

Nel caso in cui il sistema di controllo non possa accedere a tutto lo stato del sistema ma abbia, invece, un'informazione parziale, il progetto del sistema di controllo diventa più complesso. In questo contesto, infatti, diventa importante studiare quanto l'informazione a disposizione, corrispondente al vettore informativo $w(t)$, sia effettivamente rappresentativa della configurazione interna del sistema da controllare. Nel seguito, considereremo il caso in cui l'unica informazione di feedback disponibile al controllore sia l'uscita $w(t) = y(t)$, corrispondente al cosiddetto **controllo in retroazione sull'uscita**.

3.6 Osservabilità, controllabilità e autovalori nascosti

Prima di studiare il controllo in retroazione sull'uscita, è opportuno introdurre il concetto di **osservabilità** che consente di definire, in modo formale, quanto l'uscita di un sistema dinamico sia effettivamente rappresentativa della sua configurazione interna.

Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Come visto, nel dominio di Laplace, la soluzione del sistema assume la forma

$$\begin{aligned}X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{X_f(s)} \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}BU(s)}_{Y_f(s)}\end{aligned}$$

Notiamo che:

- l'evoluzione libera dello stato $X_\ell(s)$ dipende dalla matrice $(sI - A)^{-1}$
- l'evoluzione forzata dello stato $X_f(s)$ dipende dalla matrice $(sI - A)^{-1}B$
- la risposta libera $Y_\ell(s)$ dipende dalla matrice $C(sI - A)^{-1}$
- la risposta forzata $Y_f(s)$ dipende dalla funzione di trasferimento $C(sI - A)^{-1}B$

Sappiamo che la matrice $(sI - A)^{-1}$ ha come poli tutti e soli gli autovalori del sistema (eventualmente con molteplicità ridotta), radici del polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

Abbiamo visto nello studio della controllabilità, che la moltiplicazione per B può comportare in generale la cancellazione di alcuni autovalori che non compaiono come poli di $(sI - A)^{-1}B$. I poli di $(sI - A)^{-1}B$ sono infatti tutti e soli gli autovalori controllabili del sistema, radici del polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$. Gli autovalori che invece si cancellano e non compaiono come poli di $(sI - A)^{-1}B$ sono quelli non controllabili. Per un sistema singolo ingresso $\dim(u) = 1$, il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ si calcola proprio come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1}B$, mentre il polinomio della parte non controllabile del sistema si calcola come

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$$

Nella matrice $C(sI - A)^{-1}$ che governa la risposta libera del sistema, la moltiplicazione per C può dare luogo ad analoghe cancellazioni. In generale, quindi la matrice $C(sI - A)^{-1}$ avrà come poli un sottoinsieme degli autovalori del sistema.

Definizione: un autovalore λ_i della matrice A si dice

- **osservabile** se compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ e quindi si vede nella risposta libera

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

- **non osservabile** se non compare come polo di $C(sI - A)^{-1}$ (in quanto si cancella nel prodotto per C) e quindi non si vede nella risposta libera $Y_\ell(s)$

Se tutti gli autovalori sono osservabili, il sistema si dice **completamente osservabile**.

In analogia a quanto fatto relativamente alle proprietà di controllabilità del sistema, possiamo quindi fattorizzare il polinomio caratteristico rispetto alle proprietà di osservabilità come

$$\varphi(s) = \varphi_o(s) \varphi_{no}(s)$$

con $\varphi_o(s)$ **polinomio caratteristico di osservazione** avente come radici tutti e soli gli autovalori osservabili e

$$\varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)}$$

polinomio avente come radici tutti e soli gli autovalori non osservabili. Per sistemi singola uscita $\dim(y) = 1$, il polinomio caratteristico di osservazione $\varphi_o(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $C(sI - A)^{-1}$. Per sistemi con più uscite $\dim(y) > 1$, invece dei denominatori degli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ dobbiamo invece considerare i denominatori dei determinanti delle sottomatrici quadrate di $C(sI - A)^{-1}$.

Esempio 3.8 Consideriamo il sistema LTI TC con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Tale sistema ha polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)$$

e autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Poiché tali autovalori hanno molteplicità unitaria in $\varphi(s)$, allora avranno molteplicità unitaria anche nel polinomio minimo $m(s)$. Di conseguenza l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ evolve secondo i modi naturali e^t ed e^{-t} .

Per studiare le proprietà di osservabilità del sistema, dobbiamo determinare la matrice $C(sI - A)^{-1}$. Per prima cosa calcoliamo la matrice inversa

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)} \text{Adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \text{Adj} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$C(sI - A)^{-1} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché al denominatore ho solo il termine $s-1$, il polinomio caratteristico di osservazione risulta quindi essere

$$\varphi_o(s) = s-1$$

mentre il polinomio degli autovalori non osservabili è

$$\varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)} = s+1$$

Possiamo quindi concludere che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore osservabile mentre $\lambda_2 = -1$ è un autovalore non osservabile. Il sistema quindi non è completamente osservabile. Per concludere notiamo che la risposta libera del sistema nel dominio di Laplace assume la forma

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}x_1(0)$$

e di conseguenza

$$y_\ell(t) = x_1(0) e^t 1(t)$$

Nell'esempio precedente, la risposta libera evolve secondo il modo naturale e^t associato all'autovalore osservabile $\lambda_1 = 1$. Al contrario, il modo naturale e^{-t} associato all'autovalore non osservabile $\lambda_2 = -1$ non compare nella risposta libera. Questo risultato ha carattere generale: in un sistema LTI la **risposta libera** $y_\ell(t)$ evolve secondo i soli **modi naturali associati agli autovalori osservabili**. Questo vuol dire che l'uscita y in generale fornisce informazioni solo sulla parte osservabile del sistema, mentre non fornisce alcuna informazione sulla parte non osservabile che non compare nell'evoluzione dell'uscita (anche se internamente è presente).

Nota: Analogamente a quanto visto per la controllabilità, sarebbe possibile introdurre una decomposizione del sistema in un sottosistema osservabile e un sottosistema non osservabile (decomposizione di osservabilità). Inoltre, anche l'osservabilità, come la controllabilità/raggiungibilità, può essere studiata mediante un'opportuna matrice detta **matrice di osservabilità** del sistema

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

con $n = \dim(x)$. Si dimostra infatti che il sistema è completamente osservabile se e solo se la matrice di osservabilità \mathcal{O} ha rango pieno, cioè $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.

Consideriamo ora la risposta forzata

$$Y_f(s) = C(sI - A)^{-1} B U(s)$$

e in particolare la funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

Come abbiamo visti, i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (cioè i poli del sistema) sono un sottoinsieme degli autovalori del sistema. In particolare, i poli di $G(s)$ sono quegli autovalori del sistema che non si cancellano né nella pre-moltiplicazione per C né nella post-moltiplicazione per B . Ricordando che gli autovalori che non si cancellano nella pre-moltiplicazione per C sono quelli osservabili e gli autovalori che non si cancellano nella post-moltiplicazione per B sono quelli controllabili, allora possiamo enunciare il seguente risultato.

Fatto 3.7 Per un sistema LTI, i poli del sistema sono tutti e soli gli autovalori che sono sia controllabili sia osservabili.

Dal punto di vista insiemistico, il precedente enunciato può essere riscritto nella forma (Figura 1)

$$\{\text{Poli del sistema}\} = \{\text{Autovalori controllabili}\} \cap \{\text{Autovalori osservabili}\}$$

Questo risultato vale per qualunque sistema LTI, indipendentemente dal numero di ingressi e di uscite.

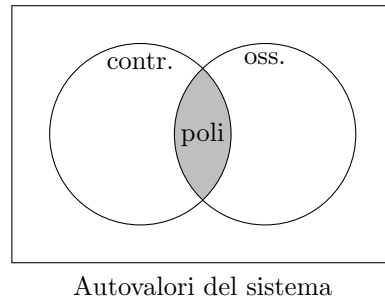


Figura 1: Relazione tra autovalori controllabili, osservabili e poli del sistema.

Gli autovalori non controllabili e/o non osservabili non compaiono quindi come poli della $G(s)$ e corrispondono ai cosiddetti **autovalori nascosti** I corrispondenti modi di evoluzione (modi nascosti) non si vedono nella risposta forzata $y_f(t)$. Dal punto di vista insiemistico, vale quindi la relazione

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{nascosti} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non controllabili} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{Autovalori} \\ \text{non osservabili} \end{array} \right\}$$

Ricordiamo che per sistemi SISO $\dim(u) = \dim(y) = 1$ la funzione di trasferimento è del tipo

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi primi tra loro. I poli del sistema sono quindi le radici di $a(s)$. Gli autovalori nascosti saranno invece le radici del polinomio

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

dove il pedice h sta per *hidden* (nascosto). In termini di poli e autovalori nascosti, il polinomio caratteristico ammette quindi la fattorizzazione

$$\varphi(s) = a(s) \varphi_h(s)$$

Esempio 3.8 (continua) Consideriamo nuovamente il sistema LTI TC dell'esempio. Come abbiamo visto per questo sistema

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= (s-1)(s+1) \\ \varphi_o(s) &= (s-1) \end{aligned}$$

L'autovalore $\lambda_1 = 1$ risulta quindi essere osservabile mentre $\lambda_2 = -1$ è non osservabile.

Per studiare la controllabilità consideriamo la funzione di trasferimento tra ingresso e stato

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s}{(s-1)(s+1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Poiché non ci sono cancellazioni, il polinomio caratteristico di controllo è

$$\varphi_c(s) = (s-1)(s+1)$$

e di conseguenza il sistema è completamente controllabile.

Per concludere l'analisi consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$$

La funzione di trasferimento ha un solo polo in $p_1 = 1$ coincidente con l'unico autovalore controllabile e osservabile. L'altro autovalore $\lambda_2 = -1$, seppur controllabile, è nascosto perché non osservabile. In questo caso naturalmente, $a(s) = s-1$ e $\varphi_h(s) = s+1$.

