Contents

Fonti usate:

esercizii di riepilogo (non ha pubblicato un programma, che io sappia) e/o slide e/o la cazzo di cane

1 Trasformata Laplace

- Definzione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

1.1 Teoremi

- Ritardo

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\} = F(s-\lambda)$$

- Prodotto per t / derivata in frequenza

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

1.2 Notevoli

- Gradino (ricavi con definizione)

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

- Esponenziale causale (ricavi col teorema del ritardo)
$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}1(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$
- Seno causale (ricavi con l'esponenziale)
$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$
- Coseno causale (ricavi con l'esponenziale)
$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)1(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$
- Impulso di dirac (ricavi con definizione) (usata per funzioni semplicemente proprie)
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$
- Rampa unitaria (ricavi prodotto per t) (usata per poli nulli a molteplicità 2)
$$\mathcal{L}\{t1(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{1(t)\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^2}$$
- Rampa parabolica (ricavi prodotto per t) (usata per poli nulli a molteplicità 3)
$$\mathcal{L}\{t^2 1(t)\} = \mathcal{L}\{t \times t1(t)\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2}) = \frac{2}{s^3}$$
- Esponenziale $\times$ monomoio (ricavi ripetendo derivate) (usata per poli

non nulli a molteplicità multipla)

$$\begin{aligned}
\text{forma generica } &\Rightarrow \frac{t^l}{l!}e^{at}1(t) \\
l = 1 &\Rightarrow \mathcal{L}\{te^{at}1(t)\} \\
&= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{at}1(t)\} \\
&= -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-a}) \\
&= \frac{1}{(s-a)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l = 2 &\Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{t^2}{2}e^{at}1(t)\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t \times te^{at}1(t)\} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{te^{at}1(t)\} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{(s-a)^2}) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{-2}{(s-a)^3} \\
&= \frac{1}{(s-a)^3}
\end{aligned}$$

Andando per induzione ti ritrovi

$$\mathcal{L}\{\frac{t^l}{l!}e^{at}1(t)\} = \frac{1}{(s-a)^{l+1}}$$

(i fattoriali li mette perchè a ogni passo hai un'altra potenza, a ogni potenza devi rifare la derivata che ti moltiplicare per l'intero dopo, hai tutti sti di interi e come li togli? dividi per il fattoriale(!))

2 Antitrasformata laplace / Analisi modale

2.1 Residui

2.2 Risposta per poli...

- Reali:

- Modo naturale $e^{polo\ t}$, con $t \geq 0$

- Complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$ (I complessi sono per forza coniugati qui, in quanto radici di un polinomio con coefficienti reali) Detti:
  - K e $\overline{K}$ i residui corrispondenti ai poli, che saranno coniugati complessi
  - α e β le parti reali e immaginarie di K

$$e^{\sigma t}(2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t))1(t)$$

2.3 Poli a molteplicità multipla

- Pari a 0 molteplicità l
  - Laplace : fratti semplici $\frac{K_{boh,1}}{s}$, $\frac{K_{boh,2}}{s^2}$, ..., $\frac{K_{boh,s}}{s^l}$
  - Tempo : modi naturali $1(t)$, $t1(t)$, ..., $t^{l-1}1(t)$
- Reali con molteplicità pari a l
  - Laplace : fratti semplici $\frac{K_{boh,1}}{(s-a)}$, $\frac{K_{boh,2}}{(s-a)^2}$, ..., $\frac{K_{boh,l}}{(s-a)^l}$
  - Tempo : modi naturali e^{at}, te^{at}, t^2eat, ..., $t^{l-1}e^{at}$

3 Sistemi LTI TC

- Definizione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

  per i sistemi SISO (Single Input, Single Output) B è un vettore colonna, C è un vettore riga, $D \in \mathbb{R}$

3.1 Evoluzione stato e uscita

3.1.1 Evoluzioni nel tempo

- Evoluzione stato nel tempo
  - libera

$$x_l(t) = e^{At}x_0$$

  - forzata

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- complessiva

$$x(t) = x_l(t) + x_l(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- Evoluzione uscita nel tempo
  - libera

$$y_l(t) = Cx_l(t) = Ce^{At}x_0$$

  - forzata

$$y_l(t) = Cx_f(t) + Du(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

  - complessiva

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

3.1.2 Evoluzioni in Laplace

- Evoluzione stato in Laplace
  - libera

$$X_l(s) = \mathcal{L}\{e^{At}x_0\} = (sI - A)^{-1}x_0$$

  - forzata

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

  - complessiva

$$X(s) = X_l(s) + X_f(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- Evoluzione uscita in Laplace
  - libera

$$Y_l(s) = CX_l(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

  - forzata

$$Y_f(s) = CX_f(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

  - complessiva

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

3.1.3 Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$