# Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

# 1 Modellistica e simulazione

# Modello di un sistema

**Modello:** rappresentazione matematica **quantitativa** di un sistema dinamico (fisico, biologico, informatico, ecc.) che consente di

- studiare le proprietà del sistema
- predire il comportamento del sistema (evoluzione nel tempo, interazione con l'ambiente esterno)

# Modello di un sistema

- I termini **sistema** e **modello** sono spesso usati in modo interscambiabile:

*Consideriamo un sistema ...*

$\Updownarrow$

*Consideriamo un modello ...*

- Si intende che in realtà stiamo sempre considerando un modello del sistema dinamico che stiamo studiando

*All models are wrong ... but some are useful!*

- Trade off tra accuratezza e complessità

*Everything should be made as simple as possible, but no simpler*

# Modelli tempo continuo e tempo discreto

- Modelli a **tempo discreto** (TD) quando $t \in \mathbb{Z}$

$$\text{Modelli TD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{equazioni alle differenze}$$

- Modelli a **tempo continuo** (TC) quando $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Modelli TC} \quad \Leftrightarrow \quad \text{equazioni differenziali}$$

- Per modelli TD, $t$ deve essere interpretato come un indice
- I modelli TD si usano sia come approssimazione di modelli TC sia in tutti quei casi in cui il modello ha senso solo a intervalli discreti di tempo (per esempio ogni giorno lavorativo nel caso di variabili economiche, ogni iterazione di un algoritmo)

# Esempio: sistema scolastico

- Vogliamo descrivere l'andamento del numero di studenti che frequentano il primo anno di studi in una scuola, dove:
  - Gli studenti si iscrivono all'anno $t \in \mathbb{Z}$ per l'anno $t+1$
  - Una percentuale $\alpha \in (0,1)$ di studenti abbandona gli studi
  - Una percentuale $\beta \in (0,1)$ di studenti vengono promossi
- $x(t)$ numero di studenti nell'anno $t$
- $u(t)$ numero di nuovi studenti iscritti
- **Modello di sistema scolastico:**

$$x(t+1) = x(t) - \alpha\, x(t) - \beta x(t) + u(t)$$

# 1.1 Sistemi causali e stato

# Sistemi causali

**Sistema causale:** distingue tra passato, presente e futuro dividendo le interazioni in **cause** e **effetti**

- In un sistema causale la configurazione presente del sistema al tempo $t$ dipende solo dal passato ma non dal futuro
- Per un sistema causale si può introdurre il concetto di stato del sistema

**Stato del sistema:** insieme delle quantità/variabili che contengono tutta l'informazione relativa alla storia passata sufficiente per prevedere il comportamento futuro

# Equazioni di stato per sistemi TD

- I sistemi causali vengono comunemente rappresentati mediante **equazioni di stato** (anche dette *rappresentazione interne* o *rappresentazioni ingresso/stato/uscita*)
- Nel caso di sistemi TD, le equazioni di stato sono equazioni alle differenze del tipo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

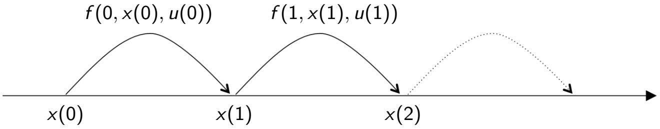
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema
- $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ingresso del sistema ($n_u$ numero di ingressi)
- $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ uscita del sistema ($n_y$ numero di uscite)
- $f$ funzione di transizione dello stato
- $h$ funzione di uscita

# Equazione di transizione dello stato

- La **funzione di transizione dello stato** $f$ specifica la **legge** secondo cui lo stato del sistema evolve nel tempo:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$$

- La funzione $f$ specifica il valore dello stato al successivo istante temporale




- L'ingresso $u(t)$ rappresenta l'insieme di tutte le quantità che **influenzano** il comportamento del sistema dinamico d'interesse
- Queste quantità possono essere **manipolabili** o **non** manipolabili

# Equazione di uscita

- La **funzione di uscita** $h$ specifica la **legge** secondo cui l'uscita $y$ dipende dallo stato $x$ e dall'ingresso $u$
$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$
- L'uscita $y$ può rappresentare
  - un **indice di prestazione** che definisce il comportamento del sistema rispetto a determinati obiettivi
  - e/o un insieme di **misure** che specifica l'informazione disponibile al mondo esterno
- Se non altrimenti specificato si pone
$$y(t) = x(t)$$
intesa come insieme di misure

# Equazioni di stato per sistemi TC

- Nei sistemi TC lo stato evolve con continuità
- Nel caso di sistemi TC, le equazioni di stato sono equazioni differenziali del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

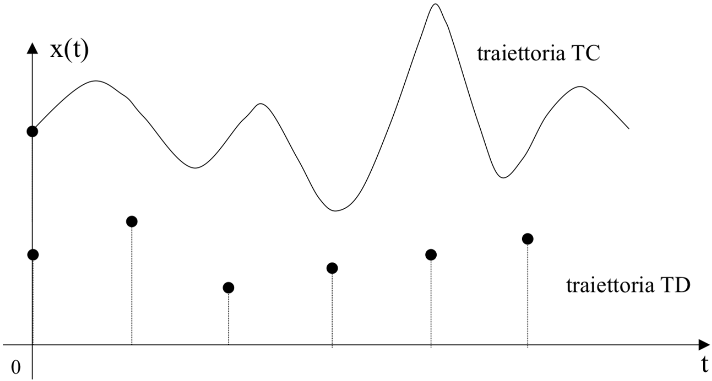
- $\dot{x}(t)$ corrisponde al **tasso di variazione** dello stato in un intervallo **infinitesimale**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

- Nei sistemi TC, la funzione $f$ specifica la variazione dello stato in un intervallo infinitesimale

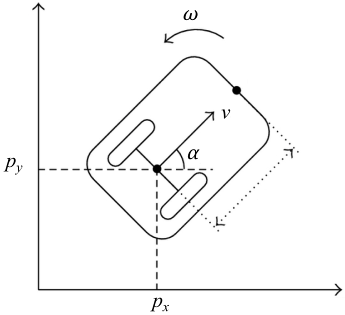
# Traiettoria di un sistema

- L'evoluzione compiuta dallo stato $x$ è detta **moto** o **traiettoria**



# Esempio: modello dell'uniciclo

- Per descrivere un robot mobile nel piano (moto 2D) un semplice modello è il cosiddetto **uniciclo**




$$
\begin{aligned}
\dot{p}_x(t) &= v(t)\,\cos\alpha(t) \\
\dot{p}_y(t) &= v(t)\,\sin\alpha(t) \\
\dot{\alpha}(t) &= \omega(t)
\end{aligned}
$$

$(p_x, p_y)$ posizione
$\alpha$ orientazione
$\omega$ velocità angolare
$v$ velocità di avanzamento

- La configurazione del robot è definita da posizione e orientazione $(p_x, p_y, \alpha)$
- I controlli sono velocità angolare e velocità di avanzamento $u = (\omega, v)$

# Esempio: modello dell'uniciclo

- Le tre variabili $(p_x, p_y, \alpha)$ forniscono una descrizione completa della configurazione in cui si trova il robot
  $\Rightarrow$ stato del sistema

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$$

- La velocità angolare e velocità di avanzamento (che dipendono dai comandi inviati ai motori dal sistema di controllo) rappresentano gli ingressi al modello dell'uniciclo

$$u(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

- Equazione di transizione dello stato

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{p}_x(t) & = & v(t)\,\cos\alpha(t) \\ \dot{p}_y(t) & = & v(t)\,\sin\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) & = & \omega(t) \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

# Sistemi autonomi e non autonomi

- Una classificazione importante riguarda la presenza o meno di ingressi esterni

**sistema autonomo**

- L'ambiente esterno non influenza l'evoluzione del sistema
- L'evoluzione futura da $t$ in poi dipende solo dallo stato presente $x(t)$
- Equazioni di stato

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(TD)} & x(t+1)\end{array}\right\} = f(t, x(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t))$$

**Sistema non autonomo**

- L'ambiente esterno influenza l'evoluzione del sistema mediante le variabili di ingresso
- L'evoluzione futura da $t$ in poi dipende dallo stato presente $x(t)$ e dagli ingressi futuri $u(\tau)$ per $\tau \geq t$
- Equazioni di stato

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(TD)} & x(t+1)\end{array}\right\} = f(t, x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

