Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE
DINFO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

2 Analisi dei sistemi dinamici

2.1 Risposta libera e forzata nei sistemi LTI

Risposta nei sistemi LTI TD

- Considero un sistema LTI TD

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Obiettivo Date

- condizione iniziale $x(0) = x_0$
- sequenza di ingresso (nel caso non autonomo) $u(0), u(1), \ldots$

calcolare $x(t)$ e $y(t)$ per $t \geq 0$

Nota: sistema TI $\Rightarrow$ l'evoluzione **non** dipende dall'istante iniziale t_0
$\Rightarrow$ per semplicità prenderemo sempre $t_0 = 0$

Risposta nei sistemi LTI TD

- Applicando l'equazione di transizione dello stato

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
&= Ax_0 + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A[Ax_0 + Bu(0)] + Bu(1) \\
&= A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A[A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)] + Bu(2) \\
&= A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Per un istante t generico

$$x(t) = \underbrace{A^t x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{A^{t-1}Bu(0) + \ldots + ABu(t-2) + Bu(t-1)}_{x_f(t)}$$

Risposta nei sistemi LTI TD

- Notiamo che

$$
\begin{aligned}
A^{t-1}Bu(0) + \ldots + ABu(t-2) + Bu(t-1) \\
= \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)
\end{aligned}
$$

Fatto 2.1 Per un sistema LTI TD le evoluzioni complessive di stato e uscita sono

$$
\begin{cases}
x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\
y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)
\end{cases}
$$

$$
x_\ell(t) = A^t x_0 \qquad x_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau)
$$

$$
y_\ell(t) = CA^t x_0 \qquad y_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu(\tau) + Du(t)
$$

Evoluzione libera e forzata dello stato

Evoluzione dello stato $=$ somma di due contributi

1. **Evoluzione libera dello stato**

$$x_\ell(t) = A^t x_0$$

   - Dipende dalla condizione iniziale x_0 ma non dall'ingresso u
   - Anche detta evoluzione *a ingresso nullo*

2. **Evoluzione forzata dello stato**

$$x_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau)$$

   - Dipende dall'ingresso u ma non dalla condizione iniziale x_0
   - Anche detta evoluzione *nello stato zero*

Risposta libera e forzata

Evoluzione dell'uscita $=$ somma di due contributi

1. **Risposta libera**

$$y_\ell(t) = CA^t x_0$$

   - Dipende dalla condizione iniziale x_0 ma non dall'ingresso u
   - Anche detta evoluzione *libera dell'uscita*

2. **Risposta forzata**

$$y_f(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Du(t)$$

   - Dipende dall'ingresso u ma non dalla condizione iniziale x_0
   - Anche detta evoluzione *forzata dell'uscita*

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Consideriamo condizioni iniziali nella forma di combinazioni lineari

$$x(0) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$\Rightarrow$ evoluzione libera

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= A^t x(0) \\ &= A^t (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 A^t x_1 + \alpha_2 A^t x_2 \\ y_\ell(t) &= \alpha_1 C A^t x_1 + \alpha_2 C A^t x_2 \end{aligned}$$

Evoluzione libera in risposta a una combinazione lineare di condizioni iniziali $=$ combinazione lineare (**sovrapposizione**) delle risposte alle singole condizioni iniziali

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Consideriamo ingressi nella forma di combinazioni lineari

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$$

$\Rightarrow$ evoluzione forzata

$$\begin{aligned}
x_f(t) &= \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \left(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)\right) \\
&= \alpha_1 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau) + \alpha_2 \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau) \\
y_f(t) &= \alpha_1 \left[\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u_1(\tau) + D u_1(t)\right] + \alpha_2 \left[\sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u_2(\tau) + D u_2(t)\right]
\end{aligned}$$

Evoluzione forzata in risposta a una combinazione lineare di ingressi
$=$ combinazione lineare (**sovrapposizione**) delle risposte ai singoli ingressi

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Consideriamo ingressi e condizioni iniziali nella forma di combinazioni lineari

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ u(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ evoluzione complessiva

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \\ &= A^t\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B\left(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)\right) \\ &= \alpha_1 \underbrace{\left(A^t x_1 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_1(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0)=x_1 \text{ e } u(t)=u_1(t)}} + \alpha_2 \underbrace{\left(A^t x_2 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u_2(\tau)\right)}_{\substack{\text{evoluzione in risposta a} \\ x(0)=x_2 \text{ e } u(t)=u_2(t)}} \end{aligned}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti: evoluzione complessiva in risposta a una somma di cause $=$ somma delle evoluzioni in risposta alle singole cause

