Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

3 Sistemi di controllo

3.1 Introduzione al controllo in retroazione

Problema del controllo

- Consideriamo un sistema LTI TC da controllare $\mathcal{P}$, detto **impianto** o **processo**

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Ipotesi: $D = 0 \quad \Rightarrow$ controllo u non può influenzare direttamente l'uscita y

- Ipotesi usualmente verificata nei sistemi reali in quanto una variazione dell'ingresso si riflette sempre con un certo ritardo sull'uscita
- Consideriamo un segnale y° un segnale, detto **riferimento**, che definisce l'andamento desiderato per l' uscita y

Problema del controllo: determinare il segnale di controllo u in modo tale che l'andamento di y risulti (il più possibile) vicino a quello desiderato y°, anche in presenza di perturbazioni di varia natura.
Rendere quindi l'**errore di inseguimento** $y^\circ - y$ piccolo (quanto possibile).

Regolazione a zero e inseguimento

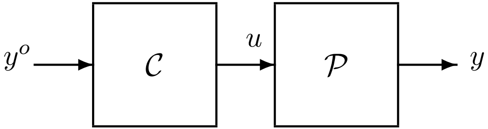
- **Problema di regolazione a zero**: riferimento nullo $y^\circ(t) = 0 \;\; \forall t$
  si vuole portare il sistema nella condizione di quiete in cui l'uscita è zero
- **Problema di inseguimento**: $y^\circ(t)$ segnale non identicamente nullo
  $y^\circ(t)$ traiettoria desiderata per le variabili di uscita

Ipotesi: supponiamo per semplicità che il riferimento sia costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

- Y_0 è detto **set-point**
- il set-point Y_0 rappresenta il valore (o il vettore dei valori per sistemi con più uscite) a cui vogliamo portare l'uscita del sistema

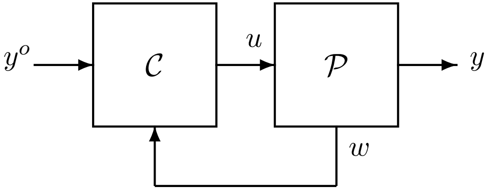
Controllo in anello aperto (feedforward)



Controllo in anello aperto (feedforward): segnale di controllo u predeterminato in funzione dell'andamento desiderato y°

- u non dipende dal comportamento esibito dal sistema $\Rightarrow$ **catena aperta**
- Si può usare solo quando il funzionamento del sistema è abbastanza predicibile e/o quando eventuali disturbi presenti nel sistema possono essere misurati e compensati.

Controllo in retroazione (feedback)



- Supponiamo di poter conoscere/misurare in tempo reale l'andamento di alcune variabili w
- **vettore informativo** w rappresenta l'informazione a disposizione sulla configurazione del processo $\mathcal{P}$

Controllo in retroazione (feedback): il controllore $\mathcal{C}$ genera in tempo reale il segnale di controllo u sulla base del riferimento y° e del vettore informativo w

- u cambia in funzione del comportamento esibito dal sistema $\Rightarrow$ **catena chiusa**

Retroazione sullo stato e sull'uscita

Consideriamo due casi relativamente alla scelta del vettore informativo

1. **Informazione completa:** stato completamente accessibile/misurabile

$$w(t) = x(t)$$

$\Rightarrow$ **controllo in retroazione sullo stato**

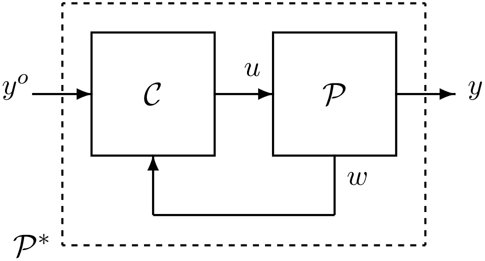
2. **Informazione parziale**. solo uscita controllata accessibile/misurabile

$$w(t) = y(t)$$

$\Rightarrow$ **controllo in retroazione sull'uscita**

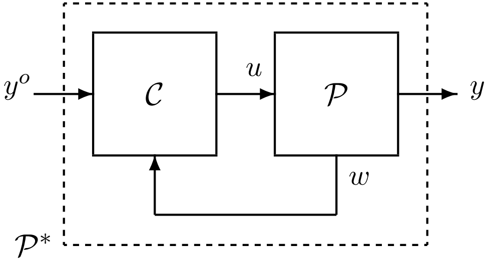
- Controllo in retroazione sull'uscita più complicato perché ho meno informazione
- Sono possibili casi intermedi in cui non tutto lo stato è accessibile ma sono misurabili altre variabili oltre all'uscita

Sistema a retroazione



- Indichiamo con il simbolo $\mathcal{P}^*$ il **sistema in ciclo chiuso** o **sistema a retroazione** formato dall'interconnessione tra processo $\mathcal{P}$ e controllore $\mathcal{C}$
- $\mathcal{P}^*$ sistema dinamico con ingresso y° e uscita y
- Processo $\mathcal{P}$ e controllore $\mathcal{C}$ sistemi LTI $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathcal{P}^*$ sistema LTI

Funzione di trasferimento in ciclo chiuso



- Consideriamo la **funzione di trasferimento in ciclo chiuso** tra riferimento y° e uscita y

$$G^*_{y^\circ y}(s)$$

- $G^*_{y^\circ y}(s)$ determina come il sistema in ciclo chiuso si comporta in risposta ad un certo andamento desiderato y°
- Obiettivo fondamentale del controllo è assegnare a $G^*_{y^\circ y}(s)$ una forma desiderata

Risposta in ciclo chiuso

- Risposta forzata in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\, Y^\circ(s)\right\} = \underbrace{y_f^{G^*}(t)}_{\text{transitorio}} + \underbrace{y_f^{Y^\circ}(t)}_{\text{regime permanente}}$$

- Sistema a retroazione $\mathcal{P}^*$ asintoticamente stabile

  $\Rightarrow$ risposta complessiva $y(t)$ converge al regime permanente per qualsiasi condizione iniziale

$$\lim_{t\to+\infty}\left[y(t) - y_f^{Y^\circ}(t)\right] = 0$$

- Riferimento costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

  $\Rightarrow$ regime permanente

$$y_f^{Y^\circ}(t) = G^*_{y^\circ y}(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

  con $G^*_{y^\circ y}(0)$ **guadagno in continua in ciclo chiuso**

Specifiche di progetto

Specifiche di progetto

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$

- Specifica 1 $\Rightarrow$ convergenza dell'uscita al regime permanente per qualsiasi condizione iniziale
- Specifica 2 $\Rightarrow$ valore di regime $G^*_{y^\circ y}(0) \cdot Y_0 \;=\;$ valore desiderato Y_0
- Specifiche 1 e 2 $\Rightarrow$ convergenza dell'uscita al valore desiderato

Nota: per sistemi con più uscite la specifica 2 diventa $G^*_{y^\circ y}(0) = I$ matrice identica

Specifiche di progetto e inseguimento perfetto

Fatto 3.1 Supponiamo che il controllore $\mathcal{C}$ sia progettato in modo da soddisfare le specifiche 1 e 2 e consideriamo un **riferimento costante**

$$y^{\circ}(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

Allora, per qualsiasi condizione iniziale si ha **inseguimento perfetto** del riferimento

