Fondamenti di Automatica

Giorgio Battistelli

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Firenze

2 Analisi dei sistemi dinamici

2.4 Antitrasformata di Laplace

Antitrasformata di Laplace

- Dato una funzione $F(s)$ nel dominio di Laplace, possiamo determinare il corrispondente nel tempo mediante l'**antitrasformata di Laplace**

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - jT}^{\gamma + jT} F(s) e^{sT} ds$$

- L'applicazione della formula non è pratica (integrale nel piano complesso)

Idea: Per calcolare l'antitrasformata

1. Si scompone $F(s)$ in una combinazione lineare di **funzioni elementari**
2. Si utilizza la **tabella delle trasformate** per antitrasformare ciascun termine elementare

Nota: l'idea può essere applicata quando $F(s)$ è una funzione razionale

Trasformate di Laplace dei segnali elementari

SEGNALE	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$1(t)$	$1/s$
Rampa unitaria	$t \cdot 1(t)$	$1/s^2$
Rampa parabolica unitaria	$(t^2/2)1(t)$	$1/s^3$
Esponenziale	$e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)$
Sinusoide	$\sin(\omega_0 t)\ 1(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$
Cosinusoide	$\cos(\omega_0 t)\ 1(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$
Esponenziale$\times$monomio	$(t^\ell/\ell!)\ e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)^{\ell+1}$

Esempio introduttivo

- Consideriamo la funzione razionale

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

- Scomponendo in fratti semplici

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-1}$$

- Per la linearità

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right\} &= K_1\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + K_2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \\ &= K_1\,e^{-t}\,1(t) + K_2\,e^{t}\,1(t) \end{aligned}$$

Esempio introduttivo

- Per calcolare le costanti K_1 e K_2

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s-1} \\ &= \frac{K_1(s-1) + K_2(s+1)}{s^2-1} = \frac{(K_1+K_2)s + K_2 - K_1}{s^2-1} \end{aligned}$$

- Eguagliando i numeratori

$$\left\{ \begin{array}{rcl} K_1 + K_2 &=& 0 \\ K_2 - K_1 &=& 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} K_1 &=& -K_2 \\ K_2 + K_2 &=& 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} K_1 &=& -1/2 \\ K_2 &=& 1/2 \end{array} \right.$$

- Complessivamente

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\right\} &= -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\,e^{-t}\,1(t) + \frac{1}{2}\,e^{t}\,1(t) \end{aligned}$$

Funzioni razionali

- Consideriamo una **funzione razionale**

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- $F(s)$ si dice **strettamente propria** se $b_n = 0$
- $F(s)$ si dice **semplicemente propria** se $b_n \neq 0$

Ipotesi: $b(s)$ e $a(s)$ sono **coprimi**, ossia non hanno radici comuni

- le radici di $a(s)$ sono dette **poli** di $F(s)$

$$p_i \ \text{ polo di } \ F(s) \ \Leftrightarrow \ a(p_i) = 0$$

- le radici di $b(s)$ sono dette **zeri** di $F(s)$

$$z_i \ \text{ zero di } \ F(s) \ \Leftrightarrow \ b(z_i) = 0$$

Teorema dei residui - caso di poli distinti

- Siano $p_1, \ldots, p_n$ i poli di $F(s)$ (radici di $a(s)$)
- Supponiamo preliminarmente che i poli siano **distinti**

$$p_i \neq p_j \text{ per } i \neq j$$

e scriviamo

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

Fatto 2.4 Si consideri una funzione razionale **strettamente propria con poli distinti**. Allora $F(s)$ può sempre essere scritta come:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

dove K_i è detto **residuo** associato al polo p_i e si calcola come

$$K_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s)$$

Teorema dei residui: cenno di dimostrazione

- Supponiamo che

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

- Considerando il seguente limite

$$\begin{aligned} \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s) &= \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \sum_{\ell=1}^{n} \frac{K_\ell}{s - p_\ell} \\ &= \lim_{s \to p_i} \left[K_i + \sum_{\ell \neq i} K_\ell \frac{(s - p_i)}{s - p_\ell} \right] = K_i \end{aligned}$$

  dove l'ultima eguaglianza vale perché $p_i \neq p_\ell$ se $i \neq \ell$

- Poiché questo vale per ogni p_i, con $i = 1, \ldots, n$ ottengo n condizioni che definiscono in modo univoco $F(s)$

Teorema dei residui e antitrasformata di Laplace

- Consideriamo il segnale

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

- Dalla scomposizione in fratti semplici

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

e dalla linearità dell'antitrasformata di Laplace, abbiamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_i \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}\, 1(t) \end{aligned}$$

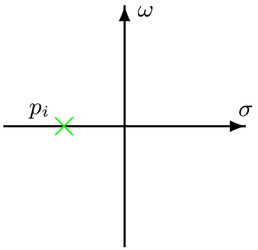
Definizione: i segnali $e^{p_1 t}\, 1(t), \ldots, e^{p_n t}\, 1(t)$ sono detti **modi** della funzione $F(s)$

