Fondamento di Automatica
Note sulla risposta dei sistemi LTI

2.1 Risposta libera e risposta forzata nei sistemi LTI

Sistemi LTI tempo discreto

Un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto (LTI TD) è un sistema di *equazioni alle differenze lineari* a coefficienti costanti, che può essere scritto in forma matriciale e in maniera del tutto generale nel seguente modo:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}^n$ rappresenta lo *stato* del sistema al tempo $t \in \mathbb{N}$ e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ rappresenta il vettore di ingressi esogeni o variabili indipendenti, e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ rappresenta il vettore delle uscite. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ specifica le relazioni tra le variabili di stato, mentre la matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ specifica le relazioni tra gli ingressi e le variabili di stato. Analogamente le matrici $C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n_y\times n_u}$ specificano le relazioni tra le variabili di stato e ingresso e le variabili di uscita. L'interesse è quello di determinare come evolvono lo stato del sistema e la sua uscita, ovvero la *soluzione* al sistema di equazioni dati lo stato iniziale $x(0) = x_0$ e una sequenza di ingressi $\{u(0), u(1), \ldots\}$. Chiaramente, la soluzione esiste unica. In particolare, è semplice verificare che vale il seguente risultato.

Fatto 2.1 Per un sistema LTI TD l'evoluzione complessiva di stato e uscita sono nella forma

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

dove

$$x_\ell(t) = A^t x_0 \qquad x_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)$$

$$y_\ell(t) = CA^t x_0 \qquad y_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Du(t)$$

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che l'evoluzione complessiva dello stato

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)$$

soddisfa l'equazione alle differenze $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$. Notiamo preliminarmente che la condizione iniziale è soddisfatta e quindi l'espressione risulta valida per $t = 0$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A^{t+1} x_0 + \sum_{\tau=0}^{t} A^{t-\tau} Bu(\tau) \\ &= A^{t+1} x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau} Bu(\tau) + Bu(t) \\ &= AA^t x_0 + A\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Bu(t) \\ &= A\underbrace{\left(A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)\right)}_{x(t)} + Bu(t) \end{aligned}$$

Quindi $x(\cdot)$ soddisfa l'equazione alle differenze. Infine, l'espressione dell'evoluzione dell'uscita è immediatamente ottenibile ricordando che $y(t) = Cx(t) + Du(t)$. $\square$

La soluzione consta quindi di due contributi separati. Il primo contributo $x_\ell(t)$ dipende dalle sole condizioni iniziali e viene detto **evoluzione libera dello stato**, mentre il secondo contributo $x_f(t)$ dipende dal solo segnale d'ingresso e viene detto **evoluzione forzata dello stato**. Analogamente, l'evoluzione complessiva dell'uscita risulta scomponibile in due contributi separati: un termine $y_\ell(t)$ di evoluzione libera dell'uscita o **risposta libera** che dipende dalle sole condizioni iniziali e un termine $y_f(t)$ di evoluzione forzata dell'uscita o **risposta forzata** che dipende dal solo segnale d'ingresso.

Notiamo che per un sistema LTI TD vale il cosiddetto **principio di sovrapposizione degli effetti** secondo cui l'evoluzione complessiva in risposta a una somma di cause coincide con la somma delle evoluzioni in risposta alle singole cause. Questo può essere facilmente verificato considerando condizioni iniziali e segnali di ingresso nella forma di combinazioni lineari

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \end{aligned}$$

con $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ e $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. In questo caso, infatti, la risposta complessiva assume la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \\ &= A^t \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \left(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)\right) \\ &= \alpha_1 \underbrace{\left(A^t x_1 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0)=x_1 \text{ e } u(t)=u_1(t)}} + \alpha_2 \underbrace{\left(A^t x_2 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0)=x_2 \text{ e } u(t)=u_2(t)}} \end{aligned}$$

Di conseguenza l'evoluzione complessiva in risposta a una combinazione lineare di condizioni iniziali e segnali di ingresso coincide con la combinazione lineare (sovrapposizione) delle risposte alle singole condizioni iniziali e ai singoli segnali di ingresso.