3.7 Retroazione algebrica sull'uscita

Nel controllo in retroazione sull'uscita, in generale, la legge di controllo u è una funzione dell'uscita y e del riferimento y° . In analogia con quanto visto per il controllo in retroazione sullo stato, in prima istanza consideriamo anche per il controllo in retroazione sull'uscita il caso di una legge di controllo che dipende linearmente da y e y°

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -K y(t) + H y^\circ(t)$$

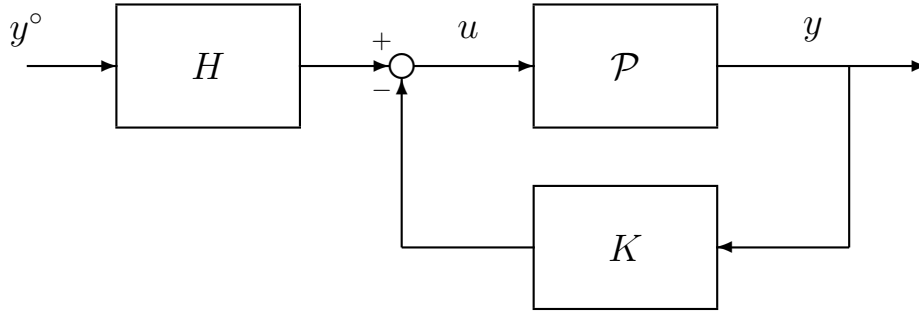


Figura 2: Sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita

Questa legge di controllo, nota come **retroazione algebrica sull'uscita** costituisce la scelta più semplice possibile per una retroazione sull'uscita. Il corrispondente schema di controllo è rappresentato in Figura 2.

Notiamo che la legge di controllo si compone di due termini.

- **Controllo in feedback:** $-Ky(t)$ dipendente dal **guadagno in feedback** (retroazione) K . In generale K è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$. Nel caso particolare di sistemi SISO K è uno scalare
- **Controllo in feedforward:** $H y^\circ(t)$ dipendente dal **guadagno in feedforward** H . In generale H è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$ in quanto $\dim(y^\circ) = \dim(y)$. Nel caso particolare di sistemi SISO H è uno scalare.

I due guadagni K e H rappresentano i parametri di progetto del sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita, da scegliere in modo da soddisfare le specifiche di controllo. Per sistemi SISO, i due guadagni K e H sono parametri scalari. Da questo si capisce subito come nel progetto di un controllore in retroazione algebrica sull'uscita si abbiano molti meno parametri di progetto rispetto al caso di retroazione algebrica sullo stato (ricordiamo che nel caso di sistemi SISO F era un vettore riga di dimensione pari a quella dello stato). Come vedremo questo comporta inevitabilmente limitazioni a quello che si riesce fare con questo tipo di legge di controllo. Infatti la retroazione algebrica sull'uscita può essere vista come una particolare retroazione algebrica sullo stato

$$\begin{aligned} u(t) &= -K y(t) + H y^\circ(t) \\ &= -\underbrace{K C}_F x(t) + H y^\circ(t) \end{aligned}$$

in cui quindi la matrice F ha una forma prefissata $F = K C$ dipendente da K .

Combinando le equazioni di stato dell'impianto \mathcal{P} con la legge di controllo \mathcal{C} possiamo immediatamente ottenere le equazioni di stato del sistema in ciclo chiuso risultante. In particolare sostituendo la legge di controllo nell'equazione dell'impianto si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ &= A x(t) + B [-K y(t) + H y^\circ(t)] = (A - B K C) x(t) + B H y^\circ(t) \end{aligned}$$

Il sistema in ciclo chiuso assume quindi la forma

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - B K C$ e $B^* = B H$.

Notiamo che, come atteso, il sistema in ciclo chiuso è un sistema LTI TC con ingresso $y^\circ(t)$ e uscita $y(t)$ (Figura 3). Notiamo anche che il guadagno in feedback K modifica la matrice della dinamica che diventa $A - B K C$. Possiamo quindi pensare di utilizzare il guadagno K per modificare il comportamento dinamico e in particolare le proprietà di stabilità del sistema. Il **polinomio caratteristico in ciclo chiuso** risulta infatti essere

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + B K C)$$

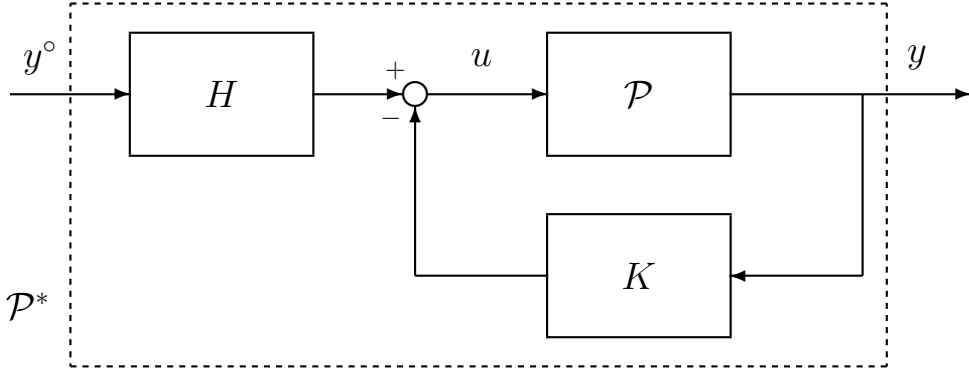


Figura 3: Sistema in ciclo chiuso risultante dall'applicazione di una retroazione algebrica sull'uscita.

mentre la **funzione di trasferimento in ciclo chiuso** è

$$G_{y^o y}^*(s) = C(sI - A^*)^{-1}B^* = C(sI - A + B K C)^{-1} B H$$

Nel caso di sistemi SISO, la funzione di trasferimento e il polinomio caratteristico in ciclo chiuso possono essere scritti in una forma più semplice. A tal fine, consideriamo le equazioni del processo \mathcal{P} e del controllore \mathcal{C} nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad Y(s) &= G(s) U(s) \\ \mathcal{C} : \quad U(s) &= -K Y(s) + H Y^o(s) \end{aligned}$$

Notiamo che per quanto riguarda il processo \mathcal{P} , abbiamo considerato una condizione iniziale nulla $x(0) = 0$ e quindi posto $Y(s) = Y_f(s)$ (si può fare perché la funzione di trasferimento riguarda la sola risposta forzata). Combinando le equazioni di \mathcal{P} e \mathcal{C} , otteniamo

$$Y(s) = -K G(s) Y(s) + G(s) H Y^o(s)$$

e risolvendo rispetto a $Y(s)$ abbiamo

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + K G(s)} H Y^o(s)$$

da cui si ricava la seguente espressione per la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{G(s)}{1 + K G(s)} H$$

Ricordando che $G(s) = b(s)/a(s)$ allora la funzione di trasferimento in ciclo chiuso può anche essere scritta in termini dei polinomi $a(s)$ e $b(s)$

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{G(s)}{1 + K G(s)} H = \frac{b(s)/a(s)}{1 + K b(s)/a(s)} H = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H$$

Da questa espressione possiamo osservare come il guadagno in feedback K vada a modificare i poli del sistema che in anello aperto corrispondono alle radici del polinomio $a(s)$ mentre in ciclo chiuso diventano le radici del polinomio

$$a^*(s) = a(s) + K b(s)$$

Notiamo che la retroazione algebrica sull'uscita modifica i poli della funzione di trasferimento ma non gli zeri.

Ricordiamo ora che il polinomio caratteristico del sistema può essere fattorizzato come

$$\varphi(s) = \varphi_h(s) a(s)$$

con $\varphi_h(s)$ polinomio avente come radici gli autovalori nascosti (autovalori non controllabili e/o osservabili). La retroazione algebrica sull'uscita agisce sulla relazione ingresso-uscita modificando i poli del sistema che vengono assegnati in corrispondenza delle radici di $a^*(s)$, ma non agisce sugli autovalori nascosti, radici di $\varphi_h(s)$, che non vengono modificati. Infatti tali autovalori, per effetto delle cancellazioni, non si vedono nella relazione ingresso-uscita del sistema. In particolare, vale il seguente risultato.

Fatto 3.8 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita $u = -Ky + Hy^\circ$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s) a^*(s) = \varphi_h(s) [a(s) + K b(s)]$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{G(s)}{1 + K G(s)} H = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H$$

Alla luce di questo risultato, possiamo immediatamente osservare che **condizione necessaria** affinché esista un controllore in retroazione algebrica sull'uscita stabilizzante è che gli autovalori nascosti del sistema (non controllabili e/o non osservabili), radici di $\varphi_h(s)$, abbiano tutti $\text{Re} < 0$. Se così non fosse, infatti, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s) = \varphi_h(s) a^*(s)$ avrebbe sempre almeno una radice con $\text{Re} \geq 0$. Introduciamo quindi la seguente definizione.

Definizione: un problema di controllo in retroazione sull'uscita si dice **ben posto** quando $\varphi_h(s)$ ha tutte radici con $\text{Re} < 0$.

È importante sottolineare che la buona posizione del problema di controllo è condizione necessaria per l'esistenza di un guadagno K stabilizzante ma in generale **non** sufficiente. Poiché infatti nel progetto del polinomio $a^*(s) = a(s) + K b(s)$ che determina la posizione dei poli in ciclo chiuso abbiamo solo un parametro scalare K a disposizione, i poli in ciclo chiuso non possono essere scelti liberamente, ma ci sono delle limitazioni a quello che si riesce a fare. Vediamo due esempi per chiarire tali limitazioni.