Polo reale $p_i < 0$

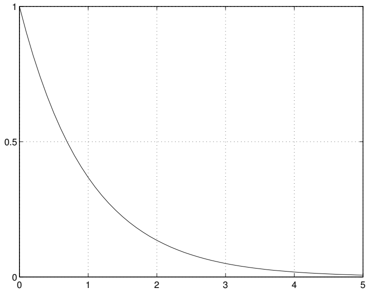
- **polo reale** $p_i < 0 \Rightarrow$ modo corrispondente

$$e^{p_i t}\, 1(t)$$

esponenziale **convergente** a 0



Posizione del polo nel piano s



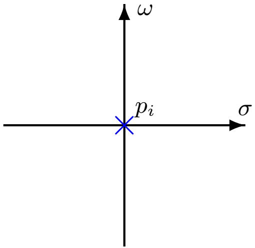
Evoluzione del modo nel tempo

Polo reale $p_i = 0$

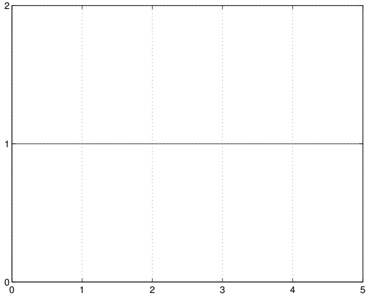
- **polo reale** $p_i = 0 \Rightarrow$ modo corrispondente

$$e^{p_i t}\, 1(t) = 1(t)$$

gradino unitario



Posizione del polo nel piano s



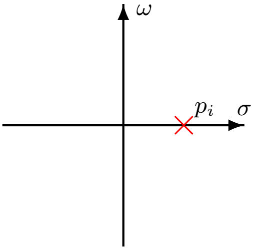
Evoluzione del modo nel tempo

Polo reale $p_i > 0$

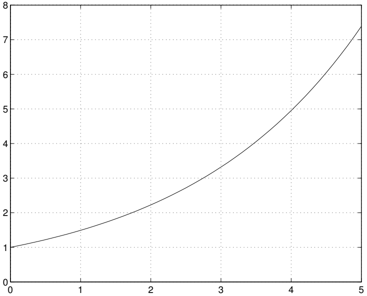
- **polo reale** $p_i > 0 \Rightarrow$ modo corrispondente

$$e^{p_i t}\, 1(t)$$

esponenziale **divergente**



Posizione del polo nel piano s



Evoluzione del modo nel tempo

Poli complessi

- Consideriamo un **polo complesso**

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i$$

  con $\omega_i \neq 0$

- Se p_i polo con residuo $K_i = \alpha_i + j\beta_i$
  $\Rightarrow$ il **complesso coniugato**

$$\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

  è polo con residuo $\overline{K}_i = \alpha_i - j\beta_i$

- Nella scomposizione in fratti semplici ho due termini del tipo

$$\frac{K_i}{s - p_i} + \frac{\overline{K}_i}{s - \overline{p}_i}$$

- Antitrasformando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_i}{s - p_i} + \frac{\overline{K}_i}{s - \overline{p}_i}\right\} = \left(K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t}\right) 1(t)$$

Poli complessi

Nota: Le due esponenziali complesse

$$\begin{aligned} e^{p_i t} &= e^{\sigma_i t + j\omega_i t} = e^{\sigma_i t}\left[\cos(\omega_i t) + j\sin(\omega_i t)\right] \\ e^{\overline{p}_i t} &= e^{\sigma_i t - j\omega_i t} = e^{\sigma_i t}\left[\cos(\omega_i t) - j\sin(\omega_i t)\right] \end{aligned}$$

si combinano in modo che la parte immaginaria si annulli

- Dato il segnale

$$\left(K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t}\right) 1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_i}{s - p_i} + \frac{\overline{K}_i}{s - \overline{p}_i}\right\}$$

con

$$K_i = \alpha_i + j\beta_i \qquad \overline{K}_i = \alpha_i - j\beta_i$$

vale

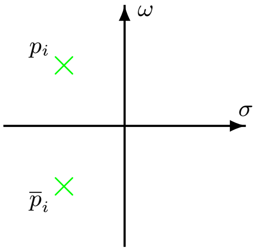
$$\left(K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t}\right) 1(t) = \left[2\,\alpha_i e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t) - 2\,\beta_i e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t)\right] 1(t)$$

Poli complessi coniugati con $\sigma_i < 0$

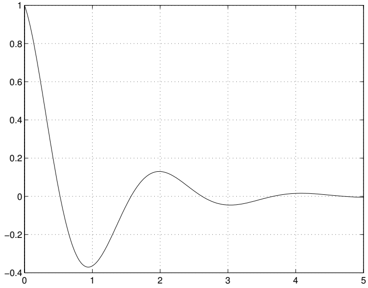
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i < 0$
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

esponenziali oscillanti **convergente** a 0



Posizione dei poli nel piano s



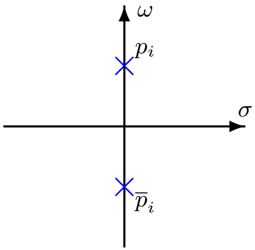
Evoluzione del modo nel tempo

Poli complessi coniugati con $\sigma_i = 0$

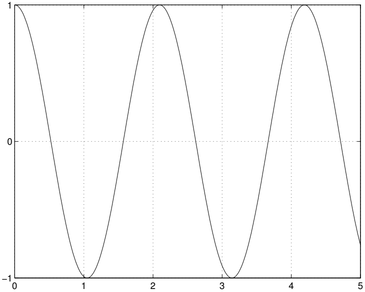
- **poli immaginari** $p_i = j\omega_i$, $\overline{p}_i = -j\omega_i$ con $\sigma_i = 0$
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)\,1(t)\ ,\ \cos(\omega_i t)\,1(t)$$

