Fondamenti di Automatica

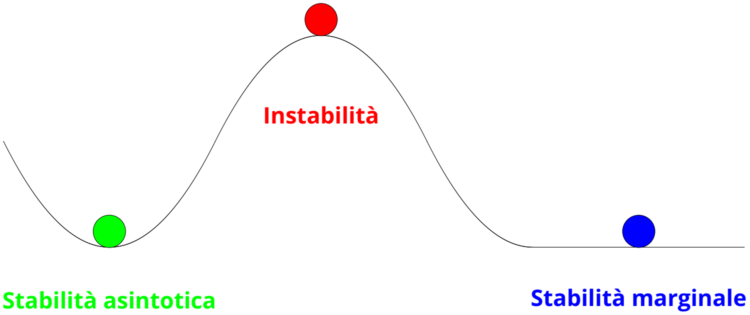
Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

2 Analisi dei sistemi dinamici

2.11 Stabilità nei sistemi non lineari

Stabilità nei sistemi non lineari



- **Per sistemi lineari:** proprietà di stabilità hanno carattere **globale**
  - non dipendono dalla traiettoria considerata (**stabilità del sistema**)
  - non dipendono dall'ampiezza della perturbazione
- **Per sistemi non lineari:** proprietà di stabilità hanno carattere **locale**
  - dipendono dalla traiettoria considerata (**stabilità della traiettoria**)
  - dipendono dall'ampiezza della perturbazione

Punti di equilibrio

- Consideriamo un sistema TI TC

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

- Studiamo la stabilità di una particolare classe di traiettorie del sistema: i **punti di equilibrio**

Definizione: Si definisce **punto di equilibrio** una coppia (x_e, u_e) tale che

$$\begin{array}{rcl} x(0) &=& x_e \\ u(t) &=& u_e, \quad \forall t \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

- punto di equilibrio $=$ **traiettoria costante** del sistema
- Dato un punto di equilibrio (x_e, u_e) definiamo l'**uscita di equilibrio**

$$y_e = h(x_e, u_e)$$

Punti di equilibrio

Fatto 2.16 I punti di equilibrio sono tutte e sole le coppie (x_e, u_e) tali che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

- **Dimostrazione:**
  - Supponiamo che il sistema si trovi in $x(t) = x_e$ e si applichi l'ingresso $u(t) = u_e$
  - Lo stato non cambia (soluzione costante) $\quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(t) = 0$
  - Notiamo che

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))|_{x(t)=x_e, u(t)=u_e} = f(x_e, u_e)$$

  - Di conseguenza

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_e, u_e) = 0$$

- **Per sistemi autonomi:** x_e equilibrio $\quad \Leftrightarrow \quad f(x_e) = 0$

Calcolo degli equilibri: esempio scalare

- Consideriamo il sistema non lineare scalare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) - u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

- Gli equilibri del sistema sono le soluzioni dell'equazione

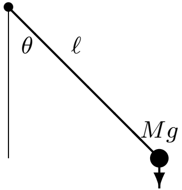
$$f(x_e, u_e) = x_e^2 - u_e = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x_e^2 = u_e$$

- Possiamo quindi distinguere tre casi:
  - per $u_e < 0$ nessun stato di equilibrio
  - per $u_e = 0$ un unico stato di equilibrio $x_e = 0$
  - per $u_e > 0$ due stati di equilibrio $\pm\sqrt{u_e}$

Nota: Dobbiamo considerare solo le **soluzioni reali** perché x_e e u_e possono assumere solo valori reali

Calcolo degli equilibri: esempio del pendolo

- Pendolo di massa M e lunghezza ℓ
- θ angolo tra il pendolo e la verticale
- c coefficiente di attrito viscoso
- g accelerazione di gravità



- Modello di sistema meccanico con dinamica rotazionale (esempio: braccio robotico con 1 grado dil libertà)
- Dall'equazione di Newton (lungo la direzione tangente al moto)

$$M\,\ell\,\ddot{\theta} = -M\,g\sin\theta - c\,\ell\,\dot{\theta}$$

dove

  - $-M\,g\sin\theta$ componente della forza peso tangenziale al moto
  - $-c\,\ell\,\dot{\theta}$ forza di attrito viscoso che si oppone al moto