Sistemi LTI tempo continuo

Un sistema lineare tempo invariante a tempo continuo (LTI TC) è un sistema di *equazioni differenziali lineari* a coefficienti costanti, che può essere scritto in forma matriciale e in maniera del tutto generale nel seguente modo: Un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto (LTI TD) è un sistema di *equazioni alle differenze lineari* a coefficienti costanti, che può essere scritto in forma matriciale e in maniera del tutto generale nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}^n$ rappresenta lo *stato* del sistema al tempo $t \in \mathbb{N}$ e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ rappresenta il vettore di ingressi esogeni o variabili indipendenti, e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ rappresenta il vettore delle uscite. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ specifica le relazioni tra le variabili di stato, mentre la matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ specifica le relazioni tra gli ingressi e le variabili di stato. Analogamente le matrici $C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n_y\times n_u}$ specificano le relazioni tra le variabili di stato e ingresso e le variabili di uscita. Anche in questo caso, l'interesse è determinare come evolve lo stato del sistema, ovvero la *soluzione* al sistema di equazioni dato lo stato iniziale $x(0) = x_0$ ed il segnale d'ingresso $u(\cdot)$. Qualora l'ingresso sia una funzione continua a tratti (quasi ovunque, tranne un insieme a misura nulla) la soluzione esiste unica. [1] Nel seguito, non enfatizzeremo

[1] I sistemi LTI TC sono una classe di equazioni differenziali del tipo $\dot{x}(t) = F(x(t), t)$ con $x(0) = x_0$, dove si è posto $F(x(t), t) = Ax(t) + b(t)$. Per questa classe di funzioni vale il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni secondo il quale

questo aspetto e ci limiteremo a pensare alla soluzione come la funzione $x(\cdot)$ che soddisfa $x(0) = x_0$ e tale che $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

Per determinare la soluzione occorre introdurre il concetto di **esponenziale di matrice**. Data una matrice M quadrata, la sua esponenziale è una matrice quadrata della stessa dimensione definita come

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \dots$$

Per l'esponenziale di matrice valgono alcune proprietà simili a quelle che valgono per la consueta funzione esponenziale. In particolare, sfruttando la definizione, è possibile verificare che

$$\frac{de^{At}}{dt} = A\, e^{At}$$

Si ha allora il seguente risultato.

Fatto 2.2 Per un sistema LTI TC l'evoluzione complessiva di stato e uscita sono nella forma

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

dove

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \qquad x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0 \qquad y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che l'evoluzione complessiva dello stato

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

soddisfa l'equazione alle differenze $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Notiamo preliminarmente che la condizione iniziale è soddisfatta in quanto $e^{At}\big|_{t=0} = I$ matrice identica. Quindi l'espressione risulta valida per $t = 0$. Inoltre, ricordando la formula di Leibniz

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,\tau)\, d\tau\right) = f\big(t, b(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}b(t) - f\big(t, a(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,\tau)\, d\tau$$

per la derivazione sotto il segno di integrale, si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\ &= Ae^{At}x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= A\underbrace{\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right)}_{x(t)} + Bu(t) \end{aligned}$$

Quindi $x(\cdot)$ soddisfa l'equazione differenziale. Infine, l'espressione dell'evoluzione dell'uscita è immediatamente ottenibile ricordando che $y(t) = Cx(t) + Du(t)$. $\square$

---

se $F(x,t)$ è continua a tratti rispetto a t, globalmente Lipschitz rispetto a x nell'intervallo $[0, T]$ con $T > 0$, e se esiste un $h > 0$ tale che $\|F(x(0), t)\| \leq h$ per ogni $t \in [0, T]$ allora $\dot{x}(t) = F(x(t), t)$ ammette un'unica soluzione su $[0, T]$. Per soluzione si intende una funzione assolutamente continua che soddisfa

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t)$$

per quasi tutti i valori di t e soddisfa $x(0) = x_0$. L'assoluta continuità implica appunto che la derivata di $x(t)$ esista quasi ovunque. Questa soluzione viene detta di Carathèodory. Nel caso di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, tali ipotesi sono soddisfatte qualora $u(\cdot)$ sia continua a tratti.

È immediato verificare che anche nel caso LTI TC vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Osserviamo anche che, come per i sistemi LTI TD, anche per sistemi LTI TC la soluzione

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

consta di due contributi separati. Il primo contributo è dato dalle sole condizioni iniziali e viene detto **evoluzione libera**. Il secondo contributo è dato invece dal solo segnale d'ingresso e viene detto **evoluzione forzata**. Pertanto, se vogliamo determinare la soluzione per un generico stato iniziale x_0 e un generico segnale d'ingresso $u(\cdot)$, possiamo risolvere separatamente due sistemi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Si noti che questa è una conseguenza del *Principio di sovrapposizione degli effetti*. Studiare separatamente la risposta libera e forzata non è un'operazione necessaria ma semplifica l'analisi e la comprensione dei meccanismi che regolano l'evoluzione dei sistemi lineari.