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = Y_0$$

- Specifica 1 (stabilità asintotica) garantisce anche che il sistema a retroazione sia robusto rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali e dell'ingresso
- Specifiche 1 e 2 garantiscono anche un buon inseguimento di riferimenti non costanti ma che **variano lentamente** (vedi slide successiva)

Inseguimento di riferimenti lentamente variabili

- Esempio di riferimento lentamente variabile: riferimento sinusoidale

$$y^{\circ}(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$$

  di **bassa frequenza** $\omega_0 \approx 0$

- Regime permanente

$$y_f^{Y^{\circ}}(t) = |G^*_{y^{\circ}y}(j\omega_0)|\, Y_0 \sin[\omega_0 t + \angle G^*_{y^{\circ}y}(j\omega_0)] 1(t)$$

- Per continuità $G^*_{y^{\circ}y}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad G^*_{y^{\circ}y}(j\omega_0) \approx 1$ quando $\omega_0 \approx 0$
- Di conseguenza per $\omega_0 \approx 0$ il regime permanente coincide **approssimativamente** con l'andamento desiderato

$$y_f^{Y^{\circ}}(t) \approx Y_0 \sin(\omega_0 t) 1(t)$$

- Errore tanto più piccolo quanto più vicina a zero la frequenza ω_0 (tanto più lentamente varia il riferimento)

Specifiche nel transitorio

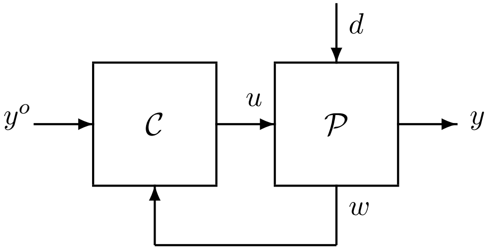
- Specifica 2 garantisce comportamento desiderato a regime (**specifica a regime**)
- Nella pratica, importante raggiungere il valore desiderato in modo sufficientemente rapido e evitando grosse variazioni dell'uscita
  $\Rightarrow$ **specifiche nel transitorio**

Specifiche di progetto

- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

- Transitorio dipende dalla funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G^*_{y^\circ y}(s)$
  $\Rightarrow$ per soddisfare le specifiche nel transitorio occorre assegnare a $G^*_{y^\circ y}(s)$ una forma opportuna (esempio: posizione dei poli in ciclo chiuso)
- Specifiche a regime $=$ **specifiche statiche**
  Specifiche nel transitorio $=$ **specifiche dinamiche**

Attenuazione/reiezione di disturbi

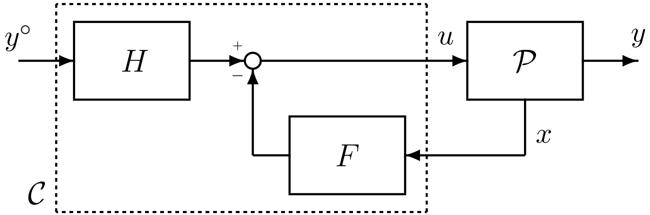


Nota: nei sistemi reali sono sempre presenti ingressi non manipolabili d (**disturbi**) che fanno deviare il sistema dal comportamento desiderato

- Spesso occorre considerare ulteriori specifiche in termini di **attenuazione o reiezione dei disturbi**
- **Reiezione dei disturbi:** proprietà di un sistema di controllo di annullare completamente l'effetto del disturbo sul comportamento a regime

3.2 Retroazione algebrica sullo stato

Retroazione algebrica sullo stato



Legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -F\,x(t) + H\,y^\circ(t)$$

- **Controllo in feedback**: $-Fx(t)$
  con F **guadagno in feedback** (retroazione)
- **Controllo in feedforward**: $Hy^\circ(t)$
  con H **guadagno in feedforward**

Guadagno in feedback e in feedforward

- Retroazione algebrica sullo stato

$$u(t) = -F\,x(t) + H\,y^{\circ}(t)$$

- Guadagni F e H sono **parametri di progetto** da scegliere per soddisfare le specifiche di controllo
- In generale F matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(x)$
- In generale H matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$
- **Per sistemi SISO** $\dim(u) = \dim(y) = 1$:
  - F vettore riga $1 \times \dim(x)$

    $$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$$

    con $n = \dim(x)$
  - H parametro scalare

Sistema in ciclo chiuso

- Processo

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Controllore

$$\mathcal{C}: \quad u(t) = -F\,x(t) + H\,y^{\circ}(t)$$

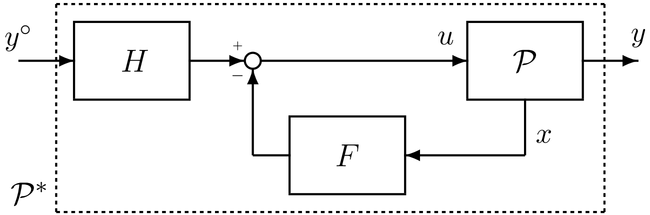
- Sostituendo la legge di controllo nell'equazione del processo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + B\left[-Fx(t) + Hy^{\circ}(t)\right] = (A - BF)\,x(t) + BH\,y^{\circ}(t) \end{aligned}$$

- **Sistema in ciclo chiuso**

$$\mathcal{P}^{*}: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - B\,F)x(t) + B\,Hy^{\circ}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Sistema in ciclo chiuso



Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BF$ e $B^* = BH$

- Sistema in ciclo chiuso: sistema LTI TC con ingresso y° e uscita y
- Matrice della **dinamica in ciclo chiuso** $A^* = A - BF$ dipende dal guadagno in feedback F

Sistema in ciclo chiuso

- Sistema in ciclo chiuso

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BF$ e $B^* = BH$

- **Polinomio caratteristico in ciclo chiuso**

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

- **Funzione di trasferimento in ciclo chiuso**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A^*)^{-1} B^* = C(sI - A + BF)^{-1} BH$$

Nota: al variare del guadagno F possiamo **spostare gli autovalori** nel piano s
$\Rightarrow$ possiamo utilizzare F per modificare il comportamento dinamico e in particolare le proprietà di stabilità del sistema

Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- Per sistemi SISO
  - funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} C\mathrm{Adj}(sI - A)B = \frac{r(s)}{\varphi(s)}$$

  con

$$r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B$$

  - funzione di trasferimento in ciclco chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BH = \frac{1}{\varphi^*(s)} C\mathrm{Adj}(sI - A + BF)BH$$

- $r(s)$ polinomio di grado $< n$
- Per sistemi SISO si dimostra che per ogni F vale

$$C\mathrm{Adj}(sI - A + BF)B = \underbrace{C\mathrm{Adj}(sI - A)B}_{r(s)}$$

[dimostrazione si basa sulla formula di Sherman-Morrison per l'inversa di una somma]

Proprietà del sistema in ciclo chiuso

Fatto 3.2 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato $u = -Fx + Hy^\circ$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con $r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B$

- La retroazione algebrica sullo stato modifica i poli ma **non** modifica gli zeri di $G^*_{y^\circ y}(s)$

