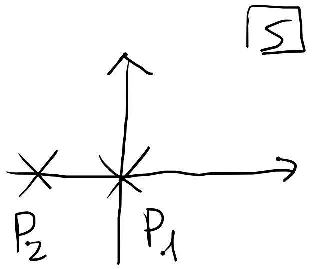
D3. $G(s) = \dfrac{s+4}{2s+s^2}$ $\qquad\qquad \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = ?$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$G(s) = \dfrac{s+4}{s(s+2)}$



$e(s) = s(s+2)$ $\qquad$ poli $\underbrace{p_1 = 0}_{\text{modo di evoluzione } 1(t) \text{ limitato}}$ $\qquad \underbrace{p_2 = -2}_{\text{modo di evoluzione convergente}}$ $\quad e^{-2t}1(t)$

tutti poli con Re < 0 e un polo in 0 di molteplicità 1

$\Rightarrow$ possiamo applicare il teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{s+4}{\cancel{s}(s+2)} = 2$$

NB: il limite coincide con il residuo del polo in 0

D4. $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2+s} = \dfrac{s-1}{s(s+1)}$ $u(t) = [2 + \cos(2t)]\,1(t)$ $\lim_{t\to\infty} y_f(t) = ?$

$Y_f(s) = G(s)\,U(s)$ $U(s) = \mathcal{L}\{[2+\cos(2t)]\,1(t)\} = \mathcal{L}\{2\cdot 1(t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\cdot 1(t)\}$

$$= \frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y_f(s) = \frac{s-1}{s^2+s}\left(\frac{2}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s-1}{s^2+s}\cdot\frac{2}{s} + \frac{s-1}{s^2+s}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \underbrace{2\frac{s-1}{s^2(s+1)}}_{\text{risposta forzata a } 2\cdot 1(t)} + \underbrace{\frac{s-1}{(s+1)(s^2+4)}}_{\text{risposta forzata a } \cos(2t)\cdot 1(t)}$$

$2\dfrac{s-1}{s^2(s+1)}$ ha come poli 0 di molteplicità 2 $\Rightarrow$ modi di evoluzione $1(t)$, $t\cdot 1(t)$

-1 di molteplicità 1 $\Rightarrow$ modo di evoluzione $e^{-t}\cdot 1(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{2\dfrac{s-1}{s^2(s+1)}\right\} = k_1 e^{-t} 1(t) + K_{21}\, 1(t) + K_{22}\, t\cdot 1(t)$ modo di evoluzione divergente

$\Rightarrow$ la risposta forzata è divergente. NB il modo di evoluzione $t\cdot 1(t)$ è sicuramente presente perché non può essere cancellato ($Y_f(s)$ ha un polo doppio in 0)

D5. $\ddot{y} = -2\dot{y} - 5y + 3\ddot{u}$ modi naturali?

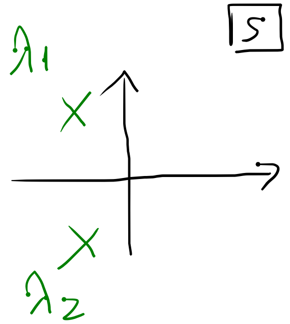
Per sistemi in rappresentazione ingresso / uscita

$m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0$ dove

$$\ddot{y} = \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$$

$\alpha_1 = -2$

$\alpha_0 = -5$



$m(s) = s^2 + 2s + 5$

autovalori in $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$ con molteplicità $m_1 = m_2 = 1$

$\Rightarrow$ modi di evoluzione

$e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t)$, $e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t)$

$e^{-t} \sin(2t)$, $e^{-t} \cos(2t)$

D6. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 4\dot{u}$ modi naturali?

$\ddot{y} = -4\dot{y} - 4y + 4\dot{u}$

$m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$

autovalori in $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\mu_1 = m_1 = 2$

$\Rightarrow$ modi di evoluzione

$e^{\lambda_1 t}$, $t\,e^{\lambda_1 t}$

e^{-2t}, $t\,e^{-2t}$

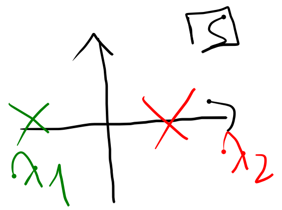
D7.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - u \\ y = x_1 + u \end{cases}$$

stabilità interna e esterna?

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 1$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = (s+2)(s-1)$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \mu_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 1 \qquad \mu_2 = 1$$



$\exists$ autovalore con Re > 0 $\Rightarrow$ sistema internamente instabile

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{\varphi(s)} \overbrace{C \, Adj(sI-A) B}^{n(s)} + D$$

$$n(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = s-1$$

$$G(s) = \frac{n(s)}{\varphi(s)} + D = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)}(s+2)} + 1 = \frac{1}{s+2} + 1 = \frac{s+3}{s+2}$$

polo in $p_1 = -2$ di molteplicità $\nu_1 = 1$

tutti poli con Re < 0 $\Rightarrow$ sistema esternamente stabile

D9.

$$-\ddot{y} + 9y = \dot{u} - 3u$$

esistono ingressi limitati tali da far divergere la risposta forzata $y_f(t)$?

$\Updownarrow$

il sistema non è esternamente stabile

$$\ddot{y} = \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y + \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u$$

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{-s+3}{s^2 - 9}$$

$$-\ddot{y} = -9y + \dot{u} - 3u \qquad \ddot{y} = 9y - \dot{u} + 3u$$

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_0 = 9 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_1 = -1 \quad \beta_0 = 3$$

$$G(s) = \frac{-\cancel{(s-3)}}{(s+3)\cancel{(s-3)}} = -\frac{1}{s+3}$$

polo in -3 con $Re < 0$ $\Rightarrow$ sistema esternamente stabile

$\Rightarrow$ non esistono ingressi limitati tale da far divergere $y_f(t)$

D10. $\ddot{y} + 10\,y = \dot{u} + 2u$ esistono ingressi limitati tali che fan divergere $y_f(t)$?