Dall'espressione trovata però non risulta immediato capire quali siano le traiettorie che il sistema può generare. La soluzione dipende infatti dall'esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

e non è semplice comprendere quali funzioni corrispondano a questa espressione. Per rispondere a questa questione si ha la cosiddetta **analisi modale**. In breve, l'analisi modale è quella parte dell'analisi che serve ad esprimere l'esponenziale di matrice in modo tale da evidenziare quali sono le le traiettorie che il sistema può generare.

Considerazioni preliminari

Il calcolo dell'esponenziale di matrice è più semplice nel caso di matrici diagonali o comunque diagonalizzabili. In particolare, nel caso in cui la matrice A sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & a_n \end{bmatrix},$$

applicando la definizione di esponenziale di matrice è immediato verificare che l'esponenziale e^{At} è ancora una matrice diagonale del tipo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

Consideriamo adesso il caso in cui la matrice A non sia diagonale ma possa essere diagonalizzata mediante una opportuna matrice T invertibile, ossia

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

con Λ matrice diagonale degli autovalori di A

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Allora per una generica potenza di A abbiamo

$$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = \underbrace{T\Lambda T^{-1}T\Lambda T^{-1}\cdots T\Lambda T^{-1}}_{k \text{ volte}} = T\Lambda^k T^{-1}$$

e di conseguenza, sfruttando ancora una volta la definizione di esponenziale di matrice, possiamo scrivere

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T\Lambda^k T^{-1} t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right) T^{-1} = T\, e^{\Lambda t}\, T^{-1}$$

Essendo Λ diagonale abbiamo quindi

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

Quindi possiamo concludere che, per una matrice A diagonalizzabile, gli elementi dell'esponenziale e^{At} sono combinazione lineare (attraverso la pre-moltiplicazione per T e la post-moltiplicazione per T^{-1}) delle funzioni esponenziali $e^{\lambda_1 t}$, …, $e^{\lambda_n t}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalori della matrice A. Tuttavia occorre notare che non sempre trovare una trasformazione T che rende la matrice A diagonale è possibile (non tutte le matrici sono diagonaizzabili) e inoltre, anche quanto tale trasformazione T esiste, non è immediato trovarla. Nel corso utilizzeremo un metodo diverso per il calcolo della soluzione di un sistema LTI, e in particolare per il calcolo dell'esponenziale e^{At}, basato sulla cosiddetta **Trasformata di Laplace**.

2.2 Trasformata di Laplace

Vediamo adesso un approccio alternativo al calcolo della risposta. L'analisi precedente indica che il calcolo della risposta dipende dal calcolo dell'esponenziale di matrice, il quale può risultare laborioso. Da un punto di vista della pratica ingegneristica, in queste situazioni si cercano spesso strumenti che possano semplificare l'analisi. Per sistemi LTI TC, uno strumento molto importante è la cosiddetta *trasformata di Laplace*.

Data una funzione $f(t)$ causale[2], la sua trasformata di Laplace è definita nel seguente modo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

La trasformata di Laplace associa ad una funzione nel tempo $f(t)$ un'altra funzione $F(s)$ di variabile complessa $s = \sigma + j\omega$, ed essa risulta ben definita ogni volta che l'integrale esiste finito. Nel seguito dato un segnale nel tempo, indicheremo sempre con la corrispondente lettera maiuscola la sua trasformata di Laplace.

Esempio 2.1 (trasformata del gradino). Un esempio prototipale di segnale causale è il cosiddetto *gradino unitario* $1(t)$ definito come

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

Possiamo calcolare la trasformata del gradino applicando direttamente la definizione

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

Tale integrale converge per tutti gli s tali per cui l'esponenziale e^{-st} tende a 0 per t tendente a infinito. Ricordando che per l'esponenziale complesso vale $e^{-st} = e^{-\sigma t - j\omega t} = [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]e^{-\sigma t}$, allora si ha $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$ che tende a 0 per $t \to \infty$ se e solo se $\sigma > 0$. Di conseguenza la trasformata di Laplace del gradino unitario esiste per tutti gli $s = \sigma + j\omega$ tali che $\sigma > 0$ e, per tali valori di s, si ha

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

[2] Una funzione $f(t)$ si dice causale quando $f(t) = 0$ per $t < 0$.