Progetto della retroazione algebrica sullo stato

Specifiche di progetto

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$
- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

- Guadagno in continua in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{r(0)}{\varphi^*(0)} H$$

$\Rightarrow$ per soddisfare la specifica 2 dobbiamo porre

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

Progetto della retroazione algebrica sullo stato

Progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato

1. Scegliere guadagno in feedback F tale che
   - polinomio caratteristico in ciclo chiuso

     $$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

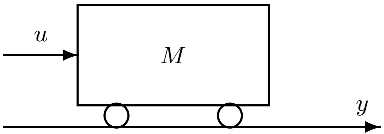
     con tutte radici a $\mathrm{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1)
   - radici di $\varphi^*(s)$ posizionate in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3)
2. Scegliere guadagno in feedforward

   $$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

   in modo da avere $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ e quindi inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2)

Esempio: controllo di posizione

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



Obiettivo: portare il carrello in una posizione desiderata Y_0 tramite il controllo u

- Problema di controllo con riferimento costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

- Retroazione algebrica sullo stato

$$u = -F\,x + H\,y^\circ$$

con

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Esempio: controllo di posizione

- Equazioni di stato per $M = 1$ e $b = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{aligned}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = s\,(s+1)$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{r(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{s\,(s+1)}$$

con

$$r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Esempio: controllo di posizione

- Retroazione algebrica sullo stato

$$u = -F\,x + H\,y^{\circ}$$

con

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \qquad H \text{ scalare}$$

- Matrice della dinamica in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} A^* = A - BF \quad &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_1 & -(1+f_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Equazioni di stato del sistema in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \quad &= \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_1 & -(1+f_2) \end{bmatrix}}_{A^*} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} H}_{B^*} \; y^{\circ}(t) \\ y(t) \quad &= \quad \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \; x(t) \end{aligned}$$

Esempio: controllo di posizione

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ f_1 & s + (1 + f_2) \end{bmatrix} \\ &= s^2 + (1 + f_2)\, s + f_1\end{aligned}$$

- Al variare di f_1 e f_2 posso assegnare in modo arbitrario i coefficienti di $\varphi^*(s)$ $\Rightarrow$ posso posizionare dove voglio gli autovalori in ciclo chiuso
- Per Cartesio, stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1) quando tutti i coefficienti di $\varphi^*(s)$ hanno stesso segno

$$\Updownarrow$$

$$f_1 > 0 \qquad\qquad f_2 > -1$$

Nota: la posizione degli autovalori in ciclo chiuso determina il comportamento nel transitorio (specifica 3)

Esempio: controllo di posizione

- Funzione di trasferimento in ciclco chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{1}{s^2 + (1+f_2)\,s + f_1} H$$

- Per avere $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2)

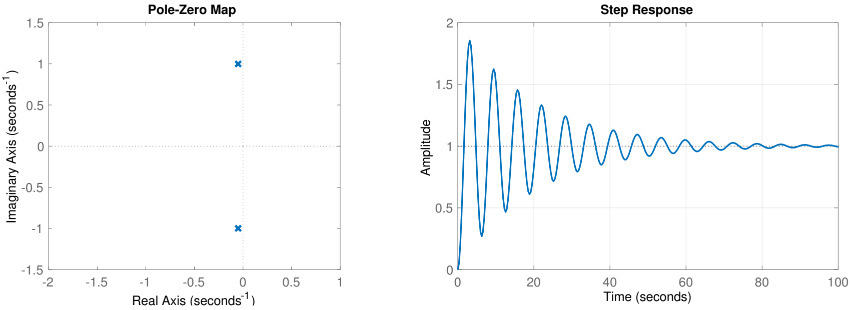
$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)} = f_1$$

- Legge di controllo

$$\begin{aligned} u &= -F\,x + H\,y^\circ \\ &= -\left[f_1\ f_2\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] + f_1\,y^\circ \\ &= f_1(y^\circ - x_1) - f_2\,x_2 \end{aligned}$$

con $f_1 > 0$ e $f_2 > -1$

Esempio: controllo di posizione

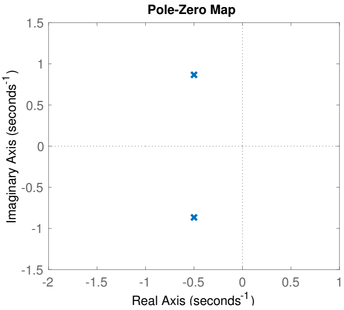


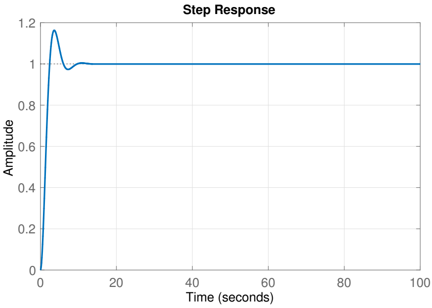
- Guadagni in feedback $f_1 = 1$ e $f_2 = -0.9$
- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^2 + 0.1\,s + 1$$

Nota: autovalori in ciclo chiuso complessi coniugati
$\Rightarrow$ risposta in ciclo chiuso oscillante

Esempio: controllo di posizione



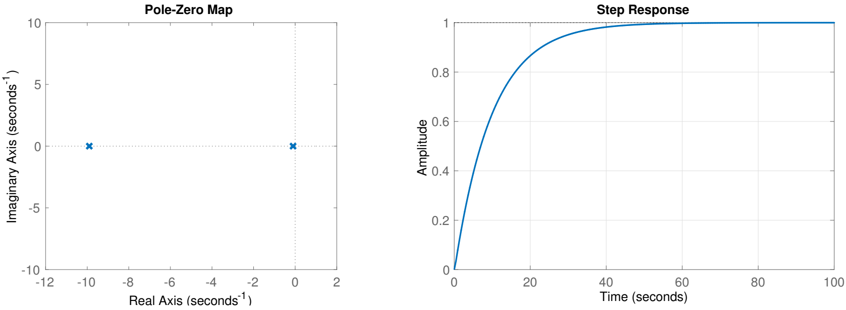


- Guadagni in feedback $f_1 = 1$ e $f_2 = 0$
- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^2 + s + 1$$

Nota: autovalori in ciclo chiuso più lontani dall'asse immaginario
$\Rightarrow$ risposta in ciclo chiuso con oscillazioni più smorzate

Esempio: controllo di posizione



- Guadagni in feedback $f_1 = 1$ e $f_2 = 9$
- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^2 + 10\,s + 1$$

Nota: autovalori in ciclo chiuso reali

$\Rightarrow$ risposta in ciclo chiuso non oscillante (monotona)

Limitazioni della retroazione algebrica sullo stato

Attenzione: non sempre F e H possono essere scelti in modo da soddisfare le specifiche di progetto!

- Condizione $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2) soddisfacibile solo se

  $$r(0) = -C\mathrm{Adj}(A)B \neq 0$$

  Quando $r(0) = 0$ **non** è possibile mantenere stabilmente l'uscita ad un valore costante con la variabile di controllo u a disposizione

- Nell'esempio del carrello, al variare dei due guadagni f_1 e f_2 era possibile assegnare a piacere gli autovalori in ciclo chiuso, ma **non** è sempre così

  Possono esistere autovalori **non controllabili** che non possono essere modificati mediante controllo in retroazione!

