo stato stimato (Figura 2)

$$u(t) = -F \hat{x}(t) + H y^\circ(t)$$

Affinché il regolatore garantisca le stesse buone proprietà della retroazione sullo stato, l'osservatore \mathcal{O} deve essere progettato in modo tale che la stima $\hat{x}(t)$ converga allo stato vero $x(t)$, ovvero in modo tale che l'**errore di stima** $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converga a 0 per $t \rightarrow \infty$ (il più rapidamente possibile).

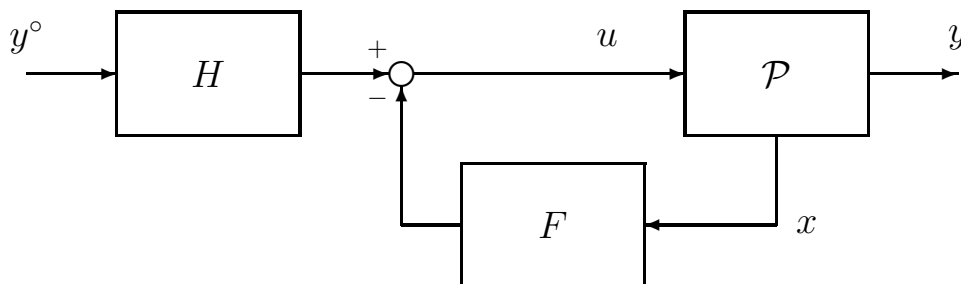


Figura 1: Sistema di controllo in retroazione sullo stato.

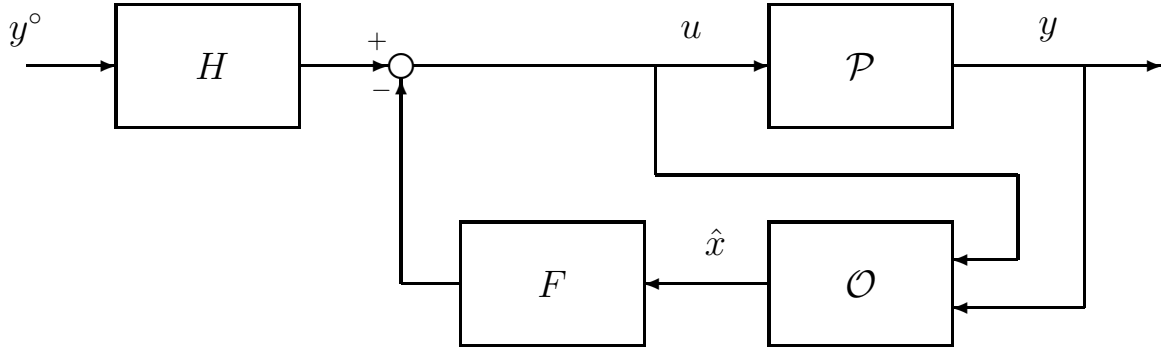


Figura 2: Schema di principio del regolare. L'osservatore dello stato \mathcal{O} riceve in ingresso i dati ingresso/uscita (u, y) del processo e fornisce in uscita una stima $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$. L'azione di controllo $u(t)$ è ottenuta applicando una retroazione algebrica sullo stato stimato.

Una forma tipica per l'osservatore è il cosiddetto **osservatore di Luenberger**

$$\mathcal{O} : \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

dove la matrice L è il cosiddetto **guadagno dell'osservatore** ed è un parametro di progetto. La dinamica dell'osservatore di Luenberger può essere scritta in modo equivalente come

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Si tratta quindi di un sistema LTI avente come stato \hat{x} , come ingressi i dati (u, y) e come matrice della dinamica $A - LC$. La dimension di \hat{x} è la stesso dello stato x . Quindi l'osservatore di Luenberger \mathcal{O} è un sistema dinamico di ordine pari a quello del sistema \mathcal{P} di cui si vuole stimare lo stato.

Possiamo anche notare che la dinamica dell'osservatore si compone di due parti:

- **Termine di predizione:** $A\hat{x} + Bu$ che simula la dinamica del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$.
- **Termine di correzione:** che corregge la simulazione sulla base della differenza tra uscita effettiva $y = Cx$ e uscita predetta sulla base della simulazione $\hat{y} = C\hat{x}$.

Notiamo ad esempio che quando l'uscita effettiva y coincide con quella predetta \hat{y} allora il termine di correzione va a 0 e quindi l'osservatore semplicemente riproduce la dinamica del sistema. Al contrario quando l'uscita effettiva y è diversa da quella predetta \hat{y} , allora lo stato stimato \hat{x} è diverso da quello effettivo x e quindi entra in gioco il termine di correzione per modificare la simulazione. Si tratta di una tecnica di **assimilazione dati** in cui la simulazione basata sul modello (termine di predizione) viene corretta sulla base dei dati (termine di correzione).

