

Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

DINFO
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

2 Analisi dei sistemi dinamici

Stabilità

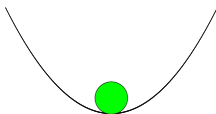
Stabilità: robustezza delle traiettorie del sistema rispetto a **perturbazioni** di varia natura

Idea intuitiva: comportamento stabile quando **piccole perturbazioni** comportano **piccole variazioni** della soluzione

- **Stabilità interna:** robustezza rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali $x(0)$
- **Stabilità esterna:** robustezza rispetto a perturbazioni dell'ingresso u
- **stabilità strutturale:** robustezza rispetto a perturbazioni dei parametri del sistema (matrici A, B, C, D)

2.6 Stabilità interna

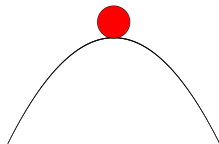
Stabilità interna



Stabilità asintotica



Stabilità marginale



Instabilità

- **Stabilità asintotica:** l'effetto di perturbazioni nelle condizioni iniziali **svanisce**, ovvero **converge** a 0
- **Stabilità marginale:** l'effetto di perturbazioni nelle condizioni iniziali non svanisce ma si mantiene comunque **limitato**
- **Instabilità:** se esistono perturbazioni delle condizioni iniziali il cui effetto **non** si mantiene **limitato**.

Mappa di transizione globale

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

- Dati

- condizione iniziale $x(0) = x_0$
- segnale di ingresso $u(t), t \geq 0$

indichiamo la risposta nello stato al tempo t con la notazione

$$x(t) = \Phi(t, x_0, u)$$

- Per un sistema LTI TC vale

$$\Phi(t, x_0, u) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

- $\Phi(t, x_0, u)$ è detta **mappa di transizione globale dello stato**.

Effetto della perturbazione

- Consideriamo una condizionale iniziale nominale x_0 e la corrispondente **traiettoria nominale**

$$x(t) = \Phi(t, x_0, u)$$

- Consideriamo una condizionale iniziale perturbata $x_0 + \tilde{x}_0$ e la corrispondente **traiettoria perturbata**

$$x(t) = \Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u)$$

- effetto della perturbazione** = traiettoria perturbata – traiettoria nominale

$$\begin{aligned} & \Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u) - \Phi(t, x_0, u) \\ &= \left[e^{At} (x_0 + \tilde{x}_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] - \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{At} \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

Stabilità interna

- Effetto della perturbazione

$$\Phi(t, x_0 + \tilde{x}_0, u) - \Phi(t, x_0, u) = e^{At} \tilde{x}_0$$

- Effetto di una perturbazione sulla condizione iniziale dipende da
 - matrice A
 - perturbazione \tilde{x}_0

non dipende dalla condizione iniziale x_0 né dall'ingresso u

⇒ non dipende dalla particolare traiettoria nominale considerata

Fatto 2.8 Per un sistema LTI **tutte** le traiettorie del sistema hanno le **stesse proprietà** di stabilità rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali.

Si può quindi parlare in modo generale di **stabilità interna del sistema**

Nota: per un sistema LTI, la stabilità interna è una proprietà della **sola** evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$

Stabilità interna

Un sistema LTI TC si dice

- **Asintoticamente stabile** se l'effetto di perturbazioni \tilde{x}_0 nelle condizioni iniziali svanisce, ovvero **converge** a 0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \tilde{x}_0 = 0 \quad \forall \tilde{x}_0$$

- **Marginalmente stabile** se non ho stabilità asintotica, ma l'effetto di perturbazioni \tilde{x}_0 nelle condizioni iniziali si mantiene comunque **limitato**

$$\forall \tilde{x}_0 \quad \exists M : \quad \left\| e^{At} \tilde{x}_0 \right\| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

- **Internamente instabile** se non ho stabilità asintotica né marginale, ovvero se esistono perturbazioni \tilde{x}_0 il cui effetto **non** si mantiene **limitato**

Stabilità interna e modi naturali

Perturbazione \tilde{x}_0 **arbitraria** \Rightarrow per studiare la stabilità interna del sistema devo studiare l'andamento nel tempo di e^{At}

- Consideriamo gli **autovalori** della matrice A

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

con le loro **molteplicità nel polinomio minimo** $m(s)$

$$m_1, \dots, m_k$$

- Gli elementi di e^{At} sono una **combinazione lineare dei modi naturali**

$$\begin{aligned} t^\ell e^{\lambda_i t} \quad & \ell = 0, \dots, m_i - 1 \\ & i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

La stabilità interna del sistema dipende dai **modi naturali**

Stabilità interna e modi naturali

Stabilità asintotica $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$
 \Leftrightarrow tutti gli elementi di e^{At} sono convergenti a 0
 \Leftrightarrow tutti i modi naturali sono **convergenti**

Stabilità marginale $\Leftrightarrow \exists M : \|e^{At}\| \leq M \quad \forall t \geq 0$
 \Leftrightarrow tutti gli elementi di e^{At} sono limitati
 \Leftrightarrow tutti i modi naturali sono **limitati**

Instabilità interna $\Leftrightarrow e^{At}$ non si mantiene limitata
 \Leftrightarrow esiste almeno un elemento di e^{At} non limitato
 \Leftrightarrow esiste almeno un modo naturale **divergente**

Stabilità interna e modi naturali

Fatto 2.9 Un sistema LTI TC è

- **asintoticamente stabile** \Leftrightarrow tutti i modi naturali del sistema sono **convergenti**
- **marginalmente stabile** \Leftrightarrow tutti i modi naturali del sistema sono **limitati** (ma non tutti sono convergenti)
- **internamente instabile** \Leftrightarrow esiste almeno un modo naturale **divergente**