3.3 Controllabilità e stabilizzabilità

Esempio introduttivo 1

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2)(s+1)$$

- Autovalori in anello aperto $\lambda_1 = 2, \ \ \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad$ instabilità interna
- Consideriamo un controllo in retroazione algebrica sullo stato

$$u = -F\,x + H\,y^\circ$$

- Matrice della dinamica in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} A^* = A - BF \quad &= \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] \\ &= \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio introduttivo 1

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s+1)$$

- Autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = 2 - f_1$, $\lambda_2^* = -1$
- Retroazione sullo stato modifica l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ma non modifica l'altro autovalore $\lambda_2 = -1$
  - $\lambda_1 = 2$ autovalore **controllabile**
  - $\lambda_2 = -1$ autovalore **non controllabile**

Nota: poiché l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$ ha Re< 0, possiamo rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile ponendo $f_1 > 2$
$\Rightarrow$ sistema **stabilizzabile**

Esempio introduttivo 2

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-2)(s-1)$$

- Autovalori in anello aperto $\lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow$ instabilità interna
- Consideriamo un controllo in retroazione algebrica sullo stato

$$u = -F\,x + H\,y^{\circ}$$

- Matrice della dinamica in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} A^* = A - BF \quad &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \;\; f_2] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio introduttivo 2

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s - 2 + f_1 & -3 + f_2 \\ 0 & s - 1 \end{bmatrix} = (s - 2 + f_1)(s - 1)$$

- Autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = 2 - f_1, \quad \lambda_2^* = 1$
- Retroazione sullo stato modifica l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ma non modifica l'altro autovalore $\lambda_2 = 1$
    - $\lambda_1 = 2$ autovalore **controllabile**
    - $\lambda_2 = 1$ autovalore **non controllabile**

Nota: poiché l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = 1$ ha Re> 0, non possiamo rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile qualunque sia F
$\Rightarrow$ sistema **non stabilizzabile**

Autovalori controllabile e non controllabili

- Consideriamo il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

Definizione: un autovalore λ_i della matrice A si dice

- **non controllabile** se non può essere modificato con il controllo, ossia se è radice di $\varphi^*(s)$ per qualsiasi scelta F
- **controllabile** se invece può essere modificato con il controllo

- Si dimostra che gli autovalori controllabili possono essere **posizionati a piacere** nel piano s scegliendo il guadagno di retroazione F
(unico vincolo: autovalori complessi sono sempre in coppie coniugate)
- Controllabilità è una proprietà della coppia (A, B)

Polinomio caratteristico di controllo

- Possiamo fattorizzare il polinomio caratteristico come

$$\varphi(s) = \varphi_{\mathrm{c}}(s)\, \varphi_{\mathrm{nc}}(s)$$

  - $\varphi_{\mathrm{c}}(s)$ **polinomio caratteristico di controllo** ha come radici tutti e soli gli autovalori controllabili
  - $\varphi_{\mathrm{nc}}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_{\mathrm{c}}(s)}$ ha come radici tutti e soli gli autovalori non controllabili

- Nell'esempio introduttivo 1

$$\varphi_{\mathrm{c}}(s) = s - 2 \qquad \varphi_{\mathrm{nc}}(s) = s + 1$$

- Nell'esempio introduttivo 2

$$\varphi_{\mathrm{c}}(s) = s - 2 \qquad \varphi_{\mathrm{nc}}(s) = s - 1$$

Stabilizzabilità

Fatto 3.3 Esiste un guadagno in feedback F tale da rendere la dinamica in ciclo chiuso $A^* = A - BF$ asintoticamente stabile
$\Leftrightarrow$ tutti gli (eventuali) autovalori non controllabili hanno Re < 0

Definizione: un sistema LTI si dice

- **completamente controllabile** se tutti gli autovalori sono controllabili
- **stabilizzabile** se tutti gli autovalori non controllabili hanno Re < 0

- Per studiare la stabilizzabilità dobbiamo fattorizzare $\varphi(s)$ in parte controllabile $\varphi_{\mathrm{c}}(s)$ e parte non controllabile $\varphi_{\mathrm{nc}}(s)$
- Per fattorizzare $\varphi(s)$ possiamo calcolare $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$ e vedere quali autovalori si modificano e quali no
(metodo **non consigliato** perché può richiedere calcoli complicati)
- In alternativa possiamo determinare direttamente $\varphi_c(s)$ individuando la **parte controllabile** del sistema

Esempio introduttivo 1

- Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 1 con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico $\varphi(s) = (s-2)(s+1)$ con $\lambda_1 = 2$ autovalore controllabile e $\lambda_2 = -1$ autovalore non controllabile
- Equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & 2\,x_1 + 3\,x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 \end{cases}$$

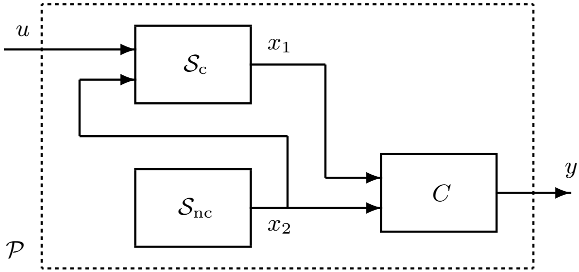
- $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ **sottosistema controllabile**: evolve secondo l'autovalore controllabile $\lambda_1 = 2$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{c}}:\ \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u$$

- $\mathcal{S}_{\mathrm{nc}}$ **sottosistema non controllabile**: evolve secondo l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{nc}}:\ \dot{x}_2 = -x_2$$

Decomposizione di controllabilità



- $\mathcal{S}_{\mathrm{nc}}$ sottosistema non controllabile evolve come un sistema **autonomo**: non dipende da u né direttamente né indirettamente attraverso x_1
- $\mathcal{S}_{\mathrm{nc}}$ sottosistema non controllabile **non** influenza l'evoluzione forzata $x_f(t)$

Nota: qualunque sistema LTI può essere decomposto internamente in parte controllabile e parte non controllabile mediante un opportuno cambio di coordinate $\tilde{x} = Tx$ con T matrice invertibile

Esempio introduttivo 1

- Consideriamo l'evoluzione forzata dello stato nel dominio di Laplace

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

- Funzione di trasferimento tra ingresso e stato

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1}B &= \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A)B \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$ si cancella nel prodotto $(sI - A)^{-1}B$ e quindi non compare come polo nell'evoluzione forzata

Calcolo del polinomio caratteristico di controllo

- Si dimostra che quanto osservato nell'esempio vale sempre: autovalori non controllabili si **cancellano** nel prodotto $(sI - A)^{-1}\,B$ e quindi non compaiono come poli

Fatto 3.4 I poli di $(sI - A)^{-1}\,B$ sono tutti e soli gli autovalori controllabili del sistema