oscillanti limitati



Posizione dei poli nel piano s



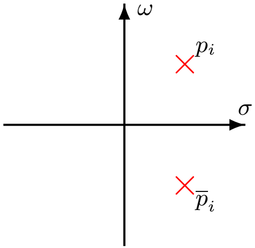
Evoluzione del modo nel tempo

Poli complessi coniugati con $\sigma_i > 0$

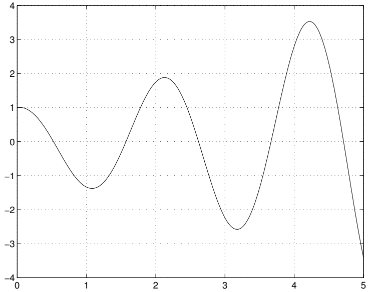
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i > 0$
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

esponenziali **oscillanti divergenti**

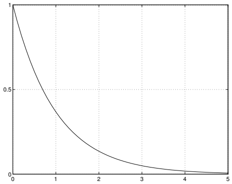
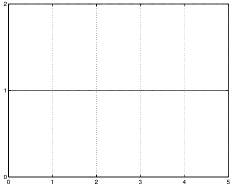
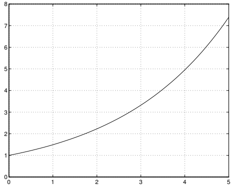
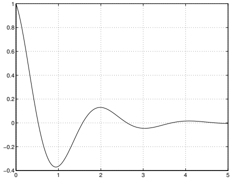
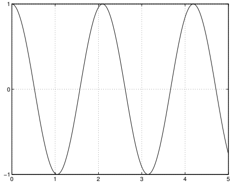
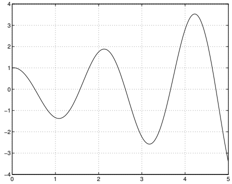


Posizione dei poli nel piano s



Evoluzione del modo nel tempo

Evoluzione dei modi $e^{p_i t}\,1(t)$

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\omega_i = 0$			
$\omega_i \neq 0$			

Classificazione dei modi $e^{p_i t}\, 1(t)$

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\omega = 0$	convergente non oscillante	limitato non oscillante	divergente non oscillante
$\omega_i \neq 0$	convergente oscillante	limitato oscillante	divergente oscillante

- **Parte reale** $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\}$ determina la **convergenza/divergenza**
- **Parte immaginaria** $\omega_i = \mathrm{Im}\{p_i\}$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è sufficiente guardare la **posizione dei poli** nel piano s (non è necessario calcolare i residui)

Esempio di applicazione del Teorema dei residui

- Consideriamo la funzione razionale

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 - s} = \frac{s+1}{s(s-1)}$$

- i poli sono $p_1 = 0$ e $p_2 = 1$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-1}$$

- Applicando il teorema dei residui

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s \to p_1} (s-p_1)F(s) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s+1}{s-1} = -1 \\ K_2 &= \lim_{s \to p_2} (s-p_2)F(s) = \lim_{s \to 1} (s-1)F(s) = \lim_{s \to 1} \frac{s+1}{s} = 2 \end{aligned}$$

- Antitrasformando

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_1 e^{p_1 t} 1(t) + K_2 e^{p_2 t} 1(t) = -1(t) + 2e^t 1(t)$$

un modo limitato non oscillante $1(t)$ e un modo divergente non oscillante $e^t 1(t)$

Esercizi proposti

Determinare l'antitrasformata delle seguenti funzioni razionali e classificarne i modi:

1. $F(s) = \dfrac{5-s}{2s^2-50}$
2. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$
3. $F(s) = \dfrac{2}{s^3+4s}$
4. $F(s) = \dfrac{5s+2}{s^2+1}$

Nota: Nel caso di poli complessi coniugati, ricordare il risultato di pagina 16

Funzioni razionali con poli multipli

- Consideriamo una funzione razionale

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

  con $a(s)$ e $b(s)$ coprimi (senza fattori comuni)

- un polo p_i ha **molteplicità** m_i se possiamo scrivere $a(s) = \widetilde{a}(s)(s - p_i)^{m_i}$ con $\widetilde{a}(p_i) \neq 0$

- Dati i poli

$$p_1, \ldots, p_k$$

  con le loro molteplicità

$$m_1, \ldots, m_k$$

  allora possiamo scrivere

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s - p_1)^{m_1} \cdots (s - p_k)^{m_k}} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s - p_i)^{m_i}}$$

- Per il teorema fondamentale dell'algebra $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

Esempio introduttivo

- Consideriamo la funzione razionale

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2}$$

- $F(s)$ ha un polo $p_1 = 0$ con molteplicità $m_1 = 2$
- Possiamo scomporre $F(s)$ come

$$F(s) = \frac{3s}{s^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}$$

- Per la linearità

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &= 3 \cdot 1(t) + t \cdot 1(t) \end{aligned}$$

Teorema dei residui - caso generale

- Siano $p_1, \ldots, p_k$ i poli di $F(s)$ (radici di $a(s)$) con le loro molteplicità $m_1, \ldots, m_k$ e scriviamo

$$F(s) = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s - p_i)^{m_i}}$$

Fatto 2.5 Si consideri una funzione razionale **strettamente propria**. Allora $F(s)$ ammette un'espansione in fratti nella forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{K_{i1}}{s-p_i} + \frac{K_{i2}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{K_{im_i}}{(s-p_i)^{m_i}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i}\frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}} \end{aligned}$$

dove $K_{i\ell}$ è detto **residuo di ordine** ℓ associato al polo p_i e si calcola come

$$K_{i\ell} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(m_i - \ell)!} \frac{d^{(m_i-\ell)}}{ds^{m_i-\ell}} \left[(s-p_i)^{m_i} F(s)\right]$$