# Sistemi tempo-varianti e tempo-invarianti

- Un'altra importante classificazione riguarda la dipendenza dal tempo

**Sistema tempo-invariante**

- La risposta del sistema dipende dal valore di stato $x$ e ingresso $u$, non da quando $x$ e $u$ sono applicati
- Le funzioni di transizione dello stato $f$ e di uscita $h$ non dipendono esplicitamente dal tempo $t$
- Equazioni di stato

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(TD)} & x(t+1)\end{array}\right\} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

**Sistema tempo-variante**

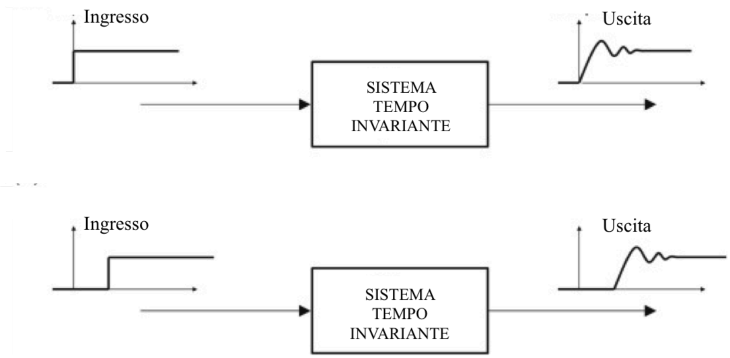
- La risposta del sistema dipende dall'istante di tempo in cui $x$ e $u$ sono applicati
- Le funzioni di transizione dello stato $f$ e di uscita $h$ dipendono esplicitamente dal tempo $t$
- Equazioni di stato

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(TD)} & x(t+1)\end{array}\right\} = f(t, x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

# Sistemi tempo-varianti e tempo-invarianti

- In un sistema tempo-invariante, la risposta del sistema dipende dal valore di stato $x$ e ingresso $u$, ma non da quando $x$ e $u$ sono applicati



# Classificazione dei modelli

## Sistemi TC

| | Autonomo | Non autonomo |
|---|---|---|
| **TI** | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t))\\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$ | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t),u(t))\\ y(t) &= h(x(t),u(t))\end{aligned}$ |
| **TV** | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x(t))\\ y(t) &= h(t,x(t))\end{aligned}$ | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x(t),u(t))\\ y(t) &= h(t,x(t),u(t))\end{aligned}$ |

## Sistemi TD

| | Autonomo | Non autonomo |
|---|---|---|
| **TI** | $\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t))\\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t),u(t))\\ y(t) &= h(x(t),u(t))\end{aligned}$ |
| **TV** | $\begin{aligned}x(t+1) &= f(t,x(t))\\ y(t) &= h(t,x(t))\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x(t+1) &= f(t,x(t),u(t))\\ y(t) &= h(t,x(t),u(t))\end{aligned}$ |

# 1.2 Modelli di trasferimento di risorse

# Esempio introduttivo: conto in banca

- $x(t)$ euro depositati nel conto in banca al tempo $t$ (mese $t$-esimo)
- Equazione di bilancio

$$x(t+1) = x(t) + f^{\text{in}}(t) - f^{\text{out}}(t)$$

- $f^{\text{in}}(t)$ euro in in ingresso nel mese $t$-esimo, per esempio

$$f^{\text{in}}(t) = \gamma\, x(t) + g(t)$$

con $\gamma$ tasso di interesse e $g(t)$ guadagni nel mese $t$-esimo

- $f^{\text{out}}(t)$ euro in uscita nel mese $t$-esimo

$$f^{\text{out}}(t) = s(t)$$

con $s(t)$ spese nel mese $t$-esimo

- Equazione di stato

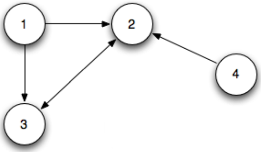
$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \gamma\, x(t) + g(t) - s(t) \\ &= (1+\gamma)\, x(t) + \underbrace{g(t) - s(t)}_{\text{risparmio}} \end{aligned}$$

# Modelli di trasferimento di risorse

- Nell'ambito dell'Ingegneria si ha spesso a che fare con **risorse** siano esse risorse umane, informatiche, beni di consumo, servizi, ecc.
- Nel caso di beni di consumo, le risorse possono essere differenziate in base alla collocazione lungo la catena produttiva mentre risorse umane possono essere distinte su basi anagrafiche o livello stipendiale

**Modelli di trasferimenti di risorse:** supponendo di avere $n$ stadi o compartimenti in cui possono trovarsi le risorse, specificano come le risorse sono trasferite da un compartimento all'altro

- Sono anche detti **modelli compartimentali**



- Questi modelli si classificano a seconda che il trasferimento avvenga su base continua o discreta:

$$\text{modelli TC} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{modelli di flusso}$$
$$\text{modelli TD} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{modelli di decisione}$$

- I modelli compartimentali TD sono detti modelli di decisione in quanto il trasferimento di risorse non avviene su base continua ma a specifici istanti temporali (ad esempio ogni mese, anno)
- Esempi di modelli di trasferimento di risorse includono: *reti di distribuzione*, *catene di produzione*, *risorse umane*, *sistema scolastico*, *emigrazione*, *modelli epidemiologici*, ecc.

# Modelli compartimentali TD

- $x_i(t)$ quantità di risorse nello stadio/compartimento $i$ al tempo $t$
- **Equazione di bilancio:**

$$x_i(t+1) = x_i(t) + f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

- $f_i^{\text{in}}(t)$ risorse che entrano nel compartimento $i$ al tempo $t$
- $f_i^{\text{out}}(t)$ risorse che escono dal compartimento $i$ al tempo $t$

**Nota:** in generale si ha trasferimento di risorse tra stadi/compartimenti diversi

# Esempio: corso di laurea magistrale

- Si consideri un **corso di laurea magistrale** che prevede due anni di studi. Supponiamo di voler modellare l'andamento del numero degli studenti in entrambi gli anni.
- Gli studenti si iscrivono nell'anno $t$ per l'anno $t+1$
- $x_1(t)$ numero di studenti che frequentano il primo anno di corsi nell'anno $t$
- $x_2(t)$ numero di studenti che frequentano il secondo anno di corsi nell'anno $t$
- $u(t)$ numero di nuovi studenti immatricolati
- Gli studenti del primo anno passano al secondo con tasso pari a $\alpha \in [0,1]$
- Gli studenti del secondo anno si laureano con tasso pari a $\beta \in [0,1]$

# Esempio: corso di laurea magistrale

- Equazioni di bilancio:

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x_1(t) + f_1^{\text{in}}(t) - f_1^{\text{out}}(t) \\
&= x_1(t) + u(t) - \alpha\, x_1(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t+1) &= x_2(t) + f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) \\
&= x_2(t) + \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_2(t)
\end{aligned}
$$

- Equazioni di stato considerando come uscita il numero di laureati

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= (1-\alpha)\, x_1(t) + u(t) \\
x_2(t+1) &= \alpha\, x_1(t) + (1-\beta)\, x_2(t) \\
y(t) &= \beta\, x_2(t)
\end{aligned}
$$

# Esempio: corso di laurea magistrale

- Considieriamo il vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Le equazioni di transizione dello stato

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha)\, x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= \alpha\, x_1(t) + (1-\beta)\, x_2(t) \end{aligned}$$

possono essere scritte in forma vettoriale

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &\Updownarrow \\ x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

# Notazione matriciale

- Consideriamo una matrice $A$ di dimensione $n \times m$ e un vettore $v$ di dimensione $m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

- $Av$ è un vettore di dimensione $n$ la cui $i$-esima componente è data da

$$(Av)_i = a_{i1}\, v_1 + a_{i2}\, v_2 + \cdots + a_{im}\, v_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, v_j$$

# Esempio: corso di laurea magistrale

- Consideriamo il vettore di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- L'equazione di uscita

$$y(t) = \beta \, x_2(t)$$

può essere scritta in forma vettoriale

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\Updownarrow \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

# Modelli compartimentali TD

- Equazione di bilancio per il compartimento $i$:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + f_i^{\mathrm{in}}(t) - f_i^{\mathrm{out}}(t)$$

- $f_i^{\mathrm{in}}(t)$ risorse che entrano nel compartimento $i$ al tempo $t$

$$f_i^{\mathrm{in}}(t) = u_i(t) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji}\, x_j(t) + \gamma_i\, x_i(t)$$

  - $u_i(t)$ risorse che entrano dall'esterno nel compartimento $i$
  - $\alpha_{ji}\, x_j(t)$ risorse trasferite dal compartimento $j$ al compartimento $i$
  - $\gamma_i\, x_i(t)$ risorse generate nel compartimento $i$