- Per sistemi singolo ingresso $\dim(u) = 1$
  - $\varphi_{\mathrm{c}}(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1}\,B$
  - $\varphi_{\mathrm{nc}}(s)$ si calcola come $\varphi_{\mathrm{nc}}(s) = \dfrac{\varphi(s)}{\varphi_{\mathrm{c}}(s)}$
- Per sistemi con più ingressi $\dim(u) > 1$ invece degli elementi di $(sI - A)^{-1}\,B$ dobbiamo considerare i determinanti delle sottomatrici quadrate
- Autovalori non controllabili non compaiono come poli di $(sI - A)^{-1}B$
  $\Rightarrow$ autovalori non controllabili non compaiono come poli di $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
  $\Rightarrow$ autovalori non controllabili sono autovalori **nascosti** del sistema

Esercizi proposti

1. Dato il sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è stabilizzabile

2. Dato il sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare autovalori controllabili e non controllabili e dire se il sistema è stabilizzabile

3. Dato il sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è stabilizzabile

3.4 Raggiungibilità

Raggiungibilità

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

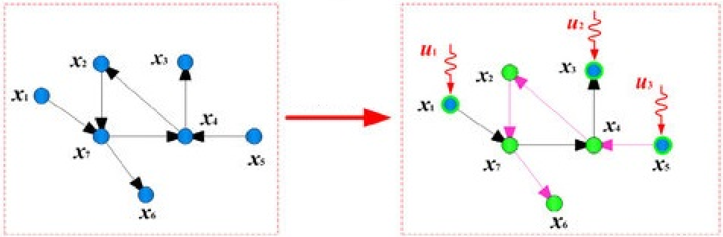
- Supponendo condizione iniziale nulla $x(0) = 0$ il sistema evolve secondo la sola evoluzione forzata

$$x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

Domanda: scegliendo opportunamente il controllo u possiamo portare lo stato del sistema da $x(0) = 0$ a uno stato desiderato $x(t) = x^\circ$?

- Possiamo rispondere a questa domanda studiando le proprietà di **raggiungibilità** del sistema

Esempio di applicazione



- Dinamica di una rete
  componente x_i dello stato $=$ configurazione del nodo i
- Possiamo portare la configurazione complessiva della rete dove vogliamo agendo con il controllo u su uno o più dei nodi della rete?
  Su quanti e quali nodi dobbiamo agire?
- **Applicazioni**:
  - dinamica delle opinioni (ingresso $u =$ marketing)
  - cyber-security (ingresso $u =$ agente malevolo che cerca di compromettere il funzionamento complessivo agendo su uno dei nodi della rete)

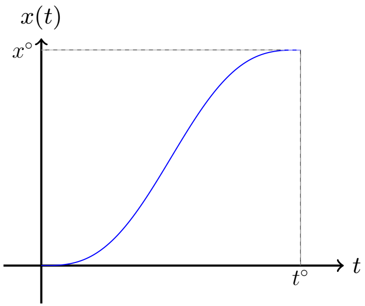
Esempio introduttivo

- Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 1 con
  - $\mathcal{S}_{\rm c}$ sottosistema controllabile: evolve secondo l'autovalore controllabile $\lambda_1 = 2$
  $$\mathcal{S}_{\rm c} : \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u$$
  - $\mathcal{S}_{\rm nc}$ sottosistema non controllabile: evolve secondo l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$
  $$\mathcal{S}_{\rm nc} : \dot{x}_2 = -x_2$$
- Sottosistema non controllabile evolve solo in funzione della condizione iniziale
$$x_2(t) = e^{-t}\, x_2(0)$$
- Condizione iniziale nulla $x_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$

Nota: partendo da condizioni iniziali nulle $x_1(0) = x_2(0) = 0$ possiamo raggiungere soltanto gli stati con $x_2(0) = 0$

Stati raggiungibili

Definizione: uno stato x° si dice raggiungibile se esistono un tempo t° e un segnale di controllo $u(t)$, $t \in [0, t^\circ]$ tale da portare lo stato del sistema al valore $x(t^\circ) = x^\circ$ partendo dallo stato zero $x(0) = 0$



- X_r **insieme degli stati raggiungibili**
- Se tutti gli stati sono raggiungibili $X_\mathrm{r} = \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$ il sistema si dice **completamente raggiungibile**
  in questo caso è possibile portare il sistema in qualunque configurazione mediante il controllo
- In generale X_r sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$

Stati raggiungibili

- Supponendo condizione iniziale nulla $x(0) = 0$ il sistema evolve secondo la sola evoluzione forzata

$$x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

- Ricordiamo la definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

- Al tempo t° possiamo raggiungere tutti gli stati del tipo

$$\begin{aligned} x(t^\circ) &= \int_0^{t^\circ} e^{A(t^\circ-\tau)} Bu(\tau)d\tau = \int_0^{t^\circ} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\circ-\tau)^k}{k!} A^k Bu(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{t^\circ} \frac{(t^\circ-\tau)^k}{k!} u(\tau)d\tau \right)}_{u_k(t^\circ)} A^k B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t^\circ)\, A^k B \end{aligned}$$

Stati raggiungibili

- Al tempo t° possiamo raggiungere tutti gli stati del tipo

$$x(t^\circ) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t^\circ)\, A^k B$$

con

$$u_k(t^\circ) = \int_0^{t^\circ} \frac{(t^\circ - \tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau$$

- Le quantità $u_k(t^\circ)$ sono assegnabili liberamente al variare del segnale u
  $\Rightarrow$ sono raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di B, $A\,B$, $A^2\,B$, $\ldots$
- Per il **Teorema di Cayley-Hamilton** tutte le potenze successive A^n, A^{n+1}, $\ldots$ sono ottenibili come combinazione lineare delle prime n potenze $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$
- Nella combinazione lineare è sufficiente fermarsi alla potenza A^{n-1}
  $\Rightarrow$ sono raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di B, $A\,B$, $A^2\,B$, $\ldots$, $A^{n-1}\,B$

Matrice di raggiungibilità

- Definiamo la **matrice di raggiungibilità**

$$\mathcal{R} = \left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]$$

- $\mathrm{rank}(\mathcal{R}) =$ numero di righe/colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$
- Immagine di $\mathcal{R} =$ insieme dei vettori ottenibili come combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{R}$
  $=$ sottospazio lineare di dimensione $\mathrm{rank}(\mathcal{R})$

Fatto 3.5 X_{r} insieme degli stati raggiungibili $=$ immagine di $\mathcal{R}$

- X_{r} sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\mathrm{rank}(\mathcal{R})$
- Per sistemi LTI TC, raggiungibilità indipendente dalla scelta del tempo t°

Completa raggiungibilità

Sistema completamente raggiungibile $\Leftrightarrow$ $X_{\mathrm{r}} = \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\mathcal{R}) = n$

- In generale
$$\mathcal{R} = \left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]$$
matrice di dimensione $n \times n \dim(u)$

- Per sistemi singolo ingresso $\dim(u) = 1$, $\mathcal{R}$ matrice quadrata $n \times n$

- **Per sistemi singolo ingresso**:
sistema completamente raggiungibile $\Leftrightarrow$ $X_{\mathrm{r}} = \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\mathcal{R}) = n$
$\Leftrightarrow$ $\det(\mathcal{R}) \neq 0$

