Esercizi sulla retroazione dinamica sull'uscita

a) $G(s) = \dfrac{3}{s^2+1}$ $\qquad b(s) = 3$

$a(s) = s^2+1$

suppongo $\varphi(s) = a(s)$ $\qquad \varphi_R(s) = 1$

$$K(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

n_K ordine di $K(s) \geq$ grado$\{a(s)\} - 1 = 2 - 1 = 1$

scelgo $n_K = 1$

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}$$

$$\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\left[a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)\right] = (s^2+1)(s+p_0) + 3(q_1 s + q_0)$$

$$= s^3 + p_0 s^2 + s + p_0 + 3q_1 s + 3q_0 = s^3 + p_0 s^2 + (3q_1+1)s + 3q_0 + p_0$$

Posso porre ad esempio $\varphi^*(s) = (s+10)(s^2+s+1)$

Scegliamo p_0, q_0 e q_1 in modo tale che il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^3 + p_0 s^2 + (3q_1 + 1)s + 3q_0 + p_0$$

coincide con quello desiderato

$$\varphi^*(s) = (s+10)(s^2+s+1) = s^3 + s^2 + s + 10s^2 + 10s + 10 = s^3 + 11s^2 + 11s + 10$$

Per eguagliare i due polinomi

$$\begin{cases} p_0 = 11 \\ 3q_1 + 1 = 11 \\ 3q_0 + p_0 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = 11 \\ q_1 = \frac{10}{3} \\ 3q_0 + 11 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = 11 \\ q_1 = \frac{10}{3} \\ q_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$K(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{\frac{10}{3}s - \frac{1}{3}}{s + 11}$$

b) $G(s) = \dfrac{3}{s^2+1}$

$K(s) = \dfrac{q(s)}{p(s)}$ Per avere azione integrale deve essere $\boxed{p(0)=0}$

n_K ordine del controllore $\geq$ grado $\{e(s)\} = 2$

scelgo $n_K = 2$ $K(s) = \dfrac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s}$

$$\varphi^*(s) = \varphi_R(s)\left[a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)\right]$$

$$= (s^2+1)(s^2+p_1 s) + 3(q_2 s^2 + q_1 s + q_0)$$

$$= s^4 + p_1 s^3 + s^2 + p_1 s + 3q_2 s^2 + 3q_1 s + 3q_0$$

$$= s^4 + p_1 s^3 + (3q_2+1)s^2 + (3q_1+p_1)s + 3q_0$$

Pongo pure ad esempio $\varphi^*(s) = (s^2+s+1)(s+10)^2$

Scegliamo p_1, q_0, q_1, q_2 in modo tale che il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = s^4 + p_1 s^3 + (3q_2+1)s^2 + (3q_1+p_1)s + 3q_0$$

coincide con quello desiderato

$$\varphi^*(s) = (s^2+s+1)(s+10)^2 = s^4 + 21s^3 + 121s^2 + 120s + 100$$

Per eguagliare i polinomi

$$\begin{cases} p_1 = 21 \\ 3q_2+1 = 121 \\ 3q_1 + p_1 = 120 \\ 3q_0 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 21 \\ q_2 = 40 \\ q_1 = 33 \\ q_0 = \frac{100}{3} \end{cases}$$

$$K(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^2 + p_1 s} = \frac{40s^2 + 33s + 100/3}{s^2 + 21s}$$

c) $y^\circ(t) = 10 \cdot 1(t)$ $\quad d(t) = 5 \cdot 1(t)$ Calcolare il regime permanente

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il regime permanente complessivo si ottiene come somma dei regimi permanenti in risposta ai due ingressi

$$y_f^{RP}(t) = y_f^{Y^\circ}(t) + y_f^{D}(t) = G^*_{y^\circ y}(0) \cdot 10 \cdot 1(t) + G^*_{dy}(0) \cdot 5 \cdot 1(t)$$

Come visto, le due funzioni di trasferimento in ciclo chiuso sono nella forma

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)} H_f \qquad G^*_{dy}(s) = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)}$$

NOTA: in questo caso $H_f = 1$ perché stiamo considerando un sistema di controllo a 1 grado di libertà nel caso e) $\quad K(s) = \dfrac{\frac{10}{3}s - \frac{1}{3}}{s+11}$ (a s) $\quad$ <- p(s) $\qquad G(s) = \dfrac{3}{s^2+1}$ b(s) $\quad$ e(s)

$$G^*_{y^oy}(s) = \frac{3\left(\frac{10}{3}s - \frac{1}{3}\right)}{s^3+11s^2+11s+10} = \frac{10s-1}{s^3+11s^2+11s+10} \qquad G^*_{y^oy}(0) = \frac{-1}{10}$$

$$G^*_{dy}(s) = \frac{3\,(s+11)}{s^3+11s^2+11s+10} = \frac{3s+33}{s^3+11s^2+11s+10} \qquad G^*_{dy}(0) = \frac{33}{10}$$

$$y_f^{RP}(t) = y_f^{Y^o}(t) + y_f^{D}(t) = G^*_{y^oy}(0)\cdot 10\cdot 1(t) + G^*_{dy}(0)\cdot 5\cdot 1(t)$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot 10\cdot 1(t) + \frac{33}{10}\cdot 5\cdot 1(t)$$

$$= \left(-1 + \frac{33}{2}\right)\cdot 1(t) = \frac{31}{2}\cdot 1(t)$$

nel caso b) $\quad K(s) = \dfrac{40 s^2 + 33 s + 100/3}{s^2 + 21 s} \qquad G(s) = \dfrac{3}{s^2+1}$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{b(s)\,q(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)} \qquad H_f = \frac{3\left(40 s^2 + 33 s + \frac{100}{3}\right)}{s^4 + 21 s^3 + 121 s^2 + 120 s + 100}$$

$$G^*_{dy}(s) = \frac{b(s)\,p(s)}{a(s)\,p(s) + b(s)\,q(s)} = \frac{3\,(s^2 + 21 s)}{s^4 + 21 s^3 + 121 s^2 + 120 s + 100}$$

I due guadagni in continua in ciclo chiuso sono

$$G^*_{y^\circ y}(0) = 1 \qquad G^*_{dy}(0) = 0$$

Il regime permanente coincide quindi con il riferimento

$$y_f^{RP}(t) = y_p^{Y^\circ}(t) + y_p^{D}(t) = G^*_{y^\circ y}(0)\cdot 10 \cdot 1(t) + G^*_{dy}(0)\cdot 5 \cdot 1(t)$$

$$= 10 \cdot 1(t)$$

NOTA: si tratta del risultato che mi aspettavo perché l'azione integrale garantisce proprio $G^*_{y^\circ y}(0) = 1$ $\quad G^*_{dy}(0) = 0$