- $f_i^{\mathrm{out}}(t)$ risorse che escono dal compartimento $i$ al tempo $t$

$$f_i^{\mathrm{out}}(t) = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}\, x_i(t) + \beta_i\, x_i(t)$$

  - $\beta_i\, x_i(t)$ risorse perse nel compartimento $i$

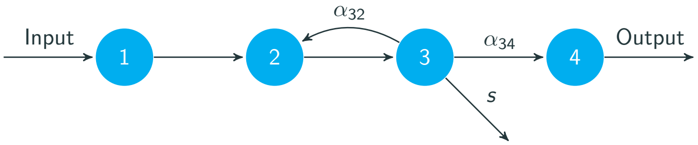
# Modelli compartimentali TD

- Equazione di stato per il compartimento $i$:

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) &= x_i(t) + f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t) \\
&= x_i(t) + u_i(t) + \sum_{j\neq i} \alpha_{ji}\, x_j(t) + \gamma_i\, x_i(t) - \sum_{j\neq i} \alpha_{ij}\, x_i(t) - \beta_i\, x_i(t) \\
&= \left(1 + \gamma_i - \beta_i - \sum_{j\neq i} \alpha_{ij}\right) x_i(t) + \sum_{j\neq i} \alpha_{ji}\, x_j(t) + u_i(t)
\end{aligned}
$$

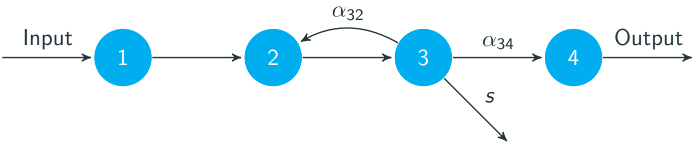
**Nota:** i parametri del modello devono soddisfare vincoli fisici:
$\alpha_{ij} \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i + \sum_{j\neq i} \alpha_{ij} \leq 1 + \gamma_i$

# Esempio: catena di produzione



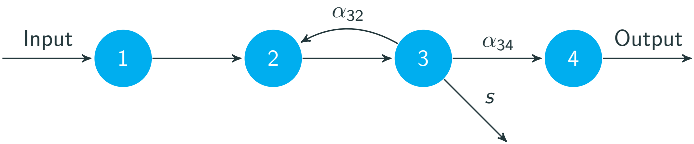

- **Catena di produzione:** un processo di lavorazione di un impianto industriale consiste in una serie di operazioni della la stessa durata, eseguite in successione a partire da un pezzo grezzo
- Alla fine di uno stadio di lavorazione si passa a quello successivo
- Quattro stadi: grezzo, verniciato, essiccato e confezionato
- Al terzo stadio viene e effettuato un controllo di qualità cui possibili esiti sono accettazione, scarto o riverniciatura
- Nella catena di produzione vengono inseriti ad ogni passo un certo numero di pezzi (grezzi) e ad ogni passo un certo numero numero di pezzi (confezionati) vengono venduti

# Esempio: catena di produzione




- $x_i(t)$ numero di pezzi nello stadio $i$ al tempo $t$
- $u_1(t)$ numero di pezzi che entrano nella catena di produzione al tempo $t$
- $u_2(t)$ numero di pezzi che escono dalla catena di produzione al tempo $t$
- $\alpha_{34}$ frazione di pezzi che supera il controllo di qualità
- $\alpha_{32}$ frazione di pezzi che tornano allo stadio $2$ dal controllo di qualità
- $s$ frazione di pezzi scartati dal controllo di qualità

# Esempio: catena di produzione



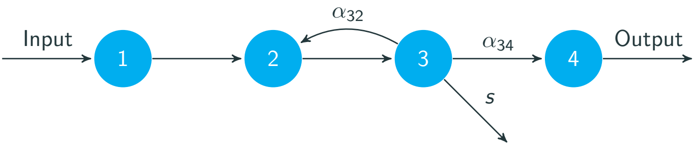

- Al primo stadio abbiamo

$$f_1^{\text{in}}(t) = u_1(t) \qquad f_1^{\text{out}}(t) = x_1(t)$$

- Quindi

$$x_1(t+1) = x_1(t) + f_1^{\text{in}}(t) - f_1^{\text{out}}(t) = u_1(t)$$

# Esempio: catena di produzione



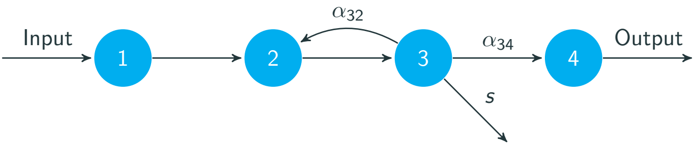

- Al secondo stadio abbiamo

$$f_2^{\text{in}}(t) = x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t) \qquad f_2^{\text{out}}(t) = x_2(t)$$

- Quindi

$$x_2(t+1) = x_2(t) + f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) = x_1(t) + \alpha_{32}\, x_3(t)$$

# Esempio: catena di produzione




- Al terzo stadio abbiamo

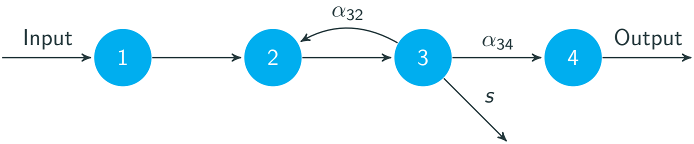
$$f_3^{\mathrm{in}}(t) = x_2(t) \qquad f_3^{\mathrm{out}}(t) = \alpha_{32}\, x_3(t) + \alpha_{34}\, x_3(t) + s\, x_3(t)$$

con $s = 1 - \alpha_{32} - \alpha_{34}$

- Quindi

$$x_3(t+1) = x_3(t) + f_3^{\mathrm{in}}(t) - f_3^{\mathrm{out}}(t) = x_2(t)$$

# Esempio: catena di produzione



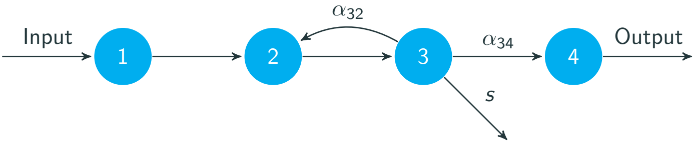

- Al quarto stadio abbiamo

$$f_4^{\mathrm{in}}(t) = \alpha_{34}\, x_3(t) \qquad f_4^{\mathrm{out}}(t) = u_2(t)$$

- Quindi

$$x_4(t+1) = x_4(t) + f_4^{\mathrm{in}}(t) - f_4^{\mathrm{out}}(t) = x_4(t) + \alpha_{34}\, x_3(t) - u_2(t)$$

# Esempio: catena di produzione




- Equazioni di transizione dello stato complessive

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Questo modello può essere utilizzato per analisi e controllo dell'evoluzione (esempio: problema delle scorte)

# Modelli compartimentali TC

- $x_i(t)$ quantità di risorse nello stadio/compartimento $i$ al tempo $t$
- **Equazione di bilancio:**
$$\dot{x}_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$
- $f_i^{\text{in}}(t)$ tasso di risorse in entrata nel compartimento $i$ al tempo $t$
- $f_i^{\text{out}}(t)$ tasso di risorse in uscita dal compartimento $i$ al tempo $t$

**Nota:** in questo caso $f_i^{\text{in}}(t)$ e $f_i^{\text{out}}(t)$ rappresentano i flussi di risorse in entrata/uscita per unità di tempo

# Esempio: modello SIR

**Modelli epidemiologici:** servono per modellare la diffusione di un virus o altro agente patogeno all'interno di una popolazione

Nel modello SIR si suppone che ciascun elemento della popolazione possa essere in uno dei seguente tre stati:

- stato **S** non infetto ma suscettibile di essere infettato
- stato **I** infetto
- stato **R** recuperato, ossia guarito dall'infezione e non più suscettibile di essere infettato

$x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ indicano la frazione della popolazione nello stato S, I e R, rispettivamente con $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$