Studio della raggiungibilità: esempio

- Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 1 con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice di raggiungibilità per $n = 2$

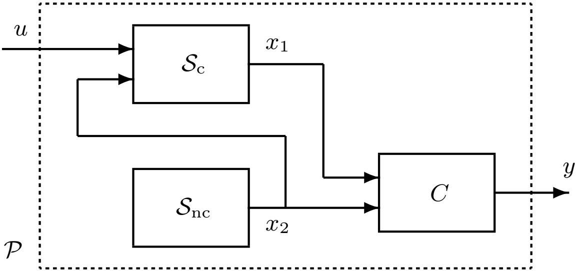
$$\mathcal{R} = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\det(\mathcal{R}) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ sistema non completamente raggiungibile
- Insieme degli stati raggiungibili

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{r}} &= \text{Immagine di } \mathcal{R} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

- Sono raggiungibili tutti e soli gli stati con $x_2 = 0$

Raggiungibilità e controllabilità



- Lo stato della parte non controllabile $\mathcal{S}_{\mathrm{nc}}$ del sistema non può essere assegnato mediante il controllo u
- Si dimostra invece che lo stato della parte controllabile dei sistema $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ può essere assegnato liberamente mediante controllo

Raggiungibilità e controllabilità

- Indichiamo con n_{c} il numero di autovalori controllabili del sistema
- $n_{\mathrm{c}} =$ grado di $\varphi_{\mathrm{c}}(s)$ polinomio caratteristico di controllo

Fatto 3.6 X_{r} insieme degli stati raggiungibili è un sottospazio lineare di dimensione n_{c}

- Di conseguenza
  sistema completamente raggiungibile $\quad \Leftrightarrow \quad$ completamente controllabile

Nota: sfruttando questa relazione possiamo semplificare lo studio della controllabilità

Esempio di studio della controllabilità/raggiungibilità

- Consideriamo un sistema LTI TC con
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$
- Vogliamo studiare controllabilità e raggiungibilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
- Matrice di raggiungibilità per $n = 2$
$$\mathcal{R} = [B|AB] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$$
- $\det(\mathcal{R}) = \alpha\,(\alpha + 1)$
- Per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ abbiamo $\det(\mathcal{R}) \neq 0$
  $\Rightarrow$ sistema completamente raggiungibile $X_{\mathrm{r}} = \mathbb{R}^2$
  $\Rightarrow$ sistema completamente controllabile $\varphi_{\mathrm{c}}(s) = \varphi(s)$
- Per $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$ invece abbiamo $\det(\mathcal{R}) = 0$
  $\Rightarrow$ sistema non completamente controllabile/raggiungibile

Nota: per completare l'esercizio dobbiamo studiare cosa succede per $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$ (soluzione negli esercizi di riepilogo sul controllo in retroazione sullo stato)

3.5 Risposta al gradino e specifiche dinamiche

Risposta al gradino in ciclo chiuso

Specifiche di progetto

- **Specifica 3:** garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

- Specifiche dinamiche (nel transitorio) sono usualmente espresse in termini di **risposta al gradino in ciclo chiuso**
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

con

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \det(sI - A + B\,F) \\ r(s) &= C\,\mathrm{Adj}(sI - A)\,B \end{aligned}$$

- Risposta al gradino in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\,Y^\circ(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\,\frac{Y_0}{s}\right\}$$

Risposta al gradino in ciclo chiuso

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + B\,F)$$

- Guadagno di retroazione F determina posizione di autovalori/poli in ciclo chiuso e, di conseguenza, il comportamento nel transitorio
- Zeri in ciclo chiuso [radici di $r(s)$] non dipendono da F

Obiettivo: scegliere F in modo tale cha funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G^*_{y^\circ y}(s)$ garantisca un transitorio soddisfacente per la risposta a gradino in ciclo chiuso

Ipotesi semplificative

Ipotesi: Supponiamo per semplicità

1. sistema completamente controllabile
2. polinomio $r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B$ con tutte radici a $\mathrm{Re} < 0$

- Consideriamo il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^n + \varphi^*_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \varphi^*_1 s + \varphi^*_0$$

- Ipotesi 1 garantisce di poter assegnare in modo arbitrario, al variare di F, i coefficienti $\varphi^*_0, \ldots, \varphi^*_{n-1}$
- Unico vincolo: $\varphi^*(s)$ deve essere monico cioè con coefficiente di grado massimo $\varphi^*_n = 1$

Nota: Ipotesi 1 può essere rilassata in sistema stabilizzabile

Assegnamento del polinomio caratteristico in ciclo chiuso

- Nella funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

non possiamo modificare $r(s)$ ma possiamo cancellarlo (perché polinomio stabile per ipotesi)

- Indichiamo con m il grado del polinomio $r(s)$

$$r(s) = r_m s^m + r_{m-1} s^{m-1} + \ldots + r_1 s + r_0$$

- Assegniamo al polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ la forma

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m}\, a^*(s)$$

con $a^*(s)$ polinomio monico di grado $n - m$ scelto da me

$$a^*(s) = s^{n-m} + a^*_{n-m-1} s^{n-m-1} + \ldots + a^*_1 s + a^*_0$$

Nota: divisione per r_m serve perché $\varphi^*(s)$ deve avere il coefficiente di grado massimo pari ad 1

Forma della funzione di trasferimento in ciclo chiuso

- Assegniamo al polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$ la forma

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m}\, a^*(s)$$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{r(s)}{r(s)a^*(s)/r_m} H = \frac{r_m}{a^*(s)} H$$

- Per avere $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ (specifica 2)

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{r_m}{a^*(0)} H = \frac{r_m}{a_0^*} H = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad H = \frac{a_0^*}{r_m}$$

Nelle ipotesi semplificative fatte possiamo assegnare alla funzione di trasferimento in ciclo chiuso la forma

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r_m}{a^*(s)} H = \frac{a_0^*}{a^*(s)}$$

Osservazioni

- Polinomio $a^*(s)$ definisce i poli in ciclo chiuso e di conseguenza la forma della risposta al gradino in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\,\frac{Y_0}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_0^*}{a^*(s)}\,\frac{Y_0}{s}\right\}$$

- Polinomio $a^*(s)$ arbitrario $\Rightarrow$ possiamo dare alla risposta a gradino in ciclo chiuso l'andamento che vogliamo

- Nel procedimento visto si cancella il polinomio $r(s)$ con la scelta

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m}\,a^*(s)$$

  Si può fare se e solo se $r(s)$ ha tutte radici con Re< 0 perché $\varphi^*(s)$ deve essere un polinomio stabile!