- Ricordiamo la classificazione dei modi $t^\ell e^{\lambda_i t}$

	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

Stabilità interna e modi naturali

- Un autovalore λ_i con molteplicità m_i come radice del polinomio minimo $m(s)$ dà origine ai modi naturali

$$t^\ell e^{\lambda_i t} \quad \ell = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

- Modi naturali associati ad un autovalore λ_i tutti **convergenti**

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0$$

se e solo se la parte reale di λ_i è < 0

- Modi naturali associati ad un autovalore λ_i tutti **limitati**

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \{\lambda_i\} \leq 0$$

e, nel caso tale parte reale sia 0, la molteplicità m_i sia unitaria

- Negli altri casi esiste almeno un modo naturale **divergente**

Condizioni per la stabilità interna

- **Autovalori del sistema** = autovalori della matrice A
- Per un sistema LTI, la stabilità interna dipende dalla **posizione** degli autovalori nel piano complesso e dalla loro **molteplicità**

Teorema 2.3 Un sistema LTI TC è

- **asintoticamente stabile**
 \Leftrightarrow tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale < 0
- **marginalmente stabile**
 \Leftrightarrow tutti gli autovalori del sistema hanno parte reale ≤ 0
AND quelli con parte reale $= 0$ hanno molteplicità $= 1$ come radici del polinomio minimo
- **internamente instabile** negli altri casi
 \Leftrightarrow esiste almeno un autovalore con parte reale > 0
OR con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 nel polinomio minimo

Studio della stabilità interna

Per studiare la stabilità interna: calcoliamo il polinomio caratteristico

$\varphi(s) = \det(sI - A)$ e distinguiamo 4 casi

- ❶ Se tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale < 0
 \Rightarrow sistema asintoticamente stabile
- ❷ Se esiste almeno una radice di $\varphi(s)$ con parte reale > 0
 \Rightarrow sistema internamente instabile
- ❸ Se tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** quelle con parte reale $= 0$ hanno molteplicità unitaria come radici di $\varphi(s)$
 \Rightarrow sistema marginalmente stabile
 [Infatti tali radici dovranno necessariamente avere molteplicità unitaria anche come radici del polinomio minimo $m(s)$, in quanto $1 \leq m_i \leq \mu_i$]
- ❹ Se invece tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** ne esiste almeno una con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 come radice di $\varphi(s)$
 \Rightarrow dobbiamo calcolare il polinomio minimo $m(s)$ e distinguere 2 sottocasi
 - ❶ se tutte le radici con parte reale $= 0$ hanno molteplicità unitaria come radici di $m(s)$ \Rightarrow sistema marginalmente stabile
 - ❷ se invece esiste almeno una radice con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1 come radice di $m(s)$ \Rightarrow sistema internamente instabile

Studio della stabilità interna: esempio 1

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s + 1$$

- Autovalori

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ stabilità asintotica

- Infatti i modi naturali

$$\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}, \quad \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

sono entrambi convergenti

Nota: in questo caso non serve calcolare il polinomio minimo $m(s)$

Studio della stabilità interna: esempio 2

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1$$

- Autovalori

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j$$

- $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\} = 0$ **AND** $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow$ stabilità marginale

- Infatti i modi naturali

$$\sin(t), \quad \cos(t)$$

sono entrambi limitati

Nota: in questo caso non serve calcolare il polinomio minimo $m(s)$ perché molteplicità $\mu_i = 1$ in $\varphi(s) \Rightarrow$ molteplicità $m_i = 1$ in $m(s)$

Studio della stabilità interna: esempio 3

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

- Autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 2$
- $\text{Re}\{\lambda_1\} = 0$ **AND** $\mu_1 = 2 \Rightarrow$ devo calcolare il polinomio minimo $m(s)$
- Calcolando l'inversa

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m(s) = s^2$$

- $\text{Re}\{\lambda_1\} = 0$ **AND** $m_1 = 2 \Rightarrow$ instabilità interna
- Infatti i modi naturali

$$1, \quad t$$

sono uno limitato e uno divergente

Studio della stabilità interna: esempio 4

- Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

- Autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 2$
- $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = 0$ **AND** $\mu_1 = 2 \Rightarrow$ devo calcolare il polinomio minimo $m(s)$
- Calcolando l'inversa

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m(s) = s$$

- $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = 0$ **AND** $m_1 = 1 \Rightarrow$ stabilità marginale
- Infatti ho un solo modo naturale

1

limitato

Stabilità interna – considerazioni finali

- Per un sistema LTI TC l'evoluzione libera dello stato è del tipo

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0)$$

Per un sistema LTI **asintoticamente stabile**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_\ell(t) = 0 \quad \forall x(0)$$

⇒ l'effetto della condizione iniziale **svanisce** asintoticamente

Per un sistema LTI **marginalmente stabile**, l'evoluzione libera $x_\ell(t)$, in generale, non tende a zero ma comunque si mantiene **limitata**

2.7 Risposta forzata e funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

- Risposta forzata nel dominio di Laplace

$$Y_f(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Nel dominio di Laplace, la relazione ingresso-uscita è espressa dalla **funzione di trasferimento**

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- In generale ingresso u e uscita y sono vettori
 $\Rightarrow G(s)$ matrice di dimensione $\dim(y) \times \dim(u)$
- Elemento (i, ℓ) di $G(s)$ esprime la relazione tra l' ℓ -esimo ingresso e l' i -esima uscita

Funzione di trasferimento

Ipotesi: il sistema ha un **singolo ingresso** e una **singola uscita**

$$\dim(y) = \dim(u) = 1$$

- Indichiamo sistemi di questo tipo con l'acronimo SISO (*single input single output*)
- Per sistemi SISO, la funzione di trasferimento è una **funzione razionale**