Nel seguito, indicheremo semplicemente $\mathcal{L}\{1(t)\} = 1/s$ senza specificare il dominio di convergenza.

Illustriamo ora le principali proprietà di cui gode la trasformata di Laplace (per le dimostrazioni si rimanda a un qualunque testo di base di Automatica).

1. **Linearità**:
$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$
per ogni coppia di funzioni causali $f_1(\cdot)$ e $f_2(\cdot)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2 reali o complesse.

2. **Traslazione in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)$$
per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. **Derivata in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

4. **Derivata nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

5. **Integrazione nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

6. **Convoluzione nel tempo**: Dati due segnali causali $f(t)$ e $g(t)$ definiamo la loro convoluzione come $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$. La trasformata della convoluzione coincide con il prodotto delle trasformate
$$\mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\} = F(s)G(s)$$

Dalle proprietà 4 e 5 notiamo che la variabile di Laplace s può essere interpretata simbolicamente come un operatore di derivazione nel tempo, mentre la sua inversa $1/s$ può essere interpretata simbolicamente come un operatore di integrazione nel tempo. Come vedremo la trasformata di Laplace risulta estremamente utile nello studio dei sistemi LTI a tempo continuo proprio grazie alla proprietà 4. Infatti tale proprietà 4. consente di trasformare equazioni differenziali nel tempo in equazioni algebriche nel dominio di Laplace.

Sfruttando le proprietà 1-3 è possibile ottenere, a partire dalla trasformata del gradino unitario, tutte le trasformate dei segnali elementari riportate in Tabella 1. Si noti che nel seguito data una funzione $f(t) = g(t)1(t)$ a volte si scriverà semplicemente $f(t) = g(t)$ omettendo $1(t)$. Rimane inteso che tutte le funzioni considerate sono causali e quindi nulle per $t < 0$.

Esempio2.2 (trasformata dell'esponenziale). La trasformata dell'esponenziale $e^{at}\,1(t)$ si ottiene sfruttando la proprietà 2 con $f(t) = 1(t)$. Infatti
$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\, f(t)\right\} = F(s-a) = \frac{1}{s-a}$$
quando $f(t) = 1(t)$.

Esempio 2.3 (trasformata della sinusoide). La trasformata della sinusoide $\sin(\omega_0 t)\,1(t)$ si ottiene ricordando la formula di Eulero
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$
e applicando le proprietà 1 e 2. Infatti
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sin(\omega_0 t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\end{aligned}$$

Tabella 1: Trasformate di Laplace dei segnali elementari

SEGNALE	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$1(t)$	$1/s$
Rampa unitaria	$t\ 1(t)$	$1/s^2$
Rampa parabolica unitaria	$(t^2/2)1(t)$	$1/s^3$
Esponenziale	$e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)$
Sinusoide	$\sin(\omega_0 t)\ 1(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$
Cosinusoide	$\cos(\omega_0 t)\ 1(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$
Esponenziale×monomio	$(t^\ell/\ell!)\ e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)^{\ell+1}$

In modo del tutto analogo la trasformata della cosinusoide $\cos(\omega_0 t)\, 1(t)$ si può ottenere a partire dalla corrispondente formula di Eulero

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Esempio 2.4 (trasformata dell'esponenziale per monomio). La trasformata dei segnali del tipo $(t^\ell/\ell!)\, e^{at}\, 1(t)$ può essere ottenuta per induzione matematica. Infatti la formula in Tabella 1 vale chiaramente per $\ell = 0$ essendo $\mathcal{L}\left\{e^{at}\, 1(t)\right\} = 1/(s-a)$. Inoltre supponendo cha valga per un generico ℓ, allora è immediato verificare che vale anche per $\ell + 1$. Applicando la proprietà 3 si ha infatti

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\, e^{at}\, 1(t)\right\} &= \frac{1}{\ell+1}\mathcal{L}\left\{t\left(\frac{t^\ell}{\ell!}\, e^{at}\, 1(t)\right)\right\} = \frac{1}{\ell+1}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{t^\ell}{\ell!}\, e^{at}\, 1(t)\right\}\right) \\
&= -\frac{1}{\ell+1}\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-a)^{\ell+1}}\right) = \frac{1}{(s-a)^{\ell+2}}
\end{aligned}$$

