Fondamenti di automatica

Esercizi di riepilogo sul controllo in retroazione sullo stato

Esercizio 1

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 4\,x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha\, u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di α;

b) Si calcoli X_r sottospazio degli stati raggiungibili per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/2$;

c) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;

d) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$;

e) Per $\alpha = 0$ progettare, se esiste, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°;

f) Per il sistema in ciclo chiuso ottenuto al punto e), determinare la risposta forzata nel caso di un riferimento a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ evidenziando transitorio e regime permanente.

Esercizio 2

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2\,x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 + \alpha\, u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di α;

b) Si calcoli X_r sottospazio degli stati raggiungibili per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$;

c) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;

d) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$;

e) Per $\alpha = 0$ progettare, se esiste, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°;

f) Per il sistema in ciclo chiuso ottenuto al punto e), determinare il regime permanente in risposta al riferimento $y^\circ(t) = [5 + 3\sin(t)]\,1(t)$.

Esercizio 3

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& \alpha\, u \\ \dot{x}_2 &=& x_1 + x_2 + u \\ y &=& x_2 \end{cases}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di α;

b) Si calcoli X_r sottospazio degli stati raggiungibili per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$;

c) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;

d) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$;

e) Per $\alpha = 0$ progettare, se esiste, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Esercizio 4

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -9\,x_2 + \alpha\,u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di α;

b) Si calcoli X_r sottospazio degli stati raggiungibili per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$;

c) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;

d) Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$;

e) Per $\alpha = 0$ progettare, se esiste, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che garantisca stabilità asintotica in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante y°.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -4 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 4 = (s+2)(s-2)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$.
Per studiare la controllabilità al variare di α calcolo la matrice $(sI - A)^{-1}B$. In questo caso si ha

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

e quindi

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)}\mathrm{Adj}(sI - A)B = \frac{1}{(s+2)(s-2)} \begin{bmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s-2)} \begin{bmatrix} s + 4\alpha \\ \alpha s + 1 \end{bmatrix}$$

Devo ora andare a studiare per quali valori di α si verifichiano semplificazioni tra numeratore e denominatore negli elementi di $(sI - A)^{-1}B$. In particolare, si hanno 3 casi.

- Per $\alpha = \frac{1}{2}$ il termine $s + 2$ si semplifica in quanto

  $$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2)(s-2)} \begin{bmatrix} s+2 \\ \frac{1}{2}(s+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} \end{bmatrix}$$

  Quindi, per $\alpha = \frac{1}{2}$, si ha $\varphi_c(s) = s - 2$ e solo l'autovalore $\lambda_2 = 2$ risulta controllabile.
- Per $\alpha = -\frac{1}{2}$ il termine $s - 2$ si semplifica in quanto

  $$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2)(s-2)} \begin{bmatrix} s-2 \\ -\frac{1}{2}(s-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

  Quindi, per $\alpha = -\frac{1}{2}$, si ha $\varphi_c(s) = s + 2$ e solo l'autovalore $\lambda_1 = -2$ risulta controllabile.
- Per $\alpha \neq \pm\frac{1}{2}$ invece non ci sono semplificazioni e quindi $\varphi_c(s) = \varphi(s) = (s+2)(s-2)$ e entrambi gli autovalori sono controllabili.

b) Come visto al punto a), per $\alpha = 0$ il sistema è completamente controllabile e di conseguenza completamente raggiungibile (ovvero tutti gli stati sono raggiungibili mediante un'opportuna scelta della legge di controllo). Senza fare calcoli posso quindi concludere che $X_\mathrm{r} = \mathbb{R}^2$.
Per $\alpha = 1/2$ invece ho un autovalore non controllabile e di conseguenza non tutti gli stati sono raggiungibili. Per determinare X_r devo calcolare la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} B & A\,B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Come previsto (in questo caso il sistema non è completamente raggiungibile) la matrice non ha rango pieno (le due colonne sono linearmente dipendenti). Il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice $\mathcal{R}$, in questo caso

$$X_\mathrm{r} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1/2 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato se e solo se tutti gli autovalori non controllabili sono asintoticamente stabili. Devo quindi distinguere 3 casi. Quando $\alpha \neq \pm 1/2$ il sistema è completamente controllabile e quindi non ci sono autovalori non controllabili. In questo caso chiaramente il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato.
Quando $\alpha = 1/2$ soltanto l'autovalore $\lambda_2 = 2$ è controllabile e quindi $\lambda_1 = -2$ è non controllabile. Poiché tale autovalore ha $\mathrm{Re} < 0$ posso comunque stabilizzare.
Infine, quando $\alpha = -1/2$ soltanto l'autovalore $\lambda_1 = -2$ è controllabile e quindi $\lambda_2 = 2$ è non controllabile. Poiché tale autovalore ha $\mathrm{Re} > 0$ non posso stabilizzare.
Quindi il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato quando $\alpha \neq -1/2$.