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi coprimi (senza radici comuni)

- Radici di $a(s)$ = **poli del sistema**
- Radici di $b(s)$ = **zeri del sistema**

Funzione di trasferimento

• Funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A)B + D \end{aligned}$$

• Per sistemi SISO

D	costante
$\varphi(s)$	polinomio di grado $\dim(x)$
$\text{Adj}(sI - A)$	matrice di polinomi di grado $< \dim(x)$
$C \text{Adj}(sI - A)B$	polinomio di grado $< \dim(x)$
$\frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A)B$	funzione razionale strettamente propria (grado del numeratore $<$ grado del denominatore)

Funzione di trasferimento

- Definiamo il polinomio

$$r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B$$

con grado $r(s) < \text{grado } \varphi(s)$

- Funzione di trasferimento**

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D &= \frac{r(s)}{\varphi(s)} + D \\ &= \frac{r(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

- Semplificando** fattori comuni tra numeratore e denominatore, otteniamo

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Sulla base delle considerazioni precedenti

$$\begin{array}{ll} \text{grado } b(s) < \text{grado } a(s) & \text{se } D = 0 \\ \text{grado } b(s) = \text{grado } a(s) & \text{se } D \neq 0 \end{array}$$

Relazione tra poli e autovalori del sistema

- Al denominatore di

$$G(s) = \frac{r(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

si trova il polinomio caratteristico $\varphi(s)$ **ma** possono esserci semplificazioni
 \Rightarrow in generale $a(s)$ sottomultiplo di $\varphi(s)$

- Dato il polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

il denominatore di $G(s)$ è del tipo

$$a(s) = \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\nu_i}$$

- Tra le molteplicità μ_i e ν_i vale la relazione

$$0 \leq \nu_i \leq \mu_i$$

Relazione tra poli e autovalori del sistema

- Per effetto delle moltiplicazioni per B e C , un autovalore del sistema può anche essere completamente **cancellato** nella funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Fatto 2.9 Per un sistema LTI TC, i poli del sistema [radici di $a(s)$] sono un **sottoinsieme** degli autovalori del sistema [radici di $\varphi(s)$]

$$\{ \text{poli del sistema} \} \subseteq \{ \text{autovalori del sistema} \}$$

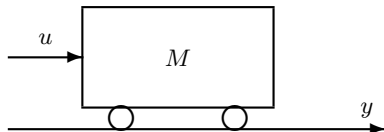
- Gli autovalori del sistema che **non** compaiono come poli di $G(s)$ sono detti **autovalori nascosti**
- Possiamo definire il **polinomio degli autovalori nascosti**

$$\varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$$

h sta per *hidden*

Esempio: sistema meccanico

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

⇒ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{aligned}$$

Esempio: sistema meccanico

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= 0 \end{aligned}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = s(s + 1)$$

- Funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s + 1)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s + 1)} \end{aligned}$$

- In questo caso

$$a(s) = s(s + 1) \quad b(s) = 1$$

\Rightarrow **non** ci sono autovalori nascosti

Esempio: sistema meccanico

- Prendiamo ora come uscita la velocità x_2

$$C = [0 \quad 1]$$

- La funzione di trasferimento diventa

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

- In questo caso

$$a(s) = s+1 \quad b(s) = 1$$

\Rightarrow L'autovalore $\lambda_1 = 0$ è **nascosto**

Nota: il sistema internamente **non** cambia, **ma** cambia la quantità che sto osservando (misurando): in un caso la posizione nell'altro la velocità.

Gli autovalori nascosti dipendono dalle matrici B e C , ovvero da **come** l'ingresso agisce sul sistema (matrice B) e da **quali** quantità sto osservando (matrice C).

Risposta impulsiva

Definizione: Dato un sistema LTI TC con funzione di trasferimento $G(s)$ si definisce **risposta impulsiva** il segnale

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Risposta impulsiva

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{C(sI - A)^{-1}B + D\} = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

con $\delta(t)$ l'impulso di Dirac

$g(t)$ contiene una **componente impulsiva** $\Leftrightarrow D \neq 0$

Risposta impulsiva

- **In generale:** $G(s)$ matrice di funzioni razionali $\dim(y) \times \dim(u)$
 \Rightarrow risposta impulsiva $g(t)$ matrice di segnali nel tempo
- **Per sistemi SISO** con $\dim(y) = \dim(u) = 1$: $G(s)$ funzione razionale
 \Rightarrow risposta impulsiva $g(t)$ segnale nel tempo
- Per sistemi SISO, se prendiamo come ingresso un **impulso unitario**

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

la risposta forzata diventa

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = g(t)$$

Per sistemi SISO: **risposta impulsiva** = **risposta forzata** del sistema quando l'ingresso è un **impulso unitario**

Risposta impulsiva

- Per sistemi SISO, funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^{\nu_i}}$$

- Risposta impulsiva $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ evolve secondo i modi naturali

$$e^{\lambda_i t}, \quad t e^{\lambda_i t}, \quad \dots, \quad t^{\nu_i-1} e^{\lambda_i t}$$

per $i = 1, \dots, k$ tale che $\nu_i \neq 0$

- **Solo** gli autovalori che compaiono come **poli** (per cui $\nu_i \neq 0$) danno un contributo alla risposta impulsiva

Fatto 2.11 La risposta impulsiva $g(t)$ evolve secondo un sottoinsieme dei modi naturali del sistema (quelli corrispondenti agli autovalori **non** nascosti)

- I modi naturali che **non** compaiono nella risposta impulsiva sono detti **modi nascosti**