Teorema dei residui e antitrasformata di Laplace

- Consideriamo il segnale
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$
- Dalla scomposizione in fratti semplici, nel caso generale
$$F(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}$$
e dalla linearità dell'antitrasformata di Laplace, abbiamo
$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^\ell}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} K_{i\ell}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_i)^\ell}\right\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!}\, t^{\ell-1}\, e^{p_i t}\, 1(t) \end{aligned}$$

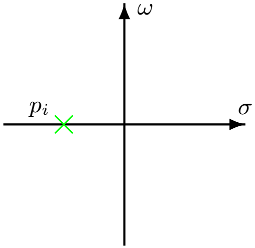
A un polo p_i di molteplicità m_i sono associati i **modi**
$$e^{p_i t}\,1(t),\; t\,e^{p_i t}\,1(t),\; \ldots,\; t^{m_i-1}\,e^{p_i t}\,1(t)$$

Polo reale $p_i < 0$

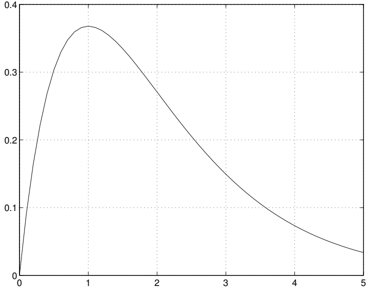
- **polo reale** $p_i < 0$ con molteplicità $m_i \Rightarrow$ modi corrispondenti

$$e^{p_i t}\,1(t),\ te^{p_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}e^{p_i t}\,1(t)$$

- L'esponenziale $e^{p_i t}$ domina sulla potenza t^ℓ
$\Rightarrow$ sono tutti modi **convergenti** a 0



Posizione del polo nel piano s



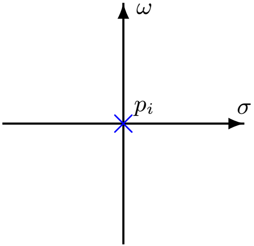
Evoluzione del modo $t\,e^{p_i t}\,1(t)$

Polo reale $p_i = 0$

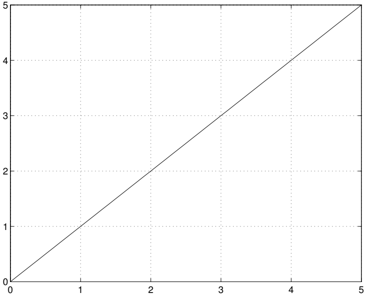
- **polo reale** $p_i = 0$ con molteplicità $m_i \Rightarrow$ modi corrispondenti

$$1(t),\ t \cdot 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i - 1}\, 1(t)$$

- Modo $t^\ell\, 1(t)$
  - **limitato** per $\ell = 0$
  - **divergente** per $\ell > 0$



Posizione del polo nel piano s



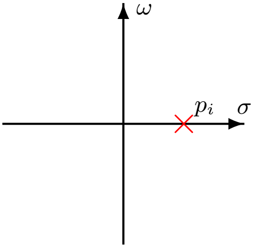
Evoluzione del modo $t \cdot 1(t)$

Polo reale $p_i > 0$

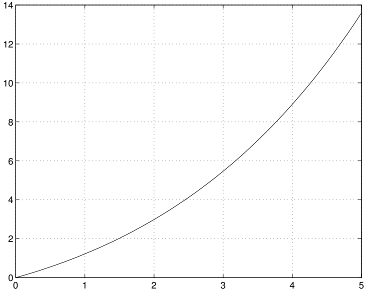
- **polo reale** $p_i > 0$ con molteplicità $m_i \Rightarrow$ modi corrispondenti

$$e^{p_i t}\, 1(t),\ t e^{p_i t}\, 1(t),\ \ldots,\ t^{m_i - 1} e^{p_i t}\, 1(t)$$

- Sono tutti modi **divergenti**



Posizione del polo nel piano s



Evoluzione del modo $t\, e^{p_i t}\, 1(t)$

Poli complessi

- Consideriamo un **polo complesso**

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i$$

  con **molteplicità** m_i

- Allora anche il suo complesso coniugato

$$\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

  è polo con la **stessa molteplicità** m_i

- Modi complessi associati alla coppia di poli complessi

$$\begin{array}{l} e^{p_i t}\,1(t),\ t\,e^{p_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\,e^{p_i t}\,1(t) \\ e^{\overline{p}_i t}\,1(t),\ t\,e^{\overline{p}_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\,e^{\overline{p}_i t}\,1(t) \end{array}$$

- Tali modi complessi si combinano in modo da ottenere i **modi reali**

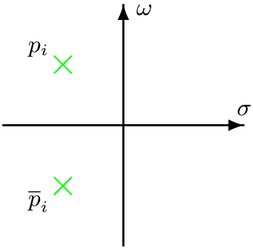
$$\begin{array}{l} \sin(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t),\ t\,\sin(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\,\sin(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t) \\ \cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t),\ t\,\cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t),\ \ldots,\ t^{m_i-1}\,\cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t) \end{array}$$

Poli complessi coniugati con $\sigma_i < 0$

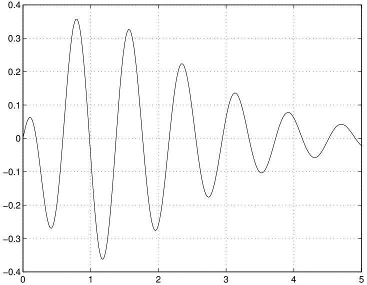
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i < 0$ e molteplicità $m_i \quad \Rightarrow \quad$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ t\ \sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ldots,\ t^{m_i-1}\ \sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$
$$\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ t\ \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ldots,\ t^{m_i-1}\ \cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