2.3 Risposta libera e risposta forzata nel dominio di Laplace

Consideriamo ancora un sistema LTI TC

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}\right. \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

Indichiamo con $X(s)$, $U(s)$ e $Y(s)$ le trasformate di Laplace di stato, ingresso e uscita, rispettivamente. Applicando la trasformata di Laplace, l'equazione di transizione dello stato nel dominio trasformato diventa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\dot{x}(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{Ax(t) + Bu(t)\right\} \\
&\Downarrow \\
sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s)
\end{aligned}$$

dove l'espressione al primo membro risulta dall'applicazione della proprietà 4, mentre l'espressione al secondo membro è una diretta conseguenza della linearità della trasformata di Laplace. Si vede quindi

Tabella 2: Relazione tra dominio del tempo e di Laplace

	Evoluzione libera nello stato x_ℓ	**Risposta libera nell'uscita** y_ℓ	**Evoluzione forzata nello stato** x_f	**Risposta forzata nell'uscita** y_f
Tempo	$e^{At}\,x(0)$	$Ce^{At}\,x(0)$	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$	$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau + Du(t)$
Laplace	$(sI-A)^{-1}\,x(0)$	$C(sI-A)^{-1}\,x(0)$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$	$\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s)$

che l'equazione differenziale nell'incognita $x(t)$ è diventata nel dominio trasformato un'equazione algebrica nell'incognita $X(s)$. Ponendo $x(0) = x_0$ e risolvendo tale equazione algebrica rispetto al vettore incognito $X(s)$ si ottiene la forma della soluzione nel dominio trasformato

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

Notiamo che anche nel dominio trasformato la soluzione consta della somma di due contributi $X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$: un termine di evoluzione libera dello stato $X_\ell(s) = (sI-A)^{-1}x_0$ che dipende solo dalle condizioni iniziali; e un termine di evoluzione forzata dello stato $X_f(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$ che dipende solo dall'ingresso $U(s)$. Per quanto riguarda l'uscita, notando che $Y(s) = CX(s) + DU(s)$, otteniamo subito

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

dove possiamo evidenziare un termine $Y_\ell(s) = C(sI-A)^{-1}x_0$ di risposta libera e un termine $Y_f(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s)$ di risposta forzata. Si ha quindi lo schema riportato in Tabella 2 che lega le soluzioni nei due domini.

Si vede che la soluzione nel dominio del tempo coinvolge l'esponenziale di matrice e^{At} e l'integrale di convoluzione, mentre nel dominio di Laplace la soluzione coinvolge il termine $(sI-A)^{-1}$. Si ha infatti

$$\mathcal{L}\left\{e^{At}\right\} = (sI-A)^{-1}$$

dove risulta evidente l'analogia con la trasformata dell'esponenziale $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = 1/(s-a)$. Quindi un modo possibile per determinare l'esponenziale di matrice e^{At} consiste nel calcolare preliminarmente la matrice $(sI-A)^{-1}$ e quindi applicare la cosiddetta anti-trasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ che consente di ritornare nel dominio del tempo a partire da quello di Laplace

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

A questo proposito, notiamo che $(sI-A)$ è una matrice polinomiale, ovvero una matrice i cui elementi sono polinomi. Di conseguenza la matrice $(sI-A)^{-1}$ è una matrice i cui elementi sono funzioni razionali e può essere scritta come

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(sI-A)}{\varphi(s)}$$

con

$$\varphi(s) = \det(sI-A)$$

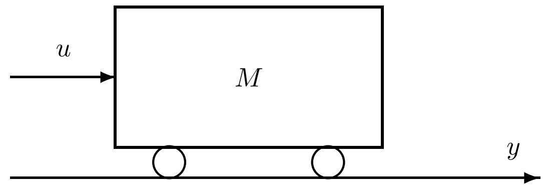
dove $\mathrm{Adj}(sI-A)$ è una matrice polinomiale di dimensione $n \times n$ detta matrice aggiogata, e dove $\varphi(s)$ è un polinomio detto **polinomio caratteristico** del sistema. Inoltre, le radici λ_i del polinomio caratteristico $\varphi(s)$ sono dette **autovalori** del sistema e coincidono con gli autovalori della matrice A. [3] A tal riguardo, vale il seguente fatto la cui dimostrazione è piuttosto laboriosa.

