

Fondamenti di Automatica
Note sulla risposta transitoria e permanente nei sistemi LTI TC

L'analisi modale fornisce una caratterizzazione completa delle soluzioni di un sistema LTI TC. In particolare, ricordando che nel dominio di Laplace la soluzione assume la forma

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s) \end{cases}$$

con $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, possiamo allora calcolare il **comportamento esatto** della:

- evoluzione libera nello stato e nell'uscita per una data condizione iniziale $x(0)$;
- evoluzione forzata nello stato e nell'uscita per un dato segnale di ingresso u trasformabile secondo Laplace.

L'analisi modale fornisce anche informazioni sul **macro-comportamento** del sistema, ovvero informazioni circa la convergenza, limitatezza o divergenza delle soluzioni senza fare ricorso al loro calcolo esatto. Su quest'ultimo punto si basano i concetti di **stabilità interna ed esterna**.

Ottenere informazioni sul **macro-comportamento** del sistema e sulle sue proprietà stabilità è più semplice rispetto al calcolo dell'andamento esatto delle soluzioni, in quanto quest'ultimo coinvolge anche il calcolo dei residui. Vi sono però casi in cui conoscere il macro-comportamento non è sufficiente.

Le **risposta in continua ed in frequenza** permettono di ottenere informazioni più puntuali sul comportamento dell'uscita di un sistema lineare senza dover ricorrere al calcolo esatto delle soluzioni. In particolare, sotto certe ipotesi:

1. La **risposta in continua** fornisce il valore asintotico della risposta nell'uscita a segnali di ingresso di tipo costante;
2. La **risposta in frequenza** fornisce il valore asintotico della risposta nell'uscita a segnali di ingresso di tipo sinusoidale.

2.12 Risposta transitoria e permanente nei sistemi LTI TC

Transitorio e regime permanente

Consideriamo un sistema LTI TC con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Consideriamo un segnale di ingresso $u(t)$ con trasformata di Laplace razionale

$$U(s) = \frac{\tilde{b}(s)}{\tilde{a}(s)} = \frac{\tilde{b}(s)}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} (s - \tilde{p}_i)}$$

con grado di $\tilde{a}(s)$ maggiore strettamente del grado di $\tilde{b}(s)$. Come visto la classe di segnali con trasformata di Laplace di questo tipo include molti segnali di interesse: polinomi, sinusoidi, esponenziali, combinazioni lineari e prodotti di questi. Supponiamo ora per semplicità che

- tutti i poli della $G(s)$ siano distinti, ossia $p_i \neq p_\ell$ per ogni $i \neq \ell$

- tutti i poli della $U(s)$ siano distinti, ossia $\tilde{p}_i \neq \tilde{p}_\ell$ per ogni $i \neq \ell$
- i poli di $U(s)$ e $G(s)$ siano distinti, ossia $p_i \neq \tilde{p}_\ell$ per ogni i, ℓ

Allora, effettuando la scomposizione in fratti semplici, la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{b(s)\tilde{b}(s)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} (s-\tilde{p}_i)}$$

può essere scomposta in due parti

$$Y_f(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s-\tilde{p}_i}}_{Y_f^U(s)} \implies y_f(t) = y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

Come di consueto, i residui K_i e \tilde{K}_i possono essere calcolati applicando il teorema dei residui alla funzione razionale $Y_f(s)$

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i) Y_f(s) \quad \lim_{s \rightarrow \tilde{p}_i} (s-\tilde{p}_i) Y_f(s)$$

Abbiamo quindi una parte dipendente dai poli di $G(s)$ detta **transitorio**:

$$y_f^G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^G(s)\}$$

e una parte dipendente dai poli di $U(s)$ detta **regime permanente**:

$$y_f^U(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f^U(s)\}$$

Nel complesso quindi la risposta di un sistema LTI assume la forma

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f^G(t) + y_f^U(t)$$

con $y_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI-A)^{-1}x(0)\}$. Notiamo che, quando il sistema LTI è esternamente stabile e quindi tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale < 0 , allora il transitorio $y_f^G(t)$ converge a 0. In questo caso vale allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_f^G(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$$

ossia la risposta forzata converge al regime permanente. Se inoltre il sistema è asintoticamente stabile e quindi tutti gli autovalori hanno parte reale < 0 , allora anche la risposta libera $y_\ell(t)$ converge a 0. Di conseguenza, in questo caso, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y_\ell(t) + y_f^G(t)] = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$$