- L'esponenziale $e^{\sigma_i t}$ domina sulla potenza t^ℓ
  $\Rightarrow$ sono tutti modi oscillanti **convergenti** a 0



Posizione dei poli nel piano s



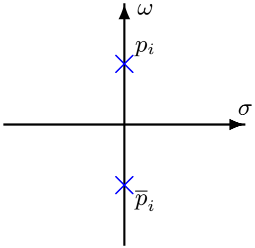
Evoluzione del modo
$t\ \cos(\omega_i t)\ e^{\sigma_i t}\ 1(t)$

Poli complessi coniugati con $\sigma_i = 0$

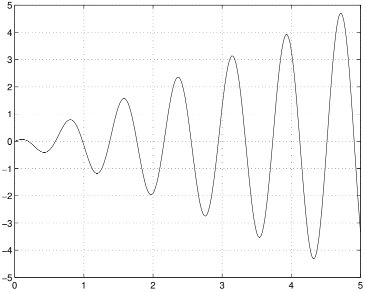
- **poli immaginari** $p_i = j\omega_i$, $\overline{p}_i = -j\omega_i$ con $\sigma_i = 0$ e molteplicità m_i
  $\Rightarrow$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)\,1(t)\ ,\ t\ \sin(\omega_i t)\,1(t)\ ,\dots,\ t^{m_i-1}\ \sin(\omega_i t)\,1(t)$$
$$\cos(\omega_i t)\,1(t)\ ,\ t\ \cos(\omega_i t)\,1(t)\ ,\dots,\ t^{m_i-1}\ \cos(\omega_i t)\,1(t)$$

- Modi $t^\ell\ \sin\omega_i\, t\, 1(t)$, $t^\ell\ \cos\omega_i\, t\, 1(t)$
  - **limitati** per $\ell = 0$
  - **divergenti** per $\ell > 0$



Posizione dei poli nel piano s



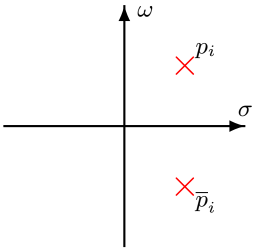
Evoluzione del modo
$t\ \cos(\omega_i t)\,1(t)$

Poli complessi coniugati con $\sigma_i > 0$

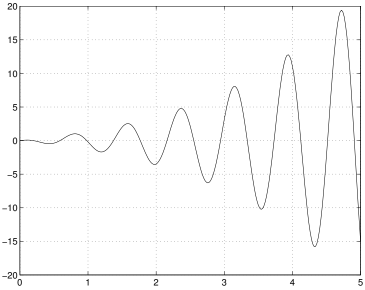
- **poli complessi coniugati** $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\overline{p}_i = \sigma_i - j\omega_i$ con $\sigma_i > 0$ e molteplicità $m_i \quad \Rightarrow \quad$ modi corrispondenti

$$\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ t\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\dots,\ t^{m_i-1}\,\sin(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$
$$\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\ t\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)\ ,\dots,\ t^{m_i-1}\,\cos(\omega_i t)e^{\sigma_i t}\,1(t)$$

- Sono tutti modi oscillanti **divergenti**

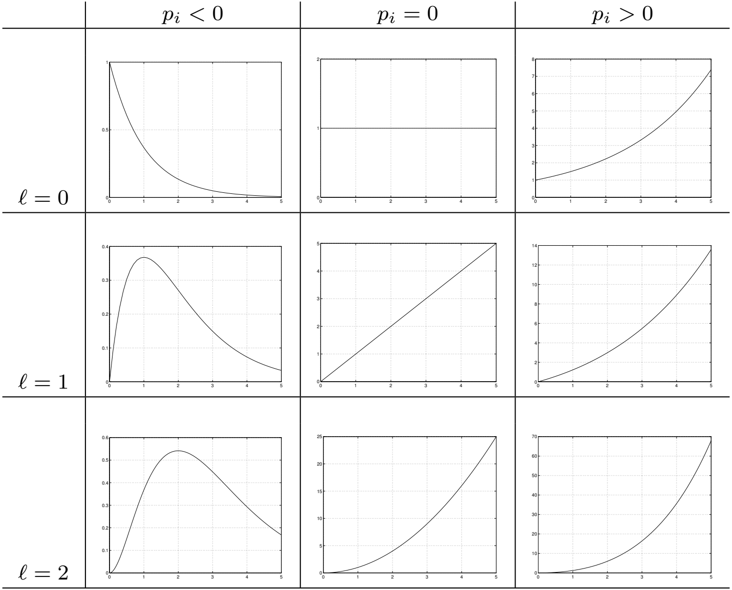


Posizione dei poli nel piano s

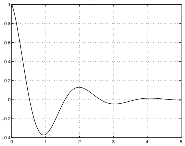
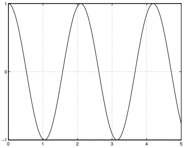
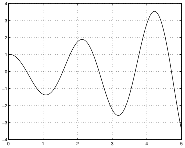
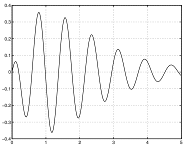
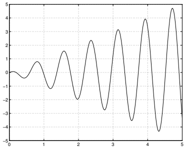
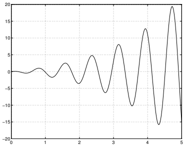
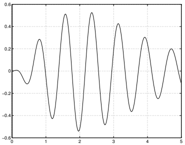
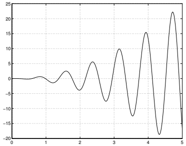
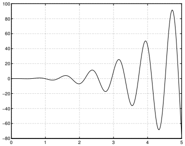


