Stabilità

Stocazzo

June 25, 2022

Contents

1 Cazz'è ?

Stabilità vuol dire robustezza di come va il sistema (traiettoria del sistema) rispetto a modifiche/ perturbazioni/ non essere propio esatto di:

- **Input**
- **Stato iniziale**
- **Il sistema stesso**

Vale a dire di tutte le cose che possono influire sull'evoluzione/ traiettoria/ chiamala come vuoi del sistema.

In modo un po' più esatto sti cosi si chiamano:

- **Stabilità interna** : rispetto a varaizioni o scazzi dello stato iniziale del sistema
- **Stabilità esterna** : rispetto a variazioni o scazzi dell'input che arriva al sistema
- **Stabilità strutturale** : rispetto a variazioni o scazzi del sistema stesso, com'è fatto (quindi per questo corso rispetto alle classiche A, B, C, e D)

2 Stabilità interna

2.1 Tipi di stabilità

- **Stabilità asintotica** : Il contributo della perturbazione sparisce, converge a 0

- **Stabilità marginale** : Il contributo della perturbazione non va a 0, ma non diverge neanche

- **Instabilità** : Il contributo della perturbazione diverge

2.2 Mappa di transizione globale

La mappa di transizione globale (Φ) è una descrizione completa del comportamento sistema ottenuta buttandoci dentro tutto lo stato e gli input del sistema, vale a dire:

$$\text{(t, stato iniziale, input)} \overset{\Phi}{\Longrightarrow} \text{stato del sistema}$$

questa viene usata per rendere un pochino più fattibile la discussione che segue visto che a dire costantemente *quello che fa se il sistema inizia così, quello che fa con la configurazione cosà...* si impazzisce tutti

la mappa di transizione è una caratteristica propia del sistema, quindi se hai un sistema particolare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax + Bu \\ y(t) & = Cx + Du \end{cases}$$

ti ritrovi, per quanto visto ora, con la mappa

$$\Phi(t, x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

2.3 Stabilità interna

Facciamo quindi che si studia la perturbazione rispetto allo stato iniziale, questa sarà pari a

come va il sistema con t, $x_0 + \Delta x_0$, e u (deviata)$-$come va il sistema con t, x_0, e u (nominale)

questa si può rappresentare con le mappe di transizione globale come

$$\Phi(t, x_0 + \Delta x_0, u) - \Phi(t, x_0, u)$$

espandendo ste definizioni otteniamo

$$e^{At}(x_0+\Delta x_0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau-(e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau)=$$
$$e^{At}\Delta x_0$$

la perturbazione qui dipende solo da A e da Δx_0, visto che allora il sistema si comporta sempre allo stesso modo per tutte le perturbazioni di stato iniziale possiamo parlare di **stabilità interna del sistema**

Da tabellina avremo

- **Asintoticamente stabile** $\iff$ $e^{At}x_0$ converge sempre, quindi
$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\Delta x_0 = 0 \;\; \forall \Delta x_0$$
- **Marginalmente stabile** $\iff$ $e^{At}x_0$ sempre limitato, quindi
$$\forall \Delta x_0 \; \exists M : \; || \; e^{At} \; || \; < M \; \forall \; t > 0$$
- **Internamente Instabile** altrimenti, quindi se $\exists \Delta x_0$ che me lo fa esplodere in qualche modo

2.4 Con modi naturali

ricordandoci che gli elemententi di e^{At} sono combinazioni lineari dei **modi naturali del sistema** si ottiene che la stabilità interna dipende dai modi naturali

Quindi

- **Stabilità asintotica** $\iff$ tutto converge $\iff$ tutti i modi convergenti
- **Stabilità marginale** $\iff$ tutto limitatao $\iff$ tutti i modi limitati
- **Instabilità interna** $\iff$ almeno un modo divergente

Qui gli autovalori del sistema sono gli autovalori della matrice, quindi

- **Stabilità asintotica** $\iff$ tutti gli autovalori di A parte reale < 0
- **Stabilità marginale** $\iff$ tutto con parte reale ≤ 0 **E** tutti quello con parte reale $= 0$ hanno molteplicità $= 1$ come radici del polinomio minimo

- **Instabilità interna** $\iff$ tutti gli altri casi, quindi $\exists$ con parte reale > 0 **O** $\exists$ con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1

Per gli esercizi avremo

1. Trova $\varphi(s)$ polinomio caratteristico $= det(sI - A)$
2. Tutte radici < 0 ? asintoticamente stabile : continua
3. $\exists$ radice di $\varphi(s) > 0$? internamente instabile : continua
4. tutte radici con parte reale ≤ 0 tutte quelle con parte reale $= 0$ hanno molteplicità 1? marginalmente stabile : continua
5. trova il polinomio minimo, qui quelle con parte reale $= 0$ hanno molteplicità 1? marginale : instabile

3 Risposta forzata e funzione di trasferimento

Al momento non sono provvisto di una quantità sufficiente di sbatti per portare a compimento la scrittura della seguente sezinoe

4 Criterii algebrici per la stabilità

Abbiamo qualche rapporto tra stabilità e segni delle radici, in particolare abbiamo visto che:

- Stabilità asintotica $\iff$ tutte le radici di $\varphi(s)$ con Re < 0
- Stabilità esterna $\iff$ tutte $a(s)$ con Re < 0

Capire che radici ha un polinomio può non essere facilissimo capire se sono tutte minori di 0 di solito è meno complicato

4.1 Condizione necessaria e cartesio

le radici hanno Re $< 0 \rightarrow$ tutti i coefficienti sono non nulli e dello stesso segno

per i polinomii di gradi 2 questa condizione è necessaria **e sufficiente**, questa $\iff$ aggine si chiama **Regola di Cartesio**

4.1.1 Come la uso

per $n \leq 2$ ci butti quella e hai già fatto l'esercizio, almeno per quanto riguarda il segno delle radici

per $n > 2$ la possiamo usare come passo preliminare, se non passi quella non passi e basta, quindi instabilità, per andare oltre si usa Routh Hurwitz

4.2 Tabella di Routh

fai una tabella

Criterio di Routh Hurwitz dice che

Tutte radici con $\mathrm{Re} < 0 \iff$ tutti gli elementi della prima colonna della tabella sono nonnulli con lo stesso segno

Generalizzazione di regola di Cartesio

Coso sopra, i due sopra, i due a destra destra

5 Rappresentazione Ingresso Uscita (Battistelli.io)

wee wee wa we weee