**Nota:** In questo caso i valori delle variabili di stato indicano le percentuali della popolazione in un certo stato

# Esempio: modello SIR


- Ogni individuo nello stato $S$ entra in contatto con un individuo infetto secondo un tasso di contatto $\beta_c x_2(t)$ proporzionale al numero di individui infetti $x_2(t)$
- Ogni contatto risulterà in una infezione con una probabilità $\beta_t$
- Il flusso da $S$ a $I$ sarà quindi

$$\begin{aligned} f_1^{\text{out}}(t) = f_2^{\text{in}}(t) &= \beta_t\,\beta_c\,x_2(t)\,x_1(t) \\ &= \beta\,x_1(t)\,x_2(t) \end{aligned}$$

con $\beta = \beta_t\,\beta_c$ **tasso di infezione**

# Esempio: modello SIR


- La guarigione degli individui infetti avviene con un tasso $\gamma$
- Il flusso da $I$ a $R$ sarà quindi

$$f_2^{\text{out}}(t) = f_3^{\text{in}}(t) = \gamma\, x_2(t)$$

  con $\gamma$ **tasso di guarigione**

- Gli individui guariti rimangono nello stato $R$ con probabilità $1$

$$f_3^{\text{out}}(t) = 0$$

# Esempio: modello SIR


- Equazioni di transizione dello stato

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1^{\text{in}}(t) - f_1^{\text{out}}(t) = -\beta\, x_1(t)\, x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2^{\text{in}}(t) - f_2^{\text{out}}(t) = \beta\, x_1(t)\, x_2(t) - \gamma\, x_2(t) \\
\dot{x}_3(t) &= f_3^{\text{in}}(t) - f_3^{\text{out}}(t) = \gamma\, x_2(t)
\end{aligned}
$$

# Esempio: modello SIR

- Definito il modello possiamo fare predizioni sull'evoluzione dei contagi.
- Consideriamo la variazione di individui infetti

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \beta\, x_1(t)\, x_2(t) - \gamma\, x_2(t) \\ &= [\beta\, x_1(t) - \gamma]\, x_2(t)\end{aligned}$$

- Il **numero di riproduzione** $\mathcal{R}(t)$ definisce il numero atteso di casi secondari generati da un individuo infetto:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t) &= \beta \times 1/\gamma \times x_1(t) \\ &= \text{tasso di infezione} \times \text{periodo di infettività} \times \text{individui suscettibili}\end{aligned}$$

- $\mathcal{R}(t) > 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) > 0 \quad \Rightarrow$ i contagi crescono
- $\mathcal{R}(t) < 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) < 0 \quad \Rightarrow$ i contagi decrescono

# Esempio: modello SIR


- Al tempo $0$ quasi tutti gli individui sono suscettibili

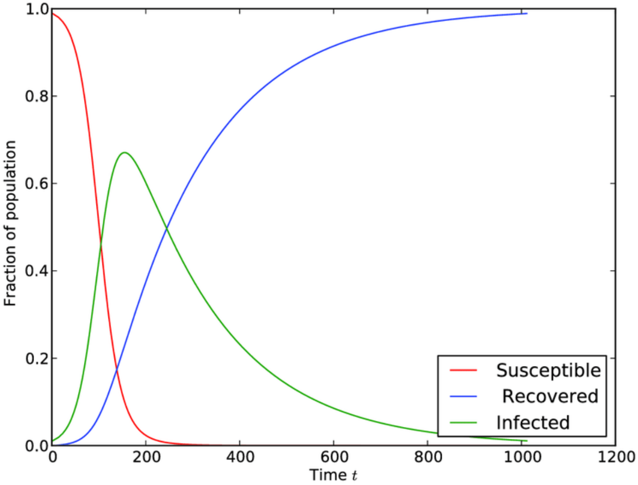
$$x_1(0) \approx 1$$

- L'evoluzione iniziale dell'epidemia dipende dal **numero di riproduzione di base**

$$\mathcal{R}(0) = \beta \times 1/\gamma \times x_1(0) \approx \beta/\gamma$$

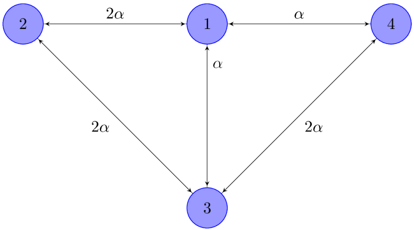
- Se $\mathcal{R}(0) > 1$ si ha una crescita esponenziale degli infetti $x_2(t)$ ossia si ha il cosiddetto **outbreak**

# Esempio: modello SIR




Esempio di evoluzione del modello SIR

# Esercizio proposto




- Quattro città sono collegate tra di loro mediante autostrade e strade provinciali come in figura
- Supponiamo di essere interessati a capire come varia il numero di veicoli nelle varie città su base continua
- Le variabili di stato rappresentano il numero di veicoli presenti in ogni singola cittá al tempo $t$
- Si assume che la densità di flusso automobilistico sulle strade provinciali sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sulle autostrade sia $2\alpha$
- Scrivere le equazioni di stato per il sistema tenendo conto dei flussi tra le diverse città

# 1.3 Modelli di transizione di stato

# Modelli di transizione tra stati

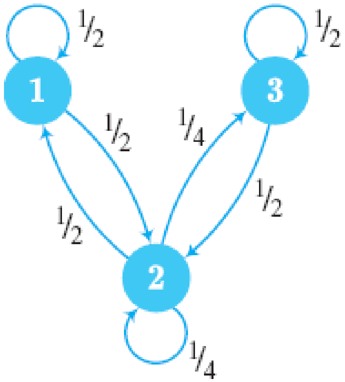
- Molti sistemi non si basano sul concetto di risorse, bensì sul concetto di attributi e qualità

**Modelli di transizione tra stati:** le variabili rappresentano gli attributi o le qualità di un certo fenomeno e evolvono secondo una regola che definisce come si passa da uno stato ad un altro

- Solitamente di tipo **probabilistico**: il valore assunto da uno stato $x_i(t)$ al tempo $t$ rappresenta la probabilità che il sistema possieda al tempo $t$ il corrispondente attributo o qualità
- Un classico esempio sono le previsione meteorologiche in cui gli stati rappresentano possibili condizioni meteo, ad esempio *soleggiato* o *nuvoloso* e il modello descrive come si passa da un certo stato ad un altro

# Esempio introduttivo: previsioni del tempo

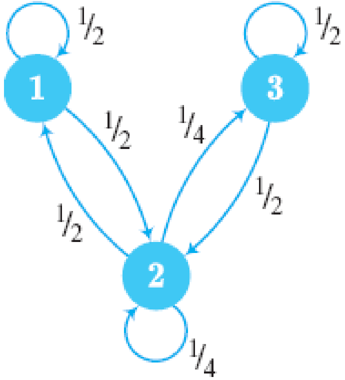
- Un modello semplice che descrive l'evoluzione delle condizioni metereologiche prevede tre stati: soleggiato, nuvoloso e piovoso.




- Gli stati evolvono secondo la seguente regola:
    - se il giorno è soleggiato, allora il giorno successivo sarà soleggiato o nuvoloso con la stessa probabilità del $50\%$
    - se il giorno è nuvoloso, al $50\%$ il giorno successivo sarà soleggiato, al $25\%$ nuvoloso e al $25\%$ piovoso
    - se il giorno è piovoso, il giorno successivo sarà nuvoloso o piovoso con la stessa probabilità del $50\%$

# Esempio introduttivo: previsioni del tempo

- Un modello semplice che descrive l'evoluzione delle condizioni metereologiche prevede tre stati: soleggiato, nuvoloso e piovoso.

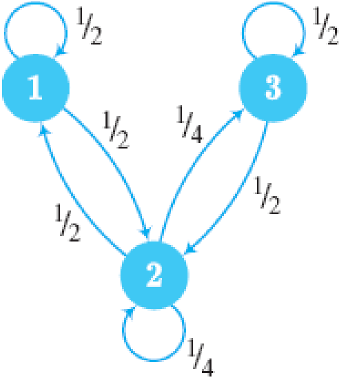



- Variabili di stato
  - $x_1(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia soleggiato
  - $x_2(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia nuvoloso
  - $x_3(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia piovoso

con il vincolo

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$$

# Esempio introduttivo: previsioni del tempo




- Variabili di stato
  - $x_1(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia soleggiato
  - $x_2(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia nuvoloso
  - $x_3(t)$ probabilità che il giorno $t$ sia piovoso

con il vincolo

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1$$

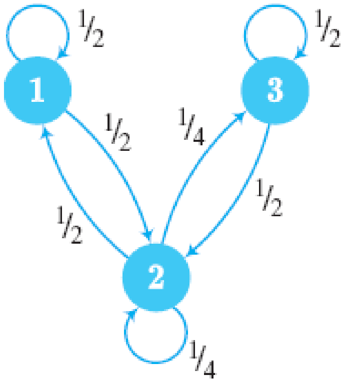
(probabilità giorno $t+1$ piovoso) $=$

(probabilità di transizione da piovoso a piovoso) $\times$ (probabilità giorno $t$ piovoso)

