

# Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**DINFO**  
DIPARTIMENTO DI  
INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

## 2 Analisi dei sistemi dinamici

---

## 2.12 Risposta permanente e transitoria nei sistemi LTI TC

# Risposta in continua e in frequenza

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

**Obiettivo:** ottenere informazioni sul comportamento dell'uscita di un sistema LTI in risposta a **segnali di ingresso tipici (gradino, senoide)** senza dover calcolare in modo esatto le soluzioni

- 1 **Risposta in continua** fornisce il valore asintotico della risposta nell'uscita a segnali di ingresso a gradino
- 2 **Risposta in frequenza** fornisce il valore asintotico della risposta nell'uscita a segnali di ingresso di tipo sinusoidale

# Rappresentazione di funzione di trasferimento e ingresso

- Consideriamo un sistema LTI TC SISO con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

- Consideriamo un segnale di ingresso  $u(t)$  con trasformata di Laplace razionale

$$U(s) = \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{a}(s)} = \frac{\tilde{b}(s)}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} (s - \tilde{p}_i)}$$

con  $\text{grado } \tilde{b}(s) < \text{grado } \tilde{a}(s)$

**Nota:** segnali di ingresso con trasformata di Laplace razionale includono molti segnali di interesse ( polinomi, sinusoidi, esponenziali, combinazioni lineari e prodotti di questi)

# Scomposizione della risposta forzata

**Ipotesi:** supponiamo per semplicità che

- tutti i poli della  $G(s)$  siano distinti, ossia  $p_i \neq p_\ell$  per ogni  $i \neq \ell$
- tutti i poli della  $U(s)$  siano distinti, ossia  $\tilde{p}_i \neq \tilde{p}_\ell$  per ogni  $i \neq \ell$
- i poli di  $U(s)$  e  $G(s)$  siano distinti, ossia  $p_i \neq \tilde{p}_\ell$  per ogni  $i, \ell$

- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{b(s)\tilde{b}(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} (s - \tilde{p}_i)}$$

- Scomponendo in fratti semplici

$$Y_f(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s - \tilde{p}_i}$$

# Transitorio e regime permanente

- Scomposizione della risposta forzata in Laplace

$$Y_f(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s - \tilde{p}_i}}_{Y_f^U(s)} = Y_f^G(s) + Y_f^U(s)$$

- Scomposizione della risposta forzata nel tempo

$$y_f(t) = y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

- **Transitorio** parte di  $y_f(t)$  dipendente dai poli di  $G(s)$

$$y_f^G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^G(s)\}$$

- **Regime permanente** parte di  $y_f(t)$  dipendente dai poli di  $U(s)$

$$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^U(s)\}$$

# Esempio: transitorio e regime permanente

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

- Consideriamo un ingresso a gradino

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

- Risposta forzata in Laplace

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{(s+1)s} = \underbrace{\frac{-2}{s+1}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{Y_f^U(s)}$$

- Risposta forzata nel tempo

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \underbrace{-2e^{-t}1(t)}_{y_f^G(t)} + \underbrace{2 \cdot 1(t)}_{y_f^U(t)}$$



# Stabilità e regime permanente

- Risposta complessiva

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

con

$$y_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}x(0)\} \quad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

- Stabilità esterna  $\Rightarrow$  tutti i poli di  $G(s)$  hanno parte reale  $< 0$   
 $\Rightarrow$  transitorio  $y_f^G(t)$  converge a 0  
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$
- Stabilità asintotica  $\Rightarrow$  tutti autovalori di  $A$  con parte reale  $< 0$   
 $\Rightarrow$  risposta libera  $y_\ell(t)$  e transitorio  $y_f^G(t)$  convergono a 0  
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$

**Stabilità esterna**  $\Rightarrow$  **risposta forzata** converge al regime permanente

**Stabilità asintotica**  $\Rightarrow$  **risposta complessiva** converge al regime permanente

# Regime permanente per segnali tipici

- Regime permanente è di più semplice valutazione rispetto all'intera risposta forzata
- Fornisce indicazioni sulla risposta dopo il transitorio iniziale
- Sono di pratico interesse i casi in cui l'ingresso è una **segnale limitato ma persistente** nel tempo (ossia che non tende a zero):
  - Regime permanente in risposta al gradino (**risposta in continua**)

$$u(t) = 1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

- Regime permanente in risposta alla sinusoide (**risposta in frequenza**)

$$u(t) = \sin(\omega_0 t) 1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

# Risposta in continua

- Consideriamo un ingresso a gradino di ampiezza  $U_0$

$$u(t) = U_0 \cdot 1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{U_0}{s}$$

- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{U_0}{s}$$

- Supponendo che  $G(s)$  non abbia poli in zero

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + Y_f^U(s) = Y_f^G(s) + \frac{\tilde{K}}{s}$$

dove il residuo  $\tilde{K}$  vale

$$\tilde{K} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)U_0 = G(0)U_0$$

# Guadagno in continua

Ingresso a gradino di ampiezza  $U_0 \Rightarrow$  regime permanente a gradino di ampiezza  $G(0) U_0$

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}}{s} = \frac{G(0) U_0}{s} \Rightarrow y_f^U(t) = G(0) U_0 1(t)$$

- Ingresso amplificato/attenuato di un fattore  $G(0)$  detto **guadagno in continua** del sistema
- Il guadagno in continua è ben definito quando  $G(s)$  non ha poli in 0
- Per sistemi SISO,  $G(0)$  è uno scalare
- Per sistemi con più ingressi e più uscite,  $G(0)$  matrice costante di dimensione  $\dim(y) \times \dim(u)$

## Esempio: guadagno in continua

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 3s + 4}$$

- Consideriamo un ingresso a gradino di ampiezza  $U_0$

$$U(s) = \frac{U_0}{s}$$

- $G(s)$  non ha poli in zero  $\Rightarrow$  regime permanente

$$y_f^U(t) = G(0) U_0 1(t)$$

con guadagno in continua pari a

$$G(0) = G(s)|_{s=0} = \frac{5}{4}$$

- Sistema esternamente stabile  $\Rightarrow y_f(t)$  converge al regime permanente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = G(0) U_0 = \frac{5}{4} U_0$$

# Osservazione sulla risposta in continua

- Ricordiamo che

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

⇒ guadagno in continua

$$G(0) = G(s)|_{s=0} = -CA^{-1}B + D$$

- Per un sistema asintoticamente stabile l'uscita converge al regime permanente  
⇒ se sollecitiamo un sistema asintoticamente stabile con un **ingresso a gradino** di ampiezza  $U_0$ , l'uscita converge al valore costante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) U_0 = (-CA^{-1}B + D) U_0$$

**Nota:** avevamo già visto questo risultato in riferimento agli **equilibri** dei sistemi LTI asintoticamente stabili

$G(0) U_0$  **uscita di equilibrio** associata all'equilibrio globalmente asintoticamente stabile  $x_e = -A^{-1} B U_0$  e  $u_e = U_0$

# Risposta in frequenza

- Consideriamo un **ingresso sinusoidale** di ampiezza  $U_0$  e frequenza  $\omega_0$

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) 1(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(s) = \frac{U_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Consideriamo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{U_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Supponendo che  $G(s)$  non abbia poli in  $\pm j\omega_0$

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + \underbrace{\frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}}_{Y_f^U(s)}$$

con  $\tilde{K}_2$  complesso coniugato di  $\tilde{K}_1$

# Risposta in frequenza

- Regime permanente

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}$$

- Applicando il teorema dei residui

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 &= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) \frac{G(s) U_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) \frac{G(s) U_0 \omega_0}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{G(s) U_0 \omega_0}{s + j\omega_0} \\ &= \frac{G(j\omega_0) U_0 \omega_0}{2j\omega_0} = -\frac{j}{2} G(j\omega_0) U_0\end{aligned}$$

- In termini di parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1 = -\frac{j}{2} G(j\omega_0) U_0 &= -\frac{j}{2} [\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} + j\operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\}] U_0 \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} - j\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\}] U_0\end{aligned}$$



# Risposta in frequenza

- Regime permanente in Laplace

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}$$

- Regime permanente nel tempo

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0} \right\} \\ &= 2 \left[ \operatorname{Re}\{\tilde{K}_1\} \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}\{\tilde{K}_1\} \sin(\omega_0 t) \right] 1(t) \\ &= \left[ \operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t) \end{aligned}$$