Quindi, per un sistema LTI asintoticamente stabile la risposta complessiva **converge al regime permanente**. In altre parole, per sistemi asintoticamente stabili la risposta in regime permanente fornisce il comportamento asintotico dell'uscita (ossia dopo il transitorio iniziale). Il regime permanente è di più semplice valutazione rispetto all'intera risposta forzata. In generale, il suo calcolo coinvolge il calcolo dei residui \tilde{K}_i , ma nei casi di interesse pratico i residui assumono una forma semplice. Questo è il caso di segnali di ingresso costanti e di tipo sinusoidale.

Risposta in continua

Consideriamo un ingresso a gradino di ampiezza U_0

$$u(t) = U_0 \cdot 1(t) \longleftrightarrow U(s) = \frac{U_0}{s}$$

Supponendo che la $G(s)$ non abbia poli in zero, nella scomposizione in fratti semplici di $Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s)U_0/s$ si ha allora

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + Y_f^U(s) = Y_f^G(s) + \frac{\tilde{K}}{s}$$

dove il residuo \tilde{K} vale

$$\tilde{K} = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) U_0 = G(0) U_0$$

Di conseguenza il regime permanente in risposta ad un ingresso a gradino di ampiezza U_0 risulta essere ancora un gradino di ampiezza $G(0) U_0$

$$Y_f^U(s) = \frac{\tilde{K}}{s} = \frac{G(0) U_0}{s} \implies y_f^U(t) = G(0) U_0 1(t)$$

Vediamo quindi che l'ingresso risulta amplificato/attenuato di un fattore $G(0)$. Tale quantità è detta **guadagno in continua** del sistema

$$G(0) = G(s)|_{s=0} = -CA^{-1}B + D$$

Notiamo che il guadagno in continua è ben definito per sistemi in cui la matrice A è invertibile, come succede per sistemi asintoticamente stabili. In generale il guadagno in continua $G(0)$ è una matrice costante di dimensione $\dim(y) \times \dim(u)$. Per sistemi SISO il guadagno in continua è quindi uno scalare.

Come visto, per sistemi asintoticamente stabili, la risposta complessiva converge al regime permanente. Quindi in un sistema asintoticamente stabile sollecitato con un ingresso costante di ampiezza U_0 , l'uscita converge asintoticamente al valore costante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = G(0) U_0 = (-CA^{-1}B + D) U_0$$

Come osservazione conclusiva, notiamo che l'espressione trovata è consistente con quanto visto relativamente alla stabilità degli equilibri per sistemi LTI TC. Infatti abbiamo già osservato che, per un sistema LTI asintoticamente stabile, ad un ingresso costante $u_e = U_0$ è associato un unico stato di equilibrio $x_e = -A^{-1} B U_0$ a cui corrisponde l'uscita di equilibrio $y_e = (-CA^{-1}B + D) U_0$. Tale uscita di equilibrio coincide proprio con il regime permanente in risposta ad un ingresso costante. Il concetto di regime permanente consente di estendere questo tipo di analisi a ingressi generici.