d) Per poter posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$ ho necessità di spostare entrambi gli autovalori del sistema (infatti né $\lambda_1^* = -10$ né $\lambda_2^* = -1$ coincidono con un autovalore del sistema). Quindi posso farlo solo quando il sistema è completamente controllabile, ovvero per $\alpha \neq \pm 1/2$.

e) Per $\alpha = 0$ il sistema è completamente controllabile e quindi stabilizzabile. La matrice della dinamica in ciclo chiuso assume la forma

$$\begin{aligned} A^* &= A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -f_1 & 4 - f_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s + f_1 & -4 + f_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + f_1\, s + f_2 - 4$$

Per la regola di Cartesio ho quindi stabilità in ciclo chiuso per $f_1 > 0$ e $f_2 > 4$. Ad esempio posso porre $f_1 = 11$ e $f_2 = 14$ così da avere

$$\varphi^*(s) = s^2 + 11\, s + 10 = (s+1)\,(s+10)$$

assegnando quindi gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$.
Per un sistema SISO la funzione di trasferimento in ciclo chiuso si calcola come

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con $r(s) = C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B$. Per il sistema considerato

$$r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante devo porre $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ e quindi $H = \varphi^*(0)/r(0) = 10$.

f) La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

Dato il riferimento a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ la risposta forzata complessiva assume la forma

$$Y_f(s) = G^*_{y^\circ y}(s) Y^\circ(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{20}{s(s+1)(s+10)}$$

Notiamo che per il sistema in ciclo chiuso l'ingresso è rappresentato dal riferimento $y^\circ(t)$. Poiché i poli di $Y^\circ(s)$ e quelli di $G^*_{y^\circ y}(s)$ sono diversi possiamo scomporre la risposta forzata in una parte che dipende dai poli di $Y^\circ(s)$ (il regime permanente) e una parte che dipende dai poli di $G^*_{y^\circ y}(s)$ (il transitorio). In particolare, effettuando la decomposizione in fratti semplici si ha

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+10}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{\tilde{K}}{s}}_{\text{regime permanente}}$$

Il regime permanente $y_f^{Y^\circ}(t)$ per un ingresso a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ può essere calcolato applicando il teorema fondamentale della risposta in frequenza

$$y_f^{Y^\circ}(t) = G^*_{y^\circ y}(0)\, y^\circ(t) = y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$$

poiché abbiamo proprio scelto il guadagno H in modo da avere $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$. Per quanto riguarda il transitorio $y_f^{G^*_{y^\circ y}}(t)$, applicando il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to -1}(s+1)Y_f(s) = \lim_{s\to -1}\frac{20}{s(s+10)} = -20/9 \\ K_2 &= \lim_{s\to -10}(s+10)Y_f(s) = \lim_{s\to -10}\frac{20}{s(s+1)} = 2/9 \end{aligned}$$

e quindi

$$y_f^{G^*_{y^\circ y}}(t) = \left(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-10t}\right) 1(t) = \left(-\frac{20}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{-10t}\right) 1(t)$$

Riassumendo la risposta forzata complessiva assume la forma

$$y_f(t) = \underbrace{\left(-\frac{20}{9}e^{-t} + \frac{2}{9}e^{-10t}\right) 1(t)}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2 \cdot 1(t)}_{\text{regime permanente}}$$

Essendo il sistema esternamente stabile, il transitorio converge a 0 e quindi la risposta forzata converge al regime permanente (che coincide con il riferimento). Si ha quindi, come da progetto, inseguimento perfetto del riferimento a gradino.