$+$(probabilità di transizione da nuvoloso a piovoso) $\times$ (probabilità giorno $t$ nuvoloso)

$$x_3(t+1) = \frac{1}{2}\,x_3(t) + \frac{1}{4}\,x_2(t)$$

# Esempio introduttivo: previsioni del tempo




- Equazioni di transizione dello stato complessive

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= \frac{1}{2}\,x_1(t) + \frac{1}{2}\,x_2(t)\\
x_2(t+1) &= \frac{1}{2}\,x_1(t) + \frac{1}{4}\,x_2(t) + \frac{1}{2}\,x_3(t)\\
x_3(t+1) &= \frac{1}{4}\,x_2(t) + \frac{1}{2}\,x_3(t)
\end{aligned}
$$

- In termini di stato complessivo

$$
x(t+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} x(t)
$$

# Modelli di transizione tra stati

- $x_i(t)$ probabilità di trovarsi nello stato $i$ al tempo $t$
- $\alpha_{ij}$ probabilità di transizione dallo stato $i$ allo stato $j$ (probabilità di passare allo stato $j$ condizionata al fatto di trovarsi nello stato $i$)
- Equazioni di transizione dello stato:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \alpha_{1i}\, x_1(t) + \alpha_{2i}\, x_2(t) + \cdots + \alpha_{ni}\, x_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, x_j(t) \end{aligned}$$

- Se ad un certo istante il sistema si trova nello stato $i$, allora all'istante successivo il sistema o rimane nello stato $i$ oppure si porta in un nuovo stato
  $\Rightarrow$ vale il vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$$

# Modelli di transizione tra stati: forma matriciale

- Le equazioni di transizione dello stato

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \alpha_{1i}\, x_1(t) + \alpha_{2i}\, x_2(t) + \cdots + \alpha_{ni}\, x_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, x_j(t) \end{aligned}$$

possono essere scritte in forma matriciale

$$x(t+1) = A\, x(t)$$

con

$$a_{ij} = \alpha_{ji} = \text{probabilità di transizione da } i \text{ a } j$$

- Nell'esempio delle previsioni del tempo

$$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

# Modelli di transizione tra stati: vincoli

- Il vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$$

equivale a dire che le colonne della matrice $A$ sommano a $1$

$\Rightarrow$ per modelli di transizione tra stati $A$ è una matrice **stocastica**

- Supponendo inizialmente di trovarci in uno degli $n$ stati

$$x_1(0) + x_2(0) + \ldots + x_n(0) = 1$$

allora, per ogni istante di tempo $t$, vale il vincolo

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) = 1$$

# Ipotesi di Markov

- I modelli di transizione tra stati visti si basano sull'ipotesi di Markov

**Ipotesi di Markov:** la distribuzione di probabilità al tempo $t+1$ dipende solo dalla distribuzione di probabilità al tempo $t$

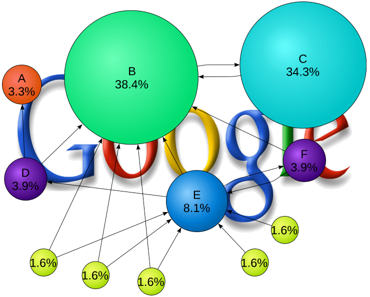
- Questi modelli sono anche detti **processi di Markov** (o **catene di Markov**)
- I processi di Markov sono senza memoria in quanto conta solo lo stato corrente e non come ci siamo arrivati
- Se le probabilità di transizione $\alpha_{ij}$ sono indipendenti dal tempo si parla di processo di Markov **omogeneo**, altrimenti si ha un processo di Markov **non** omogeneo
- Le probabilità di transizione $\alpha_{ij}$ possono anche essere manipolabili mediante un ingresso $u$ (chiamato **azione**), in questo caso si ha un **processo decisionale di Markov**

# Esempio: PageRank

**PageRank:** algoritmo per assegnare un peso a ciascuna pagina web che ne quantifica l'importanza relativa
Utile per decidere l'**ordine** (ranking) con cui presentare i risultati di una ricerca

PageRank si basa su

- Modello dinamico per descrivere la navigazione di un utente nel World Wide Web (modello tipo *random walk*)
- Predizione della probabilità asintotica di finire in ciascuna pagina web



# Esempio: PageRank

**Ipotesi del modello:** l'utente visita le pagine della rete scegliendo i link uscenti da ciascuna pagina visitata in modo del tutto casuale

- $L_i$ numero di link in uscita da $i$
- $\mathcal{N}_i$ insieme delle pagine che linkano a $i$
- $\alpha_{ij}$ probabilità che l'utente passi dalla pagina $i$ alla pagina $j$

$$\alpha_{ji} = \begin{cases} 1/L_j & \text{se } j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $x_i(t)$ probabilità che l'utente si trovi nella pagina $i$ al tempo $t$

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Sistema TD autonomo tempo-invariante con condizione iniziale $x_i(0) = 1/n$

# Esempio: PageRank

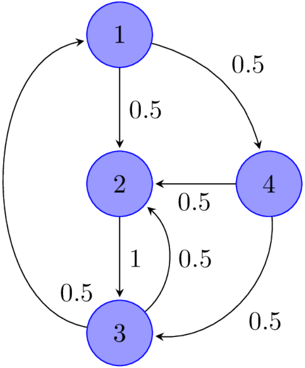
Nell'esempio:

- $L_1 = 2 \quad \mathcal{N}_1 = \{3\}$
- $L_2 = 1 \quad \mathcal{N}_2 = \{1, 3, 4\}$
- $L_3 = 2 \quad \mathcal{N}_3 = \{2, 4\}$
- $L_4 = 2 \quad \mathcal{N}_4 = \{1\}$

Di conseguenza

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

**Nota:** per costruzione le colonne sommano a 1



# Esempio: PageRank

**Idea:** PageRank della pagina $i$ = probabilità asintotica

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \bar{x}_i$$

di essere nella pagina $i$ dopo un periodo di navigazione sufficientemente lungo.

**Difficoltà:** Il modello sopra considerato non garantisce sempre la convergenza

**Soluzione:** Damping factor $d$
Un utente che si trova nella pagina $i$

- con probabilità $d$ clicca su uno dei link uscenti
- con probabilità $1-d$ sceglie casualmente una pagina della rete (non necessariamente linkata dalla pagina $i$)

# Esempio: PageRank

**PageRank con dumping factor:** Un utente che si trova nella pagina $i$

- con probabilità $d$ clicca su uno dei link uscenti
- con probabilità $1 - d$ sceglie casualmente una pagina della rete (non necessariamente linkata dalla pagina $i$)

$\Rightarrow$ L'equazione del modello diventa

$$x_i(t+1) = d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j} + (1-d) \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j(t)}{n}$$

Ricordando che $\sum_{j=1}^{n} x_j(t) = 1$ il modello può essere riscritto come:

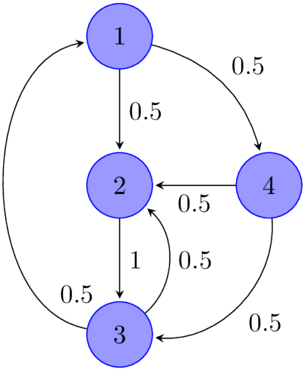
$$x_i(t+1) = d \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{x_j(t)}{L_j} + \frac{1-d}{n}$$

**Nota:** PageRank con damping factor garantisce l'esistenza delle probabilità asintotiche $\bar{x}_i$ per ogni valore di $d > 0$. Scelta tipica $d = 0.85$.

# Esempio: PageRank

- PageRank con damping factor

$$x(t+1) = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1-d}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$




- Per $d = 0.85$ le probabilità asintotiche sono:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1922 \\ 0.3246 \\ 0.3640 \\ 0.1192 \end{bmatrix}$$

- Di conseguenza l'ordine di importanza delle pagine web è $3, 2, 1, 4$.