Per meglio comprendere il ruolo del termine di correzione e del guadagno dell'osservatore L , consideriamo la dinamica dell'errore di stima $e = x - \hat{x}$

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})] \\ &= Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) = (A - LC)(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e(t) \end{aligned}$$

L'errore di stima evolve quindi come un sistema autonomo [indipendente dai dati ingresso/uscita (u, y)] avente matrice della dinamica $A - LC$. L'evoluzione dell'errore di stima risulta quindi essere del tipo¹

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$$

Vale quindi il seguente risultato.

¹Con un certo abuso notazionale il simbolo e è usato sia per indicare l'errore di stima $e(t)$ sia per indicare la base dell'esponenziale.

Fatto 3.13 Se il guadagno L dell'osservatore è progettato in modo tale che $A - LC$ abbia tutti gli autovalori con $\text{Re} < 0$ allora l'errore di stima $e(t)$ converge a 0 per $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

Quando il guadagno dell'osservatore è scelto opportunamente, si ha quindi che lo stato $\hat{x}(t)$ dell'osservatore tende a sincronizzarsi con lo stato vero $x(t)$. Di conseguenza applicare la retroazione sullo stato stimato diventa equivalente ad applicare la retroazione sullo stato vero.

Analizziamo ora in modo complessivo il sistema in ciclo risultante dall'applicazione di un regolatore basato sull'osservatore di Luenberger. Consideriamo quindi un controllore avente la struttura di un osservatore di Luenberger con successiva retroazione sullo stato stimato

$$\mathcal{C} : \begin{cases} u &= -F \hat{x} + H y^\circ \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A \hat{x} + B u + L (y - C \hat{x}) \end{cases}$$

Notiamo che si tratta di un controllore in retroazione dinamica sull'uscita (in quanto il controllore è un sistema dinamico avente come ingressi y e y° e come uscita il controllo u) con una specifica struttura interna. Notiamo anche che il progetto del regolatore richiede la scelta dei 3 guadagni F , H e L che rappresentano quindi i parametri di progetto.

In generale F è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(x)$, H è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$ e L è una matrice di dimensione $\dim(x) \times \dim(y)$.

Nel caso di sistemi SISO, F è un vettore riga $1 \times \dim(x)$, H è uno scalare e L è un vettore colonna $\dim(x) \times 1$.

Consideriamo ora il sistema in ciclo risultante dall'applicazione di un regolatore basato sull'osservatore di Luenberger al processo

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

In particolare, la dinamica complessiva in ciclo chiuso può essere scritta in termini dello stato $x(t)$ e dell'errore di stima $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Notando infatti che $\hat{x}(t) = x(t) - e(t)$ e sostituendo la legge di controllo in retroazione sullo stato stimato nell'equazione di stato del processo \mathcal{P} , otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + B(-F\hat{x} + Hy^\circ) \\ &= Ax + B[-F(x - e) + Hy^\circ] \\ &= (A - BF)x + BFe + BH y^\circ \end{aligned}$$

Mettendo insieme questa equazione con la dinamica dell'errore di stima derivata in precedenza, otteniamo la dinamica complessiva del sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x} &= (A - BF)x + BFe + BH y^\circ \\ \dot{e} &= (A - LC)e \\ y &= Cx \end{cases}$$

Si tratta quindi di un sistema dinamico LTI avente come stato (x, e) . In termini matriciali, tale dinamica del sistema in ciclo chiuso può essere riscritta come

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix} y^\circ \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases}$$

Notiamo quindi che la matrice della dinamica in ciclo chiuso è

$$A^* = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

Data la struttura triangolare a blocchi della matrice A^* , è immediato verificare che il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= \det(sI - A^*) \\ &= \det(sI - A + BF) \det(sI - A + LC)\end{aligned}$$

Si dimostra inoltre che, per la particolare struttura del sistema in ciclo chiuso, la presenza dell'osservatore non influenza la funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G_{y^*y}^*(s)$ che coincide con quella che si otteneva con la sola retroazione algebrica sullo stato. Vale quindi il seguente risultato.