Esempio: sistema meccanico

- Per il sistema meccanico

$$\varphi(s) = s(s + 1)$$

\Rightarrow autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$

- modi naturali

$$e^{\lambda_1 t} = 1, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$$

uno limitato e uno convergente

- Prendiamo come uscita la velocità x_2

\Rightarrow risposta impulsiva

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \quad \Rightarrow \quad g(t) = e^{-t} 1(t)$$

- **Solo** il modo naturale e^{-t} associato a $\lambda_2 = -1$ è presente nella risposta impulsiva
- Il modo naturale 1 associato a $\lambda_1 = 0$ è **nascosto**

Forma della risposta forzata

- Consideriamo la **risposta forzata**

$$Y_f(s) = G(s) U(s)$$

- Se $u(t)$ un segnale con trasformata di Laplace $U(s)$ razionale

\Rightarrow poli di $Y_f(s)$ = poli della funzione di trasferimento + poli dell'ingresso

\Rightarrow modi di $y_f(t)$ = modi della risposta impulsiva $g(t)$ + modi dell'ingresso $u(t)$

Attenzione!

- alcuni modi possono **non** comparire a seguito di **cancellazioni** tra zeri e poli nel prodotto $G(s) U(s)$ (vedere esempio 2);
- possono comparire **nuovi** modi di evolvere dovuti ad un **aumento di molteplicità** quando $G(s)$ e $U(s)$ hanno poli coincidenti (vedere esempio 3)

Calcolo della risposta forzata: esempio 1

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Consideriamo un ingresso a gradino

$$u(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

- Risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = 1(t) - e^{-t} 1(t)$$

Nota: La risposta forzata evolve secondo una **combinazione lineare** dei modi

- $1(t)$ associato al polo in 0 dell'ingresso
- $e^{-t} 1(t)$ associato al polo in -1 della funzione di trasferimento

Calcolo della risposta forzata: esempio 2

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Consideriamo un ingresso oscillante

$$u(t) = [\cos(t) - \sin(t)] 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

- Risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y_f(t) = \sin(t) 1(t)$$

- Nella risposta forzata compare solo il modo $\sin(t) 1(t)$ associato all'ingresso

Nota: Il polo della funzione di trasferimento è **cancellato** da uno zero dell'ingresso \Rightarrow il modo e^t associato al polo in 1 della funzione di trasferimento **non** compare nella risposta forzata

- Cambiando ingresso il modo e^t comparirebbe nella risposta forzata $y_f(t)$ [verificare nel caso $u(t) = 1(t)$]

Calcolo della risposta forzata: esempio 3

- Consideriamo un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

- Consideriamo un ingresso a gradino

$$u(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

- Risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = t \cdot 1(t)$$

Nota: Nella risposta forzata compare il modo $t \cdot 1(t)$ che **non** era presente nella risposta all'impulso $g(t) = 1(t)$ né nell'ingresso $u(t) = 1(t)$.

Il modo $t \cdot 1(t)$ compare perché, per questo particolare ingresso, si ha un **aumento di molteplicità** del polo in zero di $G(s)$

2.8 Stabilità esterna

Mappa di transizione globale dell'uscita

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

- Dati

- condizione iniziale $x(0) = x_0$
- segnale di ingresso $u(t), t \geq 0$

indichiamo la risposta nell'uscita al tempo t con la notazione

$$y(t) = \Psi(t, x_0, u)$$

- Per un sistema LTI TC vale

$$\Psi(t, x_0, u) = Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

- $\Psi(t, x_0, u)$ è detta **mappa di transizione globale dell'uscita**

Effetto della perturbazione

- Consideriamo un segnale di ingresso nominale u e la corrispondente **traiettoria nominale**

$$y(t) = \Psi(t, x_0, u)$$

- Consideriamo un segnale di ingresso perturbato $u + \tilde{u}$ e la corrispondente **traiettoria perturbata**

$$y(t) = \Psi(t, x_0, u + \tilde{u})$$

- Effetto della perturbazione** = traiettoria perturbata – traiettoria nominale

$$\begin{aligned} & \Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) \\ &= \left\{ C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B [u(\tau) + \tilde{u}(\tau)] d\tau + D[u(t) + \tilde{u}(t)] \right\} \\ & \quad - \left\{ C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \right\} \\ &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau + D \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

Stabilità esterna

- Effetto della perturbazione

$$\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau + D \tilde{u}(t)$$

- Nel dominio di Laplace

$$\mathcal{L}\{\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\} = [C(sI - A)^{-1}B + D] \tilde{U}(s) = G(s) \tilde{U}(s)$$

- Effetto di una perturbazione sull'ingresso dipende da
 - funzione di trasferimento $G(s)$
 - perturbazione \tilde{u}

non dipende dalla condizione iniziale x_0 né dall'ingresso u

⇒ non dipende dalla particolare traiettoria nominale considerata

Per un sistema LTI **tutte** le traiettorie del sistema hanno le **stesse proprietà** di stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso.

Si può quindi parlare in modo generale di **stabilità esterna del sistema**

Stabilità esterna

Definizione: Un sistema LTI TC si dice **esternamente stabile** se una perturbazione dell'ingresso \tilde{u} limitata implica una variazione limitata dell'uscita y

$$\exists M : \|\tilde{u}(t)\| \leq M \quad \forall t \implies \exists L : \|\Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u)\| \leq L \cdot M \quad \forall t$$

- L rappresenta la massima amplificazione possibile di una perturbazione sull'ingresso (guadagno del sistema)
- Per un sistema LTI, l'effetto della perturbazione coincide con la risposta forzata all'ingresso \tilde{u}

$$\mathcal{L} \{ \Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) \} = G(s) \tilde{U}(s)$$

\Rightarrow stabilità esterna è una proprietà della **sola** risposta forzata $y_f(t)$

Stabilità esterna

- Per un sistema LTI, l'effetto della perturbazione coincide con la risposta forzata all'ingresso \tilde{u}

$$\mathcal{L} \{ \Psi(t, x_0, u + \tilde{u}) - \Psi(t, x_0, u) \} = G(s) \tilde{U}(s)$$

Fatto 2.12 Sistema LTI è stabile esternamente \Leftrightarrow risposta forzata ad un ingresso limitato è sempre limitata.