Esercizio 2

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3\,s + 2 = (s+1)\,(s+2)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$.
Per studiare la controllabilità al variare di α esistono diversi metodi. Ad esempio posso usare la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} B & A\,B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2\,\alpha \\ \alpha & 1 - 3\,\alpha \end{array}\right]$$

Il sistema risulta completamente raggiungibile (e quindi completamente controllabile) se e solo se la matrice $\mathcal{R}$ ha rango pieno ovvero (essendo la matrice quadrata) il suo determinante è diverso da 0. In questo caso

$$\det \mathcal{R} = \det \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2\,\alpha \\ \alpha & 1 - 3\,\alpha \end{array}\right] = 2\,\alpha^2 - 3\,\alpha + 1.$$

Risolvendo il polinomio di secondo grado si vede che il determinante si annulla per $\alpha = 1$ o $\alpha = 1/2$. Di conseguenza per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 1/2$ il sistema risulta completamente raggiungibile, quindi completamente controllabile, e si ha $\varphi_c(s) = \varphi(s) = (s+1)\,(s+2)$. Negli altri casi si ha almeno un autovalore non controllabile. Per determinare $\varphi_c(s)$ in questi casi posso, ad esempio, calcolare $(sI - A)^{-1}\,B$.
Calcolo prima

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)}\mathrm{Adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Per $\alpha = 1$ si ha

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1}\,B &= \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\begin{bmatrix} s+1 \\ s+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Quindi per $\alpha = 1$ solo l'autovalore $\lambda_2 = -2$ compare come polo di $(sI - A)^{-1}\,B$. Di conseguenza si ha $\varphi_c(s) = s + 2$.

Rimane da vedere il caso $\alpha = 1/2$. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1}\,B &= \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 \\ 1 + 1/2\,s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{2(s+1)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Quindi per $\alpha = 1/2$ solo l'autovalore $\lambda_1 = -1$ compare come polo di $(sI - A)^{-1}\,B$. Di conseguenza si ha $\varphi_c(s) = s + 1$.

b) Come visto al punto a), per $\alpha = 0$ il sistema è completamente controllabile e di conseguenza completamente raggiungibile (ovvero tutti gli stati sono raggiungibili mediante un'opportuna scelta della legge di controllo). Senza fare calcoli posso quindi concludere che $X_\mathrm{r} = \mathbb{R}^2$.
Per $\alpha = 1$ invece ho un autovalore non controllabile e di conseguenza non tutti gli stati sono raggiungibili. Per determinare X_r devo calcolare la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} B & A\,B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{array}\right]$$

Come previsto (in questo caso il sistema non è completamente raggiungibile) la matrice non ha rango pieno (le due colonne sono linearmente dipendenti). Il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice $\mathcal{R}$, in questo caso

$$X_\mathrm{r} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix},\, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato se e solo se tutti gli autovalori non controllabili sono asintoticamente stabili. Poiché in questo caso entrambi gli autovalori del sistema hanno $\mathrm{Re} < 0$ il sistema è sempre stabilizzabile mediante retroazione sullo stato.

d) Come noto applicando una retroazione sullo stato posso posizionare liberamente solo gli autovalori controllabili. In questo caso gli autovalori desiderati in ciclo chiuso sono $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$. Noto che $\lambda_2^* = -1$ è già un autovalore del sistema. Di conseguenza ho necessità di spostare l'altro autovalore $\lambda_2 = -2$ e spostarlo in -10. Posso farlo quando questo autovalore è controllabile ovvero, come visto al punto a), quando $\alpha \neq 1/2$.

e) Per $\alpha = 0$ il sistema è completamente controllabile e quindi stabilizzabile. La matrice della dinamica in ciclo chiuso assume la forma

$$\begin{aligned} A^* &= A - BF = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -f_1 & -2 - f_2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s + f_1 & 2 + f_2 \\ -1 & s + 3 \end{bmatrix} = s^2 + (f_1 + 3)\, s + 3\, f_1 + f_2 + 2$$

Per la regola di Cartesio ho quindi stabilità in ciclo chiuso per $f_1 + 3 > 0$ e $3\, f_1 + f_2 + 2 > 0$. Ad esempio posso porre $f_1 = 8$ e $f_2 = -16$ così da avere

$$\varphi^*(s) = s^2 + 11\, s + 10 = (s + 1)\,(s + 10)$$

assegnando quindi gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$.

