Fondamenti di Automatica
Note sull'analisi modale dei sistemi lineari tempo continuo

2.4 Anti-trasformata di Laplace

Definizione (Radici di un polinomio e molteplicità). Dato un polinomio $a(s)$ nella variable complessa s, i valori $p_i \in \mathbb{C}$ per cui $a(p_i) = 0$ sono dette **radici**. Dato un polinomio $a(s) \neq 0$ ed una radice $p_i \in \mathbb{C}$, si dice che p_i ha **molteplicità** m_i se il polinomio $a(s)$ può essere scritto come $a(s) = \widetilde{a}(s)(s-p_i)^{m_i}$ dove $\widetilde{a}(s)$ è un polinomio tale che $\widetilde{a}(p_i) \neq 0$.

Definizione (Polinomi coprimi). Dati due polinomi $a(s)$ e $b(s)$, essi si dicono **coprimi** se non hanno radici comuni.

Consideriamo adesso una funzione razionale

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

dove $a(s)$ e $b(s)$ sono polinomi coprimi. Le radici p_i di $a(s)$ sono dette **poli** di $F(s)$. Supponiamo preliminarmente che tutte le radici di $a(s)$ siano distinte, ovvero $p_i \neq p_\ell$ per tutti gli $i \neq \ell$. Allora vale il seguente risultato, noto come sviluppo in fratti semplici.

<u>Fatto 2.4</u> **(Sviluppo in fratti semplici per funzioni razionali con radici distinte).** Si consideri una funzione razionale strettamente propria

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

dove $a(s)$ e $b(s)$ sono polinomi. Siano $p_1, \ldots, p_n$ le radici di $a(s)$ e si assuma che queste radici siano distinte. Allora,

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

dove

$$K_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i)F(s)$$

è detto **residuo** associato al polo p_i. In particolare, $K_i = 0$ se e solo se p_i è una radice di $b(s)$. La funzione $f(t)$ tale che $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ è data da

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \, e^{p_i t}$$

Esempio 2.5 Consideriamo la funzione

$$F(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-a)}, \quad a \neq -1$$

Possiamo allora decomporre $F(s)$ come

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-a}$$

dove

$$K_1 = \lim_{s \to -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \to -1} \frac{s-2}{s-a} = \frac{3}{a+1}, \quad K_2 = \lim_{s \to a} (s-a)F(s) = \lim_{s \to a} \frac{s-2}{s+1} = \frac{a-2}{a+1}$$

La corrispondente funzione nel tempo è data da

$$f(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{at}$$

Consideriamo adesso il caso generale in cui i poli p_i possono avere molteplicità $m_i > 1$ e in cui l'elemento b_n può essere diverso da 0 (ovvero numeratore e denominatore possono avere lo stesso grado). Allora vale il seguente risultato generale.

Fatto 2.5 **(Decomposizione in fratti semplici - caso generale).** Si consideri una funzione razionale $F(s) = b(s)/a(s)$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi. Siano p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, le radici di $a(s)$ e si indichi con m_i la molteplicità della radice p_i. Allora $F(s)$ ammette un'espansione in fratti nella forma

$$F(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}$$

dove

$$K_0 = b_n, \quad K_{i\ell} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(m_i - \ell)!} \frac{d^{(m_i-\ell)}}{ds^{m_i-\ell}} \left[(s-p_i)^{m_i} F(s)\right]$$

sono detti **residui**. Inoltre,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = K_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!} t^{\ell-1} e^{p_i t}, \quad t \geq 0$$

Quindi, ad una radice p_i con molteplicità m_i sono associati i segnali

$$e^{p_i t}, \; t\, e^{p_i t}, \ldots, \; t^{m_i-1} e^{p_i t}$$

detti **modi** della funzione $F(s)$.