- Per questo motivo la stabilità esterna di sistemi LTI viene anche detta

stabilità ingresso-limitato uscita-limitata (ILUL)

o anche

stabilità BIBO (bounded input bounded output)

Condizioni per la stabilità esterna

- Consideriamo un sistema LTI tempo continuo SISO con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con $b(s)$ e $a(s)$ polinomi coprimi (senza radici comuni)

- Poli di $G(s)$ = radici di $a(s)$

Teorema 2.4 Sistema LTI TC SISO **stabile esternamente** \Leftrightarrow tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale < 0

- Per sistemi con più ingressi e più uscite $G(s)$ è una matrice di funzioni razionali
- In questo caso, stabilità esterna \Leftrightarrow tutti gli elementi di $G(s)$ hanno poli con parte reale < 0

Dimostrazione: condizione sufficiente

- Dimostriamo per prima cosa la **condizione sufficiente**:
tutti i poli di $G(s)$ con parte reale $< 0 \Rightarrow$ stabilità esterna
- Consideriamo un ingresso u limitato

$$\exists M : |u(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

- Consideriamo la corrispondente risposta forzata

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \\ &= \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau + D u(t) \end{aligned}$$

dove la seconda eguaglianza si ottiene con il cambio di variabile $\tau \rightarrow t - \tau$

- Devo dimostrare che
tutti i poli di $G(s)$ con parte reale $< 0 \Rightarrow y_f(t)$ limitata

Dimostrazione: condizione sufficiente

- Possiamo maggiorare il modulo della risposta forzata nel seguente modo

$$\begin{aligned} |y_f(t)| &= \left| \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau + D u(t) \right| \\ &\leq \left| \int_0^t C e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau \right| + |D| \cdot |u(t)| \\ &\leq \int_0^t |C e^{A\tau} B| \cdot |u(t-\tau)| d\tau + |D| \cdot |u(t)| \\ &\leq M \left(\int_0^t |C e^{A\tau} B| \cdot d\tau + |D| \right) \end{aligned}$$

dove la prima disequazione si ottiene sfruttando la disuguaglianza triangolare

- Ricordiamo ora che il segnale $C e^{A t} B$ evolve secondo i modi corrispondenti ai poli della funzione di trasferimento $G(s)$ (modi non nascosti del sistema)

Dimostrazione: condizione sufficiente

- Tutti i poli di $G(s)$ con parte reale < 0
 - \Rightarrow tutti i modi di $Ce^{At}B$ sono convergenti
 - \Rightarrow il segnale $Ce^{At}B$ converge esponenzialmente a zero
- Di conseguenza

$$\int_0^t |Ce^{A\tau}B| \cdot d\tau \leq \int_0^{+\infty} |Ce^{A\tau}B| \cdot d\tau = N < +\infty$$

con N costante finita

- Di conseguenza possiamo maggiorare la risposta forzata come

$$|y_f(t)| \leq (N + |D|) M \quad \forall t \geq 0$$

- La quantità

$$L = N + |D|$$

rappresenta la massima amplificazione possibile dell'ingresso

Dimostrazione: condizione necessaria

- Dimostriamo ora la **condizione necessaria**:
stabilità esterna \Rightarrow tutti i poli di $G(s)$ con parte reale < 0
- In particolare, dimostriamo l'implicazione equivalente:
se $G(s)$ ha almeno un polo con parte reale ≥ 0
 \Rightarrow esistono ingressi limitati che fanno divergere l'uscita
- Distinguiamo 3 casi (non mutuamente esclusivi):
 - CASO 1: $G(s)$ ha almeno un polo con parte reale > 0
 - CASO 2: $G(s)$ ha almeno un polo in 0
 - CASO 3: $G(s)$ ha almeno una coppia di poli puramente immaginari $\pm j\omega_0$
- CASO 1: qualunque ingresso limitato che non cancella il polo con parte reale > 0 fa divergere l'uscita
Esempio: gradino unitario $u(t) = 1(t)$

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = (e^t - 1) 1(t)$$

Dimostrazione: condizione necessaria

- CASO 2: Supponiamo che $G(s)$ abbia un polo in 0 anche di molteplicità unitaria
Esempio:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

- Se scelgo come ingresso un gradino

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

\Rightarrow aumento di molteplicità il polo in 0 di $G(s)$

\Rightarrow compare un modo divergente in $Y_f(s)$

Nell'esempio:

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_f(t) = t \cdot 1(t)$$

Nota: nel caso della stabilità esterna, anche un polo in 0 con molteplicità 1 comporta instabilità, perché posso aumentarne la molteplicità con un ingresso a gradino (**fenomeno della risonanza**)

Dimostrazione: condizione necessaria

- CASO 3: Supponiamo che $G(s)$ abbia una coppia di poli immaginari in $\pm j\omega_0$ anche di molteplicità unitaria
Esempio:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

- Se scelgo come ingresso un seno

$$u(t) = \sin(\omega_0 t)1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

\Rightarrow aumento di molteplicità i poli in $\pm j\omega_0$ di $G(s)$

\Rightarrow compaiono modi divergenti in $Y_f(s)$

Nell'esempio:

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad \Rightarrow \quad y_f(t) = \frac{1}{2\omega_0^2} \sin(\omega_0 t)1(t) - \frac{1}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t)1(t)$$

Nota: nel caso della stabilità esterna, anche una coppia di poli $\pm j\omega_0$ con molteplicità 1 comporta instabilità, perché posso aumentarne la molteplicità con un ingresso sinusoidale avente frequenza ω_0 (**fenomeno della risonanza**)

Osservazione sull'instabilità esterna

Nota: Per un sistema esternamente instabile la risposta forzata non diverge sempre (dipende dal particolare ingresso)!