Regola generale: nel progetto dei sistemi di controllo non si possono mai effettuare cancellazioni tra poli/zeri instabili, cioè con $\mathrm{Re} \geq 0$

Esempio di progetto

- Consideriamo un sistema LTI TC con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Applicando un controllo in retroazione algebrica sullo stato abbiamo

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - f_1 & -f_2 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 + f_1 & s + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + f_2\, s + f_1 + 1$$

- Al variare di f_1 e f_2 possiamo assegnare a piacere i coefficienti di $\varphi^*(s)$
  $\Rightarrow$ sistema completamente controllabile

Esempio di progetto

- Polinomio $r(s)$

$$\begin{aligned} r(s) = C\mathrm{Adj}(sI - A)B \quad &= \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\,s + 1 \end{aligned}$$

- $r(s)$ polinomio di grado $m = 1$ con coefficiente di grado massimo pari a $r_m = r_1 = 2$

- Ipotesi 1 e 2 soddisfatte $\quad \Rightarrow \quad$ possiamo scegliere

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m}\, a^*(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)\, a^*(s)$$

con $a^*(s)$ polinomio monico di grado $n - m = 1$

$$a^*(s) = s + a_0^*$$

- Prendiamo ad esempio $a_0^* = 10$

$$\varphi^*(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)\left(s + 10\right) = s^2 + \frac{21}{2} s + 5$$

Esempio di progetto

- Progetto dei guadagni F e H

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= s^2 + f_2\, s + f_1 + 1 = s^2 + \frac{21}{2} s + 5 \\ H &= \frac{a_0^*}{r_m} = \frac{10}{2} = 5\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dalla prima equazione $f_2 = 21/2$ e $f_1 = 4$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{a_0^*}{a^*(s)} = \frac{a_0^*}{s + a_0^*} = \frac{10}{s+10}$$

  - $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ guadagno in continua in ciclo chiuso unitario
  - polo in ciclo chiuso in -10

Nota: cambiando il valore di a_0^* possiamo cambiare la posizione del polo in ciclo chiuso

Risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 1$

- Consideriamo il caso di **grado relativo** $n - m = 1$ (come nell'esempio di progetto)
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso del **I ordine**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{a_0^*}{s + a_0^*}$$

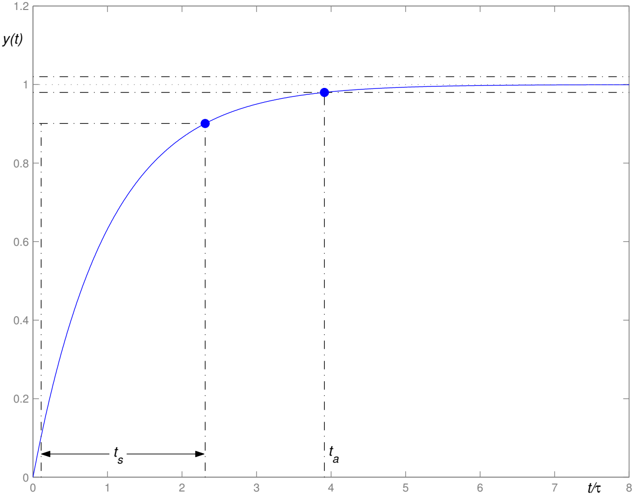
con $a_0^* > 0$ per la stabilità

- Risposta al gradino $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ in ciclo chiuso

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\, Y^\circ(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a_0^*\, Y_0}{s\,(s + a_0^*)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y_0}{s} - \frac{Y_0}{(s + a_0^*)}\right\} = \left(1 - e^{-a_0^*\, t}\right) \cdot Y_0 \cdot 1(t) \end{aligned}$$

- $\tau = 1/a_0^*$ **costante di tempo** del sistema

Risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 1$



- Andamento della risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 1$

$$y_f(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

Specifiche dinamiche nel caso $n - m = 1$

- Risposta al gradino converge al valore di regime con andamento **monotono** costante di tempo $\tau = 1/a_0^*$ determina la velocità della risposta al gradino
- Specifiche dinamiche usualmente espresse in termini di **tempo di assestamento**

Tempo di assistamento $T_{a,\varepsilon}$: tempo necessario affinché l'uscita rimanga in un intorno $\varepsilon\%$ del valore di regime

$$\left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right) Y_0, \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) Y_0\right]$$

da $T_{a,\varepsilon}$ in poi (valori tipici per ϵ sono 1 e 5)

- Nel caso $n - m = 1$

$$T_{a,\varepsilon} = \tau \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{a_0^*} \ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)$$

- Al crescere di $\tau = 1/a_0^*$ aumenta il tempo di assestamento
  $\Rightarrow$ per avere un transitorio rapido devo posizionare il polo $-a_0^*$ lontano dall'asse immaginario

Funzione di trasferimento in ciclo chiuso nel caso $n - m = 2$

- Consideriamo il caso di **grado relativo** $n - m = 2$
- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso del **II ordine**

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{a_0^*}{s^2 + a_1^* s + a_0^*}$$

con $a_0^* > 0$ e $a_1^* > 0$ per la stabilità

- Parametri caratteristici della funzione di trasferimento in ciclo chiuso
  - **smorzamento** $\zeta = \frac{a_1^*}{2\sqrt{a_0^*}}$
  - **pulsazione naturale** $\omega_n = \sqrt{a_0^*}$
- In termini dei parametri caratteristici

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n\,\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Poli in ciclo chiuso nel caso $n - m = 2$

- Poli in ciclo chiuso

$$p^*_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n\,\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

1. **caso sovrasmorzato** $\zeta \geq 1$ due poli reali
   - andamento della risposta al gradino in ciclo chiuso monotono (simile al caso $n - m = 1$)
   - specifiche dinamiche in termini di tempo di assestamento
2. **caso sottosmorzato** $0 < \zeta < 1$ coppia di poli complessi coniugati

$$p^*_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm j\,\omega_n\,\sqrt{1 - \zeta^2}$$

   - risposta al gradino in ciclo chiuso con oscillazioni
   - specifiche dinamiche in termini di tempo di assestamento e **massima sovraelongazione percentuale**

Risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 2$

- Funzione di trasferimento in ciclo chiuso per $n - m = 2$

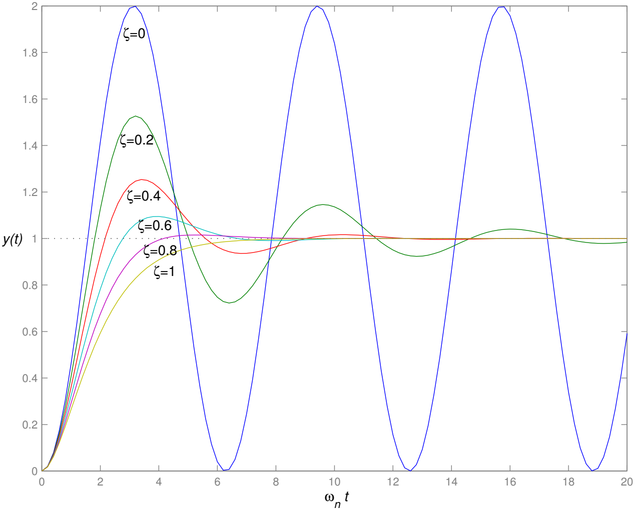
$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Consideriamo il caso sottosmorzato $0 < \zeta < 1$
- Risposta al gradino $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ in ciclo chiuso

$$\begin{aligned}
y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G^*_{y^\circ y}(s)\,Y^\circ(s)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2\,Y_0}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}\right\} \\
&= \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]\cdot Y_0 \cdot 1(t)
\end{aligned}$$