Esempio 3.9 Consideriamo nuovamente il problema del controllo di posizione del carrello. In questo caso l'obiettivo è portare il carrello in una posizione desiderata Y_0 tramite il controllo u misurando solo la posizione y . Si tratta quindi di un problema di inseguimento di un riferimento costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

Supponiamo di applicare una legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita

$$u = -K y + H y^\circ$$

Abbiamo già visto che per questo semplice sistema meccanico il polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s(s + 1)$$

mentre la funzione di trasferimento risulta essere

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s + 1)}$$

e quindi $a(s) = s(s + 1)$ e $b(s) = 1$. Poiché $a(s) = \varphi(s)$ non ci sono autovalori nascosti $\varphi_h(s) = 1$ (sistema completamente controllabile e completamente osservabile) e quindi il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto.

Applicando la retroazione sull'uscita, la funzione di trasferimento in ciclo chiuso assume la forma

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H = \frac{1}{s^2 + s + K} H$$

e il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta quindi essere

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s) [a(s) + K b(s)] = s^2 + s + K$$

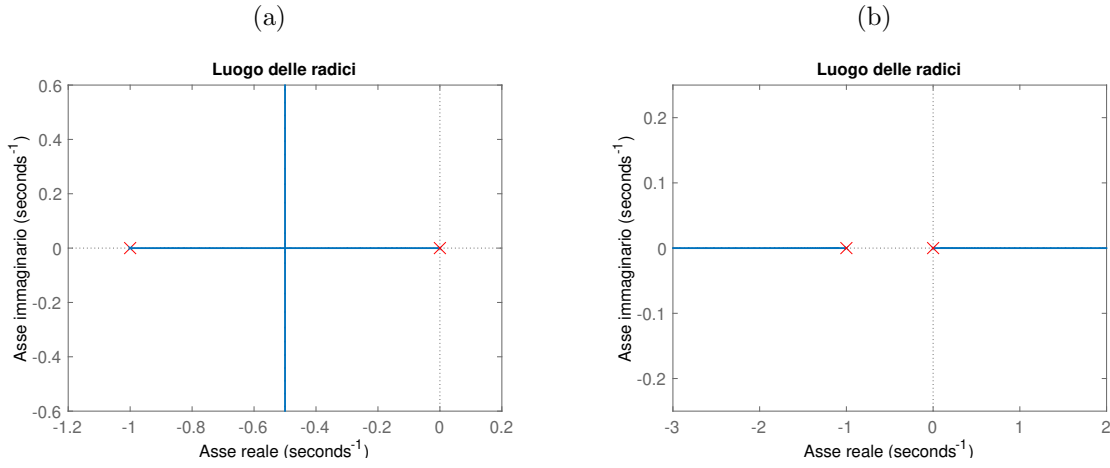


Figura 4: Applicazione della retroazione algebrica sull'uscita al controllo di posizione – posizione dei poli in ciclo chiuso al variare di $K < 0$ (sinistra) e $K > 0$ (destra). Per $K < 0$ si hanno due poli reali di cui uno a parte reale > 0 . Per $0 < K \leq 1/4$ si hanno due poli reali entrambi con parti reale < 0 . Infine per $K > 1/4$ si ha una coppia di poli complessi coniugati.

Per soddisfare la specifica 1 (stabilità asintotica in ciclo chiuso) possiamo applicare il criterio di Cartesio e scegliere il guadagno K in modo tale che tutti i coefficienti di $\varphi^*(s)$ abbiano lo stesso segno. Il sistema in ciclo chiuso risulta quindi asintoticamente stabile per tutti i $K > 0$.

Notiamo che, nonostante il sistema sia completamente controllabile e completamente osservabile, non è comunque possibile assegnare a piacere il polinomio caratteristico in ciclo chiuso avendo a disposizione il solo parametro K . In particolare, al variare di K i poli in ciclo chiuso

$$p_{1,2}^* = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

non posso essere assegnati liberamente ma seguono un percorso prestabilito sul piano complesso (figura 4). Ricordando che i poli in ciclo chiuso determinano il comportamento nel transitorio, questo vuol dire che non possiamo assegnare al transitorio l'andamento che desideriamo (come invece si poteva fare con la retroazione algebrica sullo stato nel caso di sistema completamente controllabile).

Esempio 3.10 Consideriamo ora un sistema LTI con funzione di trasferimento¹

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

e quindi $a(s) = s^2 - 1$ e $b(s) = 1$. Supponiamo che non ci siano autovalori nascosti, ossia $\varphi_h(s) = 1$. Anche in questo caso quindi il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto.

Applicando un controllo in retroazione algebrica sull'uscita, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s) [a(s) + K b(s)] = s^2 - 1 + K$$

Poiché il coefficiente del termine di grado 1 è sempre pari a 0 per ogni K , allora per la regola di Cartesio non è possibile scegliere K in modo da rendere tutte le radici con parte reale < 0 . Quindi non esiste nessun guadagno K stabilizzante. Infatti, i poli in ciclo chiuso risultano essere

$$p_{1,2}^* = \pm \sqrt{1-K}$$

e come si vede dalla Figura 5, per ogni K si ha sempre almeno un polo con $\text{Re} \geq 0$.

Questo sistema **non** può quindi essere stabilizzato mediante retroazione algebrica sull'uscita nonostante il problema di controllo sia ben posto. Questo non vuol dire che il sistema non possa essere controllato, ma piuttosto che dobbiamo considerare strutture di controllo più generali, come vedremo nel seguito.

Nota: Come visto negli esempi, nel controllo in retroazione algebrica sull'uscita i poli in ciclo chiuso corrispondenti alle radici di $a^*(s) = a(s) + K b(s)$ seguono percorsi prestabiliti nel piano complesso al

¹Quando il processo \mathcal{P} viene dato in termini di funzione di trasferimento $G(s)$ si intende implicitamente che non ci sono autovalori nascosti $\varphi_h(s) = 1$ e quindi che $\varphi(s) = a(s)$.

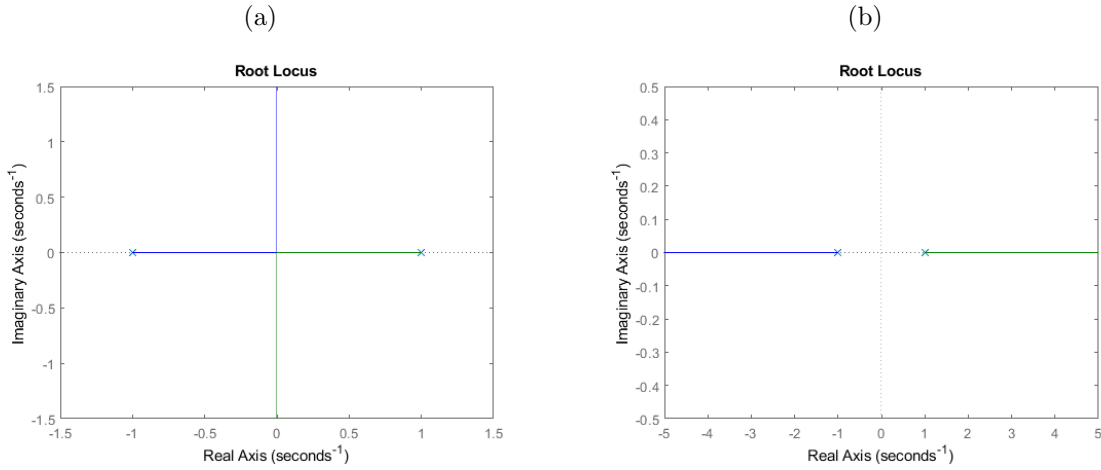


Figura 5: Esempio 3.10 – posizione dei poli in ciclo chiuso al variare di $K > 0$ (sinistra) e $K < 0$ (destra). Per $K < 1$ si hanno due poli reali di cui uno a parte reale > 0 . Per $K > 1$ si ha una coppia di poli complessi coniugati. In tutti i casi, il sistema in ciclo chiuso non è asintoticamente stabile a causa della presenza di almeno un polo con $\text{Re} \geq 0$.

variare del guadagno K . Il grafico che descrive come si spostano nel piano complessi i poli in ciclo chiuso al variare del guadagno in feedback K è detto **luogo delle radici**. Di solito sono riportati due grafici: uno per $K > 0$ e l'altro per $K < 0$. Le Figure 4 e 5 riportano esempi di luoghi delle radici. Esistono regole per il tracciamento a mano del luogo delle radici, per cui si rimanda a testi più approfonditi sui Controlli Automatici, o in alternativa il tracciamento può essere fatto in MATLAB con la funzione `rlocus` o in Python con la funzione `control.root_locus`.

Progetto della retroazione algebrica sull'uscita

Ricordiamo in generale gli obiettivi da perseguire nel progetto di un sistema di controllo sono usualmente espressi in termini di specifiche di controllo, tra cui quelle fondamentali sono:

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G_{y \circ y}^*(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

Il progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita consiste quindi nei seguenti passi.

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$ e si verifica che tale polinomio sia asintoticamente stabile (ossia che non ci siano autovalori nascosti instabili). In caso contrario il progetto fallisce perché il problema di controllo non è ben posto.
2. Si sceglie il guadagno in feedback K in modo tale che
 - tutti gli autovalori in ciclo chiuso (radici di $\varphi^*(s)$) abbiano $\text{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1);
 - i poli in ciclo chiuso siano posizionati in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifico 3).

Se la specifica 1 non può essere soddisfatta perché non esiste nessun guadagno K stabilizzante il progetto fallisce-

3. Si sceglie il guadagno in feedforward H in modo tale che $G_{y \circ y}^*(0) = 1$ ponendo

$$H = \frac{a^*(0)}{b(0)} = \frac{a(0) + Kb(0)}{b(0)}$$

in modo da avere inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifico 2).