Evoluzione del modo $t\,\cos(\omega_i t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t)$

Evoluzione dei modi $t^\ell e^{p_i t} 1(t)$ con p_i reale



Evoluzione dei modi $t^{\ell}\,\cos(\omega_i\,t)\,e^{\sigma_i t}\,1(t)$

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\ell = 0$			
$\ell = 1$			
$\ell = 2$			

Classificazione dei modi $t^\ell\, e^{p_i t}\, 1(t)$

	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

- **Parte reale** $\sigma_i = \mathrm{Re}\{p_i\}$ e **molteplicità** m_i (nel caso $\sigma_i = 0$) determinano la **convergenza/divergenza**
- **Parte immaginaria** $\omega_i = \mathrm{Im}\{p_i\}$ determina la presenza o meno di **oscillazioni**

Nota: Per conoscere l'andamento qualitativo di $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è sufficiente guardare la **posizione dei poli** nel piano s e la loro **molteplicità**

Relazione tra posizione dei poli e evoluzione nel tempo

Teorema 2.1

a) $f(t)$ è **convergente**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$ se e solo se tutti i modi di $F(s)$ sono convergenti
$\Leftrightarrow$ tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale < 0

b) $f(t)$ è **limitata**

$$\exists M \text{ tale che } |f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ tutti i modi di $F(s)$ sono limitati
$\Leftrightarrow$ tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale ≤ 0 **AND** quelli con parte reale $= 0$ hanno molteplicità 1

c) $f(t)$ è **divergente**

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)| = \infty$$

$\Leftrightarrow$ esiste almeno un modo di $F(s)$ divergente
$\Leftrightarrow$ $F(s)$ ha almeno un polo con parte reale > 0 **OR** almeno un polo con parte reale $= 0$ e molteplicità > 1

Teorema del valore finale

Nota: nel caso di $f(t)$ limitata (caso b), il limite per $t \to \infty$ **non** esiste sempre!

- Il limite non esiste quando ci sono modi oscillanti persistenti associati a poli $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ con $\sigma_i \geq 0$ e $\omega_i \neq 0$
- Se non ci sono modi oscillanti persistenti vale il **teorema del valore finale**

Fatto 2.6 (Teorema del valore finale) Se tutti i poli di $F(s)$ hanno parte reale < 0 tranne al più un polo in 0 con molteplicità 1, allora vale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = K$$

con

$$K = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Teorema del valore finale: dimostrazione

- Nelle ipotesi fatte, la scomposizione in fratti semplici della $F(s)$ assume la forma

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \sum_{i=2}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{\ell}}$$

con K_1 **residuo** del polo in 0

$$K_1 = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

- **Nota:** se il polo in 0 non è presente allora la scomposizione vale ancora con $K_1 = 0$

- Di conseguenza

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_1\, 1(t) + \sum_{i=2}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!}\, t^{\ell-1}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

- Tutti i modi della sommatoria sono **convergenti** perché associati a poli con parte reale < 0

- Di conseguenza

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = K_1$$

Teorema del valore finale: esempio di applicazione

- Consideriamo
$$F(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

- I poli sono $p_1 = 0$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $p_2 = -2$ con molteplicità $m_2 = 1$ $\Rightarrow$ posso applicare il teorema del valore finale
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s(s+2)} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s+2} = 1$$

- Possiamo verificare il risultato scomponendo in fratti semplicei calcolando l'antitrasformata
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\} = 1(t) - e^{-2t}1(t)$$

Esercizi proposti

Consideriamo un segnale $f(t)$ ottenuto antitrasformando una funzione $F(s)$ razionale in Laplace. Determinare, se esiste, il limite per $t \to \infty$ di $f(t)$ nei seguenti casi.

1. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3+10s}$
2. $F(s) = \dfrac{5s}{(s^2+s+1)^2}$
3. $F(s) = \dfrac{5s}{s(s^2+s+1)}$
4. $F(s) = \dfrac{4s}{s^2-s+1}$
5. $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s^2+4)^2}$
6. $F(s) = \dfrac{s}{s^3+2s^2}$

Teorema dei residui - estensione

- Consideriamo una funzione razionale $F(s)$

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- $F(s)$ può essere **strettamente propria** $b_n = 0$ o **semplicemente propria** $b_n \neq 0$

Fatto 2.5 (caso generale) Si consideri una funzione razionale $F(s)$. Allora $F(s)$ ammette un'espansione in fratti nella forma

$$F(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^\ell}$$

dove

$$K_0 = b_n$$

e i residui $K_{i\ell}$ sono calcolati come al solito.