Risposta in frequenza

Consideriamo ora il caso di un ingresso sinusoidale di ampiezza U_0 e frequenza ω_0

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) 1(t) \longleftrightarrow U(s) = \frac{U_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Supponendo che la $G(s)$ non abbia poli $\pm j\omega_0$, nella scomposizione in fratti semplici di $Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s)U_0 \omega_0 / (s^2 + \omega_0^2)$ si ha allora

$$Y_f(s) = Y_f^G(s) + \underbrace{\frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0}}_{Y_f^U(s)}$$

dove il residuo \tilde{K}_2 è il complesso coniugato di \tilde{K}_1 . Applicando il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) \frac{G(s) U_0 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{G(s) U_0 \omega_0}{s + j\omega_0} = -\frac{j}{2} G(j\omega_0) U_0 \end{aligned}$$

Ricordando quanto visto per la anti-trasformata di Laplace dei termini associati ad una coppia di poli complessi coniugati, possiamo ottenere la seguente espressione per il regime permanente in risposta ad un ingresso sinusoidale

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{K}_1}{s - j\omega_0} + \frac{\tilde{K}_2}{s + j\omega_0} \right\} = 2 \left[\operatorname{Re}\{\tilde{K}_1\} \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}\{\tilde{K}_1\} \sin(\omega_0 t) \right] 1(t) \\ &= \left[\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t) \end{aligned}$$

Il regime permanente in risposta ad un segnale sinusoidale di frequenza ω_0 è ancora un segnale della stessa frequenza, ottenuto dalla combinazione lineare di una senoide e una cosenoide opportunamente pesate

secondo la quantità $G(j\omega_0)$, detta **risposta in frequenza** o **risposta armonica**. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato che riassume quanto visto finora relativamente al regime permanente in un sistema LTI TC.

Teorema 2.6 (teorema fondamentale della risposta in frequenza) Considero un sistema LTI TC con funzione di trasferimento $G(s)$ priva di poli sull'asse immaginario. Allora valgono i seguenti fatti.

- i. Il regime permanente in risposta a un ingresso a gradino $u(t) = U_0 1(t)$ è

$$y_f^U(t) = G(0) U_0 1(t)$$

- ii. Il regime permanente in risposta a un ingresso sinusoidale $u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$ è

$$y_f^U(t) = \left[\operatorname{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \operatorname{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t)$$

- iii. Se il sistema è stabile esternamente (ossia la $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale < 0) allora la risposta forzata converge al regime permanente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$$

- iv. Se il sistema è stabile asintoticamente (ossia tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale < 0) allora la risposta complessiva converge al regime permanente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - y_f^U(t)] = 0$$

Notiamo che, per il principio di sovrapposizione degli effetti questo teorema consente immediatamente di determinare il regime permanente in risposta a qualunque segnale ottenibile come combinazione lineare di un termine costante più sinusoidi e cosinusoidi anche di diversa pulsazione (ad esempio anche segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier).

Esempio 2.21 Consideriamo un sistema LTI TC con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-1}{s^2 + s + 2}$$

Supponiamo adesso che il segnale di ingresso sia

$$u(t) = [3 + \sin(2t)] 1(t)$$

Notiamo che la funzione di trasferimento del sistema non ha poli sull'asse immaginario (infatti i due poli della $G(s)$ sono in $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$). Possiamo quindi applicare il teorema fondamentale della risposta in frequenza. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo studiare i due contributi separatamente. Circa il contributo costante, si ha $G(0) = -1/2$. Circa il contributo sinusoidale, poiché $\omega_0 = 2$ si ha

$$G(j2) = \frac{1}{2 - j2} = \frac{2 + j2}{8} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}$$

Si deduce quindi che per $t \geq 0$ la risposta in regime permanente è

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= 3G(0) + \operatorname{Re}[G(j2)] \sin(2t) + \operatorname{Im}[G(j2)] \cos(2t) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{4} \cos(2t) \end{aligned}$$

Poiché tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale < 0 , allora possiamo concludere che la risposta forzata converge esponenzialmente a tale segnale nel limite per t tendente a infinito.

Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

Consideriamo ora un sistema SISO per cui la funzione di trasferimento risulta essere una funzione scalare (e non una matrice). Come visto, la risposta in frequenza $G(j\omega_0)$ fornisce informazioni complete sul comportamento asintotico di un sistema LTI asintoticamente stabile in risposta ad una sollecitazione

sinusoidale in ingresso, al variare della frequenza di oscillazione ω_0 . Per questo motivo il tracciamento delle rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza può risultare utile per meglio comprendere il comportamento macroscopico del sistema sotto esame. Le rappresentazioni grafiche tipiche sono due: i **diagrammi di Bode** e i **diagrammi di Nyquist**.