# 1.4 Modelli di influenza

# Modelli di influenza

**Modelli di influenza:** servono descrivere le **interazioni** tra diverse grandezze/variabili e in particolare come una grandezza può **influenzare** l'evoluzione di un'altra

Modello generale

$$\begin{aligned} &\text{(sistemi TC)} \qquad \dot{x}_i(t) &&= f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) \\ &\text{(sistemi TD)} \qquad x_i(t+1) &&= f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) \end{aligned}$$

- $f_i(x_i)$ funzione che descrive la **dinamica locale** della grandezza $i$-esima
- $f_{ji}(x_j, x_i)$ funzione che descrive come la grandezza $j$-esima **influenza** la grandezza $i$-esima

# Modelli di influenza

**Nota:** Il modello precedente è relativo al caso autonomo

In presenza di **ingressi esogeni** il modello diventa

(sistemi TC) $$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

(sistemi TD) $$x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

- $g_{ji}(u_j, x_i)$ funzione che descrive come l'ingresso $j$-esimo **influenza** la grandezza $i$-esima

# Esempio: modello preda-predatore

**Modello preda-predatore:** anche noto come equazioni di Lotka-Volterra, serve per descrivere la dinamica di un **ecosistema** in cui interagiscono **due specie** animali: una delle due come predatore, l'altra come preda.

- $x_1(t)$ popolazione della specie preda al tempo $t$
- $x_2(t)$ popolazione della specie predatore al tempo $t$

Equazioni del modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_1(t)\, x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\delta\, x_2(t) + \gamma\, x_1(t)\, x_2(t) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ costanti opportune

# Esempio: modello preda-predatore

Equazioni del modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_1(t)\, x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -\delta\, x_2(t) + \gamma\, x_1(t)\, x_2(t) \end{cases}$$

Con riferimento al modello generale

- $f_1(x_1) = \alpha\, x_1$
  in **assenza di predatori** la popolazione delle prede **aumenta**
- $f_2(x_2) = -\delta\, x_2$
  in **assenza di prede** la popolazione dei predatori **diminuisce**
- $f_{21}(x_2, x_1) = -\beta\, x_1\, x_2$
  le prede diminuiscono proporzionalmente al **prodotto** $x_1\, x_2$
  (al crescere di $x_1\, x_2$ è più **probabile** che prede e predatori si incontrino)
- $f_{12}(x_1, x_2) = \gamma\, x_1\, x_2$
  i predatori aumentano proporzionalmente al prodotto $x_1\, x_2$.

# Esempio: modello preda-predatore

**Nota:** Il modello precedente è relativo al caso autonomo

Modello diventa non autonomo se consideriamo, ad esempio, la presenza di un intervento di **ripopolamento** della specie prede

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & \alpha\, x_1(t) - \beta\, x_1(t)\, x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -\delta\, x_2(t) + \gamma\, x_1(t)\, x_2(t) \end{cases}$$

dove l'ingresso $u(t)$ rappresenta il **tasso** di ripopolamento

# Esempio: dinamiche di opinione

**Modelli delle dinamiche di opinione:** molto studiati nel marketing e in politica, servono per descrivere come evolvono le dinamiche di opinione (su un prodotto, partito politico, etc.) e come queste possono essere influenzate.

- $x_i(t)$ **opinione** dell'individuo $i$ circa un prodotto
- $\mathcal{N}_i$ insieme degli individui che influenzano l'**opinione** dell'individuo $i$

Equazioni del modello

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \qquad i = 1, \dots, n$$

con $w_{ij} > 0$

# Esempio: dinamiche di opinione

Equazioni del modello

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \qquad i = 1, \dots, n$$

- Il modello descrive l'**evoluzione** dell'opinione del nodo $i$ a causa dell'interazione con altri nodi, ovvero come essa viene influenzata
- $w_{ij}$ definisce il **peso** che il nodo $i$ attribuisce all'opinione del nodo $j$
- se $x_j(t) > x_i(t)$ allora $k$ influenzerà l'opinione di $i$ **positivamente**
  $\Longrightarrow$ L'opinione di $i$ tende a diventare più positiva
- se $x_j(t) < x_i(t)$ allora $k$ influenzerà l'opinione di $i$ **negativamente**
  $\Longrightarrow$ L'opinione di $i$ tende a diventare più negativa

# Esempio: dinamiche di opinione

Equazioni del modello

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Con riferimento al modello generale

- $f_i(x_i) = 0$
  per modellare il fatto che in assenza di interazioni $\dot{x}_i(t) = 0$ e quindi l'opinione del nodo $i$ **non cambia**
- $f_{ji}(x_j, x_i) = w_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$

# 1.5 Algoritmi iterativi

# Algoritmi iterativi

- i sistemi dinamici non nascono esclusivamente dalla descrizione di fenomeni fisici, ma anzi possono anche descrivere il comportamento di algoritmi

**Algoritmi iterativi come sistemi dinamici:** Un generico algoritmo iterativo (come ad esempio il *metodo di Newton*, il *metodo della bisezione*, l'*algoritmo del gradiente*, ecc.) può essere scritto come un sistema dinamico TD

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

- $t$ iterazione dell'algoritmo
- $x(t)$ variabili che devono essere salvate in **memoria** per passare dal passo $t$ al passo $t+1$ dell'algoritmo
- $u(t)$, quando presente, rappresenta gli **input esterni** forniti all'algoritmo al passo $t$
- $y(t)$ rappresenta l'**output** dell'algoritmo al passo $t$

# Esempio: algoritmo del gradiente

**Algoritmo del gradiente:** metodo iterativo per il calcolo del punto di minimo di una funzione $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ossia per risolvere il **problema di ottimizzazione**

$$\min_x J(x)$$

**Idea:** Si parte da una soluzione di tentativo $x(0)$ e poi ci si muove nella direzione in cui la funzione $J(x)$ diminuisce più rapidamente

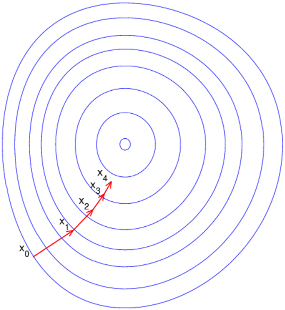
- viene anche detto metodo della **discesa più ripida**
- molto usato in tanti contesti (esempio: addestramento di reti neurali artificiali nel machine learning)

# Esempio: algoritmo del gradiente

- Considero il gradiente

$$\nabla J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- $\nabla J(x)$ è perpendicolare alle curve di livello della funzione $J(x)$ (vedi figura)
- dato un punto $x$ la direzione di massima discesa per la funzione $J(x)$ è quella opposta al suo gradiente




Data una soluzione di tentativo $x(t)$, una nuova soluzione di tentativo $x(t+1)$ può essere trovata muovendosi nella direzione **opposta** al gradiente

$$x(t+1) = x(t) - \gamma \nabla J(x(t))$$

# Esempio: algoritmo del gradiente

Algoritmo del gradiente

$$x(t+1) = x(t) - \gamma \nabla J(x(t))$$

- Può essere anche scritto componente per componente

$$x_i(t+1) = x_i(t) - \gamma \frac{\partial J(x(t))}{\partial x_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

- $-\nabla J(x(t))$ è detta **direzione di discesa**
- $\gamma$ è detto **passo di discesa**
- $\gamma$ parametro di progetto che influenza la **velocità di convergenza** verso il punto di minimo
- Si tratta di un sistema TD autonomo tempo-invariante con $f(x(t)) = x(t) - \gamma \nabla J(x(t))$

# Esempio: algoritmo del gradiente

- Nell'algoritmo sopra descritto il passo di discesa $\gamma$ è costante
- Per ottimizzare la convergenza al punto di minimo, di solito $\gamma$ varia con l'iterazione t

$$x(t+1) = x(t) - \gamma(t)\, \nabla J(x(t))$$

- Tipicamente $\gamma(t)$ è tanto più piccolo quanto più sono vicino al minimo
- Con questa modifica si ha un sistema TD autonomo **tempo-variante**

# 1.6 Modelli di sistemi fisici

# Modelli di sistemi fisici

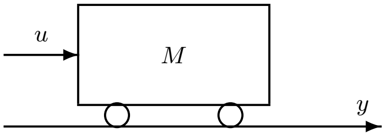
**Tutti** i sistemi fisici che **evolvono nel tempo** sono sistemi dinamici. Esempio: dinamica di un veicolo, cinematica di un robot, circuito elettrico, ecc.