Calcolo degli equilibri: esempio del pendolo

- **Rappresentazione ingresso/uscita**

$$M\,\ell\,\ddot{y} = -M\,g\sin y - c\,\ell\,\dot{y}$$

prendendo come uscita l'angolo $y = \theta$

- Scegliamo come stato angolo e velocità angolare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

- **Equazioni di stato**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin y - \frac{c}{M}\,\dot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{c}{M}\,x_2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

- Sistema autonomo non lineare TI TC

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Calcolo degli equilibri: esempio del pendolo

- **Equazione di transizione dello stato**

$$\dot{x} = f(x)$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{c}{M}\,x_2 \end{bmatrix}$$

- x_e punto di equilibrio $\quad\Leftrightarrow\quad f(x_e) = 0$

$$f(x_e) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_{e,2} = 0 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_{e,1} - \frac{c}{M}\,x_{e,2} = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_{e,2} = 0 \\ \sin x_{e,1} = 0 \end{cases}$$

- **Punti di equilibrio**

$$x_e = \begin{bmatrix} k\,\pi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

- k pari $\quad\Rightarrow\quad$ pendolo nella posizione verticale in basso con velocità nulla
- k dispari $\quad\Rightarrow\quad$ pendolo nella posizione verticale in alto con velocità nulla

Mappa di transizione globale

- Consideriamo un sistema TI TC

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{aligned}$$

- Dati
  - condizione iniziale $x(0) = x_0$
  - segnale di ingresso $u(t)$, $t \geq 0$

  indichiamo la risposta nello stato al tempo t con la notazione

$$x(t) = \Phi(t, x_0, u)$$

- $\Phi(t, x_0, u)$ è detta **mappa di transizione globale dello stato**
- Se (x_e, u_e) punto di equilibrio vale

$$\Phi(t, x_e, u_e) = x_e \qquad \forall t \geq 0$$

Stabilità interna dei punti di equilibrio

- Studiamo la **stabilità interna dei punti di equilibrio** considerando una perturbazione della condizione iniziale
- Consideriamo come **traiettoria nominale** quella costante corrispondente al punto di equilibrio (x_e, u_e)

$$x(t) = \Phi(t, x_e, u_e) = x_e$$

- Consideriamo una condizionale iniziale perturbata $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$ e la corrispondente **traiettoria perturbata**

$$x(t) = \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e)$$

- **effetto della perturbazione** $=$ traiettoria perturbata $-$ traiettoria nominale

$$\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - \Phi(t, x_e, u_e) = \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - x_e$$

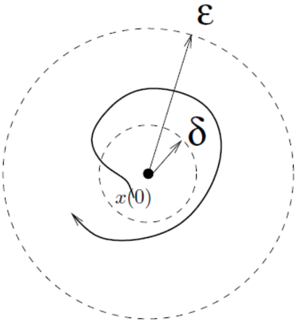
Nota: La quantità

$$\|\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - x_e\|$$

misura la distanza tra la traiettoria perturbata e lo stato di equilibrio x_e

Stabilità alla Lyapunov

- $\tilde{x}_0 = x(0) - x_e$ perturbazione delle condizioni iniziali di equilibrio
- **Stabilità alla Lyapunov** $\Leftrightarrow$ perturbazioni sufficientemente piccole delle condizioni iniziali danno luogo a perturbazioni arbitrariamente piccole delle traiettorie
- **Proprietà locale**, valida nell'intorno della traiettoria di equilbrio considerata



Definizione: L'equilibrio (x_e, u_e) si dice **stabile alla Lyapunov** se comunque si fissa un $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Attrattività

- **Attrattività** $\Leftrightarrow$ a fronte di perturbazioni delle condizioni iniziali le traiettorie tendono a ritornare nello stato di equilibrio
- L'attrattività può essere **locale** o **globale**

Definizione: L'equilibrio (x_e, u_e) si dice

- **Localmente attrattivo** se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) = x_e$$

- **Globalmente attrattivo** se per qualunque perturbazione $\tilde{x}_0$ vale

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t, x_e + \tilde{x}_0, u_e) = x_e$$