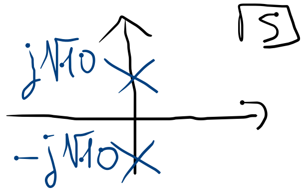
$$\ddot{y} = -10\,y + \dot{u} + 2u$$

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{s+2}{s^2+10}$$

$$e(s) = s^2 + 10$$

$$e(s) = s^2 + 10 = 0 \iff s = \pm\sqrt{-10} = \pm j\sqrt{10}$$

poli in $\pm j\sqrt{10}$



non tutti poli con Re < 0 $\Rightarrow$ sistema non esternamente stabile

$\Rightarrow$ esistono ingressi limitati che fanno divergere $y_f(t)$

come visto nella dimostrazione sulla stabilità esterna, in presenza di poli puramente immaginari $\pm j\omega_0$ l'ingresso limitato che fa divergere l'uscita è ad esempio $\sin(\omega_0 t)\cdot 1(t)$ che va in risonanza con i poli di $G(s)$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+10} \qquad u(t) = \sin(\sqrt{10}\,t)\,1(t) \qquad U(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\sqrt{10}}{s^2+10}$$

$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = \frac{s+2}{s^2+10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{s^2+10} = \frac{\sqrt{10}\,(s+2)}{(s^2+10)^2}$$

modi di evoluzione $\sin(\sqrt{10}\,t)$, $\cos(\sqrt{10}\,t)$ limitati

$t\sin(\sqrt{10}\,t)$, $t\cos(\sqrt{10}\,t)$ divergenti

DM. $\dot{x} = 2 - u x$ calcolare punti di equilibrio e studiarne la stabilità

$\dot{x} = f(x, u)$

(x_e, u_e) equilibrio $\Leftrightarrow$ $f(x_e, u_e) = 0$ $\Leftrightarrow$ $2 - u_e x_e = 0$

Dato u_e abbiamo $x_e = \dfrac{2}{u_e}$

$u_e = 0$ non c'è stato di equilibrio

$u_e \neq 0$ stato di equilibrio $x_e = \dfrac{2}{u_e}$

$$A_e = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2 - u x) = -u \Big|_{x = x_e,\, u = u_e} = -\frac{2}{u_e}$$

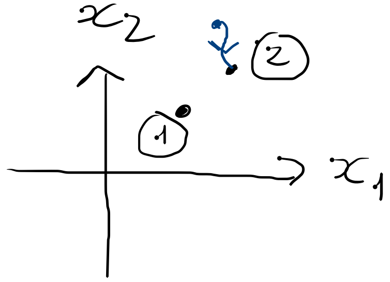
A_e ha come unico autovalore $-\dfrac{2}{u_e}$

$u_e > 0$ $\quad -\dfrac{2}{u_e} < 0 \Rightarrow A_e$ con autovalori e $Re < 0 \Rightarrow$ equilibrio localmente asintoticamente stabile

$u_e < 0$ $\quad -\dfrac{2}{u_e} > 0 \Rightarrow A_e$ ha un autovalore con $Re > 0 \Rightarrow$ equilibrio internamente instabile

D12.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - 2)(1 - x_2) \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

equilibri? stabilità?



$$\dot{x} = f(x) \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} \overset{f_1}{x_2 - x_1} \\ \underset{f_2}{(x_1 - 2)(1 - x_2)} \end{bmatrix}$$

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} \text{ equilibrio } \iff f(x_e) = 0 \iff \begin{cases} x_{e2} - x_{e1} = 0 \\ (x_{e1} - 2)(1 - x_{e2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{e1} = 2 \quad \text{oppure} \quad x_{e2} = 1 \\ x_{e1} = x_{e2} \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)(1 - x_2) = x_1 - x_1 x_2 - 2 + 2x_2$$

equilibri ① $x_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $x_e = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 - x_2 & -x_1 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1-x_2 & -x_1+2 \end{bmatrix}$$

1 $\quad x_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1) \qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$$

sistema linearizzato con autovalore e $Re > 0$ $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile

2 $\quad x_e = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\varphi_e(s) = \det(sI - A_e) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = (s+1)\,s + 1 = s^2 + s + 1$$

Per Cartesio $\varphi_e(s) = s^2+s+1$ ha tutte radici con $Re < 0$ (tutti coefficienti concordi)

sistema linearizzato asintoticamente stabile $\Rightarrow$ equilibrio localmente asintoticamente stabile

D13 :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Per quali condizioni iniziali $y_e(t)$ è limitata?

$$y_e(t) = C e^{At} x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ C (sI - A)^{-1} x(0) \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix} = (s-1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow$ modo di evoluzione e^{t} divergente

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow$ " e^{-2t} convergente

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI - A) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \operatorname{Adj}(sI-A) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$Y_e(s) = C(sI-A)^{-1} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2+6 & 2\cdot(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+8 & 2(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+8)x_1(0) + 2(s-1)x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s+8}{(s-1)(s+2)} \cancel{x_1(0)} + \frac{2}{(s+2)} x_2(0) \implies$$

Per avere $y_e(t)$ limitata devo avere $x_1(0) = 0$

modi di evoluzione e^{t}, e^{-2t}
$\Rightarrow$ segnale divergente

modo di evoluzione e^{-2t}
$\Rightarrow$ segnale convergente (e quindi limitato)