Risposta nei sistemi LTI TC

- Considero un sistema LTI TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Obiettivo Date

- condizione iniziale $x(0) = x_0$
- segnale di ingresso (nel caso non autonomo) $u(t)$ per $t \geq 0$

calcolare $x(t)$ e $y(t)$ per $t \geq 0$

Nota: nel caso TC il calcolo della soluzione è più complicato perché occorre risolvere un sistema di equazioni differenziali (problema di Cauchy)

Esponenziale di matrice: definizione

- Considero un sistema autonomo scalare $x(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = a\,x(t)$$

$\Rightarrow$ la soluzione è

$$x(t) = e^{at} x_0$$

Domanda: Possiamo estendere questa soluzione al caso vettoriale $x(t) \in \mathbb{R}^n$?

- Ricordando l'espansione in **serie di Taylor** della funzione esponenziale

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{6} + \dots$$

possiamo definire l'**esponenziale di matrice**

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

Esponenziale di matrice: proprietà

- Dalla definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{de^{At}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots\right) \\
&= A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2} + \dots \\
&= A\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots\right) = A\, e^{At}
\end{aligned}$$

- Considero un sistema autonomo vettoriale $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

$\Rightarrow$ la soluzione è

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Risposta nei sistemi LTI TC

- Considero il caso generale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Fatto 2.2 Per un sistema LTI TC le evoluzioni complessive di stato e uscita sono

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \qquad x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0 \qquad y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Risposta nei sistemi LTI TC: dimostrazione

Soluzione complessiva (**formula di Lagrange**)

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$ perché $e^{At}\big|_{t=0} = I$ matrice identica
- soddisfa l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ perché (vedi slide successiva)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\
&= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) \\
&= Ae^{At}x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= A\underbrace{\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right)}_{x(t)} + Bu(t)
\end{aligned}$$

Risposta nei sistemi LTI TC: dimostrazione

- Ricordiamo la **formula di Leibniz** per la derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} F(t,\tau)\,d\tau\right) = F\big(t,b(t)\big)\cdot\frac{d}{dt}b(t) - F\big(t,a(t)\big)\cdot\frac{d}{dt}a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)\,d\tau$$

- Nel caso di $\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$F(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) \qquad a(t) = 0 \qquad b(t) = t$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) &= e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= e^{A\cdot 0}Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Evoluzione libera e forzata dello stato

Evoluzione dello stato $=$ somma di due contributi

1. **Evoluzione libera dello stato**

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0$$

   - Dipende dalla condizione iniziale x_0 ma non dall'ingresso u
   - Anche detta evoluzione *a ingresso nullo*

2. **Evoluzione forzata dello stato**

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

   - Dipende dall'ingresso u ma non dalla condizione iniziale x_0
   - Anche detta evoluzione *nello stato zero*
   - **integrale di convoluzione** tra $e^{At}B$ e $u(t)$

Risposta libera e forzata

Evoluzione dell'uscita = somma di due contributi

1. **Risposta libera**

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$

   - Dipende dalla condizione iniziale x_0 ma non dall'ingresso u
   - Anche detta evoluzione *libera dell'uscita*

2. **Risposta forzata**

$$y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

   - Dipende dall'ingresso u ma non dalla condizione iniziale x_0
   - Anche detta evoluzione *forzata dell'uscita*

Risposta nei sistemi LTI TC: considerazioni finali

- Anche per sistemi LTI TC vale il **principio di sovrapposizione degli effetti**: evoluzione complessiva in risposta a una somma di cause $=$ somma delle evoluzioni in risposta alle singole cause (dimostrazione analoga al caso TD)
- Per calcolare la soluzione $x(t)$ devo calcolare l'esponenziale di matrice e^{At}
  - In casi particolari: possiamo sfruttare la definizione (esempio A diagonale o diagonalizzabile)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

  - In generale: **trasformata di Laplace**
- Calcolo di e^{At} serve per capire quali tipi di traiettorie (modi di evoluzione) il sistema può generare (**analisi modale**)

Esponenziale di matrice: caso di A diagonale

- Considero il caso di A **diagonale**

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & a_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ applicando la definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

Esponenziale di matrice: caso di A diagonalizzabile

- Consideriamo adesso il caso di A **diagonalizzabile**

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

  - T matrice **invertibile** di cambiamento di base
  - Λ matrice **diagonale** degli autovalori di A