Se il progetto fallisce al passo 1 il problema di controllo **non** è ben posto perché ci sono autovalori nascosti (non controllabili e/o non osservabili) con $\text{Re} \geq 0$. In questo caso dobbiamo fare un passo indietro e **modificare** B e/o C per garantire che gli autovalori a $\text{Re} \geq 0$ non siano nascosti. In particolare, se ci sono autovalori non controllabili con $\text{Re} \geq 0$ dobbiamo modificare B (ossia cambiare/aggiungere variabili di controllo). Se ci sono invece autovalori non osservabili con $\text{Re} \geq 0$, allora dobbiamo modificare C (ossia cambiare/aggiungere sensori).

Se invece il progetto fallisce al passo 2, vuol dire che la retroazione statica sull'uscita non è sufficientemente potente per stabilizzare. In questo caso, dobbiamo considerare leggi di controllo più generali (**retroazione dinamica sull'uscita o regolatore**).

Nel passo 2 del progetto, per scegliere K possiamo usare i criteri algebrici (Cartesio, tabella di Routh) per studiare cosa succede alle radici di $\varphi^*(s)$ al variare di K . In alternativa, possiamo anche tracciare il luogo delle radici e, se possibile, fissare K in modo che i poli in ciclo chiuso garantiscano un transitorio soddisfacente.

Infine, per quanto riguarda il passo 3 del progetto, notiamo che la specifica 2 può essere soddisfatta se e solo se $b(0) \neq 0$. Tale condizione non dipende dal tipo di sistema di controllo considerato né dalla scelta dei guadagni, ma è semplicemente la condizione necessaria affinché il problema dell'inseguimento con controllo in retroazione sull'uscita sia ben posto. Quando tale condizione non è verificata significa che per il sistema considerato non è possibile mantenere stabilmente l'uscita ad un valore costante con la variabile di controllo u a disposizione. In questi casi, occorre fare un passo indietro nel progetto del sistema di controllo modificare B e/o C in modo da modificare $b(s)$.

Vediamo ora un esempio di progetto.

Esempio 3.11 Consideriamo un sistema LTI con rappresentazione ingresso-uscita

$$y^{(3)} = \dot{y} + \ddot{u} + 2\dot{u} + u$$

Si tratta di un sistema di ordine $n = 3$

$$y^{(3)} = \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y + \beta_3 u^{(3)} + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$$

con $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_0 = 0$, $\beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_0 = 1$. Il polinomio caratteristico risulta quindi essere

$$\begin{aligned} \varphi(s) = s^3 - \alpha_2 s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 &= s^3 - s \\ &= s(s-1)(s+1) \end{aligned}$$

e la funzione di trasferimento è

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{\beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 - \alpha_2 s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} &= \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 - s} \\ &= \frac{(s+1)^2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{s+1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

e quindi $a(s) = s^2 - 1$ e $b(s) = s + 1$. Il polinomio degli autovalori nascosti è quindi

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)} = s + 1$$

Poiché $\varphi_h(s)$ ha tutte radici con $\text{Re} < 0$, il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto. Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) = \varphi_h(s) [a(s) + K b(s)] &= (s+1)[s(s-1) + K(s+1)] \\ &= (s+1)[s^2 + (K-1)s + K] \end{aligned}$$

Applicando la regola di Cartesio, il sistema in ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile per tutti i $K > 1$ (in modo che tutti i coefficienti del polinomio tra parentesi quadre abbiano segno concorde). In Figura 6, è riportato il luogo delle radici per il polinomio $a^*(s) = s^2 + (K-1)s + K$ al variare di K . Se, ad esempio prendiamo, $K = 6$ e quindi

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) = (s+1)[s^2 + (K-1)s + K] &= (s+1)[s^2 + 5s + 6] \\ &= (s+1)(s+2)(s+3) \end{aligned}$$

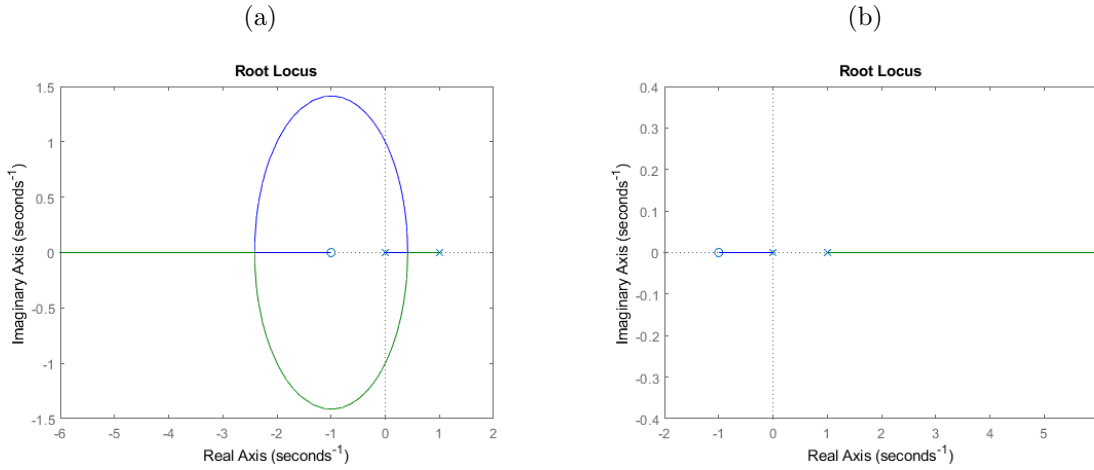


Figura 6: Esempio 3.11 – posizione dei poli in ciclo chiuso al variare di $K > 0$ (sinistra) e $K < 0$ (destra). Il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile quando $K > 1$.

Notiamo che gli autovalori originali del sistema erano $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$. L'autovalore $\lambda_1 = -1$ è nascosto e quindi non si modifica con il controllo in retroazione sull'uscita. Gli altri due autovalori diventano invece $\lambda_2^* = -2$ e $\lambda_3^* = -3$.

Per concludere il progetto, scegliamo il guadagno in feedforward in modo da garantire che il guadagno in continua in ciclo chiuso sia unitario

$$H = \frac{a(0) + K b(0)}{b(0)} = K = 6$$

Questa scelte corrispondono a una legge di controllo del tipo

$$u = -K y + H y^\circ = -6 y + 6 y^\circ = 6(y^\circ - y)$$

proporzionale all'errore di inseguimento $y^\circ - y$. La funzione di trasferimento in ciclo chiuso risultante è

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{b(s)}{a(s) + K b(s)} H = \frac{s+1}{s^2 + (K-1)s + K} H = \frac{6(s+1)}{s^2 + 5s + 6}$$

3.8 Retroazione dinamica sull'uscita

Come visto nell'esempio 3.10, anche quando il problema di controllo è ben posto, una legge di controllo in retroazione algebrica sull'uscita $u = -K y + H y^\circ$ non è sempre sufficiente per garantire stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1). Inoltre, anche quando si riesce a soddisfare la specifica 1, non sempre si riesce a garantire un transitorio soddisfacente (specifica 3). Infatti, avendo a disposizione il solo K (parametro scalare nel caso SISO) non è possibile assegnare liberamente i poli in ciclo chiuso. In generale, occorre quindi considerare leggi di controllo più generali in cui il controllore \mathcal{C} è un **sistema dinamico**.

Una legge di controllo in **retroazione dinamica sull'uscita** può essere rappresentata nel dominio di Laplace dall'equazione

$$\mathcal{C}: U(s) = -K(s)Y(s) + H(s)Y^\circ(s)$$

Il corrispondente sistema di Controllo è rappresentato in Figura 7.

Notiamo che la legge di controllo si compone di due termini.

- **Controllo in feedback:** $-K(s)Y(s)$ dipendente dal **guadagno in feedback** (retroazione) $K(s)$. Nel caso SISO $K(s)$ è una **funzione di trasferimento propria** (grado numeratore \leq grado denominatore). Nel caso di sistemi con più ingressi e più uscite $K(s)$ è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$ di funzioni razionali proprie in s .
- **Controllo in feedforward:** $H(s)Y^\circ(s)$ dipendente dal **guadagno in feedforward** $H(s)$. Nel caso SISO $H(s)$ è una **funzione di trasferimento propria** (grado numeratore \leq grado denominatore).

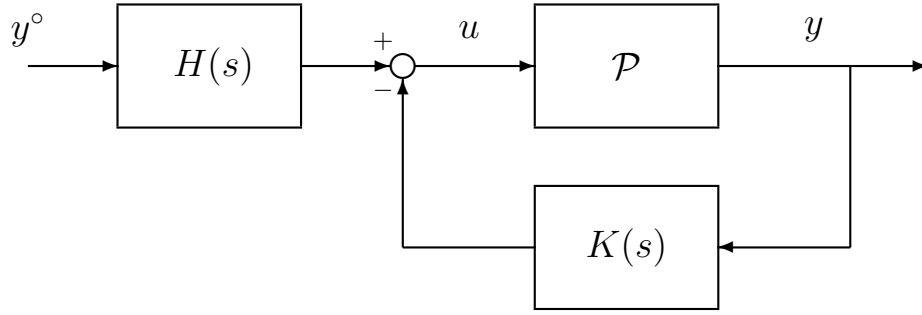


Figura 7: Sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita.

Nel caso di sistemi con più ingressi e più uscite $H(s)$ è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$ di funzioni razionali proprie in s .