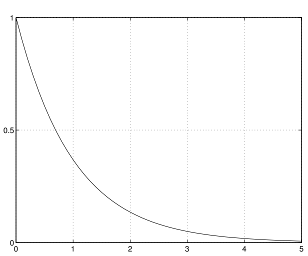
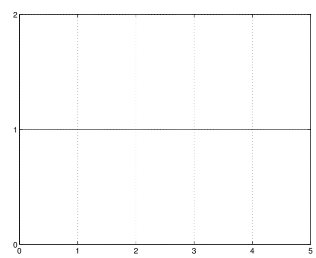
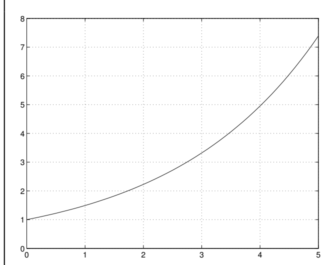
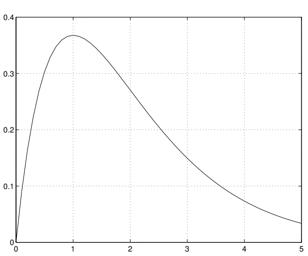
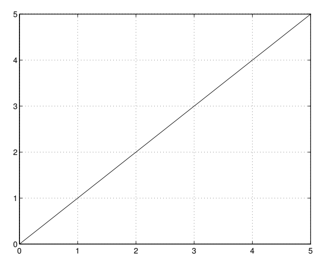
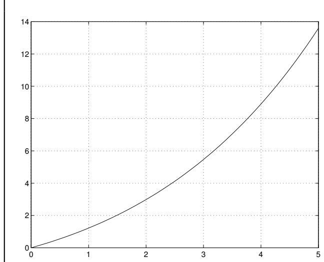
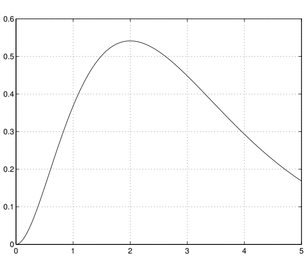
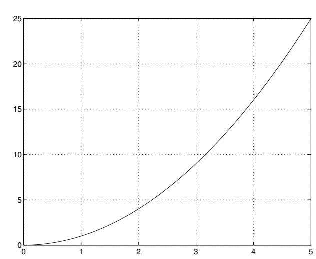
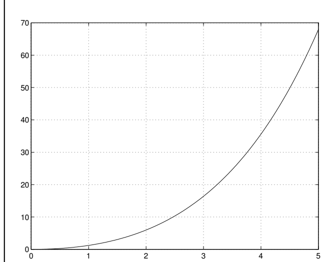
Si ricorda che le radici di $a(s)$ possono essere complesse coniugate. In questo caso, ad una radice $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ di molteplicità m_i corrisponde anche una radice $p_r = \overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ di molteplicità m_i. Inoltre, indicando con $K_{i\ell} = \alpha_{i\ell} + j\beta_{i\ell}$ l'ℓ-esimo residuo associato a p_i con $\ell = 1, 2, \ldots, m_i$, allora l'ℓ-esimo residuo $K_{r\ell}$ associato a $p_r = \overline{p}_i$ soddisfa $K_{r\ell} = \alpha_{i\ell} - j\beta_{i\ell}$. Questi due residui si combinano in modo tale che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell} + \frac{K_{r\ell}}{(s-p_r)^\ell}\right\} = \frac{1}{(\ell-1)!} \left(2\,\alpha_{i\ell}\, t^{\ell-1}\, e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) - 2\,\beta_{i\ell}\, t^{\ell-1}\, e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)\right)$$

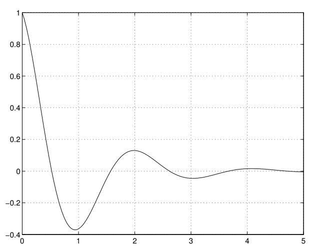
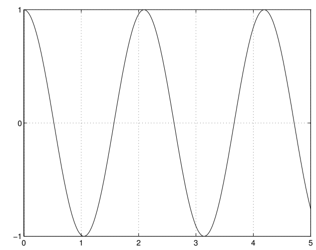
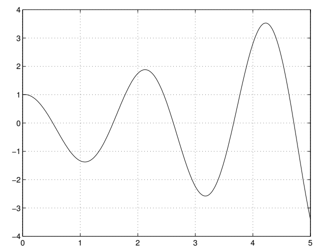
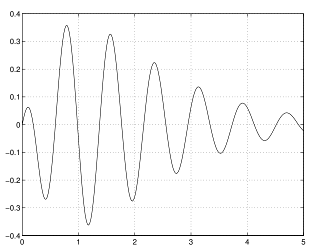
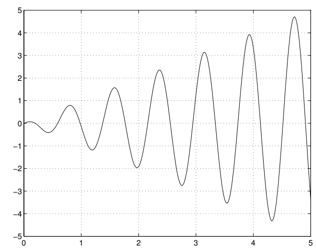
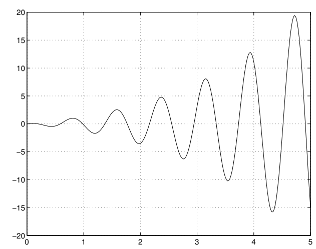
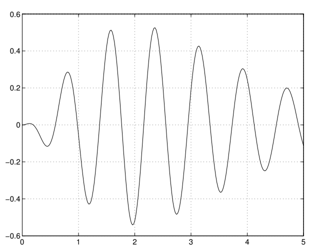
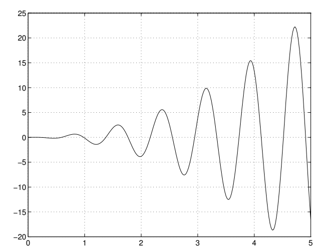
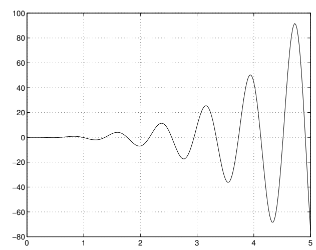
Classificazione dei modi