Fatto 2.3 Gli elementi della matrice $(sI-A)^{-1}$ sono funzioni razionali strettamente proprie, ossia tali che il grado del numeratore è sempre strettamente minore del grado del denominatore.

[3] In generale, il calcolo di $\mathrm{Adj}(sI-A)$ e di $\varphi(s)$ può essere complicato. Si ha un'espressione semplice nel caso $n = 2$. In questo caso, data una matrice M, vale

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Adj}(M) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \det(M) = ad - bc$$

Esempio 2.5 (Sistema meccanico). Considero il sistema meccanico in figura che descrive il moto di un carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$. Sia $y(t)$ la posizione del carrello al tempo t. Come visto, scegliendo come stato posizione e velocità



$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\, x(t) \end{aligned}$$

Posso calcolare l'evoluzione libera

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0)$$

passando attraverso il dominio di Laplace. Ponendo per semplicità $M = 1$ e $b = 1$ si ha

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che il polinomio caratteristico è $\varphi(s) = \det(sI - A) = s(s+1)$, di conseguenza si ha

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \mathrm{Adj}(sI - A) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \end{bmatrix}$$

Le antitrasformate dei termini sulla diagonale si ottengono subito dalla Tabella 1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} &= 1(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} &= e^{-t}\, 1(t) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il termine rimanente, si può procedere cercando di riportarsi alle anti-trasformate delle funzioni elementari mediante una scomposizione in fratti semplici. In particolare, osservando che

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

dalla linerarità dell'operatore anti-trasformata di Laplace si ottiene subito

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1(t) - e^{-t}\, 1(t)$$

Quindi, per $t \geq 0$, l'esponenziale di matrice per il sistema meccanico considerato risulta essere

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

e l'evoluzione libera dello stato assume quindi la forma

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) + (1 - e^{-t})\, x_2(0) \\ e^{-t}\, x_2(0) \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = y(0)$ posizione iniziale del carrello e $x_2(0) = \dot{y}(0)$ velocità iniziale. I corrispondenti andamenti sono riportati in Figura 1.

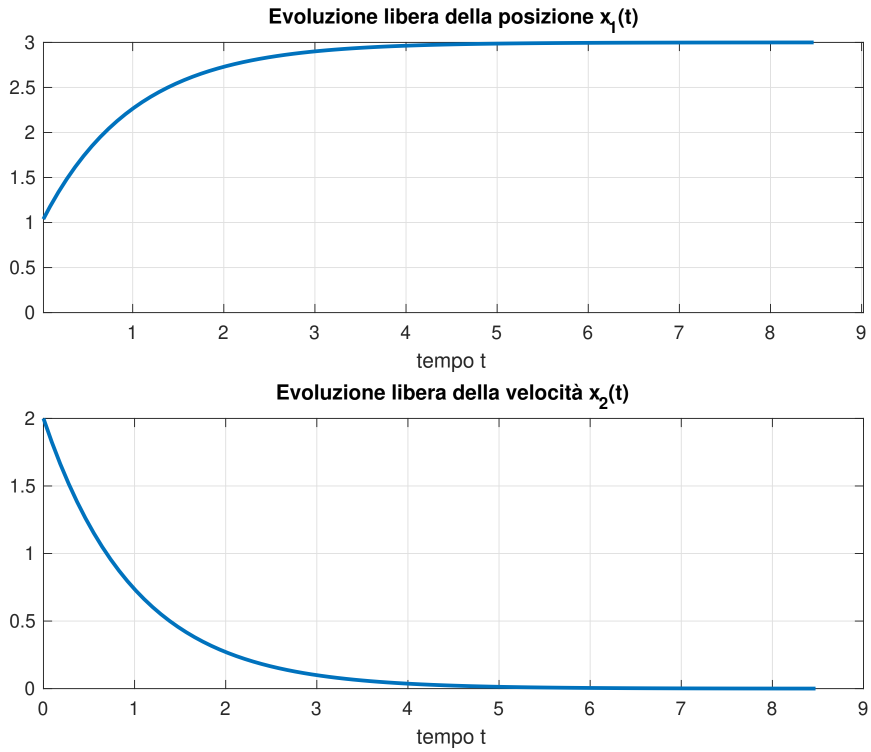


Figura 1: Evoluzione libera di posizione $x_1(t)$ e velocità $x_2(t)$ nel sistema meccanico in figura in risposta alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$.