Esercizi sulla retroazione sullo stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \alpha u \\ y = x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per prima cosa studiamo la raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha \\ \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

completamente raggiungibile $\iff \det \mathcal{R} \neq 0$

$\Updownarrow$

completamente controllabile

$$\det \mathcal{R} = 2(2-\alpha) - 2\alpha^2 = 4 - 2\alpha - 2\alpha^2$$

$$\det \mathcal{R} = 0 \iff 4 - 2\alpha - 2\alpha^2 = 0 \iff 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \iff \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

NOTA: devo considerare solo i valori reali di α

$\det R = 0 \iff \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ $\qquad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ complete raggiungibilità / controllabilità

$\alpha = 1$ o $\alpha = -2$ non complete raggiungibilità / controllabilità

a) $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ $\qquad \varphi_c(s) = \varphi(s) = (s-1)(s+2)$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1) - 2 = s^2 + s - 2$$
$$= (s-1)(s+2)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$

$\boxed{\alpha = 1}$ devo calcolare $(sI-A)^{-1}B$ per vedere quale autovalore si cancella

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI-A)\,B = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2s+2+2 \\ 2+s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2(s+2) \\ s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s-1)(s+2)}\begin{bmatrix} 2(s+2) \\ s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\cancel{(s+2)}}{(s-1)\cancel{(s+2)}} \\ \frac{\cancel{s+2}}{(s-1)\cancel{(s+2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = (s-1)(s+2)$$

$$\varphi_c(s) = s-1 \qquad \varphi_{mc}(s) = s+2$$

$$\boxed{\alpha = -2} \qquad (sI-A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)}\,\mathrm{Adj}(sI-A)\,B = \frac{1}{(s-1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)}\begin{bmatrix} 2s+2-4 \\ 2-2s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+2)}\begin{bmatrix} 2s-2 \\ -2s+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+2)} \\ \frac{-2\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}\,s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ \frac{-2}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \varphi_c(s) = s+2 \qquad \varphi_{mc}(s) = s-1$$

b) $\mathcal{R} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha \\ \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ raggiungibile per quali α ?

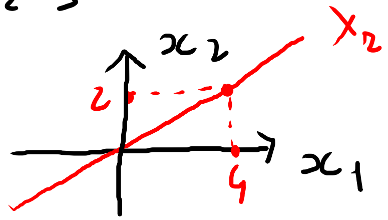
$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$

completa raggiungibilità $\Rightarrow X_R = \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ raggiungibile

$\alpha = 1$

$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_R = \left\{ \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \in X_R$ (per $\beta = 2$) $\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ raggiungibile



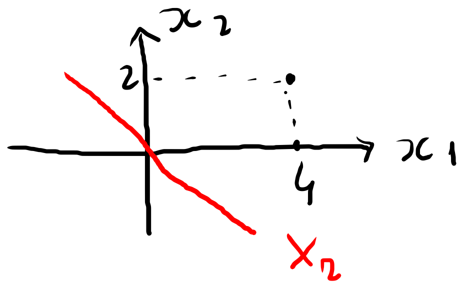
$\alpha = -2$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2\alpha \\ \alpha & 2-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_R = \left\{ \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ -2\beta_1 + 4\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ -(2\beta_1 - 4\beta_2) \end{bmatrix},\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix},\ \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \notin X_R \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ non raggiungibile



c) Per quali α sistema stabilizzabile? $\alpha \neq -2$

stabilizzabilità $\Leftrightarrow$ $\varphi_{nc}(s)$ è asintoticamente stabile

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ $\quad \varphi_{nc}(s) = 1$ completa controllabilità $\Rightarrow$ stabilizzabilità

$\alpha = 1$ $\quad \varphi_{nc}(s) = s+2$ asintoticamente stabile $\Rightarrow$ stabilizzabilità

$\alpha = -2$ $\quad \varphi_{nc}(s) = s-1$ non asintoticamente stabile $\Rightarrow$ non stabilizzabile

d) $\varphi(s) = (s-1)(s+2)$ autovalori in $1, -2$

Per spostare entrambi gli autovalori in -10 devono essere entrambi controllabili (perché devono essere spostati entrambi)

$\Rightarrow$ ci riesco $\Leftrightarrow$ sistema completamente controllabile

$\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$

e) $\alpha = 0$

trovare F e H tali che $\boxed{\varphi^*(s) = s^2 + s + 1}$ $G^*_{y^o y}(0) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2f_1 & 2f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2f_1 & 2-2f_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \begin{vmatrix} s+2f_1 & -2+2f_2 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+2f_1)(s+1) - 2 + 2f_2$$

$$= s^2 + 2f_1 s + s + 2f_1 - 2 + 2f_2 = s^2 + (2f_1+1)s + 2f_1 + 2f_2 - 2$$

Per avere $\varphi^*(s) = s^2 + s + 1$ deve essere

$$\begin{cases} 2f_1 + 1 = 1 \\ 2f_1 + 2f_2 - 2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 0 \\ 2f_2 - 2 = 1 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = \frac{3}{2} \end{cases}}$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{z(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{2}{s^2+s+1} H$$

$$z(s) = C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$G^*_{y^\circ y}(0) = \frac{2}{1} H = 1 \iff \boxed{H = \frac{1}{2}} \qquad G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

f) $y^\circ(t) = 2 \cdot 1(t)$ tracciare l'andamento di $y_f(t)$

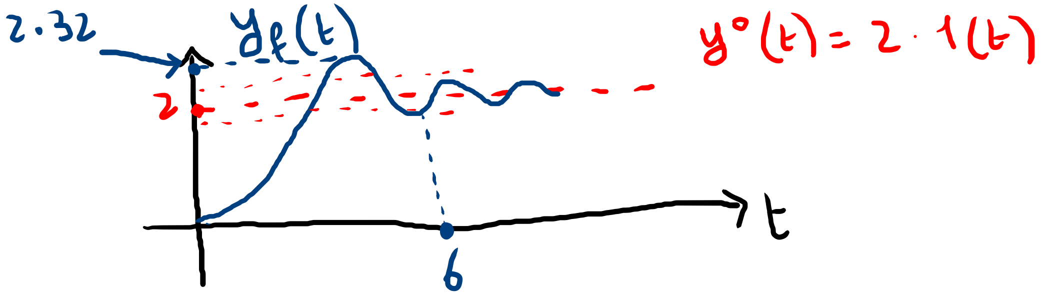
$$Y_f(s) = G^*_{y^\circ y}(s)\, Y^\circ(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \cdot \frac{2}{s} \qquad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+s+1} \cdot \frac{2}{s} \right\}$$

$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ è una funzione di trasferimento del II ordine del tipo $G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$s^2 + s + 1 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$\omega_n = 1$

$\xi = \frac{1}{2}$



sovraelongazione percentuale $\quad S = 100\, e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \simeq 16$

picco di $y_f(t) \simeq Y_0 \left(1 + \frac{S}{100}\right) = 2\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 2 \cdot 1.16 = 2.32$

valore di regime

tempo di assestamento $\quad T_{a,\varepsilon} \simeq \frac{1}{\xi\omega_n} \ln\frac{100}{\varepsilon} \simeq 2 \ln\frac{100}{5} \simeq 6$