Riportiamo qui di seguito l'andamento qualitativo dei modi in funzione di ℓ e $\mathrm{Re}\{p_i\}$.

- **Modi reali TC**: $t^\ell e^{p_i t}$.

	$p_i < 0$	$p_i = 0$	$p_i > 0$
$\ell = 0$			
$\ell = 1$			
$\ell = 2$			

- **Modi complessi coniugati TC**: $(t^\ell \cos(\omega_i\, t) e^{\sigma_i t},\, t^\ell \sin(\omega_i\, t) e^{\sigma_i t})$ con $p_i = \sigma_i + j\,\omega_i$.

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\ell = 0$			
$\ell = 1$			
$\ell = 2$			

Dai grafici sopra riportati si vede subito che un modo $t^\ell e^{p_i t}$ risultante **oscillante** se e solo se per il corrispondente polo $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ si ha una parte immaginaria $\omega_i \neq 0$. I modi di evoluzione nel tempo possono essere inoltre classificati sulla base del loro comportamento nel limite per t tendente ad infinito. In particolare, un modo di evoluzione del tipo $t^\ell e^{p_i t}$ si dice **convergente** se:

$$\lim_{t\to+\infty} t^\ell e^{p_i t} = 0$$

Un modo si dice **limitato** se:

$$\exists\, M > 0 : |t^\ell e^{p_i t}| < M \qquad \forall\, t \geq 0$$

Infine un modo si dice **divergente** se non è limitato.

Esaminando l'andamento nel tempo dei diversi modi, è immediato fare le seguenti considerazioni:

- Tutti i modi $t^\ell e^{p_i t}$ associati a un polo con $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\} < 0$ sono convergenti, indipendentemente da ℓ, in quanto l'esponenziale $e^{\sigma_i t}$ domina sulla potenza t^ℓ.
- Tutti i modi $t^\ell e^{p_i t}$ associati a un polo con $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\} < 0$ sono divergenti.
- Nel caso invece di modi associati a poli sull'asse immaginario, ovvero con $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\} = 0$, dobbiamo distinguere due sottocasi:
  - per $\ell = 0$ si hanno modi limitati;
  - per $\ell > 0$ si hanno invece modi divergenti a causa della presenza della potenza t^ℓ.

Sulla base di queste considerazioni, possiamo osservare che per studiare il macro-comportamento di una funzione non è necessario calcolare i residui. È sufficiente calcolare le radici di $a(s)$ e la corrispondente molteplicità.

Vale infatti il seguente risultato.

<u>**Teorema 2.1**</u> **(Evoluzione dei modi)** Si consideri una funzione razionale $F(s) = b(s)/a(s)$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi. Siano p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, le radici di $a(s)$ e si indichi con m_i la molteplicità della radice p_i. Sia $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Allora:

a) $f(t)$ è **convergente** ($\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$) se e solo se tutti i modi di $F(s)$ sono convergenti, ovvero se e solo se tutte le radici di $a(s)$ hanno parte reale < 0.

b) $f(t)$ è **limitata** ($\exists M$ tale che $|f(t)| \leq M$ per tutti i $t \geq 0$) se e solo se tutti i modi di $F(s)$ sono limitati, ovvero se e solo se tutte le radici di $a(s)$ hanno parte reale ≤ 0, e, nel caso tale parte reale sia nulla, la molteplicità è 1.

c) $f(t)$ è **divergente** ($\lim_{t\to\infty} |f(t)| = \infty$) se e solo se esiste un modo di $F(s)$ che diverge, ovvero se e solo se esiste almeno una radice di $a(s)$ con parte reale > 0, e/o, almeno un radice con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1. $\square$

Osserviamo per concludere che nel caso b) non necessariamente $f(t)$ ammette limite per t tendente finito. In particolare il limite non esiste ogni volta che esistono modi oscillanti persistenti, ovvero associati a poli con $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\} \geq 0$ e $\omega_i = \mathrm{Im}\{p_i\} \neq 0$. Tuttavia, se non ci sono modi oscillanti persistenti, vale il seguente risultato (anche noto come Teorema del valore finale).