- Consideriamo ad esempio un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

- Due poli puramente immaginari in $\pm j \Rightarrow$ sistema esternamente instabile
- Infatti per un ingresso del tipo $u(t) = \sin(t) 1(t)$ si ha **divergenza**

$$Y_f(s) = G(s) U(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \Rightarrow y_f(t) = \frac{1}{2} \sin(t) 1(t) - \frac{1}{2} t \cos(t) 1(t)$$

\Rightarrow l'ingresso va in risonanza con i modi naturali del sistema aumentandone la molteplicità

- Tuttavia se cambiamo la frequenza dell'ingresso $u(t) = \sin(2t) 1(t)$ l'uscita **non** diverge

$$Y_f(s) = G(s) U(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \Rightarrow y_f(t) = \frac{2}{3} \sin(t) 1(t) - \frac{1}{3} \sin(2t) 1(t)$$

Tabella riassuntiva sulla stabilità

STABILITÀ	Quantità di interesse	Condizione
Asintotica	Polinomio caratteristico $\varphi(s)$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$
Marginale	Polinomio minimo $m(s)$	$\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ per ogni λ_i tale che $\varphi(\lambda_i) = 0$ & $m_i = 1$ nel caso in cui $\text{Re}(\lambda_i) = 0$
Esterna	Funzione di trasferimento $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i tale che $a(\lambda_i) = 0$

Nota: conoscere $G(s)$ **non** è sufficiente per concludere sulla stabilità interna del sistema!

Relazione tra stabilità interna e stabilità esterna

- Ricordiamo che

$$\begin{aligned}\{ \text{poli del sistema} \} &\subseteq \{ \text{autovalori del sistema} \} \\ \{ \text{autovalori del sistema} \} - \{ \text{poli del sistema} \} &= \{ \text{autovalori nascosti} \}\end{aligned}$$

- Di conseguenza autovalori con parte reale $< 0 \Rightarrow$ poli con parte reale < 0

Tra stabilità interna ed esterna vale la relazione

$$\text{STABILITÀ ASINTOTICA} \implies \text{STABILITÀ ESTERNA}$$

Nota: L'implicazione inversa in generale **non** vale! Ci possono essere sistemi stabili esternamente (tutti poli con $\text{Re} < 0$) ma non asintoticamente stabili. Questo succede quando ci sono autovalori nascosti con $\text{Re} \geq 0$!

Relazione tra stabilità interna e stabilità esterna: esempio

- Consideriamo un sistema LTI TC con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)$$

\Rightarrow autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

\Rightarrow modi naturali e^t (divergente) e e^{-t} (convergente)

\Rightarrow sistema **internamente instabile**

- Funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

\Rightarrow polo $p_1 = -1 \Rightarrow$ sistema **esternamente stabile**

- autovalore $\lambda_1 = 1$ nascosto [non compare come polo di $G(s)$]

2.9 Criteri algebrici per la stabilità

Criteri algebrici per la stabilità

- Stabilità asintotica \Leftrightarrow tutte le radici di $\varphi(s)$ hanno parte reale < 0
- Stabilità esterna \Leftrightarrow tutte le radici di $a(s)$ hanno parte reale < 0
- Consideriamo un generico polinomio a coefficienti reali di grado n

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Determinare le radici di $p(s)$ **non** è sempre semplice!
 - **formule analitiche** solo in casi particolari (esempio: $n = 2$)
 - **algoritmi iterativi** per determinare le radici in modo approssimato
 \Rightarrow non sempre accurati soprattutto per n grande e/o radici multiple

Obiettivo Data un polinomio $p(s)$ determinare se tutte le radici appartengono alla regione di stabilità

$$\mathbb{C}_s = \{s \in \mathbb{C} \text{ tali che } \operatorname{Re}[s] < 0\}$$

senza calcolare la radici esplicitamente

- Possiamo studiare il segno delle radici di $p(s)$ senza calcolarle mediante i cosiddetti **criteri algebrici**

Condizione necessaria per la stabilità

- Consideriamo un polinomio

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

con $a_n \neq 0$

Fatto 2.13 (condizione necessaria per la stabilità)

Tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale < 0

\Rightarrow tutti i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sono non nulli e hanno lo stesso segno.

Per polinomi fino al secondo grado vale il se e solo se (**Regola di Cartesio**):

Tutte le radici di $p(s)$ con $n \leq 2$ hanno parte reale < 0

\Leftrightarrow tutti i coefficienti sono non nulli e hanno lo stesso segno.

Condizione necessaria per la stabilità: dimostrazione

- Date le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di $p(s)$, possiamo scrivere

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

- Supponiamo, per semplicità, che tutte le radici siano reali e < 0

$$\lambda_i = -r_i \quad \text{con } r_i > 0$$

\Rightarrow Possiamo scrivere

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s + r_i)$$

- Tutti gli $r_i > 0$
 \Rightarrow la produttoria dà luogo a un polinomio con tutti coefficienti > 0
 \Rightarrow tutti i coefficienti di $p(s)$ hanno lo stesso segno (quello di a_n)
- La dimostrazione può essere estesa al caso di radici complesse con $\text{Re} < 0$
- Il criterio di Cartesio può essere facilmente verificato scrivendo le radici del polinomio per $n = 2$