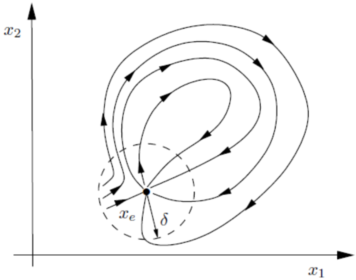
Stabilità interna dei punti di equilibrio – osservazioni

- Per sistemi non lineari in generale la stabilità è un **proprietà locale** $\Rightarrow$ possono coesistere equilibri stabili e instabili

- Per sistemi non lineari stabilità alla Lyapunov e attrattività sono **concetti indipendenti**

  - Stabilità alla Lyapunov $\not\Rightarrow$ attrattività
    Esempio:
    $$\dot{x} = 0$$
    tutti gli stati sono equilibri stabili ma non attrattivi perché $x(t) = x(0) \quad \forall t \geq 0$

  - Attrattività $\not\Rightarrow$ stabilità alla Lyapunov (quando le traiettorie si allontanano sempre dall'equilibrio prima di tornarci, vedi figura)



Stabilità interna dei punti di equilibrio

Definizione (Stabilità interna di un equilibrio):
L'equilibrio (x_e, u_e) si dice:

- **Localmente asintoticamente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov e localmente attrattivo.
- **Globalmente asintoticamente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov e globalmente attrattivo.
- **Marginalmente stabile**
  se è stabile alla Lyapunov ma non attrattivo.

- Per studiare la stabilità di un equilibrio
  - **Metodo diretto:** ricerca di una **funzione di Lyapunov**
    idea: funzione di Lyapunov misura l'energia immagazzinata nel sistema
    equilibrio asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ punto di minimo dell'energia
  - **Metodo indiretto: linearizzazione** del sitema nell'intorno dell'equilibrio

Punti di equilibrio nei sistemi LTI

Nota: possiamo rivisitare i concetti di stabilità interna visti per sistemi LTI in termini di stabilità degli equilibri.

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- Funzione di transizione dello stato $f(x,u) = Ax + Bu$
- (x_e, u_e) punto di equilibrio $\quad \Leftrightarrow \quad f(x_e, u_e) = Ax_e + Bu_e = 0$
- Dato un segnale di ingresso **costante**

$$u(t) = u_e \qquad \forall t \geq 0$$

i corrispondenti stati di equilibrio sono le soluzioni del **sistema di equazioni lineari**

$$A\,x_e = -B\,u_e$$

Punti di equilibrio nei sistemi LTI

- Ingresso costante $u(t) = u_e$ per $t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ stati di equilibrio soluzioni di

$$A\,x_e = -B\,u_e$$

- Per sistemi LTI $x_e = 0$ e $u_e = 0$ è **sempre** un punto di equilibrio (corrisponde alla situazione di quiete in cui il sistema rimane nello stato 0)

Quando A **invertibile**, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un **unico** stato di equilibrio

$$x_e = -A^{-1}\,B\,u_e$$

- Ricordiamo che

$$A \text{ invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ non ha autovalori in } 0$$

Stabilità dei punti di equilibrio nei sistemi LTI

- Per un sistema LTI, stabilità asintotica $\Leftrightarrow$ tutti autovalori di A con Re < 0
- Di conseguenza, stabilità asintotica $\Rightarrow$ A invertibile
- Per un sistema LTI asintoticamente stabile, ad un ingresso costante $u(t) = u_e$, corrisponde un **unico** stato di equilibrio

$$x_e = -A^{-1}\, B\, u_e$$

- Per sistemi LTI la stabilità è una proprietà globale
  $\Rightarrow$ Per un sistema LTI asintoticamente stabile, l'equilibrio $x_e = -A^{-1}\, B\, u_e$ risulta essere **globalmente asintoticamente stabile**

Per un sistema LTI TC **asintoticamente stabile** si ha che

$$u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e = -A^{-1}\, B\, u_e \\ &\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_e = (-CA^{-1}\, B + D)\, u_e \end{aligned}$$

Metodo indiretto (della linearizzazione di Lyapunov)

Idea: si approssima il comportamento del sistema non lineare nell'intorno dell'equilibrio (x_e, u_e) con quello di un sistema LTI ottenuto **linearizzando** le funzioni f e h