I due guadagni $K(s)$ e $H(s)$ rappresentano i parametri di progetto del sistema di controllo in retroazione algebrica sull'uscita, da scegliere in modo da soddisfare le specifiche di controllo. Notiamo che nel caso di retroazione algebrica sull'uscita dovevamo progettare quantità costanti K e H , mentre nel caso di retroazione dinamica sull'uscita dobbiamo progettare funzioni di trasferimento $K(s)$ e $H(s)$. Si può quindi facilmente intuire come la retroazione dinamica consenta molta più libertà nel progetto del sistema di controllo. L'interpretazione che dobbiamo dare a una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita è che il controllore \mathcal{C} corrisponde a un sistema dinamico LTI TC con ingressi $y^\circ(t)$ e $y(t)$ e uscita $u(t)$ avente funzione di trasferimento $[-K(s) H(s)]$

$$U(s) = [-K(s) H(s)] \begin{bmatrix} Y(s) \\ Y^\circ(s) \end{bmatrix}$$

Nel controllo in retroazione dinamica sull'uscita, il guadagno in feedforward viene tipicamente scelto nella forma

$$H(s) = K(s) H_f(s)$$

con $H_f(s)$ funzione di trasferimento propria e stabile (tutti i poli a $\text{Re} < 0$) detta **prefiltro**. Il prefiltro deve essere stabile perché si trova fuori dall'anello di retroazione (figura 8). Con questa assegnazione, la legge di controllo risulta quindi essere

$$\begin{aligned} U(s) &= -K(s) Y(s) + K(s) H_f(s) Y^\circ(s) \\ &= K(s) [H_f(s) Y^\circ(s) - Y(s)] \end{aligned}$$

Si possono distinguere i seguente due casi:

1. **Controllo a 1 grado di libertà** $H_f(s) = 1$: in questo caso $H(s) = H_f(s)K(s) = K(s)$ e quindi l'azione di controllo

$$U(s) = K(s) [Y^\circ(s) - Y(s)]$$

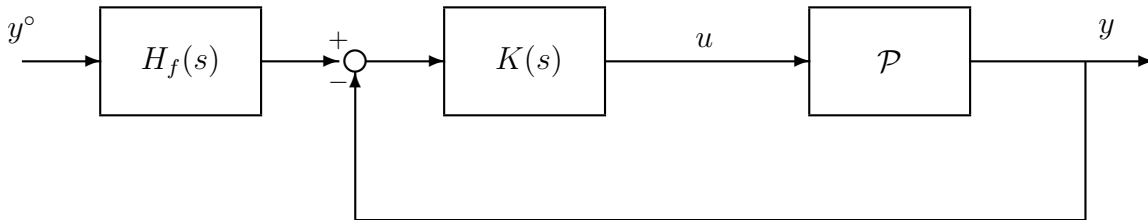


Figura 8: Sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita con prefiltro.

è funzione del solo **errore di inseguimento** $y^\circ(t) - y(t)$. Si parla di controllo a 1 grado di libertà in quanto l'unico parametro di progetto è il guadagno in feedback $K(s)$.

2. **Controllo a 2 grado di libertà** $H_f(s) \neq 1$: in questo caso $H(s) = H_f(s)K(s) \neq K(s)$ e quindi l'azione di controllo dipende separatamente da $y(t)$ e $y^\circ(t)$.

Nel seguito concentreremo l'attenzione sul caso SISO considerando un controllo a 3 gradi di libertà supponendo, per semplicità, che il prefiltro sia un **guadagno costante** $H_f(s) = H_f$. Vedremo che questa scelta non introduce particolari limitazioni nel progetto del sistema di controllo.

Per calcolare la funzione di trasferimento in ciclo chiuso consideriamo le equazioni del processo \mathcal{P} e del controllore \mathcal{C} nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{P}: \quad Y(s) &= G(s)U(s) \\ \mathcal{C}: \quad U(s) &= K(s)[H_f Y^\circ(s) - Y(s)]\end{aligned}$$

Notiamo che per quanto riguarda il processo \mathcal{P} e il controllore \mathcal{C} abbiamo considerato condizioni iniziali nulle (si può fare perché la funzione di trasferimento riguarda la sola risposta forzata). Combinando le equazioni di \mathcal{P} e \mathcal{C} , otteniamo

$$Y(s) = -G(s)K(s)Y(s) + G(s)K(s)H_f Y^\circ(s)$$

e risolvendo rispetto a $Y(s)$ abbiamo

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} H_f Y^\circ(s)$$

da cui si ricava la seguente espressione per la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} H_f$$

Ricordiamo che la funzione di trasferimento del processo \mathcal{P} ha la forma $G(s) = b(s)/a(s)$ con grado $b(s) < \text{grado } a(s)$. Anche la funzione di trasferimento in feedback del controllore può essere scritta in termini di rapporto tra polinomi

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con grado $q(s) \leq \text{grado } p(s)$. Di conseguenza la funzione di trasferimento in ciclo chiuso può anche essere scritta in termini di polinomi

$$\begin{aligned}G_{y^\circ y}^*(s) &= \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} H_f = \frac{b(s)/a(s)}{1 + K(s)b(s)/a(s)} H_f = \frac{b(s)}{a(s) + K(s)b(s)} H_f \\ G_{y^\circ y}^*(s) &= \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} H_f \\ &= \frac{\frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}{1 + \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}} H_f = \frac{\frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s)}}{\frac{p(s)a(s) + q(s)b(s)}{p(s)a(s)}} H_f = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)} H_f\end{aligned}$$

Da questa espressione possiamo osservare come il guadagno in feedback $K(s)$ vada a modificare i poli del sistema che in anello aperto corrispondono alle radici del polinomio $a(s)$ mentre in ciclo chiuso diventano le radici del polinomio

$$a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$$

Notiamo che nel caso di retroazione algebrica $K(s) = K$ si ha $q(s) = K$ e $p(s) = 1$ e quindi l'espressione risulta analoga a quella trovata per la retroazione algebrica sull'uscita. Notiamo anche che gli zeri in ciclo chiuso corrispondono agli zeri di $G(s)$ più gli zeri di $K(s)$ (a meno di cancellazioni).

Ricordiamo ora che il polinomio caratteristico del sistema può essere fattorizzato come

$$\varphi(s) = \varphi_h(s)a(s)$$

con $\varphi_h(s)$ polinomio avente come radici gli autovalori nascosti (autovalori non controllabili e/o osservabili). La retroazione dinamica sull'uscita agisce sulla relazione ingresso-uscita modificando i poli del sistema

che vengono assegnati in corrispondenza delle radici di $a^*(s)$, ma non agisce sugli autovalori nascosti, radici di $\varphi_h(s)$, che non vengono modificati. Infatti tali autovalori, per effetto delle cancellazioni, non si vedono nella relazione ingresso-uscita del sistema. In particolare, vale il seguente risultato.

Fatto 3.9 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita $u = K(s)[H_f Y^\circ(s) - Y(s)]$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \varphi_h(s) a^*(s) = \varphi_h(s) [p(s) a(s) + q(s) b(s)]$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{K(s) G(s)}{1 + K(s) G(s)} H_f = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)} H_f$$

Nell'enunciare il precedente risultato si è fatta implicitamente l'ipotesi che il controllore sia privo di autovalori nascosti. Questa ipotesi non è restrittiva perché il controllore è progettato da noi. Alla luce di questo risultato, possiamo immediatamente osservare che, anche nel caso di retroazione dinamica, la **buona posizione del problema di controllo** ($\varphi_h(s)$ con radici a $\text{Re} < 0$) è **condizione necessaria** per l'esistenza di un guadagno in feedback $K(s)$ stabilizzante. Diversamente da quanto succedeva con la retroazione algebrica però, nel caso di retroazione dinamica la buona posizione del problema di controllo è **anche condizione sufficiente** per l'esistenza di un guadagno in feedback $K(s)$ stabilizzante.

Esempio 3.12 Consideriamo nuovamente il sistema LTI dell'esempio 3.10 avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

e quindi $a(s) = s^2 - 1$ e $b(s) = 1$. Supponiamo che non ci siano autovalori nascosti, ossia $\varphi_h(s) = 1$. Di conseguenza il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto. Come abbiamo visto questo sistema non può essere stabilizzato mediante retroazione algebrica sull'uscita. Consideriamo invece un retroazione dinamica sull'uscita $U(s) = K(s)[H_f Y^\circ(s) - Y(s)]$ con

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$$

Possiamo subito notare che con la retroazione algebrica avevamo a disposizione 1 solo parametro K per assegnare i poli, mentre con la retroazione dinamica abbiamo invece a disposizione 3 parametri p_0 , q_0 , q_1 . Il numero di parametri a disposizione potrebbe inoltre essere aumentato aumentando il grado dei polinomi $p(s)$ e $q(s)$ (ossia il grado del controllore). Con questa scelta per la funzione di trasferimento del controllore, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \varphi_h(s) [p(s)a(s) + q(s)b(s)] \\ &= (s + p_0)(s^2 - 1) + (q_1 s + q_0) \\ &= s^3 + p_0 s^2 - s - p_0 + q_1 s + q_0 = s^3 + p_0 s^2 + (q_1 - 1)s - p_0 + q_0 \end{aligned}$$

Notiamo come al variare di p_0 , q_0 , q_1 possiamo assegnare in modo arbitrario il polinomio caratteristico in ciclo chiuso. Ad esempio, se vogliamo posizionare i poli in ciclo chiuso in -1 , -10 e -10 possiamo porre

$$\varphi^*(s) = (s + 1)(s + 10)^2 = (s + 1)(s^2 + 20s + 100) = s^3 + 21s^2 + 120s + 100$$

Di conseguenza, eguagliando i due polinomi

$$\begin{cases} p_0 &= 21 \\ q_1 - 1 &= 120 \\ -p_0 + q_0 &= 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 &= 21 \\ q_1 &= 121 \\ q_0 &= 121 \end{cases}$$

Con la scelta $p_0 = 21$, $q_0 = 121$, $q_1 = 121$, la funzione di trasferimento del controllore risulta essere

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{121s + 121}{s + 21}$$

Per concludere il progetto, consideriamo la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^*y}^*(s) = \frac{q(s)b(s)}{p(s)a(s) + q(s)b(s)} H_f = \frac{121s + 121}{s^3 + 21s^2 + 120s + 100} H_f$$

Per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante imponiamo che il guadagno in ciclo chiuso sia unitario $G_{y^*y}^*(0) = 1$

$$G_{y^*y}^*(0) = \frac{121}{100} H_f = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H_f = \frac{100}{121}$$