Ingresso sinusoidale di  
frequenza  $\omega_0$  e ampiezza  $U_0$

$\Rightarrow$

Regime permanente combinazione lineare  
di seno e coseno di frequenza  $\omega_0$  e  
ampiezze  $\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0$  e  $\operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0$

# Teorema della risposta in frequenza

**Teorema 26 (teorema della risposta in frequenza).** Per un sistema LTI TC con funzione di trasferimento  $G(s)$  priva di poli sull'asse immaginario

- 1 Regime permanente in risposta a un ingresso a gradino  $u(t) = U_0 1(t)$

$$y_f^U(t) = G(0) U_0 1(t)$$

- 2 Regime permanente in risposta a un ingresso sinusoidale  $u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$

$$y_f^U(t) = \left[ \operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t)$$

- 3 Stabilità esterna  $\Rightarrow$  risposta forzata converge al regime permanente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$$

- 4 Stabilità asintotica  $\Rightarrow$  risposta complessiva converge al regime permanente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$$

# Osservazioni sul teorema della risposta in frequenza

- La funzione  $G(j\omega)$  è detta **risposta in frequenza** o **risposta armonica** (funzione complessa di variabile reale  $\omega$ )
- Il teorema della risposta in frequenza vale anche per sistemi con più ingressi e più uscite
- Il teorema della risposta in frequenza consente di calcolare il regime permanente in risposta a **segnali costanti o sinusoidali**
- Quando l'ingresso è una **cosinusoide** vale  $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)1(t)$

$$y_f^U(t) = \left[ \operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) \right] 1(t)$$

- Per il **principio di sovrapposizione degli effetti**, il teorema consente anche di determinare il regime permanente in risposta a
  - segnali ottenibili come **combinazione lineare** di un termine costante più sinusoidi e cosinusoidi anche di diversa frequenza
  - **segnali periodici** sviluppabili in serie di Fourier

## Esempio: teorema della risposta in frequenza

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

- Consideriamo un ingresso composto da gradino più senoide

$$u(t) = [3 + \sin(2t)]1(t)$$

- $G(s)$  non ha poli sull'asse immaginario  $\Rightarrow$  possiamo applicare il teorema della risposta in frequenza
- Per il principio di sovrapposizione degli effetti, regime permanente

$$y_f^U(t) = y_f^{U_1}(t) + y_f^{U_2}(t)$$

dove

- $y_f^{U_1}(t)$  regime permanente in risposta all'ingresso

$$u_1(t) = 3 \cdot 1(t)$$

- $y_f^{U_2}(t)$  regime permanente in risposta all'ingresso

$$u_2(t) = \sin(2t)1(t)$$

## Esempio: teorema della risposta in frequenza

- Per l'ingresso  $u_1(t) = 3 \cdot 1(t)$  abbiamo

$$y_f^{U_1}(t) = G(0) \cdot 3 \cdot 1(t)$$

con  $G(0) = 1/2$

- Per l'ingresso  $u_2(t) = \sin(2t) 1(t)$  con  $\omega_0 = 2$  e  $U_0 = 1$  abbiamo

$$y_f^{U_2}(t) = \left[ \operatorname{Re}\{G(j2)\} \sin(2t) + \operatorname{Im}\{G(j2)\} \cos(2t) \right] 1(t)$$

dove

$$\begin{aligned} G(j2) &= G(s)|_{s=j2} = \frac{1}{s^2 + s + 2} \Big|_{s=j2} = \frac{1}{j2 - 2} \\ &= \frac{1}{j2 - 2} \frac{j2 + 2}{j2 + 2} = \frac{j2 + 2}{-8} = -\frac{1}{4} - j\frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Complessivamente, regime permanente

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= [3G(0) + \operatorname{Re}\{G(j2)\} \sin(2t) + \operatorname{Im}\{G(j2)\} \cos(2t)] 1(t) \\ &= \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{4} \cos(2t) \right] 1(t) \end{aligned}$$

# Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

- Risposta in frequenza  $G(j\omega_0)$  fornisce **informazioni complete** sul comportamento asintotico di un sistema LTI asintoticamente stabile in risposta a un ingresso sinusoidale al variare di  $\omega_0$
- **Rappresentazioni grafiche** della risposta in frequenza utili per meglio comprendere il comportamento macroscopico del sistema
- Rappresentazioni grafiche tipiche: **Diagrammi di Nyquist, Diagrammi di Bode**
- **Diagramma di Nyquist**
  - grafico della parte immaginaria  $\text{Im}\{G(j\omega)\}$  (in ordinate) rispetto alla parte reale  $\text{Re}\{G(j\omega)\}$  (in ascisse)
  - descrive come si sposta nel piano complesso il numero complesso  $G(j\omega)$  al variare della frequenza  $\omega$

## Esempio: diagramma di Nyquist

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

- Risposta in frequenza

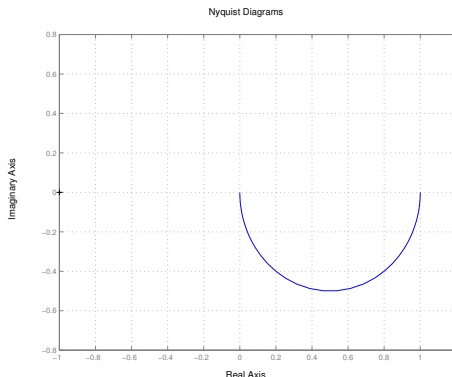
$$G(j\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 + 1} = \frac{1 - j\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

- In termini di parte reale e immaginaria

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} = \frac{1}{1 + \omega_0^2}$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

- Per il tracciamento Matlab  
`nyquist`, Python  
`control.nyquist_plot`



# Rappresentazione polare di un numero complesso

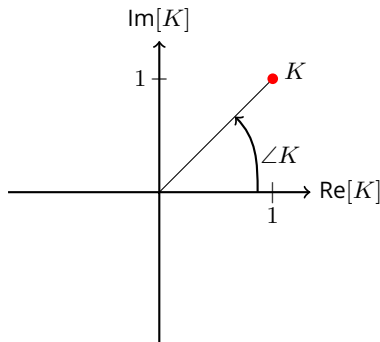
- Diagrammi di Bode si basano sulla **rappresentazione polare** dei numeri complessi
- Un numero complesso  $K = a + jb$  può essere espresso in coordinate polari come

$$\begin{aligned}K &= |K|e^{j\angle K} \\|K| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\\angle K &= \text{atan2}(b, a)\end{aligned}$$

con  $|K|$  **modulo** e  $\angle K$  **fase**

- Vale anche la relazione inversa

$$\text{Re}[K] = |K| \cos(\angle K) \quad \text{Im}[K] = |K| \sin(\angle K)$$





# Rappresentazione polare della risposta in frequenza

- Per un sistema SISO, regime permanente in risposta a un ingresso sinusoidale  
 $u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= \left[ \operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t) \\ &= U_0 |G(j\omega_0)| [\cos(\angle G(j\omega_0)) \sin(\omega_0 t) + \sin(\angle G(j\omega_0)) \cos(\omega_0 t)] 1(t) \end{aligned}$$

- Ricordando che  $\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$

$$y_f^U(t) = U_0 |G(j\omega_0)| \sin \left[ \omega_0 t + \angle G(j\omega_0) \right] 1(t)$$

- Un sistema LTI asintoticamente stabile opera come un **filtro**
  - Il sistema non altera la frequenza della sinusoide in ingresso
  - La sinusoide in ingresso viene **amplificata/attenuata** di un fattore  $|G(j\omega)|$
  - La sinusoide in ingresso viene **sfasata** di  $\angle G(j\omega)$

# Diagrammi di Bode

- I grafici di modulo  $|G(j\omega)|$  e fase  $\angle G(j\omega)$  in funzione della frequenza  $\omega$  sono detti **Diagrammi di Bode**
- **Diagramma di Bode del modulo**
  - in ascisse frequenza in scala logaritmica  $\log_{10}(\omega_0)$
  - in ordinate il modulo della risposta in frequenza in decibel  
 $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(|G(j\omega_0)|)$
- **Diagramma di Bode della fase**
  - in ascisse frequenza in scala logaritmica  $\log_{10}(\omega_0)$
  - in ordinate la fase della risposta in frequenza  $\angle G(j\omega_0)$  in gradi o radianti
- Dai diagrammi di Bode si può conoscere il comportamento macroscopico di un sistema LTI asintoticamente stabile in funzione della frequenza (ad esempio, passa-basso, passa-alto, passa-banda, ecc.)
- Diagrammi di Bode possono essere tracciati per via **sperimentale** (sollecitando il sistema con sinusoidi di diversa frequenza e osservando il comportamento a regime)