<u>**Fatto 2.6**</u> **(Teorema del valore finale).** Si consideri una funzione razionale $F(s) = b(s)/a(s)$ con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi. Se tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale < 0 tranne al più un polo in 0 con molteplicità 1, allora vale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = K$$

con K il residuo del polo in zero, calcolato come $K = \lim_{s\to 0} sF(s)$.
Dimostrazione. Posso prendere, senza perdita di generalità, come primo polo quello in 0, ovvero porre $p_1 = 0$. Nelle ipotesi fatte, la scomposizione in fratti semplici della $F(s)$ assume la forma

$$F(s) = K_0 + \frac{K_1}{s} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}$$

dove in particolare $K_1 = \lim_{s\to 0} sF(s)$. Di conseguenza

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_0\delta(t) + K_1\, 1(t) + \sum_{i=2}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!}\, t^{\ell-1} e^{p_i t}\, 1(t), \quad t \geq 0$$

Nel limite per t tendente ad infinito tutti i modi nella sommatoria convergono a 0 in quanto sono associati, per ipotesi, a poli con parte reale < 0. Di conseguenza si ha $\lim_{t\to\infty} f(t) = K_1$ con K_1 il residuo associato al polo $p_1 = 0$. $\square$

L'importanza di questo tipo di analisi risiede nel fatto che, nel dominio di Laplace, la soluzione per sistemi lineari è data da funzioni razionali. Possiamo quindi studiare il comportamento di una sistema lineare ricorrendo al Teorema 2.1.

2.5 Analisi modale

Consideriamo ora il sistema LTI TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

Come visto, l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$ nel dominio di Laplace assume la forma

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\varphi(s)}x(0)$$

La matrice $(sI - A)^{-1}$ ha come elementi funzioni razionali strettamente proprie aventi al denominatore il polinomio caratteristico del sistema $\varphi(s) = \det(sI - A)$. Tuttavia, il rapporto tra $\mathrm{Adj}(sI - A)$ e $\varphi(s)$ può dare luogo a cancellazioni.

Esempio 2.6 Si consideri un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si ha

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad \varphi(s) = s^2$$

Il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ presenta una radice in $\lambda = 0$ con molteplicità 2. Tuttavia, questa molteplicità viene perduta quando si fa il rapporto tra $\mathrm{Adj}(sI - A)(s)$ e $\varphi(s)$. Vale infatti,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando avvengono cancellazioni, alla matrice A è possibile associare un altro polinomio $m(s)$, detto **polinomio minimo** del sistema, ottenuto come segue:

a. si calcolano $\mathrm{Adj}(sI - A)$ e $\varphi(s)$;

b. si calcola $(sI - A)^{-1} = \mathrm{Adj}(sI - A)/\varphi(s)$ effettuando tutte le semplificazioni;

c. si calcola $m(s)$ come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1}$.

Questo porta alla semplificazione

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\varphi(s)} = \frac{Q(s)}{m(s)}$$

con $Q(s)$ matrice di polinomi.

Esempio 2.6 (continua) Nell'esempio visto in precedenza si ha $m(s) = s$. Quindi,

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m(s) = s$$

Il polinomio $m(s)$ si chiama **polinomio minimo** proprio in virtù del fatto che non è possibile fare ulteriori semplificazioni. Il seguente risultato mette in relazione il polinomio minimo $m(s)$ e quello caratteristico $\varphi(s)$.