Il procedimento visto può essere applicato a qualsiasi sistema per cui il problema di controllo in retroazione sull'uscita sia ben posto. Nell'esempio per assegnare in modo arbitrario il polinomio dei poli in ciclo chiuso $a^*(s)$ è stato sufficiente scegliere un controllore di ordine 1, in cui cioè numeratore e denominatore della funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ sono polinomi di primo grado. In generale, al crescere della complessità del sistema da controllare deve crescere anche la complessità del controllore. In particolare, consideriamo un generico sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi coprimi con $\deg\{b(s)\} < \deg\{a(s)\}$ dove \deg indica il grado del polinomio. Consideriamo poi un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con $\deg\{q(s)\} = \deg\{p(s)\}$. Indichiamo con il simbolo n_K l'**ordine del controllore** cioè il grado dei polinomi $q(s)$ e $p(s)$. Osserviamo che, fissato n_K , i parametri liberi da scegliere nel progetto di $K(s)$ sono $2n_K + 1$. Infatti, il numeratore ha $n_K + 1$ parametri liberi

$$q(s) = q_{n_K} s^{n_K} + q_{n_K-1} s^{n_K-1} + \dots + q_1 s + q_0$$

mentre il denominatore ha n_K parametri liberi

$$p(s) = s^{n_K} + p_{n_K-1} s^{n_K-1} + \dots + p_1 s + p_0$$

Di conseguenza vale il seguente risultato.

Fatto 3.10 Se l'ordine del controllore n_K è scelto in modo tale che

$$n_K \geq \deg\{a(s)\} - 1$$

allora i coefficienti di $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ possono essere scelti in modo arbitrario al variare di $p(s)$ e $q(s)$.

Dimostrazione (cenno): Osserviamo per prima cosa che $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ è un polinomio di grado pari a $n_K + \deg\{a(s)\}$ in cui il coefficiente di grado massimo è per costruzione pari a 1. Di conseguenza per assegnare i poli in ciclo chiuso abbiamo necessità di almeno $n_K + \deg\{a(s)\}$ parametri liberi (assegnare $a^*(s)$ vuol dire infatti risolvere un sistema di $n_K + \deg\{a(s)\}$ equazioni). Per garantire l'esistenza di una soluzione imponiamo quindi che numero di parametri liberi $\geq n_K + \deg\{a(s)\}$ cioè $2n_K + 1 \geq n_K + \deg\{a(s)\}$ da cui si ottiene la condizione $n_K \geq \deg\{a(s)\} - 1$. \square

Progetto della retroazione dinamica sull'uscita

Il precedente risultato ci garantisce di poter posizione a piacere i poli in ciclo chiuso purché la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ sia scelta di ordine sufficientemente elevato. Il progetto di un sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita consiste quindi nei seguenti passi.

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$ e si verifica che tale polinomio sia asintoticamente stabile (ossia che non ci siano autovalori nascosti instabili). In caso contrario il progetto fallisce perché il problema di controllo non è ben posto.
2. Si prende un controllore di ordine $n_K \geq \deg a(s) - 1$ e si scelgono $p(s)$ e $q(s)$ in modo che

- tutti gli autovalori in ciclo chiuso (radici di $\varphi^*(s)$) abbiamo $\text{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1);
- i poli in ciclo chiuso siano posizionati in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3);
- valga $q(0) \neq 0$ in modo da evitare problemi nel soddisfacimento della specifica 2.

3. Si sceglie il guadagno del prefiltro H_f in modo tale che $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$ ponendo

$$H_f = \frac{p(0)a(0) + q(0)b(0)}{q(0)b(0)}$$

in modo da avere inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2).

Se il progetto fallisce al passo 1 perché il problema di controllo **non** è ben posto allora come detto occorre modificare B e/o C per garantire che gli autovalori a $\text{Re} \geq 0$ non siano nascosti.

Quando invece il problema di controllo è ben posto, il passo 2 può sempre essere portato a termine con successo. La condizione $q(0) \neq 0$ serve per evitare una divisione per zero nell'assegnazione di H_f .

Per quanto riguarda il passo 3, se la condizione $b(0) \neq 0$ non è verificata occorre fare un passo indietro nel progetto del sistema di controllo modificare B e/o C in modo da modificare $b(s)$.

Implementazione della retroazione dinamica sull'uscita

Applicare una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita vuol dire generare il segnale u come uscita di un sistema dinamico, il controllore \mathcal{C} , avente in ingresso l'uscita y e il riferimento y° . In questo senso la legge di controllo espressa nel dominio di Laplace

$$\mathcal{C} : \quad U(s) = K(s)[H_f Y^\circ(s) - Y(s)]$$

deve essere interpretata come una relazione ingresso-uscita per il controllore \mathcal{C} . Consideriamo a titolo di esempio il caso di un controllore del prim'ordine come quello dell'esempio 3.12.

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$$

Allora la legge di controllo nel dominio di Laplace risulta essere

$$\mathcal{C} : \quad U(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} [H_f Y^\circ(s) - Y(s)]$$

Per ricavarci la corrispondente legge di controllo nel dominio del tempo, possiamo moltiplicare ambo i membri per $s + p_0$ ottenendo quindi

$$\begin{aligned} (s + p_0)U(s) &= (q_1 s + q_0) [H_f Y^\circ(s) - Y(s)] \\ \Downarrow \\ sU(s) + p_0 U(s) &= q_1 s [H_f Y^\circ(s) - Y(s)] + q_0 [H_f Y^\circ(s) - Y(s)] \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che la variabile di Laplace s corrisponde, a livello simbolico, ad un operatore di derivazione. Di conseguenza, passando nel dominio del tempo, si ottiene una relazione ingresso-uscita del tipo²

$$\mathcal{C} : \quad \dot{u}(t) + p_0 u(t) = q_1 [H_f \dot{y}^\circ(t) - \dot{y}(t)] + q_0 [H_f y^\circ(t) - y(t)]$$

È immediato verificare che l'equazione differenziale trovata descrive un sistema dinamico che ha funzione di trasferimento proprio coincidente con quella del controllore. In sostanza una retroazione dinamica TC corrisponde a un'azione di controllo u generata in funzione di y° e y come soluzione di un'equazione differenziale (o in generale di un sistema di equazioni differenziali).

Nella pratica, anche per sistemi TC la legge di controllo si implementa usualmente a TD con un sistema di **controllo digitale**. Ad esempio, in ambito industriale sono molto diffusi i cosiddetti controllori

²Nel calcolo dell'anti-trasformata si sono trascurate le condizioni iniziali ponendo $\mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = sU(s)$, $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s)$ e $\mathcal{L}\{\dot{y}^\circ(t)\} = sY^\circ(s)$. Questo può essere fatto perché stiamo considerando solo la relazione-ingresso uscita relativa alla risposta forzata del controllore.

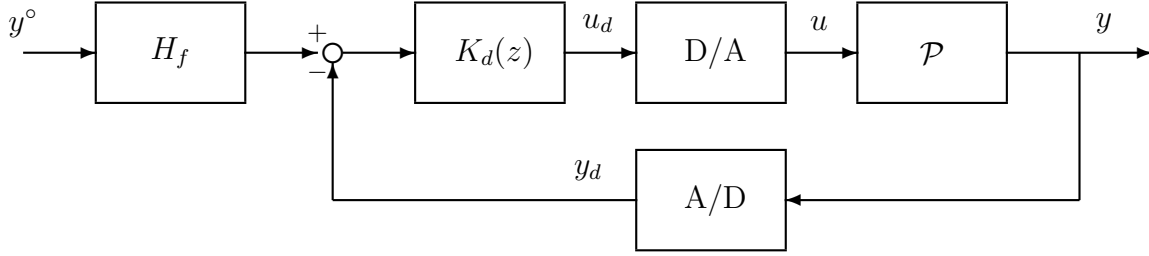


Figura 9: Sistema di controllo digitale.

a logica programmabile (PLC). L'equazione differenziale che descrive la legge di controllo viene quindi implementata con un'equazione alle differenze che approssima l'equazione differenziale originale. L'equazione alle differenze può ad esempio essere ottenuta con il metodo di Eulero o come metodi più raffinati. Le funzioni MATLAB `c2d` e Python `control.sample_system` consentono di approssimare una funzione di trasferimento del controllore TC $K(s)$ con una corrispondente funzione di trasferimento TD $K_d(z)$.

In alternativa, è possibile discretizzare il processo \mathcal{P} e progettare direttamente un controllore TD. Il progetto dei sistemi di controllo per sistemi TD è del tutto analogo a quello visto per sistemi TC con le uniche differenze che

- si considera la trasformata Zeta invece di quella di Laplace;
- la regione di stabilità asintotica diventa $\{z : |z| < 1\}$ e quindi la specifica 1 richiede di posizionare tutti gli autovalori in ciclo chiuso in modo che abbiano modulo < 1 ;
- data la funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G_{y^o y}(z)$ il guadagno in continua in ciclo chiuso è $G_{y^o y}(1)$ e quindi la specifica 2 richiede di avere $G_{y^o y}(1) = 1$.

In Figura 9 è riportato lo schema di un sistema di controllo digitale che implementa una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita. L'uscita y del processo viene campionata mediante un convertitore analogico/digitale. Il tempo di campionamento deve essere sufficientemente piccolo in modo da preservare le caratteristiche frequenziali del segnale y (ad esempio sulla base della condizione di Nyquist). Il riferimento y^o è usualmente definito direttamente a TD. I due segnali TD y_d e $H_f y^o$ vengono elaborati da un'equazione alle differenze che realizza la funzione di trasferimento $K_d(z)$. Infine, un convertitore digitale/analogico trasforma il segnale TD u_d in uscita dal controllore nel segnale TC u da inviare in ingresso al processo \mathcal{P} . I più semplici convertitori D/A sono di tipo *zero-order hold* (ZOH) in cui il valore del segnale TC u viene mantenuto costante tra due istanti di campionamento successivi.