Fatto 3.14 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo con regolatore (osservatore di Luenberger e retroazione sullo stato stimato)

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) \det(sI - A + LC)$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{r(s)}{\det(sI - A + BF)} H$$

$$\text{con } r(s) = C \text{Adj}(sI - A) B$$

Una conseguenza importante del precedente risultato è che il guadagno in feedback F e il guadagno dell'osservatore L possono essere progettati indipendentemente l'uno dall'altro. In sostanza F può essere scelto come già visto per la retroazione dello stato, senza la necessità di tenere conto della presenza dell'osservatore. D'altro canto, il guadagno dell'osservatore L deve essere progettato in modo da garantire una rapida convergenza a 0 dell'errore di stima $e(t)$, senza la necessità di tenere conto della presenza della retroazione sullo stato stimato. Questo risultato è noto in letteratura come **principio di separazione**.

Progetto del regolatore

Il progetto del regolatore si articola nelle seguenti 3 fasi.

1. Si sceglie il F guadagno in *feedback* F in modo tale che la matrice $A - BF$ sia asintoticamente stabile (specifica 1) e la funzione di trasferimento in ciclo chiuso garantisca un transitorio soddisfacente (specifica 3);
2. Si sceglie il guadagno in *feedforward* H in modo tale da avere guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G_{y^*y}^*(0) = 1$ al fine di garantire inseguimento perfetto di riferimenti costanti (specifica 2);
3. Si sceglie il guadagno dell'*osservatore* L in modo tale che la matrice $A - LC$ sia asintoticamente stabile (specifica 1) e garantisca una rapida convergenza a 0 dell'errore di stima.

Le prime 2 fasi del progetto sono analoghe a quelle della retroazione algebrica sullo stato e quindi si possono ripetere le stesse considerazioni fatte in quel caso. Per quanto riguarda la terza fase, tipicamente si cerca di posizionare gli autovalori di $A - LC$ nel semipiano sinistro molto lontani dall'asse immaginario per garantire che l'errore di stima converga rapidamente a 0.

Per comprendere sotto quali ipotesi il progetto del regolatore possa essere portato a termine con successo, ricordiamo che nella matrice $A - BF$, al variare del guadagno F gli autovalori non controllabili del sistema, radici di $\varphi_{nc}(s)$, non possono essere modificati, mentre gli autovalori controllabili del sistema, radici di $\varphi_c(s)$, possono essere spostati liberamente nel piano complesso. Di conseguenza, come abbiamo visto, è possibile scegliere F in modo tale che $A - BF$ sia asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori non controllabili del sistema hanno $\text{Re} < 0$.

Per quanto riguarda il progetto dell'osservatore valgono considerazioni analoghe. In particolare, è possibile dimostrare che nella matrice della dinamica dell'osservatore $A - LC$, al variare del guadagno L :

- gli autovalori **non osservabili** del sistema, radici di $\varphi_{no}(s)$, **non** possono essere modificati;

- gli autovalori **osservabili** del sistema, radici di $\varphi_o(s)$, possono essere spostati **liberamente** nel piano complesso (nel rispetto del vincolo che autovalori complessi sono sempre in coppie coniugate).

Di conseguenza, è possibile scegliere L in modo tale che $A - LC$ sia asintoticamente stabile **se e solo se** tutti gli autovalori non osservabili del sistema radici di

$$\varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)}$$

hanno $\text{Re} < 0$.

Nel complesso, quindi, il progetto del regolatore può essere portato a termine con successo solo quando non ci sono autovalori non controllabili e/o non osservabili con $\text{Re} \geq 0$. A questo proposito ricordiamo che gli autovalori non controllabili e/o non osservabili corrispondono agli autovalori nascosti del sistema, radici del polinomio

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

Di conseguenza vale il seguente risultato.

Fatto 3.15 È possibile scegliere F e L in modo tale che il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) \det(sI - A + LC)$$

sia asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori nascosti, radici di $\varphi_h(s)$, hanno $\text{Re} < 0$.

Ricordiamo che la stabilità asintotica di $\varphi_h(s)$ corrisponde proprio alla definizione già introdotta per la buona posizione del problema di controllo in retroazione sull'uscita. Il precedente risultato ci dice quindi che la buona posizione del problema di controllo in retroazione sull'uscita è condizione **necessaria e sufficiente** per l'esistenza di un regolatore stabilizzante. Le condizioni per il progetto del regolatore sono quindi le stesse che avevamo visto per il progetto della retroazione dinamica sull'uscita.

Vediamo ora un esempio di progetto del regolatore.

Esempio 3.14 Supponiamo di voler progettare un regolare per un sistema LTI TC con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

Il sistema ha polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 1 = (s + 1)(s - 1)$$

e autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Il sistema è quindi internamente instabile per la presenza di un autovalore con $\text{Re} > 0$.