__**Fatto 2.7**__ Il polinomio minimo $m(s)$ contiene come radici tutti gli autovalori del sistema, ovvero tutte le radici del polinomio caratteristico $\varphi(s)$, eventualmente con molteplicità inferiore. In particolare,

- sia λ_i un generico autovalore del sistema;
- sia μ_i la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $\varphi(s)$ (μ_i à detta molteplicità algebrica);
- sia m_i la sua molteplicità come radice del polinomio minimo $m(s)$

Allora vale la seguente relazione

$$1 \leq m_i \leq \mu_i$$

Dimostrazione. La relazione $m_i \leq \mu_i$ è ovvia perché semplificando non posso aumentare la molteplicità! La relazione $1 \leq m_i$ equivale a mostrare che

$$\varphi(\lambda_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m(\lambda_i) = 0$$

ovvero che un autovalore λ_i non può sparire completamente nell'espressione $(sI - A)^{-1}$. Per vedere questo, ricordiamo che per ogni autovalore λ_i esiste almeno un vettore v_i (detto autovettore) tale per cui

$$A\, v_i = \lambda_i\, v_i$$

Di conseguenza, cambiando segno e aggiungendo ad ambo i membri $s\, v_i$ vale,

$$s\, v_i - A\, v_i = s\, v_i - \lambda_i\, v_i$$

che può essere riscritto come

$$(s\, I - A) v_i = (s - \lambda_i) v_i$$

Questa equazione implica a sua volta

$$\frac{1}{s - \lambda_i} v_i = (s\, I - A)^{-1} v_i$$

Poiché v_i è un vettore costante, questo implica necessariamente che il termine $s - \lambda_i$ deve comparire al denominatore di almeno uno degli elementi di $(s\, I - A)^{-1}$. $\square$

Riassumendo, il **Fatto 2.7** dice che partendo dagli autovalori di un sistema, questi autovalori possono perdere molteplicità ma non possono sparire completamente nell'espressione $(sI - A)^{-1}$. Ricordando ora che per la risposta libera vale

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} x(0)\,,$$

abbiamo che ciascun elemento della matrice e^{At} può essere ottenuto anti-trasformando il corrispondente elemento della matrice $(sI - A)^{-1} = Q(s)/m(s)$. Quindi conoscendo il polinomio minimo $m(s)$, ovvero gli autovalori del sistema λ_i e le loro molteplicità geometriche m_i, possiamo immediatamente sapere come sarà l'evoluzione nel tempo di e^{At}.

__**Teorema 2.2**__ **(Modi naturali).** Dato un sistema LTI TC, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori del sistema e siano $m_1, \dots, m_k$ le corrispondenti molteplicità nel polinomio minimo $m(s)$. Allora e^{At} è una matrice avente come elementi opportune combinazioni lineari di $e^{\lambda_i t}$, $te^{\lambda_i t}$, ..., $t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}$ per $i = 1, \dots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.
Di conseguenza $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,e^{At}x(0)$ evolvono secondo una opportuna combinazione dei modi naturali del sistema (al variare delle condizioni iniziali).

Concludiamo con alcune considerazioni sul **Teorema 2.2**.

- Notiamo che, come sempre, quando ho un autovalore complesso $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ anche il suo complesso coniugato $\overline{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è autovalore con la stessa molteplicità m_i. Quindi i due modi $t^\ell e^{\lambda_i t}$ e $t^\ell e^{\overline{\lambda}_i t}$ sono sempre presenti in coppia e danno luogo ai due modi reali $t^\ell \cos(\omega_i t) e^{\sigma_i t}$ e $t^\ell \sin(\omega_i t) e^{\sigma_i t}$.

- Ricordando che nel dominio di Laplace la soluzione assume la forma

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s) \end{cases} \tag{1}$$

  si possono allora trarre le seguenti conclusioni:

  1. Se i modi naturali sono tutti convergenti, la risposta libera nello stato e nell'uscita converge a zero per ogni condizione iniziale, in accordo a

$$\begin{cases} X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \\ Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) \end{cases}$$

  2. Se i modi naturali sono tutti limitati, la risposta libera nello stato e nell'uscita si mantiene limitata per ogni condizione iniziale.

- Sfruttando la dimostrazione del **Fatto 2.7**, abbiamo che, dato un autovettore v_i associato all'autovalore λ_i, vale

$$(s\,I - A)^{-1}v_i = \frac{1}{s - \lambda_i}v_i$$

  e di conseguenza, anti-trasformando,

$$e^{At}v_i = e^{\lambda_i t}v_i$$

  Quindi se noi prendiamo come condizione iniziale $x(0)$ un autovettore v_i la corrispondente evoluzione libera assume la forma

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = e^{At}v_i = e^{\lambda_i t}v_i$$

  L'interpretazione è che la condizione iniziale $x(0) = v_i$ eccita solo il modo naturale $e^{\lambda_i t}$, e il sistema evolve secondo tale modo naturale nella direzione dell'autovettore.