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalori di A

- Per una generica potenza di A

$$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = \underbrace{T\Lambda T^{-1} T\Lambda T^{-1} \cdots T\Lambda T^{-1}}_{k \text{ volte}} = T\Lambda^k T^{-1}$$

Esponenziale di matrice: caso di A diagonalizzabile

- Sfruttando la proprietà

$$A^k = T\Lambda^k T^{-1}$$

  e la definizione di esponenziale di matrice

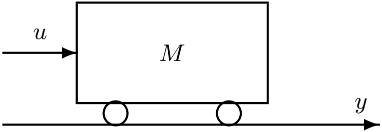
$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T\Lambda^k T^{-1} t^k}{k!} = T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right) T^{-1} = T\, e^{\Lambda t}\, T^{-1}$$

- Poiché Λ diagonale allora

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

Esempio: sistema meccanico

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} x(t) \end{aligned}$$

Esempio: sistema meccanico

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Diagonalizzando

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}}$$

con $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$

- Applicando la formula poiché $e^{\lambda_1 t} = 1$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

$$\begin{aligned} e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \quad &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

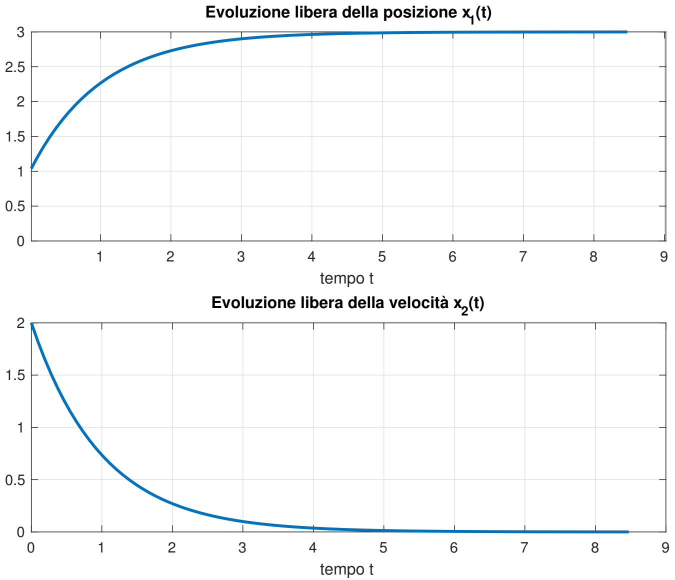
Esempio: sistema meccanico

- Data l'esponenziale di matrice possiamo calcolare$x_\ell(t) = e^{At}x(0)$
- Per il carrello
  - $x_1(t) = y(t)$ posizione
  - $x_2(t) = \dot{y}(t)$ velocità
- evoluzione libera dello stato

$$
\begin{aligned}
x_\ell(t) &= e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1(0) + (1-e^{-t})\, x_2(0) \\ e^{-t}\, x_2(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

con $x_1(0) = y(0)$ posizione iniziale e $x_2(0) = \dot{y}(0)$ velocità iniziale

Esempio: sistema meccanico



Esponenziale di matrice: caso di A diagonalizzabile

A **diagonalizzabile** $\Rightarrow$ elementi di e^{At} sono combinazione lineare delle **funzioni esponenziali**

$$e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalori di A

- la combinazione lineare dipende da pre-moltiplicazione per T e post-moltiplicazione per T^{-1}
- le funzioni esponenziali $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ sono dette **modi naturali** del sistema

Nota:

- trovare la matrice T che diagonalizza non è sempre immediato
- non tutte le matrici A sono diagonalizzabili

$\Rightarrow$ in alternativa posso cacolare e^{At} utilizzando la **trasformata di Laplace**

2.2 Trasformata di Laplace

Segnali causali

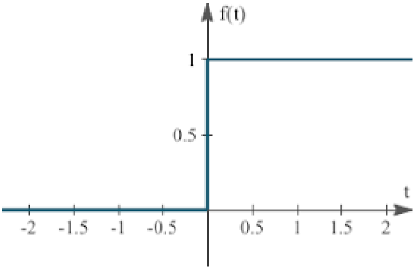
Definizione: un segnale $f(t)$ si dice **causale** se

$$f(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

- Per sistemi causali con istante iniziali $t_0 = 0$ mi interessa la risposta per $t \geq 0$ $\Rightarrow$ posso considerare solo segnali causali