Teorema dei residui e antitrasformata di Laplace

- Consideriamo il segnale

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

- Dalla scomposizione in fratti semplici, nel caso generale

$$F(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{\ell}}$$

e dalla linearità dell'antitrasformata di Laplace, abbiamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{K_0\right\} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} K_{i\ell}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_i)^{\ell}}\right\} \\ &= K_0\,\delta(t) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell-1)!}\,t^{\ell-1}\,e^{p_i t}\,1(t) \end{aligned}$$

$F(s)$ semplicemente propria $b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(t)$ presenta una componente **impulsiva**

Esempio

- Consideriamo

$$F(s) = \frac{3s+1}{s+1}$$

- In questo caso $b_n = b_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad F(s)$ **semplicemente propria**
- Poiché c'è solo polo $p_1 = -1$ possiamo scrivere

$$F(s) = K_0 + \frac{K_1}{s+1}$$

con

$$K_0 = b_n = 3 \qquad K_1 = \lim_{s \to -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \to -1} (3s+1) = -2$$

- Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= K_0\,\delta(t) + K_1\,e^{-t}\,1(t) \\ &= 3\,\delta(t) - 2\,e^{-t}\,1(t) \end{aligned}$$

2.4 Analisi modale

Analisi modale

- Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

- Come visto le evoluzioni libere di stato e uscita sono

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \qquad y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$

- Nel dominio di Laplace

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \qquad Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

Obiettivo determinare i modi di evoluzione presenti nell'evoluzione libera

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}x_0$$

Proprietà dell'inversa

- In generale

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)}\mathrm{Adj}(sI - A)$$

  - $\varphi(s) = \det(sI - A)$ **polinomio caratteristico** della matrice A
  - $\mathrm{Adj}(sI - A)$ matrice aggiogata
- $\varphi(s)$ polinomio di grado n
- $\mathrm{Adj}(sI - A)$ matrice $n \times n$ di polinomi di grado $< n$

Gli elementi della matrice $(sI - A)^{-1}$ sono **funzioni razionali strettamente proprie**, ossia tali che

$$\text{grado numeratore} < \text{grado denominatore}$$

Polinomio caratteristico e proprietà dell'inversa

- Le **radici** del polinomio caratteristico $\varphi(s) = \det(sI - A)$ sono gli **autovalori** della matrice A

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

ciascuno con la sua **molteplicità algebrica**

$$\mu_1, \ldots, \mu_k$$

- Possiamo scrivere

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - \lambda_i)^{\mu_i}$$

con $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$ ordine del sistema [$n = \dim(x)$]

Gli elementi della matrice $(sI - A)^{-1}$ sono **funzioni razionali strettamente proprie** aventi come **poli** gli **autovalori** della matrice A

Esempio 1

- Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-1)(s+1)$$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $\mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità $\mu_2 = 1$

- Matrice aggiogata

$$\text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

- Matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Nota: nel caso di matrice **diagonale**, l'inversa si calcola invertendo gli elementi sulla diagonale

Esempio 1 - analisi modale

- Nell'esempio 1

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} 1(t) \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ i modi di evoluzione sono e^{t} e e^{-t}

- I modi di evoluzione sono quelli associati ai due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

Nota: nel seguito per brevità ometteremo il termine $1(t)$ dai modi, intendendo comunque che l'espressione trovata vale per $t \geq 0$

Esempio 2

- Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 2$

- Matrice aggiogata

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

- Matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)}\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Esempio 2 - analisi modale

- Nell'esempio 2

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{array}\right]\right\} \\
&= \left[\begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array}\right] 1(t) \qquad t \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ i modi di evoluzione sono 1 e t

- I modi di evoluzione sono quelli associati all'autovalore $\lambda_1 = 0$ di molteplicità $\mu_1 = 2$
- In questo caso, ho un modo **limitato** e uno **divergente**

Esempio 3

- Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2$$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 2$

- Matrice aggiogata

$$\mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

- Matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Nota: nel rapporto $\mathrm{Adj}(sI - A)/\varphi(s)$ possono esserci semplificazioni che abbassano la molteplicità!

Esempio 3 - analisi modale

- Nell'esempio 3

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1(t) \qquad t \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ l'unico modo di evoluzione è 1

- Per effetto dell'abbassamento di molteplicità nell'inversa $(sI-A)^{-1}$, il modo t **non** compare in e^{At}
- In questo caso, ho un unico modo **limitato**

Polinomio minimo

- L'evoluzione nel tempo di e^{At} è determinata dai poli $(sI - A)^{-1}$
- Gli elementi di
$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)} \mathrm{Adj}(sI - A)$$
hanno come poli gli autovalori della matrice A **ma** possono esserci semplificazione cha abbassano la molteplicità

Per tenere conto delle semplificazioni, definiamo il **polinomio minimo** $m(s)$ del sistema, così ottenuto

a. si calcolano $\mathrm{Adj}(sI - A)$ e $\varphi(s)$
b. si calcola $(sI - A)^{-1} = \mathrm{Adj}(sI - A)/\varphi(s)$ effettuando tutte le semplificazioni
c. si calcola $m(s)$ come **minimo comune multiplo** dei **denominatori** degli elementi di $(sI - A)^{-1}$

Polinomio minimo - esempio di calcolo

- Negli esempi 2 e 3 il polinomio caratteristico era lo stesso $\varphi(s) = s^2$
- Nell'esempio 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ polinomio minimo $m(s) = s^2$

- Nell'esempio 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ polinomio minimo $m(s) = s$

Nota: il polinomio minimo $m(s)$ è un **sottomultiplo** del polinomio caratteristico $\varphi(s)$

Polinomio minimo e molteplicità

- il polinomio minimo $m(s)$ è un **sottomultiplo** del polinomio caratteristico $\varphi(s)$ $\Rightarrow$ il polinomio minimo ha come radici gli autovalori di A, eventualmente con molteplicità **inferiore**

Fatto 2.7 Siano

- λ_i autovalore del sistema
- μ_i molteplicità di λ_i nel polinomio caratteristico $\varphi(s)$ (molteplicità algebrica);
- m_i molteplicità di λ_i nel polinomio minimo $m(s)$