- Per $\zeta \to 0$ oscillazioni sempre meno smorzate
- Nel caso limite $\zeta = 0$ ci sono oscillazioni persistenti

Risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 2$



- Andamento nel tempo della risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso $n - m = 2$ al variare dello smorzamento ζ nell'intervallo $(0, 1)$

Specifiche dinamiche nel caso $n - m = 2$

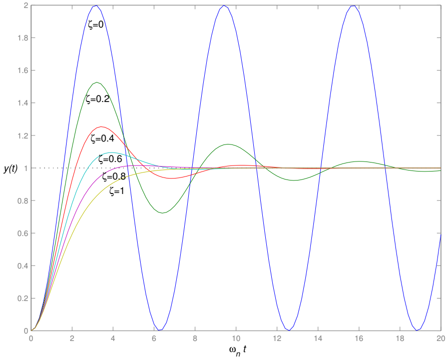
- Nel caso $n - m = 2$ con $0 < \zeta < 1$, abbiamo **sovraelongazione** (overshoot): risposta al gradino supera temporaneamente il valore di regime prima di convergere ad esso
- Specifiche dinamiche usualmente espresse in termini di tempo di assestamento e **massima sovraelongazione percentuale**

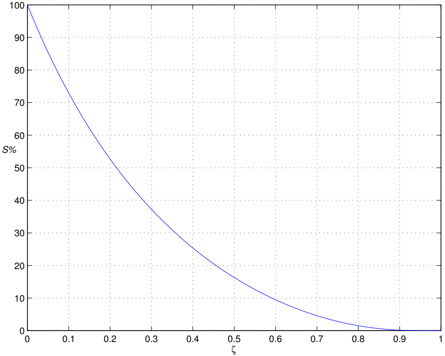
Massima sovraelongazione percentuale S: massima percentuale di superamento del valore di regime Y_0

- Nel caso $n - m = 2$ con $0 < \zeta < 1$

$$
\begin{aligned}
T_{a,\varepsilon} &\approx \frac{1}{\zeta\,\omega_n}\ln(100/\varepsilon) \\
S &= 100\,e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}
\end{aligned}
$$

Massima sovraelongazione percentuale





- Andamento della risposta al gradino in ciclo chiuso e della massima sovraelongazione percentuale

$$S = 100\, e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

in funzione dello smorzamento ζ nel caso $n - m = 2$

Specifiche dinamiche nel caso $n - m = 2$

- Nel caso $n - m = 2$ con $0 < \zeta < 1$

$$\begin{aligned} T_{a,\varepsilon} &\approx \frac{1}{\zeta\,\omega_n}\ln(100/\varepsilon) \\ S &= 100\,e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

- Più grande in valore assoluto $\zeta\,\omega_n$ (ossia più lontani dall'asse immaginario sono i poli) più piccolo il tempo di assestamento (e quindi più rapida la convergenza al valore di regime)
- Maggiore lo smorzamento ζ minore la sovraelongazione
- Specifiche dinamiche in termini di valori massimi accettabili per $T^\circ_{a,\varepsilon}$ e S°
  $\Rightarrow$ specifiche in termini di ζ e ω_n

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta\,\omega_n}\ln(100/\varepsilon) &\leq T^\circ_{a,\varepsilon} \\ 100\,e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} &\leq S^\circ \end{aligned}$$

Assegnamento dei poli in ciclo chiuso nel caso $n - m > 2$

- Consideriamo il caso di grado relativo $n - m > 2$
- In questo caso cerchiamo di ricordurci a uno dei due casi visti in precedenza
- Per posizionare gli $n - m > 2$ poli
    - 2 **poli dominanti** sulla base delle specifiche dinamiche (ad esempio espresse in termini di $T^{\circ}_{a,\varepsilon}$ e S°)
    - $n - m - 2$ **poli in alta frequenza** con parte reale molto minore rispetto ai poli dominanti in modo da avere modi di evoluzione molto rapidi
- Polinomio dei poli in ciclo chiuso

$$a^*(s) = (s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2)\,\widetilde{a}^*(s)$$

con

- $s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2$ polinomio dei poli dominanti
- $\widetilde{a}^*(s)$ polinomio stabile dei poli in alta frequenza

Osservazione sulla scelta del guadagno F

- Per avere un transitorio rapido (tempo di assestamento $T_{a,\varepsilon}$ piccolo) dobbiamo posizionare i poli in ciclo chiuso con parte reale molto negativa
- Questo può richiedere un guadagno F molto grande in quanto

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

$\Rightarrow$ azione di controllo $u = -Fx + Hy^\circ$ **non moderata**

- Nella pratica scegliamo F per avere un buon **compromesso** tra velocità di convergenza al regime permanente e moderazione dell'azione di controllo
- **Controllo ottimo:** si sceglie F che rende minimo

$$J = \int_0^\infty \left\{ [y^\circ(\tau) - y(\tau)]^2 + \rho\, u^2(\tau) \right\} d\tau$$

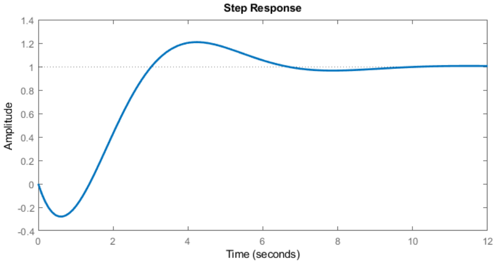
  - $(y^\circ - y)^2$ termine relativo all'errore di inseguimento
  - u^2 termine relativo alla moderazione dell'azione di controllo
  - ρ parametro di progetto che pesa l'importanza relativa dei due obiettivi
  - Matlab `lqr`, Python `control.lqr`

Osservazioni sul caso di zeri instabili

- Se $r(s)$ non ha tutte radici a Re < 0 (ipotesi 2 non soddisfatta) allora non posso cancellare completamente $r(s)$
  $\Rightarrow$ zeri instabili **non** possono essere cancellati e si ritrovano immutati nella funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

- In questo caso è più complicato soddisfare le specifiche dinamiche (vedi corsi/testi specifici di controlli automatici)
- Ad esempio può essere presente una **sottoelongazione** (undershoot) nella risposta al gradino in ciclo chiuso



Risposta al gradino in ciclo chiuso per

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

Esercizi proposti

Dato il sistema LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2\,x_2 + 2\,u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + \alpha\,u \\ y &= x_2 \end{cases}$$

a. Determinare il polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b. Dire per quali valori di α lo stato $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ è raggiungibile;
c. Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da rendere il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile;
d. Dire per quali valori di α esiste una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ tale da posizionare gli autovalori in ciclo chiuso entrambi in -10;
e. Per $\alpha = 0$ progettare, se possibile, una legge di controllo in retroazione sullo stato $u = -F\,x + H\,y^\circ$ che assegni il polinomio caratteristico in ciclo chiuso in $\varphi^*(s) = s^2 + s + 1$ e garantisca inseguimento perfetto di un riferimento costante y°;
f. Fissati F e H come al punto precedente, tracciare (anche in modo qualitativo) l'andamento nel tempo della risposta forzata in ciclo chiuso per un riferimento a gradino $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$.