Per un sistema SISO la funzione di trasferimento in ciclo chiuso si calcola come

$$G^*_{y^\circ\, y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con $r(s) = C\, \mathrm{Adj}(sI - A)\, B$. Per il sistema considerato

$$r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è quindi

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{H}{(s+1)(s+10)}$$

Per avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante devo porre $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ e quindi $H = \varphi^*(0)/r(0) = 10$.

f) Poiché il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile il regime permanente esiste. Notiamo che per il sistema in ciclo chiuso l'ingresso è rappresentato dal riferimento $y^\circ(t)$. Inoltre, poiché il riferimento $y^\circ(t) = 5 \cdot 1(t) + 3\,\sin(t)\,1(t)$ è formato dalla somma di un gradino (di ampiezza $Y_0 = 5$) e di una sinusoide (di ampiezza $Y_0 = 3$ e pulsazione $\omega_0 = 1$) possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e calcolare il regime permanente complessivo come la somma del regime permanente in risposta ai due segnali. Applicando il teorema fondamentale della risposta in frequenza, il regime permanente in risposta all'ingresso a gradino $5 \cdot 1(t)$ risulta essere

$$G^*_{y^\circ y}(0)\ 5 \cdot 1(t)$$

mentre il regime permanente in risposta all'ingresso sinusoidale $3\,\sin(t)\,1(t)$ risulta essere

$$\mathrm{Re}\left\{G^*_{y^\circ y}(j)\right\}\ 3\,\sin(t)\,1(t) + \mathrm{Im}\left\{G^*_{y^\circ y}(j)\right\}\ 3\,\cos(t)\,1(t)$$

Come visto al punto precedente per il guadagno in continua si ha $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$. Per quanto riguarda la risposta in frequenza $G^*_{y^\circ y}(j)$ si ha

$$G^*_{y^\circ y}(j) = \left.\frac{10}{(s+1)(s+10)}\right|_{s=j} = \frac{10}{9+11j} = \frac{10}{9+11j} \cdot \frac{9-11j}{9-11j} = \frac{90-110j}{202} = \frac{45}{101} - \frac{55}{101}j$$

Di conseguenza, il regime permanente complessivo risulta essere

$$\begin{aligned} y_f^{Y^\circ}(t) &= G^*_{y^\circ y}(0)\,5 \cdot 1(t) + \mathrm{Re}\left\{G^*_{y^\circ y}(j)\right\}\ 3\,\sin(t)\,1(t) + \mathrm{Im}\left\{G^*_{y^\circ y}(j)\right\}\ 3\,\cos(t)\,1(t) \\ &= 5 \cdot 1(t) + \frac{135}{101}\,\sin(t)\,1(t) - \frac{165}{101}\,\cos(t)\,1(t) \end{aligned}$$

Esercizio 3

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} = s(s-1)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.
Per studiare la controllabilità al variare di α esistono diversi metodi. Ad esempio posso calcolare $(sI - A)^{-1} B$ e vedere cosa succede ai suoi elementi al variare di α.
Calcolo prima

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\varphi(s)}\mathrm{Adj}(sI - A) = \frac{1}{s\,(s-1)}\mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s\,(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} B &= \frac{1}{s\,(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s\,(s-1)} \begin{bmatrix} \alpha\,(s-1) \\ s+\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha/s \\ \frac{s+\alpha}{s\,(s-1)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Si vede che possiamo distinguere 3 casi.
Per $\alpha = 0$ si ha

$$(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

Quindi solo l'autovalore $\lambda_2 = 1$ compare come polo di $(sI - A)^{-1} B$. Di conseguenza si ha $\varphi_c(s) = s - 1$.

Per $\alpha = -1$ si ha

$$(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} -1/s \\ 1/s \end{bmatrix}$$

Quindi solo l'autovalore $\lambda_1 = 0$ compare come polo di $(sI - A)^{-1} B$. Di conseguenza si ha $\varphi_c(s) = s$.

Infine per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ non ci sono ulteriori cancellazioni tra numeratori e denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1} B$, quindi entrambi gli autovalori compaiono come poli di $(sI - A)^{-1} B$ e si ha $\varphi_c(s) = \varphi(s) = s\,(s-1)$.

b) Come visto al punto a), per $\alpha = 1$ il sistema è completamente controllabile e di conseguenza completamente raggiungibile (ovvero tutti gli stati sono raggiungibili mediante un'opportuna scelta della legge di controllo). Senza fare calcoli posso quindi concludere che $X_{\mathrm{r}} = \mathbb{R}^2$.
Per $\alpha = 0$ invece ho un autovalore non controllabile e di conseguenza non tutti gli stati sono raggiungibili. Per determinare X_{r} devo calcolare la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} B & A\,B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

Come previsto (in questo caso il sistema non è completamente raggiungibile) la matrice non ha rango pieno (le due colonne sono uguali). Il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice $\mathcal{R}$, in questo caso

$$X_{\mathrm{r}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato se e solo se tutti gli autovalori non controllabili sono asintoticamente stabili, ovvero hanno Re < 0. In questo caso entrambi gli autovalori del sistema hanno Re ≥ 0 e quindi ho stabilizzabilità solo quando entrambi gli autovalori sono controllabili ovvero, come visto al punto a), quando $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$.