- esempio di segnale causale: **gradino unitario**

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



Trasformata di Laplace

Definizione: Dato un segnale $f(t)$ causale, la sua **trasformata di Laplace** è

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

con $s = \sigma + j\omega$ variabile complessa

- **Notazione:** usiamo la lettera maiuscola per indicare la trasformata di Laplace di un segnale
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
- Per $\sigma = 0$ e quindi $s = j\omega$ si ritrova la **trasformata di Fourier**
$$F(s)|_{s=j\omega} = \int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\Rightarrow$ trasformata di Laplace $=$ **estensione** a tutto il piano complesso della trasformata di Fourier

Esempio: trasformata del gradino unitario

- Considero il gradino unitario

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ applicando la definizione

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

Nota: la trasformata esiste per tutti e soli i valori di s per cui l'integrale improprio **converge**

- Nel caso del gradino, l'integrale improprio converge quando

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}| = 0$$

- Notiamo che

$$\begin{aligned} \left|e^{-st}\right| = \left|e^{-\sigma t - j\omega t}\right| = \left|e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\right| \quad &= \quad \left|e^{-\sigma t}[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]\right| \\ &= \quad e^{-\sigma t}\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = e^{-\sigma t} \end{aligned}$$

Esempio: trasformata del gradino unitario

- l'integrale improprio converge quando

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}| = \lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma > 0$$

$\Rightarrow$ la trasformata del gradino è ben definita per tutti gli s tali che

$$\sigma = \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > 0$$

- La condizione $\mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > 0$ definisce la **regione di convergenza** della trasformata del gradino nel piano complesso (piano s)
- Per tali s vale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt &= -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^\infty \\ &= -\left(\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s} - \left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{t=0}\right) = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Regione di convergenza

Nota: in generale, la trasformata di Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

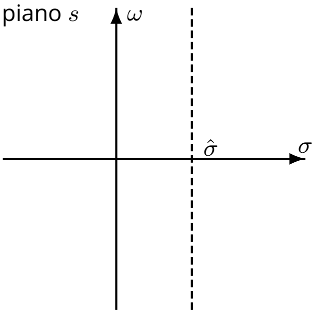
esiste per tutti e soli i valori di s per cui l'integrale improprio **converge**

- Di solito **regione di convergenza** del tipo

  $$\{s : \mathrm{Re}\{s\} > \hat{\sigma}\}$$

  con $\hat{\sigma}$ **ascissa di convergenza**
- Nel caso del gradino $\hat{\sigma} = 0$
- Nel seguito non indicheremo la regione di convergenza e scriveremo semplicemente

  $$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$



Proprietà della trasformata di Laplace

1. **Linearità:** per ogni coppia di segnali causali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e ogni coppia di costanti α_1 e α_2

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

Dimostrazione: dalla definizione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]\, e^{-st} dt = \\
&= \alpha_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \alpha_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\
&= \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)
\end{aligned}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

2. **traslazione in frequenza:** per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda\, t} f(t)\} = F(s-\lambda)$$

Dimostrazione: dalla definizione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{\lambda\, t} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{\lambda\, t} f(t)\, e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(s-\lambda)t} dt \\
&= \mathcal{L}\{f(t)\}\Big|_{s=s-\lambda} \\
&= F(s-\lambda)
\end{aligned}$$

Esempio: trasformata dell'esponenziale

- Considero l'esponenziale causale

$$f(t) = e^{at}1(t)$$

- Applicando la proprietà 2

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^{at}\,1(t)\right\} &= \mathcal{L}\{1(t)\}\Big|_{s=s-a} \\ &= \frac{1}{s}\Big|_{s=s-a} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

Nota: moltiplicare per il gradino $1(t)$ rende il segnale causale perché $f(t) = 0$ per $t < 0$

Esempio: trasformata della sinusoide

- Considero la sinusoide causale

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$$

- Ricordiamo la formula di Eulero

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

- Applicando le proprietà 1 e 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sin(\omega_0 t)\, 1(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\, 1(t)\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\, 1(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}\, 1(t)\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\,\frac{s + j\omega_0 - (s - j\omega_0)}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}
\end{aligned}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

3. **Derivata in frequenza**:

$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

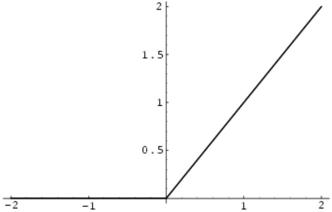
Dimostrazione: dalla definizione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\, f(t)\} &= \int_0^\infty t f(t)\, e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{d}{ds} e^{-st} \right) dt \\
&= -\frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} F(s)
\end{aligned}$$

