

Fino ad ora ci siamo focalizzati sull'*analisi* dei sistemi dinamici, in particolare abbiamo studiato come analizzare l'evoluzione dei sistemi dinamici LTI a partire da date condizioni iniziali e segnali d'ingresso. Abbiamo inoltre discusso alcune proprietà di stabilità dei sistemi dinamici, in particolare abbiamo discusso nozioni di stabilità che caratterizzano la sensitività della risposta del sistema a fronte di perturbazioni sulle condizioni iniziali e/o sugli ingressi.

Nell'ambito dell'Automatica, al di là dell'analisi esistono altri problemi di interesse pratico. In particolare, in molti casi, ad un sistema dinamico viene associato un indice di prestazione il quale contiene tutte le grandezze il cui andamento temporale è di particolare interesse nello studio del fenomeno considerato. Ad esempio tale indice di prestazione può essere espresso in termini di andamento desiderato per le variabili di uscita y . Qualora siano presenti ingressi u manipolabili, è naturale chiedersi come possiamo scegliere u in modo da imporre al sistema il comportamento desiderato. Questo problema va sotto il nome di **controllo**.

3.1 Introduzione al controllo in retroazione

Consideriamo un sistema LTI TC da controllare \mathcal{P} , detto **impianto** o **processo**

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Notiamo che si suppone che l'ingresso di controllo u non possa influenzare direttamente l'uscita y e quindi si pone $D = 0$. Questa assunzione è usualmente verificata nei sistemi reali in quanto una variazione dell'ingresso si riflette sempre con un certo ritardo sull'uscita. Dal punto di vista matematico questo significa che, nel caso SISO, la funzione di trasferimento dell'impianto

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b(s)}{a(s)}$$

è una funzione razionale strettamente propria, cioè con grado di $b(s) < \text{grado di } a(s)$.

Sia poi y° un segnale, detto **riferimento**, che definisce l'andamento desiderato per le uscite del sistema. Allora, il **problema del controllo** consiste nel determinare il valore da attribuire alle variabili di controllo u in modo tale che l'andamento delle variabili controllate di uscita y risulti (il più possibile) prossimo a quello desiderato y° , anche in presenza di perturbazioni di varia natura. Si vuole quindi rendere l'**errore di inseguimento** $y^\circ - y$ il più piccolo possibile.

A livello terminologico, quando il segnale di riferimento è nullo $y^\circ(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ si parla di un **problema di regolazione a zero** (in questo caso l'obiettivo è di portare il sistema nella condizione di quiete in cui l'uscita è sempre zero). Se invece y° è un segnale non identicamente nullo che rappresenta la traiettoria desiderata per le variabili di uscita, allora si parla di un **problema di inseguimento**.

Nel seguito considereremo per semplicità il caso di **riferimento costante**

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

In questo caso, Y_0 detto **set-point** rappresenta il valore (o il vettore dei valori per sistemi con più uscite) a cui vogliamo portare l'uscita del sistema.

Come schematizzato in figura, vi sono in generale due tipologie di sistemi di controllo:

- **Controllo in anello aperto (feedforward).**

In questo tipo di schema gli ingressi manipolabili sono predeterminati, ovvero non cambiano in funzione del comportamento esibito dal sistema ma dipendono unicamente dall'andamento desiderato y° . In questo senso, la catena che collega i segnali di controllo al processo (il sistema che si vuole controllare) è aperta.

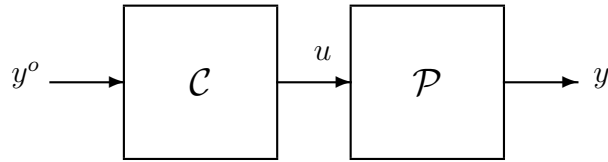


Figura 1: Schema di controllo in **anello aperto**

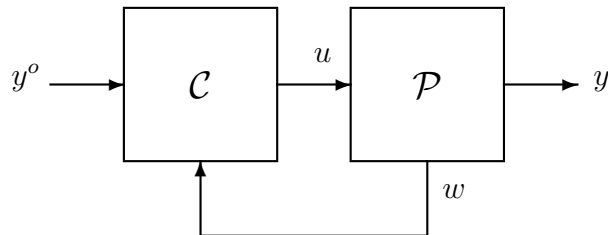


Figura 2: Schema di controllo in **retroazione**

- **Controllo in retroazione (feedback).**

In questo tipo di schema gli ingressi manipolabili cambiano in funzione del comportamento esibito dal sistema. In questo senso, la catena che collega i segnali di controllo al processo (il sistema che si vuole controllare) è chiusa, ovvero è presente un anello di retroazione (feedback).

I sistemi a catena aperta vengono utilizzati quando il funzionamento del sistema è abbastanza predicibile o quando eventuali disturbi (cioè ingressi non manipolabili) presenti nel sistema possono essere misurati e compensati. In questi sistemi di controllo, la garanzia del risultato dipende quindi dalla conoscenza delle condizioni iniziali e dall'assenza o misurabilità di situazioni anomale (disturbi). In molti casi pratici, tuttavia, il funzionamento del sistema non è sufficientemente prevedibile e spesso non è possibile misurare in modo accurato eventuali disturbi che agiscono sul sistema. In queste situazioni, se il comportamento del sistema non è quello desiderato, un sistema di controllo in catena aperta non può in alcun modo accorgersi dell'errore e apportare opportuni aggiustamenti. Per ovviare a questo tipo di inconvenienti si deve ricorrere ai sistemi in catena chiusa.

