Esercizi sui criteri algebrici per la stabilità

1) $G(s) = \dfrac{s-1}{s^3+3s^2+2s+4}$

non ci sono semplificazioni ($s=1$ non è radice del denominatore)

$a(s) = s^3+3s^2+2s+4$

$a(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ $\qquad a_3 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 4$

tutti coeff. positivi $\Rightarrow$ cond. necessaria è soddisfatta

$\Rightarrow$ per studiare la stabilità devo usare la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & a_3 & a_1 & 0 \\
2 & a_2 & a_0 & 0 \\
1 & E_{11} & 0 & \\
0 & a_0 & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
3 & 1 & 2 & 0 \\
2 & 3 & 4 & 0 \\
1 & 2/3 & 0 & \\
0 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$$E_{11} = -\frac{1}{a_2}\det\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$E_{11} = -\frac{1}{3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}(4-6) = \frac{2}{3}$$

Tabella regolare e tutti coeff. della prima colonna con lo stesso segno $\Rightarrow$ tutte radici con $Re < 0$ $\Rightarrow$ stabilità esterna

2) $G(s) = \dfrac{s}{s^3+2s^2+s}$

NOTA: devo fare le semplificazioni tra num. e den.

$$G(s) = \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s^2+2s+1)} = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

$a(s) = s^2+2s+1$

tutti coefficienti $\neq 0$ e di segno concorde $\Rightarrow$ tutte radici con $Re<0$ (Regola di Cartesio)

$\Rightarrow$ stabilità esterna

3) $G(s) = \dfrac{s+3}{s^4+1}$

$s=-3$ non è radice di s^4+1 $\Rightarrow$ non ci sono semplificazioni

$\Rightarrow a(s) = s^4+1$

$$a(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$a_4 = 1 \quad a_3 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 1$

non tutti coeff. $\neq 0$ $\Rightarrow$ condizione necessaria non è soddisfatta

$\Rightarrow$ non tutte le radici con $Re<0$

$\Rightarrow$ instabile esternamente

4)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + (1-\alpha)s + 4\alpha}$$

$$a(s) = s^2 + (1-\alpha)s + 4\alpha$$

$$= a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 1-\alpha \quad a_0 = 4\alpha$

Per la regola di Cartesio

tutte radici con $Re < 0$ $\iff$ tutti coefficienti non nulli e di segno concorde

$\iff a_1 = 1-\alpha > 0 \;\&\; a_0 = 4\alpha > 0$

$\iff \alpha < 1 \;\&\; \alpha > 0$

$\iff 0 < \alpha < 1$

stabilità esterna $\iff 0 < \alpha < 1$

5) $G(s) = \dfrac{s+3}{s^3+s^2+s+\alpha}$

Per prima cosa verifico se ci sono semplificazioni

numeratore ha radice $s=-3$

sostituendo nel denominatore $-27+9-3+\alpha = 0 \iff \alpha = 21$

Ho una semplificazione per $\alpha = 21$

Però poiché $s=-3$ ha $Re<0$ allora posso studiare comunque la stabilità di $\forall \alpha$

$P(s) = s^3+s^2+s+\alpha$

$P(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ $\quad a_3 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = \alpha$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{11} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 & \\ 0 & \alpha & 0 & \end{array}$$

$\boxed{\text{stabilità esterna}}$

$\Updownarrow$

tutte radici con $Re<0$

$\Updownarrow$

tabella regolare e tutti elementi della prima colonna con stesso segno

$\Updownarrow$

$1-\alpha>0 \quad \alpha>0 \iff \boxed{0<\alpha<1}$

$$E_{11} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad E_{11} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = -(\alpha-1) = 1-\alpha$$