In particolare, data la risposta in frequenza, il diagramma di Nyquist corrisponde al grafico della parte immaginaria $\text{Im}\{G(j\omega)\}$ (in ordinate) rispetto alla parte reale $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ in ascisse. Tale diagramma descrive quindi come si sposta nel piano complesso il numero complesso $G(j\omega)$ al variare della frequenza $j\omega$.

I diagrammi di Bode si basano invece sulla rappresentazione polare dei numeri complessi. Dato un numero complesso $K = a + jb$ nel piano Cartesiano, K può essere espresso equivalentemente in coordinate polari come

$$\begin{aligned} K &= |K|e^{j\angle K}, \\ |K| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle K = \text{atan2}(b, a) \end{aligned}$$

dove $|K|$ viene detto **modulo** e dove $\angle K$ viene detta **fase**. La funzione atan2 misura l'angolo in radianti formato dal punto K nel piano Cartesiano con l'asse reale. Questo angolo è positivo se $b > 0$, negativo se $b < 0$, nullo se $b = 0$ e $a \geq 0$, pari a $-\pi$ se $b = 0$ e $a < 0$. Naturalmente vale anche la relazione inversa

$$\text{Re}[K] = |K| \cos(\angle K) \quad \text{Im}[K] = |K| \sin(\angle K)$$

Allora, in termini di modulo e fase, il regime permanente in risposta ad un ingresso sinusoidale può essere riscritto come

$$\begin{aligned} y_f^U(t) &= \left[\text{Re}\{G(j\omega_0)\} U_0 \sin(\omega_0 t) + \text{Im}\{G(j\omega_0)\} U_0 \cos(\omega_0 t) \right] 1(t) \\ &= U_0 |G(j\omega_0)| [\cos(\angle G(\omega_0)) \sin(\omega_0 t) + \sin(\angle G(\omega_0)) \cos(\omega_0 t)] 1(t) \\ &= U_0 |G(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \angle G(j\omega_0)] 1(t) \end{aligned}$$

dove per ottenere l'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che $\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$. Dalla precedente espressione, possiamo notare che la funzione di risposta in frequenza opera come un **filtro**. Essa altera il segnale in ingresso tramite il modulo $|G(j\omega)|$ che rappresenta il fattore di amplificazione/attenuazione dato dal sistema, e la fase $\angle G(j\omega)$ che fornisce uno sfasamento. D'altro canto il sistema non altera la pulsazione del segnale di ingresso. I grafici di modulo $|G(j\omega)|$ e fase $\angle G(j\omega)$ in funzione della frequenza ω_0 sono detti **Diagrammi di Bode**.

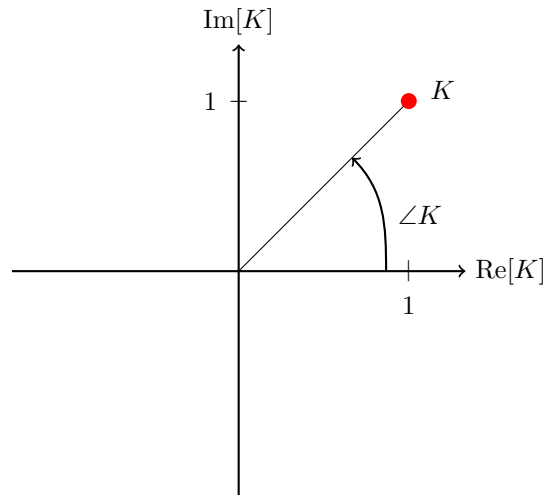
In particolare, tipicamente,

- nel diagramma di Bode del modulo: in ascisse frequenza in scala logaritmica $\log_{10}(\omega_0)$ e in ordinate il modulo della risposta in frequenza in decibel $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(|G(j\omega_0)|)$;
- nel diagramma di Bode della fase: in ascisse frequenza in scala logaritmica $\log_{10}(\omega_0)$ e in ordinate la fase della risposta in frequenza $\angle G(j\omega_0)$ in gradi o radianti.