Per sistemi fisici: stato $=$ variabili che caratterizzano elementi in grado di immagazzinare energia

- per i circuiti elettrici: correnti sugli induttori e tensioni sui condensatori
- per i sistemi meccanici: posizioni e velocità
- per i sistemi termici: temperature
- per sistemi idraulici: pressioni e flussi

# Esempio: sistema meccanico

- Carrello di massa $M$ soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo $t$
- $b$ coefficiente di attrito viscoso




Secondo il principio di Newton

$$M\,\ddot{y}(t) = u(t) - b\,\dot{y}(t)$$

- $-b\,\dot{y}(t)$ forza di attrito che si oppone al moto
- **Scelta tipica dello stato** per sistemi meccanici: posizione e velocità

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

# Esempio: sistema meccanico

- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ L'equazione del modello diventa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\frac{b}{M}\,\dot{y}(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{b}{M}\,x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \end{aligned}$$

- Le equazioni di stato possono essere scritte in **forma matriciale**

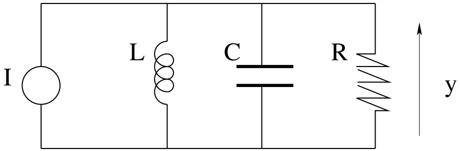
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\; x(t) \end{aligned}$$

- Si ha un sistema TC tempo-invariante non autonomo

# Esempio: circuito RLC

Circuito elettrico con

- **ingresso:** corrente $I(t)$
- **uscita:** tensione sul carico $v_R(t)$




- Equazioni costitutive dei tre componenti

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R\, I_R(t) \\ v_L(t) &= L\, \dot{I}_L(t) \\ I_C(t) &= C\, \dot{v}_C(t) \end{aligned}$$

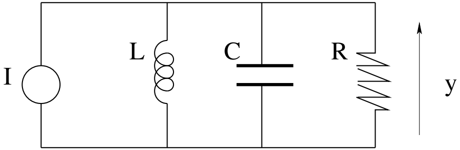
- Leggi di Kirchoff

$$\begin{aligned} I(t) &= I_L(t) + I_C(t) + I_R(t) \\ v_R(t) &= v_C(t) = v_L(t) \end{aligned}$$

# Esempio: circuito RLC

Circuito elettrico con

- **ingresso:** corrente $I(t)$
- **uscita:** tensione sul carico $v_R(t)$




- Elementi in grado di immagazzinare energia: induttore e condensatore $\Rightarrow$ scelgo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Combinando equazioni costitutive e leggi di Kirchoff

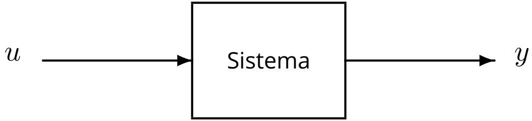
$$\begin{aligned} I(t) &= I_L(t) + C\dot{v}_C(t) + v_C/R \\ v_c(t) &= L\dot{I}_L(t) \end{aligned}$$

- Riarrangiando i termini

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \, x(t) \end{aligned}$$

## 1.7 Rappresentazione ingresso-uscita

# Rappresentazione ingresso-uscita




**Rappresentazione ingresso-uscita:** rappresentazioni in cui lo stato non compare esplicitamente, esprimono la relazione tra ingressi e uscite del sistema.
Sono anche dette rappresentazioni **esterne**.

- **Per sistemi TD:** rappresentazione ingresso-uscita $=$ equazione alle differenze

$$y(t) = g(t, y(t-1), \ldots, y(t-n), u(t), \ldots, u(t-m))$$

- Nel caso di sistema **autonomo**

$$y(t) = g(t, y(t-1), \ldots, y(t-n))$$

- Se $g$ non dipende esplicitamente dal tempo $t$ il sistema è tempo-invariante, altrimenti è tempo variante

# Passaggio a equazioni di stato

Per sistemi TD, data una rappresentazione ingresso-uscita è immediato scrivere le equazioni di stato

- Una scelta tipica dello stato è il cosiddetto **regressore**

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m}(t) \end{bmatrix}$$

- Nel caso di sistemi autonomi il regressore contiene solo le uscite
- Il sistema risultante ha $n+m$ variabili di stato

**Nota:** Questa scelta per lo stato va sempre bene ma a volte è *ridondante* (possono esistere scelte dello stato di dimensione minore)

# Esempio: successione di Fibonacci

**Successione di Fibonacci:** originariamente proposta come legge matematica che descrive la crescita di una popolazione di conigli

$$y(t) = y(t-1) + y(t-2)$$

con $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$

- Sistema autonomo TD in rappresentazione esterna con $n = 2$
- Regressore

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Equazioni di stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = & y(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) & = & y(t-1) & = & x_1(t) \end{cases}$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

# Passaggio a equazioni di stato

- Data una rappresentazione ingresso uscita

$$y(t) = g(t, y(t-1), \ldots, y(t-n), u(t), \ldots, u(t-m))$$

- Scegliamo come stato il regressore

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} y(t-1) & \cdots & y(t-n) & u(t-1) & \cdots & u(t-m) \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) & x_{n+1}(t) & \cdots & x_{n+m}(t) \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

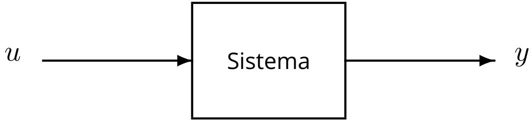
- dinamica dello stato

$$\begin{cases} x_1(t+1) = y(t) = g(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u(t), x_{n+1}(t), \ldots, x_{n+m}(t)) \\ x_2(t+1) = y(t-1) = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = y(t-n+1) = x_{n-1}(t) \\ x_{n+1}(t+1) = u(t) = u(t) \\ x_{n+2}(t+1) = u(t-1) = x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m}(t+1) = u(t-m+1) = x_{n+m-1}(t) \end{cases}$$

- equazione di uscita

$$y(t) = g(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u(t), x_{n+1}(t), \ldots, x_{n+m}(t))$$

# Rappresentazione ingresso-uscita




- **Per sistemi TC:** rappresentazione ingresso-uscita = equazione differenziale

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t))$$

  con la notazione $y^{(k)}(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$

- $n$ e $m$ massimo ordine di derivazione di ingresso e uscita con $m \leq n$
- Nel caso di sistema **autonomo**

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t))$$

- Se $g$ non dipende esplicitamente dal tempo $t$ il sistema è tempo-invariante, altrimenti è tempo variante

# Passaggio a equazioni di stato

Per sistemi TC, data una rappresentazione ingresso-uscita è immediato scrivere le equazioni di stato nel caso **autonomo**.

- Scelta tipica dello stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

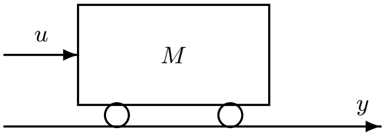
- Il sistema risultante ha $n$ variabili di stato

**Nota:** Questa scelta per lo stato va bene anche per sistemi non autonomi quando $m = 0$ (l'ingresso $u(t)$ **non** è derivato)
Nel caso di sistemi non autonomi con $m > 0$ è più complicato (vedremo come farlo per sistemi lineari)

# Esempio: sistema meccanico

- Per il sistema carrello:
  equazioni di Newton =
  rappresentazione ingresso-uscita

$$\ddot{y}(t) = -\frac{b}{M}\,\dot{y}(t) + \frac{1}{M}u(t)$$




- Sistema non autonomo con $n = 2$ e $m = 0$

- Scegliendo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\frac{b}{M}\,\dot{y}(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{b}{M}\,x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

# Passaggio a equazioni di stato

- Data una rappresentazione ingresso uscita

$$y^{(n)}(t) = g(t, y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u(t))$$

- Scegliamo come stato

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \cdots & y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

- dinamica dello stato

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \dot{x}_1(t) & = & \dot{y}(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & \ddot{y}(t) & = & x_3(t) \\ & \vdots & & & \\ \dot{x}_{n-1}(t) & = & y^{(n-1)}(t) & = & x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) & = & y^{(n)}(t) & = & g(t, x_n(t), \ldots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \end{array} \right.$$

- equazione di uscita

$$y(t) = x_1(t)$$

# Esercizi proposti

Scrivere le equazioni di stato per i seguenti sistemi TD e TC

1. $y(t) = 2\,y(t-1)\,y(t-2)\,u(t-1)$
2. $y(t) - 3\,y(t-2) = u(t)\,u(t-1)$
3. $y(t) = y(t-4)$
4. $y(t+2) = 3y(t+1) + u(t+1)$
5. $y^{(3)} = -2\,\ddot{y} - \dot{y}\,u$
6. $2\,\ddot{y} + 4\,y = u$
7. $\ddot{y} = 0$
8. $\ddot{y} + \cos(t)\,u = 0$

# 1.8 Sistemi lineari

# Funzioni lineari

**Definizione:** una funzione $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è **lineare** se valgono

**Additività:** $J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2) \quad \forall x_1,\, x_2$

**Omogeneità:** $J(\alpha x) = \alpha\, J(x) \quad \forall x,\, \alpha \;\; (\alpha \text{ scalare})$

- Di conseguenza vale

$$J(\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2) = \alpha_1\, J(x_1) + \alpha_2\, J(x_2)$$

per tutte le coppie $x_1$, $x_2$ e tutte le coppie di scalari $\alpha_1$, $\alpha_2$

**Nota:** una funzione lineare può sempre essere scritta nella forma

$$J(x) = M\, x$$

con $M$ **matrice** di dimensione $m \times n$

# Sistemi lineari tempo-invarianti

**Definizione:** Un sistema dinamico tempo-invariante (TI)

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\[1em]
\text{(TD)} & x(t+1)
\end{array}\right\} = f(x(t), u(t))
$$

$$
y(t) = h(x(t), u(t))
$$

si dice **lineare** quando $f$ e $h$ sono funzioni lineari di $x$ e $u$

$$
\begin{aligned}
f(x,u) &= A\,x + B\,u \\
h(x,u) &= C\,x + D\,u
\end{aligned}
$$

- $A$ ha dimensione $\dim(x) \times \dim(x)$; $B$ ha dimensione $\dim(x) \times \dim(u)$
- $C$ ha dimensione $\dim(y) \times \dim(x)$; $D$ ha dimensione $\dim(y) \times \dim(u)$.