Esempio: trasformata della rampa

- Considero il segnale a **rampa unitaria**

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



- Applicando la proprietà 3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cdot 1(t)\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{1(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

- Considero il segnale a **rampa parabolica**

$$t^2 \cdot 1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

- Applicando la proprietà 3

$$\mathcal{L}\{t^2\, 1(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t \cdot 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t \cdot 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

Esempio: trasformata dell'esponenziale per monomio

- Considero un segnale del tipo

$$f(t) = \frac{t^\ell}{\ell!}\, e^{at}\, 1(t)$$

- Per $\ell = 0$ abbiamo l'esponenziale

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}1(t)\right\} = \frac{1}{s-a}$$

- Per $\ell > 0$

$$\ell = 1 \qquad \mathcal{L}\left\{t \cdot e^{at}\, 1(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{e^{at}\, 1(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\ell = 2 \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\, e^{at}\, 1(t)\right\} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{t \cdot e^{at}\, 1(t)\right\} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-a)^2}\right) = \frac{1}{(s-a)^3}$$

$$\vdots$$

- In generale (dimostrazione per induzione su dispense)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\ell}{\ell!}\, e^{at} 1(t)\right\} = \frac{1}{(s-a)^{\ell+1}}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

4. **Derivata nel tempo**:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Dimostrazione: Notiamo preliminarmente che

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = -f(0)$$

Notiamo anche che

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-st}\right)dt &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(f(t)\right)e^{-st}dt + \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right)dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s)\end{aligned}$$

Eguagliando i due risultati

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} - sF(s) = -f(0)$$

Proprietà della trasformata di Laplace

5. **Integrazione nel tempo**:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

- Dati due segnali causali $f(t)$ e $g(t)$ definiamo la loro convoluzione

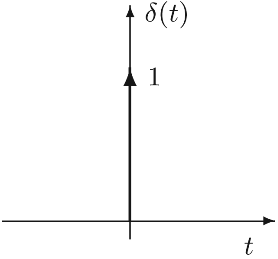
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

6. **Convoluzione nel tempo**:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)\,G(s)$$

Esempio: trasformata dell'impulso di Dirac

- Considero il segnale **impulso di Dirac**
$$\delta(t) = 0 \text{ per } t \neq 0$$
con la proprietà
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



- $\delta(t)$ zero quasi ovunque $\Rightarrow$ tutta l'area è concentrata in $t = 0$
- Per ogni segnale $f(t)$ vale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$
- Dalla definizione di trasformata di Laplace
$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

Trasformate di Laplace dei segnali elementari

SEGNALE	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$1(t)$	$1/s$
Rampa unitaria	$t \cdot 1(t)$	$1/s^2$
Rampa parabolica unitaria	$(t^2/2)1(t)$	$1/s^3$
Esponenziale	$e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)$
Sinusoide	$\sin(\omega_0 t)\ 1(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$
Cosinusoide	$\cos(\omega_0 t)\ 1(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$
Esponenziale×monomio	$(t^\ell/\ell!)\ e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)^{\ell+1}$

Proprietà della trasformata di Laplace

1. **Linearità**:
$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$
2. **Traslazione in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{e^{\lambda\, t} f(t)\} = F(s-\lambda)$$
3. **Derivata in frequenza**:
$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$
4. **Derivata nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$
5. **Integrazione nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$
6. **Convoluzione nel tempo**:
$$\mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\} = F(s)G(s)$$

Considerazioni finali sulla trasformata di Laplace

- **Interpretazione simbolica** (dalle proprietà 4 e 5):
  - variabile di Laplace $s =$ operatore di derivazione nel tempo
  - variabile di Laplace inversa $1/s =$ operatore di integrazione nel tempo
- Sfruttando la proprietà 4:

  equazioni differenziali nel tempo = **equazioni algebriche nel dominio di Laplace**

  $\Rightarrow$ metodo operativo per la soluzione di equazioni differenziali
- Traformate dei segnali elementari $=$ **funzioni razionali**

  $\Rightarrow$ metodo operativo per il calcolo dell'antitrasformata

Esercizi proposti

1. Calcolare la trasformata di Laplace della cosinusoide causale

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$$

ricordando che

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = 2(1 - e^{-3t})\, 1(t)$$

3. Calcolare la trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = [2\sin(3t) + 4\cos(3t)]\, 1(t)$$

4. Calcolare la trasformata di Laplace del segnale (suggerimento: usare la proprietà 2)

$$f(t) = e^{-2t} \sin(t)\, 1(t)$$

2.3 Risposta libera e risposta forzata nel dominio di Laplace

Risposta libera e risposta forzata nel dominio di Laplace

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

- Definiamo

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \qquad \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) \qquad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