Allora vale la relazione

$$1 \leq m_i \leq \mu_i$$

Nota: $m_i \geq 1 \Rightarrow$ gli autovalori di A **non** possono sparire completamente nel polinomio minimo

Polinomio minimo e molteplicità: dimostrazione

- $m_i \leq \mu_i$ vale perché semplificando non posso aumentare la molteplicità!
- Per dimostrare $m_i \geq 1 \Rightarrow$ è sufficiente far vedere che gli autovalori di A **non** possono sparire completamente come poli di $(sI - A)^{-1}$
- Ricordiamo che per ogni **autovalore** λ_i esiste almeno un **autovettore** v_i tale che
$$A\, v_i = \lambda_i\, v_i$$
- Di conseguenza, cambiando segno e aggiungendo ad ambo i membri $s\, v_i$,
$$\begin{array}{rcl} s\, v_i - A\, v_i & = & s\, v_i - \lambda_i\, v_i \\ & \Downarrow & \\ (s\, I - A) v_i & = & (s - \lambda_i) v_i \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{1}{s - \lambda_i} v_i & = & (s\, I - A)^{-1} v_i \end{array}$$
- Di conseguenza, $s - \lambda_i$ deve comparire al denominatore di **almeno uno** degli elementi di $(s\, I - A)^{-1}$

Modi naturali

- La matrice inversa $(sI - A)^{-1}$ ha come poli gli autovalori del sistema
$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$
con le molteplicità
$$m_1, \dots, m_k$$
- Ricordiamo che per per l'evoluzione libera vale Ricordando ora che per la risposta libera vale
$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}x(0)$$

Teorema 2.2 e^{At} è una matrice avente come elementi opportune **combinazioni lineari** di
$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \dots,\ t^{m_i - 1}e^{\lambda_i t}$$
per $i = 1, \dots, k$.
Tale segnali sono detti **modi naturali del sistema**.

- Di conseguenza $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$ e $y_\ell(t) = C\,e^{At}x(0)$ evolvono secondo una opportuna **combinazione dei modi naturali** del sistema (al variare delle **condizioni iniziali**)

Modi naturali

- **Autovalore complesso**

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$$

$\Rightarrow$ anche il suo **complesso coniugato**

$$\overline{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

è autovalore con la **stessa** molteplicità m_i

- I due modi

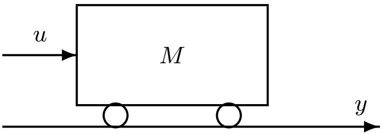
$$t^\ell e^{\lambda_i t}, \quad t^\ell e^{\overline{\lambda}_i t}$$

sono sempre presenti in **coppia** e si **combinano** dando luogo ai due modi reali

$$t^\ell \cos(\omega_i t) e^{\sigma_i t}, \quad t^\ell \sin(\omega_i t) e^{\sigma_i t}$$

Esempio: sistema meccanico

- Carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$
- $y(t)$ posizione del carrello al tempo t
- b coefficiente di attrito viscoso



- Scegliamo come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} x(t) \end{aligned}$$

Esempio: sistema meccanico

- Fissiamo $M = 1$ e $b = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico $\varphi(s) = s(s+1)$
  $\Rightarrow$ autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità $\mu_2 = 1$

- Matrice inversa

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

  $\Rightarrow$ polinomio minimo $m(s) = \varphi(s) = s(s+1)$ molteplicità $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$

- Modi naturali $e^{\lambda_1 t} = 1$, $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

- Elementi di e^{At} = combinazione lineari dei modi naturali

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Esercizi proposti

Determinare i modi naturali e calcolare e^{At} per un sistema LTI TC avente come matrice di transizione dello stato

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   Suggerimento: per una matrice diagonale a blocchi l'inversa si calcola invertendo i blocchi sulla diagonale

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

Modi naturali e autovettori

- Dalla dimostrazione del fatto **Fatto 2.7**, dato un **autovettore** v_i associato all'autovalore λ_i, vale

$$(s\,I - A)^{-1} v_i = \frac{1}{s - \lambda_i} v_i$$

  $\Rightarrow$ antitrasformando

$$e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$$

- Se prediamo come condizione iniziale

$$x(0) = v_i$$

  $\Rightarrow$ evoluzione libera

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0) = e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$$

La condizione iniziale $x(0) = v_i$ eccita **solo** il modo naturale $e^{\lambda_i t}$ $\Rightarrow$ il sistema evolve secondo tale modo naturale nella **direzione dell'autovettore**

Esempio: sistema meccanico

- Nel caso del sistema meccanico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ polinomio caratteristico $\varphi(s) = s(s+1)$

- Modi naturali $e^{\lambda_1 t} = 1$, $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

- In generale l'evoluzione libera contiente **entrambi** i modi naturali

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1(0) + (1 - e^{-t})\, x_2(0) \\ e^{-t}\, x_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio: sistema meccanico

- $\lambda_1 = 0$ ha come autovettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

infatti

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\lambda_1 v_1}$$

- Consideriamo una condizione iniziale nella direzione dell'autovettore v_1

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ solo il modo naturale $e^{\lambda_1 t} = 1$ viene eccitato

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: sistema meccanico

- $\lambda_2 = -1$ ha come autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

infatti

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\lambda_2 v_2}$$

- Consideriamo una condizione iniziale nella direzione dell'autovettore v_2

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ -x_1(0) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ solo il modo naturale $e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$ viene eccitato

$$x_\ell(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ -x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) \\ -e^{-t}x_1(0) \end{bmatrix}$$