# Sistemi lineari tempo-invarianti

**Sistemi lineari tempo-invarianti** (LTI)

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\[1em]
\text{(TD)} & x(t+1)
\end{array}\right\} = A\,x(t) + B\,u(t)
$$

$$
y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)
$$

- descrivono un'**ampia classe** di sistemi dinamici (esempio: corso di laurea, PageRank, dinamica di opinione, sistema meccanico, ecc.)
- proprietà **locali** dei sistemi non lineari possono essere studiante ricorrendo alla teoria dei sistemi lineari (tecniche di **linearizzazione**)
- in molti casi, posso considerare il sistema tempo-invariante quando le variazioni temporali sono **lente** rispetto all'intervallo di osservazione considerato

# Sistemi lineari tempo-varianti

**Definizione:** Un sistema dinamico tempo-variante (TV)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(TC)} & \dot{x}(t) \\ \text{(TD)} & x(t+1)\end{array}\right\} = f(t, x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

si dice **lineare** quando $f$ e $h$ sono funzioni lineari di $x$ e $u$

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= A(t)\, x + B(t)\, u \\ h(t, x, u) &= C(t)\, x + D(t)\, u \end{aligned}$$

- Un sistema lineare è tempo-variante se **almeno una** delle matrici $A$, $B$, $C$, $D$ dipende esplicitamente dal tempo.
  Altrimenti è tempo-invariante

# Sistemi lineari

## Sistemi lineari TC

| | Autonomo | Non autonomo |
|---|---|---|
| **TI** | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t)\\ y(t) &= C\,x(t)\end{aligned}$ | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$ |
| **TV** | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)\,x(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t)\end{aligned}$ | $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\end{aligned}$ |

## Sistemi lineari TD

| | Autonomo | Non autonomo |
|---|---|---|
| **TI** | $\begin{aligned}x(t+1) &= A\,x(t)\\ y(t) &= C\,x(t)\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$ |
| **TV** | $\begin{aligned}x(t+1) &= A(t)\,x(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t)\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x(t+1) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\end{aligned}$ |

# Sistemi lineari TD- rappresentazione ingresso-uscita

**Definizione:** Un sistema dinamico TD TI in rappresentazione ingresso-uscita

$$y(t) = g(y(t-1), \ldots, y(t-n), u(t), \ldots, u(t-m))$$

si dice **lineare** quando $g$ è una funzione lineare dei suoi argomenti

$$y(t) = a_1\, y(t-1) + \ldots + a_n\, y(t-n) + b_0\, u(t) + \ldots + b_m\, u(t-m)$$

- Nel caso autonomo

$$y(t) = a_1\, y(t-1) + \ldots + a_n\, y(t-n)$$

- Se **almeno uno** dei coefficienti $a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_m$ dipende dal tempo $\Rightarrow$ sistema lineare TV

$$y(t) = a_1(t)\, y(t-1) + \ldots + a_n(t)\, y(t-n) + b_0(t)\, u(t) + \ldots + b_m(t)\, u(t-m)$$

# Sistemi lineari TC- rappresentazione ingresso-uscita

**Definizione:** Un sistema dinamico TC TI in rappresentazione ingresso-uscita

$$y^{(n)}(t) = g(y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, u(t))$$

si dice **lineare** quando $g$ è una funzione lineare dei suoi argomenti

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0\, y(t) + b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0\, u(t)$$

- Nel caso autonomo

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0\, y(t)$$

- Se **almeno uno** dei coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_m$ dipende dal tempo $\Rightarrow$ sistema lineare TV

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\, y(t) + b_m(t)\, u^{(m)}(t) + \ldots + b_0(t)\, u(t)$$

# Esercizi proposti

Classificare il sistema in riferimento a dominio temporale, linearità, tempo invarianza e dipendenza da ingressi:

1. $\dot{y}(t) = \sin(u(t))$
2. $y(t) = y(t-1)u(t)$
3. $\ddot{y}(t) = 3\cos(t)y(t)$
4. $\ddot{y}(t) = 2\dot{y}(t)y(t) + y(t)$
5. $y(t+2) = y(t+1) - e^3 u(t)$

# Esercizi proposti

Classificare il sistema in riferimento a dominio temporale, linearità, tempo invarianza e dipendenza da ingressi:

1. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - \sin(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) &= t^2\, x_1(t) \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) &= x_1^2(t) \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1(t+1) &= x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + cos(\pi/4)\, x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

# 1.9 Simulazione dei sistemi dinamici

# Simulazione dei sistemi dinamici

**Simulare:** calcolare **per via numerica** l'andamento di stato $x(t)$ e uscita $y(t)$ in un certo intervallo di tempo di interesse $[t_0, t_f]$ conoscendo

- condizione iniziale $x(t_0) = x_0$
- per sistemi non autonomi, andamento dell'ingresso $u(t)$ in $[t_0, t_f]$

- Utile per **prevedere** l'evoluzione del sistema
- **Per sistemi TD:** immediato (ma possono servire accorgimenti nel calcolo per sistemi su **larga scala**)
- **Per sistemi TC:** soluzione di un sistema di equazioni differenziali

# Simulazione dei sistemi dinamici

**Per sistemi TC:** simulazione = soluzione di un sistema di equazioni differenziali

- **Soluzione esplicita** (analitica) per alcune classi di sistemi (es. LTI)
- **Soluzione approssimata** per via numerica in generale

**Idea:** approssimare il sistema di equazioni differenziali con un opportuno sistema di equazioni alle differenze ottenuto mediante **discretizzazione** (campionamento) del tempo continuo

- Esempio: **metodo di Eulero**, metodo di Runge-Kutta, ecc.
- Software: Python (`scipy.integrate`), Matlab (`ode45`, `simulink`), ecc.

# Metodo di Eulero

**Idea:** Dato $\Delta > 0$ passo di **discretizzazione temporale**, si sostituisce la derivata con il **rapporto incrementale**

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$$

- Equazione di transizione dello stato TC

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

- $t_k = t_0 + k\,\Delta$ $\quad$ $k$-esimo istante di tempo discreto
- Equazione di transizione dello stato approssimata

$$\frac{x(t_k+\Delta) - x(t_k)}{\Delta} = f(t_k, x(t_k), u(t_k))$$

- $\Delta$ più piccolo $\Rightarrow$ approssimazione più accurata

# Metodo di Eulero

- Equazione di transizione dello stato approssimata

$$\frac{x(t_k + \Delta) - x(t_k)}{\Delta} = f(t_k, x(t_k), u(t_k))$$

- **Segnali campionati**

$$\begin{aligned} x_k &= x(t_k) \\ x_{k+1} &= x(t_{k+1}) = x(t_k + \Delta) \\ u_k &= u(t_k) \\ y_k &= y(t_k) \end{aligned}$$

- Equazioni di stato **discretizzate**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta\, f(t_k, x_k, u_k) \\ y_k &= h(t_k, x_k, u_k) \end{aligned}$$

- indice temporale discreto $k =$ campionamento del TC

# Considerazioni finali

**Nota:** simulazione è uno stumento utile per studiare i sistemi dinamici ma ha dei **limiti**:

- parametri del sistema, condizioni iniziali, ingressi **non** sono noti con esattezza
- per alcuni sistemi, piccole variazioni di parametri e/o condizioni iniziali e/o ingressi possono comportare variazioni **singificative** del comportamento

- Per comprendere in modo esaustivo il comportamento di un sistema la simulazione **non** è sufficiente

  $\Rightarrow$ serve l'**analisi**