Da tali diagrammi risulta immediato comprendere il comportamento macroscopico, in termini di risposta in frequenza, di un sistema LTI asintoticamente stabile (ad esempio, passa-basso, passa-alto, passa-banda, ecc.). I diagrammi di Bode possono anche essere tracciati per via sperimentale, senza conoscere il modello matematico del sistema, semplicemente sollecitando il sistema con ingressi sinusoidali di diversa pulsazione e andando a vedere il comportamento a regime (esaurito il transitorio) della risposta del sistema. Notiamo anche che, dati i diagrammi di Bode, risulta immediato tracciare il diagramma di Nyquist.

Esempio 2.22 Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$



La risposta in frequenza risulta essere

$$G(j\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 + 1} = \frac{1 - j\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

Quindi in termini di parte reale e immaginaria si ha

$$\text{Re}\{G(j\omega_0)\} = \frac{1}{1 + \omega_0^2} \quad \text{Im}\{G(j\omega_0)\} = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

Mentre in termini di modulo e fase si ha

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\text{atan}(\omega_0)$$

Si hanno quindi i diagrammi di Nyquist e di Bode riportati in figura 2. Il sistema si comporta quindi come un filtro passa basso. Per le basse frequenze $\omega_0 \approx 0$ si ha $G(j\omega_0) \approx 1$, quindi la sinusoide in ingresso si ritrova quasi inalterata in uscita. Al crescere della frequenza della sinusoide in ingresso, però, la sinusoide viene sempre più attenuata in quanto $|G(j\omega_0)|$ tende a 0 per la frequenza in ingresso ω_0 tendente ad infinito. Tale comportamento è confermato dalla figura 1 in cui si vede la risposta del sistema ad ingressi sinusoidali di diversa frequenza (l'ampiezza dell'ingresso è sempre unitaria, ma l'ampiezza dell'uscita diminuisce man mano che la frequenza dell'ingresso aumenta).