- Ricordiamo che per una funzione scalare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con continuità, nell'intorno di un punto x_e vale

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_e} (x - x_e) + R(x - x_e)$$

con $R(x - x_e)$ resto di Taylor

- Nell'intorno di x_e possiamo approssimare la funzione f con la **retta tangente**

$$f(x) \approx f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_e} (x - x_e)$$

- L'approssimzione può essere estesa a funzioni di più variabili considerando la **matrice Jacobiana** delle derivate parziali

Matrice Jacobiana

- Consideriamo una funzione $f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- **Matrice Jacobiana** delle derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dove f_i indica l'i-esima componente di f e x_j indica la j-esima componente di x

- Per sistemi non autonomi con $f(x, u)$, possiamo definire una matrice Jacobiana anche rispetto all'ingresso $u \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

- Consideriamo un punto di equilibrio (x_e, u_e)
- Linearizzando $f(x,u)$ nell'intorno dell'equilibrio abbiamo

$$f(x,u) \approx f(x_e,u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (x - x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (u - u_e)$$

- Linearizzando $h(x,u)$ nell'intorno dell'equilibrio abbiamo

$$h(x,u) \approx h(x_e,u_e) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (x - x_e) + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} (u - u_e)$$

- Approssimazione tanto migliore quanto più siamo vicini al punto di equilibrio. In particolare, errore di approssimazione tende a zero per $x \to x_e$ e $u \to u_e$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

- Definiamo

$$
\begin{aligned}
A_e &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} & B_e &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} \\
C_e &= \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} & D_e &= \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ l'approssimazione diventa

$$
\begin{aligned}
f(x,u) &\approx f(x_e,u_e) + A_e(x-x_e) + B_e(u-u_e) \\
h(x,u) &\approx h(x_e,u_e) + C_e(x-x_e) + D_e(u-u_e)
\end{aligned}
$$

- Ricordiamo che per un punto di equilibrio (x_e, u_e) vale

$$
\begin{aligned}
f(x_e,u_e) &= 0 \\
h(x_e,u_e) &= y_e
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ l'approssimazione diventa

$$
\begin{aligned}
f(x,u) &\approx A_e(x-x_e) + B_e(u-u_e) \\
h(x,u) &\approx y_e + C_e(x-x_e) + D_e(u-u_e)
\end{aligned}
$$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

- Consideriamo gli scostamenti rispetto all'equilibrio

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) - x_e \qquad \tilde{u}(t) = u(t) - u_e \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - y_e \end{aligned}$$

- Effettuando la linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \approx y_e + C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

- Notiamo che

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}(x(t) - x_e) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Dinamica linearizzata nell'intorno dell'equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= A_e\,\tilde{x}(t) + B_e\,\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C_e\,\tilde{x}(t) + D_e\,\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

Metodo indiretto (della linearizzazione di Lyapunov)

Teorema 2.5 (Metodo della linearizzazione di Lyapunov) Consideriamo la matrice A_e del sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio (x_e, u_e).

a. Se tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale < 0
   $\Rightarrow$ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile
b. Se almeno un autovalore di A_e ha parte reale > 0
   $\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile
c. (**caso critico**) Se invece tutti gli autovalori di A_e hanno parte reale ≤ 0 **AND** almeno un autovalore a parte reale $= 0$ $\Rightarrow$ non si può concludere nulla

- Il Teorema 2.5 ha un carattere **locale**: non specifica quanto sia grande la perturbazione che si può tollerare (**dominio di attrazione**)
- Nel caso critico la linearizzazione non è sufficiente per concludere sul comportamento del sistema nell'intorno dell'equilibrio
  $\Rightarrow$ dobbiamo usare altre tecniche (esempio: metodo diretto)

Studio della stabilità degli equilibri: esempio scalare

- Consideriamo il sistema non lineare scalare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) - u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

- Possiamo distinguere tre casi:
  - per $u_e < 0$ nessun stato di equilibrio
  - per $u_e = 0$ un unico stato di equilibrio $x_e = 0$
  - per $u_e > 0$ due stati di equilibrio $\pm\sqrt{u_e}$
- Per studiare la stabilità degli equilibri linearizziamo $f(x,u) = x^2 - u$
- Per l'equilibrio $(x_e, u_e) = (0,0)$ vale