- Applicando le proprietà 1 e 4 della trasformata di Laplace

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} & = & \mathcal{L}\{Ax(t) + Bu(t)\} \\ & \Downarrow & \\ sX(s) - x(0) & = & AX(s) + BU(s) \end{array}$$

- **Equazione differenziale** $\longleftrightarrow$ **equazione algebrica**

Risposta libera e risposta forzata nel dominio di Laplace

- Risolvendo l'equazione algebrica

$$
\begin{aligned}
sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\
&\Downarrow \\
(sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\
&\Downarrow \\
X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1} x_0}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1} BU(s)}_{X_f(s)} \\
Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1} x_0}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)}_{Y_f(s)}
\end{aligned}
$$

- Anche nel dominio di Laplace: 'evoluzione/risposta complessiva $=$ evoluzione/risposta **libera** $+$ evoluzione/risposta **forzata**

$$
\begin{aligned}
X(s) &= X_\ell(s) + X_f(s) \\
Y(s) &= Y_\ell(s) + Y_f(s)
\end{aligned}
$$

Relazione tra dominio del tempo e di Laplace

	Tempo	**Laplace**
Evoluzione libera nello stato $x_\ell(t)$	$e^{At}\,x(0)$	$(sI-A)^{-1}\,x(0)$
Evoluzione forzata nello stato $x_f(t)$	$\displaystyle\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$
Risposta libera $y_\ell(t)$	$C\,e^{At}\,x(0)$	$C(sI-A)^{-1}\,x(0)$
Risposta forzata $y_f(t)$	$C\displaystyle\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau + Du(t)$	$\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s)$

- Esponenziale di matrice $e^{At} \longleftrightarrow$ inversa $(sI-A)^{-1}$
- Integrale di convoluzione $\longleftrightarrow$ prodotto $(sI-A)^{-1}BU(s)$

Calcolo dell'esponenziale di matrice

- Per la funzione esponenziale vale

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$$

- Per l'esponenziale di matrice vale

$$\mathcal{L}\left\{e^{At}\right\} = (sI - A)^{-1}$$

Per calcolare l'esponenziale di matrice e^{At}

1. Si calcola l'inversa $(sI - A)^{-1}$
2. Si calcola l'**antitrasformata di Laplace**

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Inversa di una matrice

- Matrice M quadrata invertibile $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$
- L'inversa soddisfa l'identità $MM^{-1} = M^{-1}M = I$
- Data M, l'inversa si calcola come

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\mathrm{Adj}(M)$$

con $\mathrm{Adj}(M)$ matrice **aggiogata** di M

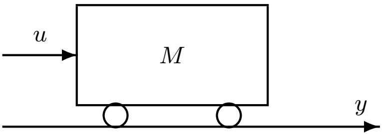
- Nel caso di una matrice 2×2

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Adj}(M) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \det(M) = ad - bc$$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Esempio: sistema meccanico

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \, x(t) \end{aligned}$$

Esempio: sistema meccanico

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \quad sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Applicando la formula per il calcolo dell'inversa

$$
\begin{aligned}
\det(sI - A) &= s(s+1) \qquad \mathrm{Adj}(sI - A) \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\
(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\det(sI - A)} \mathrm{Adj}(sI - A) \\
&= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Esempio: sistema meccanico

- Applichiamo l'operatore antitrasformata di Laplace

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \end{bmatrix}$$

- Dalla tabella delle trasformate elementari

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}\,1(t)$$

- Per il termine rimanente, scomponendo in fratti semplici

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1(t) - e^{-t}\,1(t)$$

- Nel complesso per $t \geq 0$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Proprietà dell'inversa

- In generale
$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A)$$
  - $\varphi(s) = \det(sI - A)$ **polinomio caratteristico** della matrice A
  - $\mathrm{Adj}(sI - A)$ matrice aggiogata
- $\varphi(s)$ polinomio di grado n
- $\mathrm{Adj}(sI - A)$ matrice $n \times n$ di polinomi di grado $< n$

Fatto 2.3 Gli elementi della matrice $(sI - A)^{-1}$ sono **funzioni razionali strettamente proprie**, ossia tali che

$$\text{grado numeratore} < \text{grado denominatore}$$