Studio della stabilità con la regola di Cartesio

- Per $n = 2$

$$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

possiamo usare la regola di Cartesio per concludere sulla stabilità

- Esempio 1:

$$p(s) = s^2 + s + 1$$

tutti coefficienti con lo stesso segno \Rightarrow tutte radici con $\text{Re} < 0$

- Esempio 2:

$$p(s) = s^2 - s - 1$$

variazione di segno \Rightarrow **non** tutte radici con $\text{Re} < 0$

- Esempio 3:

$$p(s) = s^2 + 1$$

manca un termine \Rightarrow **non** tutte radici con $\text{Re} < 0$

Studio della stabilità con la condizione necessaria

- Per $n > 2$ possiamo usare la condizione necessaria per una prima verifica
 - almeno uno dei coefficienti è nullo **OR** almeno una variazione di segno
 \Rightarrow non tutte radici con $\text{Re} < 0$
 - tutti coefficienti non nulli **AND** con lo stesso segno
 \Rightarrow non possiamo concludere nulla

- Esempio 1 :

$$p(s) = s^3 + s^2 + s + 1$$

tutti coefficienti con lo stesso segno \Rightarrow non possiamo concludere

- Esempio 2:

$$p(s) = s^3 + s^2 - s - 1$$

variazione di segno \Rightarrow **non** tutte radici con $\text{Re} < 0$

- Esempio 3:

$$p(s) = s^3 + s + 1$$

manca un termine \Rightarrow **non** tutte radici con $\text{Re} < 0$

Tabella di Routh

- Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità: costruzione della **Tabella di Routh** del polinomio

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Tabella di Routh:** $n + 1$ righe (numerate in ordine decrescente) in cui
 - prime 2 righe costruite mettendo a zig-zag i coefficienti del polinomio e completando con degli 0
 - righe successive costruite iterativamente a partire dalle prime 2: riga ℓ costruita partendo dalle righe $\ell + 1$ e $\ell + 2$
 - man mano che si costruisce la tabella il numero di elementi non nulli di ciascuna riga diminuisce

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	0
$n - 1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	0
$n - 2$	$E_{n-2,1}$	$E_{n-2,2}$	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots			
0	$E_{0,1}$	0			

Tabella di Routh – caso $n = 3$

- Consideriamo un polinomio di terzo grado

$$p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

- Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{1,1} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array}$$

con

$$E_{1,1} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Nota: la tabella non si può costruire quando $a_2 = 0$. In questo caso si dice che la tabella di Routh è **non regolare**

Tabella di Routh – caso generale

- Consideriamo un polinomio di grado n
- Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cccc}
 n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\
 n-2 & E_{n-2,1} & E_{n-2,2} & \dots & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 0 & E_{0,1} & 0 & & &
 \end{array}$$

dove

$$E_{n-2,1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \quad E_{n-2,2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}$$

e in generale

$$E_{\ell,i} = -\frac{1}{E_{\ell+1,1}} \det \begin{bmatrix} E_{\ell+2,1} & E_{\ell+2,i+1} \\ E_{\ell+1,1} & E_{\ell+1,i+1} \end{bmatrix}$$

Nota: la costruzione della tabella non può essere continuata quando per una certa riga ℓ il primo elemento $E_{\ell,1}$ risulta nullo.
In questo caso si dice che la tabella è **non regolare**.

Criterio di Routh-Hurwitz

- Consideriamo la tabella di Routh del polinomio $p(s)$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	0
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	0
$n-2$	$E_{n-2,1}$	$E_{n-2,2}$	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots			
0	$E_{0,1}$	0			

- variazione di segno nella prima colonna \Rightarrow radice con $\text{Re} > 0$
- permanenza di segno nella prima colonna \Rightarrow radice con $\text{Re} < 0$

Fatto 2.14 (Criterio di Routh-Hurwitz)

Tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale < 0

- \Leftrightarrow la tabella di Routh è regolare (tutti gli elementi della prima colonna $\neq 0$)
AND tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno

- Criterio di Routh-Hurwitz: generalizza regola di Cartesio a n generico

Esempio: studio della stabilità con il criterio di Routh-Hurwitz

- Consideriamo un sistema LTI TC con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

- Sistema esternamente stabile \Leftrightarrow tutte le radici di $a(s) = s^3 + 3s^2 + s + 2$ hanno parte reale < 0
- Condizione necessaria non mi consente di concludere
 \Rightarrow per studiare il segno delle radici utilizzo Routh-Hurwitz
- Tabella di Routh di $a(s)$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & a_3 & a_1 & 0 \\ 2 & a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & E_{1,1} & 0 & \\ 0 & a_0 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & E_{1,1} & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

con

$$E_{1,1} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}$$

- Tutti elementi della prima colonna > 0 \Rightarrow tutte radici con $\text{Re} < 0$
 \Rightarrow sistema stabile esternamente

Esercizi proposti

Studiare la stabilità esterna dei sistemi LTI TC aventi le seguenti funzioni di trasferimento

$$① \quad G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 4}$$

$$② \quad G(s) = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$③ \quad G(s) = \frac{s+3}{s^4 + 1}$$

$$④ \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + (1-\alpha)s + 4\alpha} \text{ con } \alpha \text{ parametro reale}$$

$$⑤ \quad G(s) = \frac{s+3}{s^3 + s^2 + s + \alpha} \text{ con } \alpha \text{ parametro reale}$$

2.10 **Analisi dei sistemi LTI in rappresentazione ingresso/uscita**

Analisi dei sistemi LTI in rappresentazione ingresso/uscita

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)\end{aligned}$$

$$\text{dove } y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$$

Obiettivo: scrivere la forma della soluzione e studiare le proprietà di stabilità interna ed esterna di un sistema in rappresentazione ingresso-uscita

- Lo studio può essere effettuato
 - direttamente sulla rappresentazione ingresso-uscita
 - scrivendo le equazioni di stato e procedendo come già visto