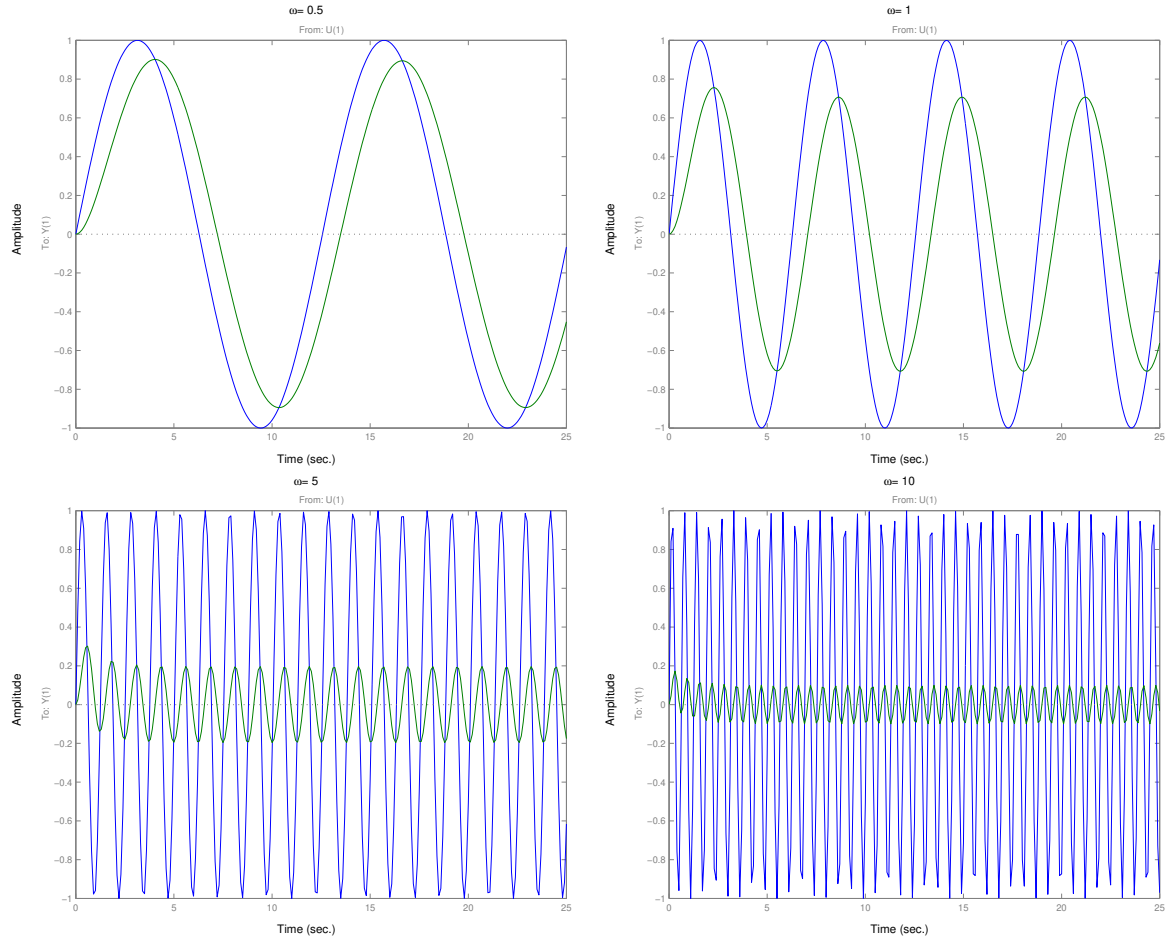


Figura 1: Risposta forzata di un sistema con $G(s) = 1/(s + 1)$ ad ingressi sinusoidali di diversa frequenza (0.5, 1, 5 e 10 rispettivamente). In blu l'andamento dell'ingresso, in rosso la risposta forzata.

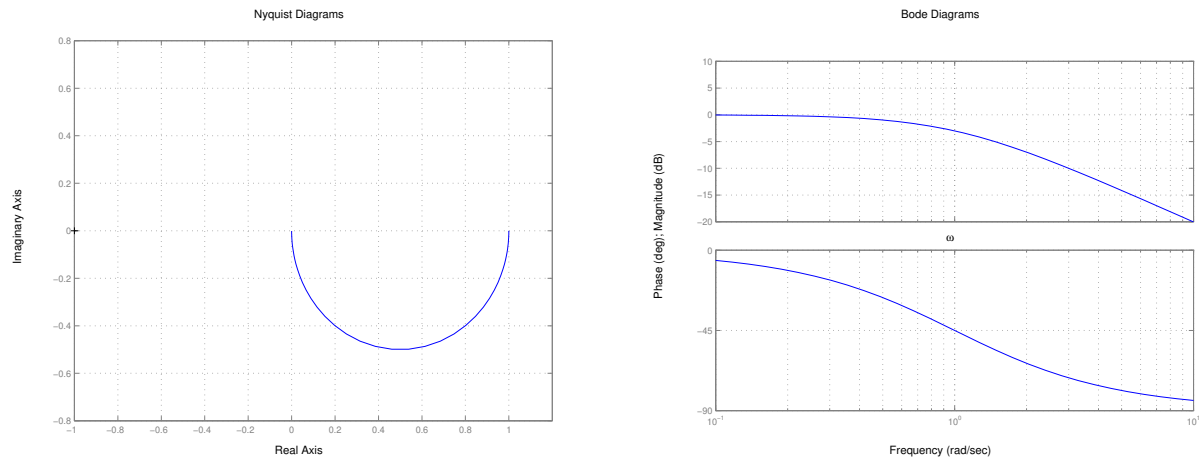


Figura 2: A sinistra: diagramma di Nyquist di $G(s) = 1/(s + 1)$. A destra: diagrammi di Bode di $G(s) = 1/(s + 1)$. I diagrammi sono stati tracciati utilizzando le funzioni MATLAB `nyquist` e `bode` rispettivamente.