3.9 Controllo PID e azione integrale

Consideriamo una legge di controllo in retroazione dinamica sull'uscita

$$\mathcal{C} : U(s) = K(s) [H_f Y^o(s) - Y(s)]$$

Per progettare la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ esistono molti metodi alternativi a quello visto. In particolare, il metodo più comune nelle applicazioni industriali consiste nell'assegnare a $K(s)$ una **forma prefissata** (tipicamente molto semplice) dipendente da un insieme ridotto di parametri, procedendo poi all'ottimizzazione di tali parametri sulla base delle specifiche di controllo mediante **tecniche di taratura**.

Prima di proseguire è importante sottolineare che il progetto mediante taratura di parametri non garantisce sempre di poter stabilizzare e soddisfare le specifiche ma è molto usato nelle applicazioni industriali perché semplice.

La legge di controllo più diffusa in ambito industriale è il cosiddetto **controllo PID**, acronimo di Proporzionale-Integrale-Derivativo. In un controllore **PID ideale** l'azione di controllo u è generata in funzione dell'errore di inseguimento $y^\circ - y$ secondo una legge di controllo del tipo

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = K_P \left(y^\circ(t) - y(t) \right) + K_I \int_0^t \left(y^\circ(\tau) - y(\tau) \right) d\tau + K_D \frac{d}{dt} \left(y^\circ(t) - y(t) \right)$$

Tale legge di controllo nasce dalla combinazione di 3 azioni:

- **Azione proporzionale:**

$$K_P (y^\circ(t) - y(t))$$

- **Azione integrale:**

$$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

- **Azione derivativa:**

$$K_D \frac{d}{dt} (y^\circ(t) - y(t))$$

Per una legge di controllo di questo tipo, i parametri di progetto sono 3: il guadagno proporzionale K_P , il guadagno integrale K_I e il guadagno derivativo K_D .

Per ricavare la corrispondente funzioni di trasferimento del controllore, è sufficiente ricordare che nel dominio di Laplace s è l'operatore di derivazione mentre $1/s$ è l'operatore di integrazione. Nel dominio di Laplace vale quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \quad U(s) &= K_P \left(Y^\circ(s) - Y(s) \right) + \frac{K_I}{s} \left(Y^\circ(s) - Y(s) \right) + K_D s \left(Y^\circ(s) - Y(s) \right) \\ &= \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \left(Y^\circ(s) - Y(s) \right) \end{aligned}$$

Vediamo quindi che un controllore PID ideale corrisponde a un controllore in retroazione dinamica sull'uscita a 1 grado di libertà (ossia $H_f = 1$) e con funzione di trasferimento

$$K(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Si tratta quindi di una funzione di trasferimento con struttura fissata in cui devono essere ottimizzati i 3 parametri K_P , K_I e K_D .

Notiamo che nella funzione di trasferimento del PID ideale, quando $K_D \neq 0$, il numeratore ha un grado maggiore rispetto al denominatore. Si tratta quindi di una funzione di trasferimento **impropria** non realizzabile in pratica. Questo succede perché per calcolare la derivata $\frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$ dovremmo conoscere cosa succederà nell'immediato futuro, cosa che naturalmente non è possibile. Di conseguenza, nella pratica, invece del PID ideale si considera il cosiddetto **PID reale** avente funzione di trasferimento

$$K(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(1 + s\tau)}$$

con $\tau > 0$. Rispetto al PID ideale, quindi, si aggiunge un polo in $-1/\tau$ al fine di rendere la funzione di trasferimento $K(s)$ propria (e di conseguenza la legge di controllo realizzabile). Nella pratica quando si progetta un controllore PID,

- prima si progettano i guadagni K_P , K_I , K_D considerando un PID ideale.
- poi si sceglie $\tau \ll 1$ in modo da non modificare in modo sostanziale le proprietà del sistema di controllo (notiamo infatti che associato ad un polo in $-1/\tau$ con $\text{Re} \ll 0$ si ha transitorio molto rapido).

È importante sottolineare che non tutti i sistemi possono essere stabilizzati mediante un controllore PID. Tuttavia i controllori PID hanno grande diffusione in ambito industriale sia per la loro semplicità (che consente il progetto mediante tecniche di taratura automatiche che non richiedono la conoscenza di un

modello accurato del sistema da controllare) sia per l'efficacia della combinazione delle 3 azioni. In particolare, l'azione proporzionale

$$K_P (y^\circ(t) - y(t))$$

corrisponde a una retroazione algebrica sull'uscita con $K = H = K_P$. L'azione derivativa

$$K_D \frac{d}{dt}(y^\circ(t) - y(t))$$

aggiunge un secondo parametro di progetto con l'idea di rendere più pronta l'azione di controllo. Infatti la derivata prevede il trend di evoluzione dell'errore di inseguimento $y - y^\circ$ e consente quindi di anticipare le decisioni. Il risultato è un miglioramento della stabilità in ciclo chiuso. Infine l'azione integrale

$$K_I \int_0^t (y^\circ(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

aggiunge un ulteriore parametro di progetto e serve per tenere conto delle specifiche a regime. Come vedremo, infatti, la presenza dell'azione integrale garantisce automaticamente **inseguimento perfetto** di riferimenti y° costanti anche in assenza del prefiltro ($H_f = 1$) nonché **reiezione perfetta** di disturbi costanti.

Legge di controllo con azione integrale

Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita a 1 grado di libertà

$$\mathcal{C} : \quad U(s) = K(s) [Y^\circ(s) - Y(s)]$$

e la corrispondente funzione di trasferimento del controllore

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con $p(s)$ e $q(s)$ polinomi coprimi. I controllori con azione integrale sono quelli per cui, come succede per il *PID* quando $K_I \neq 0$, la funzione di trasferimento $K(s)$ ha almeno un polo in 0 nella funzione.

Definizione: un controllore in retroazione dinamica sull'uscita presenta **azione integrale** quando $K(s)$ ha almeno un polo in 0, ossia

$$p(0) = 0$$

Per comprendere il ruolo dell'azione integrale in un sistema di controllo, consideriamo il sistema a retroazione di Figura 10 in cui si considera la presenza di un disturbo d in ingresso al processo da controllare. Il processo \mathcal{P} è rappresentato per semplicità in termini della sua funzione di trasferimento $G(s)$ supponendo implicitamente che non siano presenti autovalori nascosti. L'equazione che descrive il processo \mathcal{P} da controllare nel dominio di Laplace risulta quindi essere

$$\mathcal{P} : \quad Y(s) = G(s) [U(s) + D(s)]$$

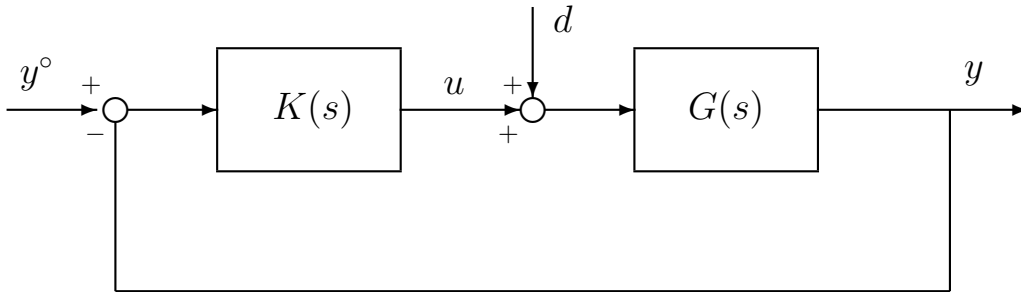


Figura 10: Sistema a retroazione su cui agisce un disturbo d in ingresso al processo \mathcal{P} ,

Dall'interconnessione in retroazione tra processo e controllore otteniamo

$$Y(s) = G(s) \{K(s) [Y^\circ(s) - Y(s)] + D(s)\}$$

e risolvendo rispetto $Y(s)$ abbiamo

$$Y(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} Y^\circ(s) + \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} D(s)$$

Notiamo che, poiché stiamo considerando sistemi lineari, vale il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi per il sistema in ciclo chiuso la risposta forzata complessiva coincide con la somma delle risposte forzate ai due ingressi y° e d . Abbiamo dunque due funzioni di trasferimento in ciclo chiuso: quella tra riferimento y° e uscita y

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

e quella tra disturbo d e uscita y

$$G_{dy}^*(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Notiamo che in entrambi i casi il denominatore delle funzioni di trasferimento in ciclo chiuso dipende dal cosiddetto **guadagno d'anello** $K(s)G(s)$. Le funzioni di trasferimento in ciclo chiuso possono anche essere scritte in termini di polinomi ponendo $G(s) = b(s)/a(s)$ e $K(s) = q(s)/p(s)$

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)q(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)}$$

$$G_{dy}^*(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{b(s)p(s)}{a(s)p(s) + b(s)q(s)}$$

Notiamo che le due funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore, e quindi gli stessi poli, mentre cambiano gli zeri.