# Corrispondenza scala lineare/decibel

- Un'intensità  $K$  può essere espressa in decibel (dB)

$$K_{dB} = 20 \log_{10}(K)$$

- Corrispondenza tra scala lineare e decibel

Scala lineare	Scala in dB
1000	60
100	40
10	20
1	0
0.1	-20
0.01	-40
0.001	-60
0	$-\infty$

- Tipicamente si dice che una frequenza  $\omega$  viene "tagliata" quando

$$|G(j\omega)|_{dB} < -3 \text{ dB}$$

corrispondente a circa  $\sqrt{2}/2$  in scala lineare

## Esempio: diagrammi di Bode

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

- Risposta in frequenza

$$G(j\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 + 1} = \frac{1 - j\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

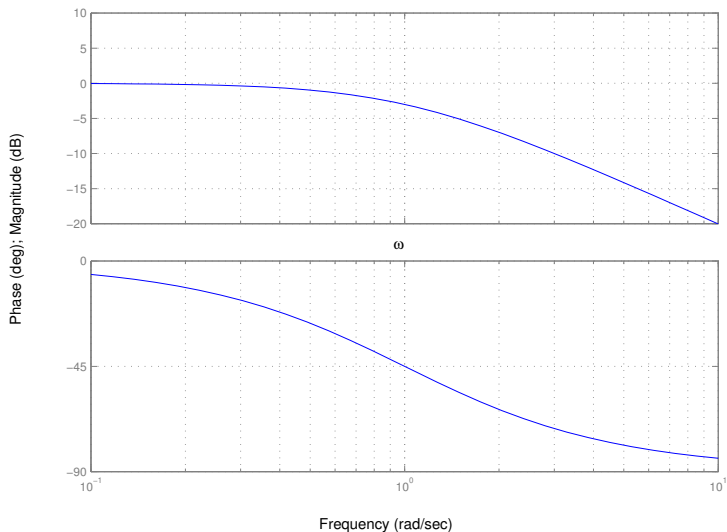
- In termini di modulo e fase

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\text{atan}(\omega_0)$$

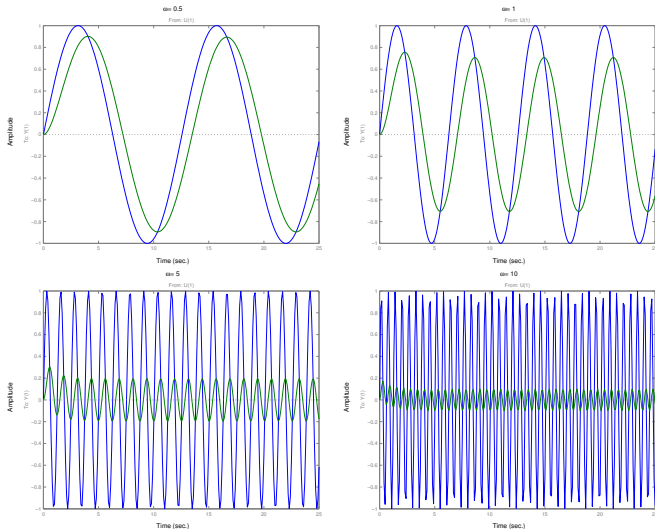
- Per il tracciamento Matlab `bode`, Python `control.bode_plot`
- Sistema si comporta come un **filtro passa-basso**
  - alle basse frequenze  $|G(j\omega)| \approx 1$
  - alle alte frequenze  $|G(j\omega)| \approx 0$

# Esempio: diagrammi di Bode

Bode Diagrams



# Esempio: diagrammi di Bode



Risposta forzata di un sistema con  $G(s) = 1/(s+1)$  a sinusoidi di diversa frequenza (0.5, 1, 5 e 10 rispettivamente). In blu l'ingresso, in rosso la risposta forzata