Esercizi su controllabilità e stabilizzabilità

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ Per quali α sistema stabilizzabile?

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1)$$

$\lambda_1 = -1$ $\quad \lambda_2 = 1$ $\Rightarrow$ sistema internamente instabile

Per determinare $\varphi_c(s)$ e $\varphi_{nc}(s)$ calcoliamo $(sI-A)^{-1}B$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A)\,B = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1+\alpha \\ \alpha(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1+\alpha}{(s+1)(s-1)} \\ \dfrac{\alpha}{s-1} \end{bmatrix}$$

Devo vedere per quali α ci sono semplificazioni

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1+\alpha}{(s+1)(s-1)} \\ \\ \dfrac{\alpha}{s-1} \end{bmatrix} \qquad \varphi(s) = (s+1)(s-1)$$

$$\alpha = 0 \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{\cancel{s-1}}{(s+1)\cancel{(s-1)}} \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s+1$$

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = \frac{\cancel{(s+1)}(s-1)}{\cancel{s+1}} = s-1$$

$\lambda_1 = -1$ controllabile

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ non controllabile $\Rightarrow$ sistema non stabilizzabile

sistema stabilizzabile $\Leftrightarrow$ $\varphi_{nc}(s)$ ha tutte radici con $Re < 0$

$$\alpha = 2 \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s-1)} \\ \\ \dfrac{2}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} \\ \\ \dfrac{2}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s-1$$

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s+1$$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ non controllabile $\Rightarrow$ autovalori non controllabili con $Re < 0$ $\Rightarrow$ sistema stabilizzabile

$\lambda_2 = 1$ controllabile

$\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$ non ci sono semplificazioni $\Rightarrow$ $\varphi_c(s) = \varphi(s) = (s+1)(s-1)$ $\quad \varphi_{nc}(s) = 1$

sistema completamente controllabile $\Rightarrow$ sistema stabilizzabile

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ studiare controllabilità e stabilizzabilità

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1) \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = -2$

Per studiare controllabilità e stabilizzabilità calcoliamo

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A)\, B$$

Per calcolare $(sI-A)^{-1}$ sfrutto il fatto che la matrice è diagonale a blocchi

$$\begin{bmatrix} \boxed{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{matrix}} \\ 0 & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$*$ termine da calcolare

$$\begin{bmatrix} \boxed{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s-1$$

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = \frac{(s\cancel{-1})(s+1)(s+2)}{\cancel{s-1}} = (s+1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1$ controllabile

$\lambda_2 = -1$, $\lambda_2 = -2$ non controllabili

tutti autovalori non controllabili con Re < 0 $\Rightarrow$ sistema stabilizzabile

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ Per quali α sistema stabilizzabile?

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2)(s+1) + 2 = s^2 - 2s + s - \cancel{2} + \cancel{2} = s^2 - s = s(s-1)$$

$\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = 1$ $\quad$ sistema internamente instabile

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A)\,B = \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} (s+1)\alpha - 1 \\ -2\alpha - s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)\alpha - 1}{s(s-1)} \\ \dfrac{-(s+2\alpha-2)}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

Devo vedere per quali α ho semplificazioni, ovvero per quali α i numeratori hanno radici in 0 o in 1

$(s+1)\alpha - 1$ ha radice in 0 $\iff$ $\alpha - 1 = 0$ $\quad \alpha = 1$

$(s+1)\alpha - 1$ ha radice in 1 $\iff$ $2\alpha - 1 = 0$ $\quad \alpha = \frac{1}{2}$

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)\alpha - 1}{s(s-1)} \\ \dfrac{-(s+2\alpha-2)}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 1 \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{s+\cancel{1}-\cancel{1}}{s(s-1)} \\ \dfrac{-(s+\cancel{2}-\cancel{2})}{s(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s-1)} \\ \dfrac{-\cancel{s}}{\cancel{s}(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} \\ \dfrac{-1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s-1 \qquad \varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = \frac{s\,\cancel{(s-1)}}{\cancel{s-1}} = s$$

$\lambda_1 = 0$ non controllabile $\qquad \lambda_2 = 1$ controllabile

$\exists$ autovalore non controllabile con $Re \geq 0 \Rightarrow$ sistema non stabilizzabile

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)\alpha - 1}{s(s-1)} \\ \dfrac{-(s+2\alpha-2)}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad (sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}-1}{s(s-1)} \\ \dfrac{-(s+1-2)}{s(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}} \\ \dfrac{-\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1/2}{s} \\ -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = s \qquad \varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)} = s-1$$

$\lambda_1 = 0$ controllabile

$\lambda_1 = 1$ non controllabile

$\exists$ autovalore non controllabile con $Re \geq 0$ $\Rightarrow$ sistema non stabilizzabile

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$ non ho semplificazioni

$\varphi_c(s) = s(s-1) \qquad \varphi_{nc}(s) = 1$

sistema completamente controllabile $\Rightarrow$ stabilizzabile