Vediamo ora qual è l'effetto a regime del disturbo d . Notiamo che, per il principio di sovrapposizione degli effetti, il regime permanente complessivo y_f^{RP} si ottiene come somma dei regimi permanenti in risposta ai due ingressi d e y°

$$y_f^{\text{RP}}(t) = y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^D(t)$$

dove $y_f^{Y^\circ}$ indica il regime permanente in risposta al riferimento y° mentre y_f^D indica il regime permanente in risposta al disturbo d . Supponiamo che tanto il riferimento y° quanto il disturbo d siano costanti

$$y^\circ(t) = Y_0 \mathbf{1}(t) \quad d(t) = D_0 \mathbf{1}(t)$$

Allora, ricordando il Teorema della risposta in frequenza e supponendo che il sistema in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, possiamo calcolare il regime permanente in termini di guadagno in continua

$$y_f^{\text{RP}}(t) = [G_{y^\circ y}^*(0) Y_0 + G_{dy}^*(0) D_0] \mathbf{1}(t)$$

Notiamo che i due guadagni in continua in ciclo chiuso relativi a riferimento y° e disturbo d in generale sono diversi, perché questi due ingressi entrano in due punti diversi dell'anello di retroazione. In particolare, data la forma delle due funzioni di trasferimento in ciclo chiuso, si ha

$$\begin{aligned} G_{y^\circ y}^*(0) &= \frac{b(0)q(0)}{a(0)p(0) + b(0)q(0)} \\ G_{dy}^*(0) &= \frac{b(0)p(0)}{a(0)p(0) + b(0)q(0)} \end{aligned}$$

Osservando queste espressioni e ricordando che per un controllore con azione integrale vale $p(0) = 0$, è immediato dimostrare il seguente risultato.

Fatto 3.11 Consideriamo un controllore in retroazione dinamica sull'uscita a 1 grado di libertà

$$U(s) = K(s)[Y^\circ(s) - Y(s)]$$

con azione integrale e tale che $\varphi^*(s)$ sia asintoticamente stabile. Supponiamo inoltre che tanto il riferimento y° quanto il disturbo d° siano costanti $y^\circ(t) = Y_0 \mathbf{1}(t)$ e $d(t) = D_0 \mathbf{1}(t)$ allora per il sistema in ciclo chiuso risultante si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y_0$$

Dimostrazione: Dal teorema della risposta in frequenza sappiamo che, quando il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile, la sua uscita $y(t)$ converge al regime permanente per $y_f^{\text{RP}}(t)$ per $t \rightarrow \infty$. Quando il controllore ha azione integrale si ha $p(0) = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} G_{y^\circ y}^*(0) &= \frac{b(0)q(0)}{a(0)p(0) + b(0)q(0)} = \frac{b(0)q(0)}{b(0)q(0)} = 1 \\ G_{dy}^*(0) &= \frac{b(0)p(0)}{a(0)p(0) + b(0)q(0)} = \frac{0}{b(0)q(0)} = 0 \end{aligned}$$

Notiamo infatti che, poiché per ipotesi il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile, il polinomio $a^*(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$ non può avere radici in 0 e di conseguenza deve essere $a^*(0) = a(0)p(0) + b(0)q(0) = b(0)q(0) \neq 0$. Di conseguenza il regime permanente risulta essere $y_f^{\text{RP}}(t) = [G_{y^\circ y}^*(0)Y_0 + G_{dy}^*(0)D_0] \mathbf{1}(t) = Y_0 \mathbf{1}(t)$. \square

Un controllore con azione integrale garantisce quindi automaticamente il soddisfacimento della specifica 2 (**inseguimento perfetto** di un riferimento costante) in quanto il guadagno in continua in ciclo chiuso risulta per costruzione unitario $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$. Per questo motivo in presenza di azione integrale il prefiltro non è necessario e si può quindi porre $H_f = 1$ e considerare un controllore a 1 grado di libertà.

Inoltre un controllore con azione integrale garantisce anche che la funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra disturbo e uscita abbia guadagno in continua nullo $G_{dy}^*(0) = 0$. Di conseguenza, in presenza di un'azione integrale, l'effetto a regime di un disturbo costante in ingresso al processo è nullo, si ha cioè **reiezione perfetta** di un disturbo costante.

Questo approccio può essere generalizzato anche ad altri tipi di riferimenti/disturbi. Ad esempio inserendo un doppio integratore (ossia un polo doppio in 0) nella funzione di trasferimento del controllore $K(s)$, si ottiene inseguimento perfetto sia di riferimenti costanti sia di riferimenti a rampa $y^\circ(t) = Y^\circ \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$.

Progetto della retroazione dinamica sull'uscita con azione integrale

Vediamo ora come modificare il progetto della retroazione dinamica sull'uscita per introdurre un'azione integrale. Notiamo preliminarmente che un controllore con azione integrale può essere utilizzato se e solo per il processo \mathcal{P} vale $b(0) \neq 0$, ossia la funzione di trasferimento $G(s)$ non ha zeri in 0. Infatti se fosse $b(0) = 0$ e si utilizzasse azione integrale ponendo $p(0) = 0$, allora si avrebbe $a^*(0) = a(0)p(0) + b(0)q(0) = 0$ e quindi non si potrebbe avere stabilità asintotica in ciclo chiuso perché $\varphi^*(s) = \varphi_h(s)a^*(s)$ avrebbe una radice in 0. Prima di progettare un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con azione integrale occorre quindi verificare che $b(0) \neq 0$.

Per quanto riguarda la scelta dell'ordine del controllore, consideriamo un generico un controllore in retroazione dinamica sull'uscita con funzione di trasferimento

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

con grado $q(s) = \text{grado } p(s) = n_K$. Come visto i parametri liberi a disposizione sarebbero $2n_K + 1$. Tuttavia se imponiamo che il controllore abbia azione integrale $p(0) = 0$ allora i parametri liberi diventano solo $2n_K$ in quanto il polinomio al denominatore deve avere il termine noto nullo

$$p(s) = s^{n_K} + p_{n_K-1} s^{n_K-1} + \dots + p_1 s$$

Questo comporta la necessità di utilizzare un controllore di ordine più elevato rispetto al caso standard di retroazione dinamica sull'uscita in modo da garantire che il numero di parametri liberi a disposizione sia sufficiente ad assegnare in modo arbitrario il polinomio dei poli in ciclo chiuso $a^*(s)$. In particolare, procedendo in modo analogo alla dimostrazione del Fatto 3.10, si può dimostrare che l'ordine del controllore deve essere almeno al grado di $a(s)$.

Fatto 3.12 Consideriamo un processo tale che $b(0) \neq 0$ e un controllore con azione integrale [cioè tale che $p(0) = 0$]. Se l'ordine del controllore n_K è scelto in modo tale che

$$n_K \geq \deg\{a(s)\}$$

allora i coefficienti di $a^*(s) = p(s)a(s) + q(s)b(s)$ possono essere scelti in modo arbitrario al variare di $p(s)$ e $q(s)$.

Il precedente risultato ci garantisce di poter posizione a piacere i poli in ciclo chiuso purché la funzione di trasferimento del controllore $K(s)$ sia scelta di ordine sufficientemente elevato. Il progetto di un sistema di controllo in retroazione dinamica sull'uscita con azione integrale consiste quindi nei seguenti passi.

1. Si calcola $\varphi_h(s) = \varphi(s)/a(s)$ e si verifica che tale polinomio sia asintoticamente stabile (ossia che non ci siano autovalori nascosti instabili). In caso contrario il progetto fallisce perché il problema di controllo non è ben posto.
2. Se verifica che $b(0) \neq 0$. In caso contrario l'azione integrale non può essere utilizzata.
3. Si prende un controllore di ordine $n_K \geq \text{grado } a(s)$ e si scelgono $p(s)$ e $q(s)$ in modo che
 - $p(0) = 0$ in modo da avere azione integrale, garantendo quindi inseguimento perfetto di riferimenti costanti (specifica 2) e reiezione perfetta di disturbi costanti;
 - tutti gli autovalori in ciclo chiuso (radici di $\varphi^*(s)$) abbiano $\text{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1);
 - i poli in ciclo chiuso siano posizionati in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3).

Per concludere, consideriamo nuovamente il sistema dinamico degli esempi 3.10 e 3.12 e proviamo a introdurre un'azione integrale nel sistema di controllo.

Esempio 3.13 Consideriamo un sistema LTI avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

e quindi $a(s) = s^2 - 1$ e $b(s) = 1$. Supponiamo che non ci siano autovalori nascosti, ossia $\varphi_h(s) = 1$. Di conseguenza il problema di controllo in retroazione sull'uscita è ben posto. Inoltre $b(0) \neq 0$ quindi possiamo applicare l'azione integrale. Poiché il polinomio $a(s)$ ha grado 2, prendiamo un controllore di ordine $n_K = 2$

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s}$$

Notiamo che abbiamo a disposizione 4 parametri p_1, q_0, q_1 e q_2 . Infatti per avere azione integrale deve essere $p_0 = 0$. Notiamo anche che questa funzione di trasferimento è analoga a quella di un PID reale. Con questa scelta per la funzione di trasferimento del controllore, il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \varphi_h(s) [p(s)a(s) + q(s)b(s)] \\ &= (s^2 + p_1 s)(s^2 - 1) + (q_2 s^2 + q_1 s + q_0) \\ &= s^4 + p_1 s^3 - s^2 - p_1 s + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \\ &= s^4 + p_1 s^3 + (q_2 - 1)s^2 + (q_1 - p_1)s + q_0 \end{aligned}$$

Notiamo che al variare di p_1, q_0, q_1 e q_2 possiamo assegnare in modo arbitrario il polinomio caratteristico in ciclo chiuso. Ad esempio, se vogliamo posizionare i poli in ciclo chiuso in $-1, -1, -10$ e -10 possiamo porre

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) = (s + 1)^2 (s + 10)^2 &= (s^2 + 2s + 1)(s^2 + 20s + 100) \\ &= s^4 + 22s^3 + 141s^2 + 220s + 100 \end{aligned}$$

Di conseguenza, eguagliando i due polinomi

$$\begin{cases} p_1 = 22 \\ q_2 - 1 = 141 \\ q_1 - p_1 = 220 \\ q_0 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 22 \\ q_2 = 142 \\ q_1 = 242 \\ q_0 = 100 \end{cases}$$

Con la scelta $p_1 = 22, q_0 = 100, q_1 = 242, q_2 = 142$, la funzione di trasferimento del controllore risulta essere

$$K(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s} = \frac{142 s^2 + 242 s + 100}{s^2 + 22}$$