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(0,0)} = 2\,x\Big|_{x=0} = 0$$

$\Rightarrow$ $A_e = 0$ ha autovalore $\lambda_1 = 0$

$\Rightarrow$ siamo nel **caso critico** e il metodo della linearizzazione non consente di concludere

Studio della stabilità degli equilibri: esempio scalare

- Per gli equilibri $(x_e, u_e) = (\sqrt{u_e}, u_e)$ con $u_e > 0$ vale

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(\sqrt{u_e},u_e)} = 2\,x\Big|_{x=\sqrt{u_e}} = 2\sqrt{u_e}$$

$\Rightarrow$ $A_e = 2\sqrt{u_e}$ ha autovalore $\lambda_1 = 2\sqrt{u_e}$
$\Rightarrow$ A_e ha almeno un autovalore con Re > 0
$\Rightarrow$ equilibrio internamente instabile

- Per gli equilibri $(x_e, u_e) = (-\sqrt{u_e}, u_e)$ con $u_e > 0$ vale

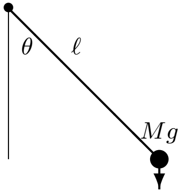
$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(-\sqrt{u_e},u_e)} = 2\,x\Big|_{x=-\sqrt{u_e}} = -2\sqrt{u_e}$$

$\Rightarrow$ $A_e = -2\sqrt{u_e}$ ha autovalore $\lambda_1 = -2\sqrt{u_e}$
$\Rightarrow$ A_e ha tutti autovalori con Re < 0
$\Rightarrow$ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile

Nota: per un sistema scalare $dim(x) = 1$, esiste un unico autovalore coincidente con A_e

Studio della stabilità degli equilibri: esempio del pendolo

- Pendolo di massa M e lunghezza ℓ
- θ angolo tra il pendolo e la verticale
- c coefficiente di attrito viscoso
- g accelerazione di gravità



- Scegliamo come stato angolo e velocità angolare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

- **Equazioni di stato**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin y - \frac{c}{M}\dot{y} = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{c}{M}x_2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Studio della stabilità degli equilibri: esempio del pendolo

- **Punti di equilibrio**

$$x_e = \begin{bmatrix} k\,\pi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

k pari $\Rightarrow$ pendolo nella posizione verticale in basso con velocità nulla
k dispari $\Rightarrow$ pendolo nella posizione verticale in alto con velocità nulla

- Per studiare la stabilità degli equilibri linearizziamo

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\,\sin x_1 - \frac{c}{M}\,x_2 \end{bmatrix}$$

- **Matrice Jacobiana**

$$\begin{aligned} A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_{e,1},x_2=x_{e,2}} \\ &= \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\,\cos x_{e,1} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}\right|_{x_1=k\,\pi,x_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\,\cos(k\,\pi) & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Studio della stabilità degli equilibri: esempio del pendolo

- Per k pari (pendolo nella posizione verticale in basso con velocità nulla)

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \varphi(s) = \det(sI - A_e) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{\ell} & s + \frac{c}{M} \end{bmatrix} \\ &= s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{g}{\ell} \end{aligned}$$

- Tutti coefficienti positivi (poiché $c > 0$, $M > 0$, $g > 0$)
  $\Rightarrow$ per la regola di Cartesio, entrambe le radici con Re < 0
  $\Rightarrow$ punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile

La posizione verticale in basso con velocità nulla corrisponde a un equilibrio (localmente) **asintoticamente stabile**.

Studio della stabilità degli equilibri: esempio del pendolo

- Per k dispari (pendolo nella posizione verticale in alto con velocità nulla)

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \varphi(s) = \det(sI - A_e) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{g}{\ell} & s + \frac{c}{M} \end{bmatrix} \\ &= s^2 + \frac{c}{M} s - \frac{g}{\ell} \end{aligned}$$

- Una variazione di segno (poiché $c > 0$, $M > 0$, $g > 0$)
  $\Rightarrow$ per la regola di Cartesio, una radice con Re > 0
  $\Rightarrow$ punto di equilibrio internamente instabile

La posizione verticale in alto con velocità nulla corrisponde a un equilibrio **internamente instabile**.