d) Per poter posizionare gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$ ho necessità di spostare entrambi gli autovalori del sistema (infatti né $\lambda_1^* = -10$ né $\lambda_2^* = -1$ coincidono con un autovalore del sistema). Quindi posso farlo solo quando il sistema è completamente controllabile, ovvero per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$.

e) Come visto al punto c) per $\alpha = 0$ il sistema non è stabilizzabile in quanto l'autovalore $\alpha = 0$ non è controllabile e quindi non può essere modificato mediante retroazione sullo stato. Di conseguenza non esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato che garantisca stabilità in ciclo chiuso.

Esercizio 4

a) Per il sistema considerato si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 9 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 9 = (s + 3\,j)\,(s - 3\,j)$$

Quindi i due autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 3\,j$ e $\lambda_2 = -3\,j$.
Per studiare la controllabilità al variare di α esistono diversi metodi. Ad esempio posso usare la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} B & A\,B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & -9 \\ 1 & \alpha \end{array}\right]$$

Il sistema risulta completamente raggiungibile (e quindi completamente controllabile) se e solo se la matrice $\mathcal{R}$ ha rango pieno ovvero (essendo la matrice quadrata) il suo determinante è diverso da 0. In questo caso

$$\det \mathcal{R} = \det \left[\begin{array}{c|c} \alpha & -9 \\ 1 & \alpha \end{array}\right] = \alpha^2 + 9.$$

Si vede che il determinante non si annulla per nessun valore reale di α. Di conseguenza il sistema risulta completamente raggiungibile e quindi completamente controllabile per ogni α. Si ha quindi $\varphi_c(s) = \varphi(s) = s^2 + 9$.

b) Come visto al punto a), il sistema è sempre completamente raggiungibile (ovvero tutti gli stati sono raggiungibili mediante un'opportuna scelta della legge di controllo). Senza fare calcoli posso quindi concludere che $X_\mathrm{r} = \mathbb{R}^2$ per ogni α.

c) Il sistema è stabilizzabile mediante retroazione sullo stato se e solo se tutti gli autovalori non controllabili sono asintoticamente stabili. Poiché in questo caso tutti gli autovalori sono controllabili per ogni α il sistema è sempre stabilizzabile mediante retroazione sullo stato.

d) Come noto applicando una retroazione sullo stato posso posizionare liberamente tutti e soli gli autovalori controllabili. Poiché in questo caso entrambi gli autovalori sono controllabili per ogni α, possiamo concludere immediatamente che è sempre possibile scegliere il guadagno F in modo tale che gli autovalori in ciclo chiuso coincidano con $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$.

e) Per $\alpha = 0$ il sistema è completamente controllabile e quindi stabilizzabile. La matrice della dinamica in ciclo chiuso assume la forma

$$\begin{aligned} A^* &= A - BF = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 - f_1 & -f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s & 9 \\ -1 + f_1 & s + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + f_2\,s + 9\,(1 - f_1)$$

Per la regola di Cartesio ho quindi stabilità in ciclo chiuso per $f_2 > 0$ e $f_1 < 1$. Ad esempio posso porre $f_1 = -1/9$ e $f_2 = 11$ così da avere

$$\varphi^*(s) = s^2 + 11\,s + 10 = (s + 1)\,(s + 10)$$

assegnando quindi gli autovalori in ciclo chiuso in $\lambda_1^* = -10$ e $\lambda_2^* = -1$.

Per un sistema SISO la funzione di trasferimento in ciclo chiuso si calcola come

$$G^*_{y^\circ\, y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con $r(s) = C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B$. Per il sistema considerato

$$r(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & 9 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -9 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s$$

La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è quindi

$$G^*_{y^\circ\, y}(s) = \frac{H\, s}{(s+1)(s+10)}$$

Di conseguenza non posso avere inseguimento perfetto di un riferimento y° costante perché $r(0) = 0$ e quindi non posso porre $H = \varphi^*(0)/r(0)$. Poiché la condizione $r(0) \neq 0$ non dipende dalla scelta di F, posso concludere che non è possibile progettare un controllore in retroazione sullo stato che garantisca congiuntamente stabilità in ciclo chiuso e inseguimento perfetto di un riferimento costante.