Trasformata di Laplace e derivazione nel tempo

- Ricordiamo che vale la proprietà

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0)$$

- Applicando tale proprietà più volte

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\dot{y}(t)\right\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y^{(i)}(t)\} = s^iY(s) - s^{i-1}y(0) - \dots - sy^{(i-2)}(0) - y^{(i-1)}(0)$$

- Possiamo utilizzare questa proprietà per trovare la soluzione
Esempio:

$$\dot{y}(t) = u(t) \Rightarrow sY(s) - y(0) = U(s)$$

Risolvendo rispetto a $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s} + \frac{1}{s}U(s) \Rightarrow y(t) = \underbrace{y(0)1(t)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t u(\tau)d\tau}_{y_f(t)}$$

Funzione di trasferimento

- Per calcolare la risposta forzata $Y_f(s)$ possiamo porre a 0 le condizioni iniziali
 \Rightarrow possiamo scrivere

$$\mathcal{L}\{y_f^{(i)}(t)\} = s^i Y_f(s) \quad \mathcal{L}\{u^{(i)}(t)\} = s^i U(s)$$

- Data la relazione ingresso-uscita

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t) \end{aligned}$$

\Rightarrow nel dominio di Laplace per la risposta forzata $Y_f(s)$ vale

$$\begin{aligned} s^n Y_f(s) &= \alpha_{n-1} s^{n-1} Y_f(s) + \dots + \alpha_1 s Y_f(s) + \alpha_0 Y_f(s) \\ &\quad + \beta_n s^n U(s) + \dots + \beta_1 s U(s) + \beta_0 U(s) \end{aligned}$$

- Risolvendo tale equazione rispetto a $Y_f(s)$ si ottiene

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0}}_{G(s)} U(s)$$

Funzione di trasferimento

- Per un sistema in rappresentazione ingresso-uscita

$$y^{(n)}(t) = \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0}$$

Nota: come sempre dobbiamo fare le semplificazioni tra numeratore e denominatore!

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

con i $b(s)$ e $a(s)$ ottenuti semplificando fattori comuni tra

$$\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0 \quad \text{e} \quad s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_0$$

- Data $G(s)$ possiamo studiare la stabilità esterna

Rappresentazione ingresso/uscita e equazioni di stato

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)\end{aligned}$$

- Se l'ingresso non compare derivato

$$\beta_n = 0, \dots, \beta_1 = 0$$

⇒ possiamo scrivere le equazioni di stato scegliendo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Per sistemi LTI, esiste un metodo sistematico (**forma canonica di osservazione**) per passare da rappresentazione ingresso-uscita a equazioni di stato anche quando l'ingresso compare derivato.

Forma canonica di osservazione

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$y^{(n)}(t) = \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

- Equazioni di stato in forma canonica di osservazione

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

con

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{c} \beta_0 + \beta_n \alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_n \alpha_1 \\ \beta_2 + \beta_n \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1} \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad D = \beta_n$$

Forma canonica di osservazione: cenno di dimostrazione

- La forma canonica di osservazione si ottiene scegliendo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(n-1)} - \alpha_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \alpha_1 y - \beta_n u^{(n-1)} - \dots - \beta_1 u \\ \vdots \\ \dot{y} - \alpha_{n-1} y - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} u \\ y - \beta_n u \end{bmatrix}$$

- La corrispondenza tra relazione ingresso/uscita e forma canonica di osservazione può essere verificata derivando ciascuna componente dello stato
- Ad esempio per x_n vale

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = \dot{y} - \beta_n \dot{u} &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u - \alpha_{n-1} \beta_n u + \alpha_{n-1} \beta_n u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} (y - \beta_n u) + (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) u \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} x_n + (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) u \end{aligned}$$

Esempio: forma canonica di osservazione

- Consideriamo un sistema LTI TC descritto dalla relazione ingresso/uscita

$$\ddot{y}(t) = -2\dot{y}(t) + 3\dot{u}(t)$$

- Sistema di ordine $n = 2$

$$\ddot{y}(t) = \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \beta_2 \ddot{u}(t) + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

con

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_0 = 0$$

- Forma canonica di osservazione

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_2 \alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_2 \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1] & D &= \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Analisi dei sistemi LTI in rappresentazione ingresso/uscita

- Consideriamo un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) \\ &\quad + \beta_n u^{(n)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t) \end{aligned}$$

- Sfruttando la struttura della forma canonica di osservazione possiamo calcolare $\varphi(s)$ e $m(s)$

Fatto 2.15 Per un sistema LTI TC in rappresentazione ingresso/uscita vale

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0 \\ m(s) &= \varphi(s) \\ G(s) &= \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \dots - \alpha_1 s - \alpha_0} \end{aligned}$$

- Data la rappresentazione ingresso/uscita possiamo direttamente studiare stabilità interna ed esterna senza scrivere le equazioni di stato

Esempio: analisi di un sistema LTI in rappresentazione i/u

- Consideriamo un sistema LTI TC descritto dalla relazione ingresso/uscita

$$\ddot{y}(t) = -2 \dot{y}(t) + 3 \dot{u}(t)$$

- Per tale sistema $n = 2$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 3$ e $\beta_0 = 0$.
- Polinomio minimo e caratteristico

$$m(s) = \varphi(s) = s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0 = s^2 + 2s = s(s + 2)$$

tutti autovalori con $\text{Re} \leq 0$ e quello con $\text{Re} = 0$ ha molteplicità 1
 \Rightarrow sistema marginalmente stabile

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 - \alpha_1 s - \alpha_0} = \frac{3s}{s(s + 2)} = \frac{3}{s + 2}$$

un unico polo con parte reale $< 0 \Rightarrow$ sistema esternamente stabile