Calcoliamo quindi la matrice inversa

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} \text{Adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} \text{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e la funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A) B \\ &= \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s + 1)(s - 1)} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\ &= \frac{s + 1}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{1}{s - 1} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $a(s) = s - 1$ e $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s) = s + 1$. Poiché l'autovalore nascosto ha $\text{Re} < 0$ il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto e quindi si può procedere al progetto del regolatore.

Prima di procedere al progetto, osserviamo che l'autovalore nascosto $\lambda_1 = -1$ è controllabile ma non osservabile, di conseguenza il sistema è completamente controllabile ma non completamente osservabile. Infatti si ha

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ \frac{s}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e quindi il polinomio caratteristico di controllo è $\varphi_c(s) = (s+1)(s-1)$. Per quanto riguarda l'osservabilità invece, si ha

$$\begin{aligned}C(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} [s+1 \quad s+1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e quindi il polinomio caratteristico di osservazione è $\varphi_o(s) = s - 1$.

Poiché il sistema è completamente controllabile, allora possiamo posizionare liberamente le radici di $\det(sI - A + BF)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}A - BF &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - f_1 & -f_2 \end{bmatrix} \\ \det(sI - A + BF) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 + f_1 & s + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + f_2s + f_1 - 1\end{aligned}$$

Possiamo ad esempio assegnare $\det(sI - A + BF) = (s+1)(s+10) = s^2 + 11s + 10$ ponendo $f_1 = 11$ e $f_2 = 11$.

Per quanto concerne il polinomio $\det(sI - A + LC)$, non possiamo posizionare liberamente le sue radici in quanto il sistema non è completamente osservabile. Possiamo tuttavia renderlo asintoticamente stabile in quanto l'autovalore non osservabile ha $\text{Re} < 0$. In particolare si ha

$$\begin{aligned}A - LC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} -\ell_1 & 1 - \ell_1 \\ 1 - \ell_2 & -\ell_2 \end{bmatrix} \\ \det(sI - A + LC) &= \det \begin{bmatrix} s + \ell_1 & -1 + \ell_1 \\ -1 + \ell_2 & s + \ell_2 \end{bmatrix} \\ &= (s + \ell_1)(s + \ell_2) - (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) \\ &= s^2 + (\ell_1 + \ell_2)s + \ell_1 + \ell_2 - 1\end{aligned}$$

È immediato verificare che tale polinomio può essere fattorizzato come

$$\begin{aligned}\det(sI - A + LC) &= s^2 + (\ell_1 + \ell_2)s + \ell_1 + \ell_2 - 1 \\ &= (s+1)(s + \ell_1 + \ell_2 - 1)\end{aligned}$$

Come ci aspettavamo, l'autovalore in -1 non può essere modificato in quanto non osservabile. L'altro autovalore invece può essere spostato a piacere. Possiamo ad esempio assegnare $\det(sI - A + LC) = (s+1)(s+100) = s^2 + 101s + 100$ ponendo $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = 100$.

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risultante dalle assegnazioni fatte è

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= \det(sI - A + BF) \det(sI - A + LC) \\ &= (s+1)(s+10)(s+1)(s+100) = (s+1)^2(s+10)(s+100)\end{aligned}$$

che è asintoticamente stabile. Per quanto concerne la funzione di trasferimento in ciclo chiuso, si ha

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{r(s)}{\det(sI - A + BF)} H = \frac{s+1}{(s+1)(s+10)} H = \frac{1}{s+10} H$$

con

$$r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B = s + 1$$

Per avere $G_{y \circ y}^*(0) = 1$ (specifica 2), è quindi sufficiente porre $H = 10$.

Concludiamo con un paio di osservazioni. Per prima cosa è importante sottolineare che tutti precedenti risultati, sviluppati per il caso TC, possono essere ripetuti anche per il caso TD. Nel caso TD, l'osservatore di Luenberger ha la forma:

$$\mathcal{O}: \quad \hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Nel progetto del regolatore TD, F deve essere scelto in modo da posizionare tutti gli autovalori di $A - BF$ dentro il cerchio unitario $\{z : |z| \leq 1\}$. H deve essere progettato in modo da garantire guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G_{y \circ y}^*(1) = 1$. Per finire, L deve essere scelto in modo da posizionare tutti gli autovalori di $A - LC$ dentro il cerchio unitario.

Per quanto riguarda il progetto del guadagno dell'osservatore L , si può seguire anche un approccio di tipo statistico cercando il guadagno che renda minimo l'errore quadratico medio tra stato vero e stato stimato (dove la media è calcolata rispetto alle distribuzioni statistiche dei disturbi e dei rumori di misura). L'osservatore risultante corrisponde al cosiddetto **filtro di Kalman**.