In un sistema di controllo in retroazione, si suppone di poter conoscere/misurare in tempo reale l'andamento di alcune variabili che vanno quindi a formare il cosiddetto **vettore informativo** $w(t)$. Il segnale $w(t)$ rappresenta l'informazione che abbiamo a disposizione sulla configurazione interna dell'impianto \mathcal{P} al tempo t . Il **controllore** \mathcal{C} genera quindi in tempo reale il segnale di controllo $u(t)$ sulla base del riferimento $y^o(t)$ (comportamento desiderato per l'uscita) e del vettore informativo $w(t)$.

Nel seguito considereremo due casi relativamente alla scelta del vettore informativo:

- **Informazione completa.** Lo stato è completamente accessibile/misurabile e quindi si ha $w(t) = x(t)$. Ricordando che lo stato $x(t)$ fornisce una rappresentazione completa della configurazione interna del sistema al tempo t , avere accesso allo stato significa avere la massima informazione possibile. In questo caso si parla di **controllo in retroazione sullo stato**.
- **Informazione parziale.** Solo l'uscita controllata è accessibile/misurabile e quindi si ha $w(t) = y(t)$. Si tratta di una situazione più difficile rispetto alla precedente in quanto l'informazione che si ha a disposizione è minimale. In questo caso si parla di **controllo in retroazione sull'uscita**.

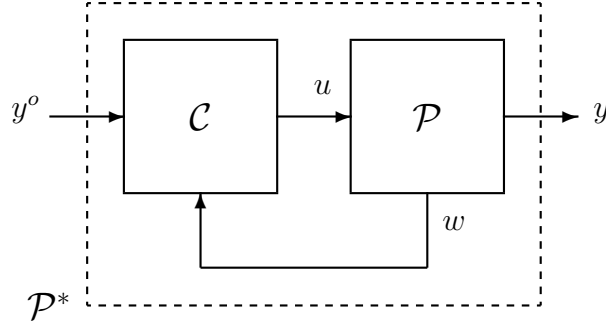


Figura 3: Sistema a retroazione \mathcal{P}^* con ingresso y° e uscita y .

Naturalmente possono esistere situazioni intermedie, in cui cioè non tutto lo stato è accessibile ma sono misurabili altre variabili oltre all'uscita, che tuttavia non prenderemo in esame nel seguito.

Vediamo ora, per concludere questa introduzione al controllo in retroazione, quali sono le specifiche fondamentali che si devono usualmente soddisfare nel progetto di un sistema di controllo in retroazione. A tal fine, notiamo preliminarmente che quando l'impianto \mathcal{P} e il controllore \mathcal{C} sono sistemi LTI, allora anche il sistema complessivo formato dall'interconnessione in retroazione di impianto e controllore risulta essere un sistema LTI. Nel seguito indicheremo tale sistema, detto **sistema in ciclo chiuso** o **sistema a retroazione**, con il simbolo \mathcal{P}^* . Notiamo che \mathcal{P}^* ha come ingresso il segnale di riferimento y° e come uscita le variabili controllate y (si veda la rappresentazione in figura).

Essendo il sistema a retroazione \mathcal{P}^* un sistema LTI, possiamo quindi definire la **funzione di trasferimento in ciclo chiuso** tra riferimento y° e uscita y che indichiamo con la notazione $G_{y^\circ y}^*(s)$. Tale funzione di trasferimento ci fornisce informazioni su come il sistema in ciclo chiuso si comporta in risposta ad un certo andamento desiderato y° . In particolare, supponendo il riferimento costante

$$y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$$

possiamo decomporre la risposta forzata in ciclo chiuso in un termine di transitorio (dipendente dai poli di $G_{y^\circ y}^*(s)$) e un termine di regime permanente (dipendente dai poli dell'ingresso del sistema a retroazione, ossia il riferimento). Abbiamo quindi

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G_{y^\circ y}^*(s) Y^\circ(s) \} = \underbrace{y_f^{G^*}(t)}_{\text{transitorio}} + \underbrace{y_f^{Y^\circ}(t)}_{\text{regime permanente}}$$

Applicando il teorema fondamentale della risposta in frequenza, il regime permanente in risposta a un ingresso a gradino $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ assume la forma

$$y_f^{Y^\circ}(t) = G_{y^\circ y}^*(0) \cdot Y_0 \cdot 1(t)$$

con $G_{y^\circ y}^*(0)$ guadagno in continua in ciclo chiuso. Inoltre, quando il sistema in ciclo chiuso \mathcal{P}^* è asintoticamente stabile, abbiamo che la risposta complessiva $y(t)$ converge al regime permanente per qualsiasi condizione iniziale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t) - y_f^{Y^\circ}(t)] = 0$$

Quindi per garantire che l'uscita converga asintoticamente al valore desiderato Y_0 è sufficiente progettare il controllore in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- **Specifica 1:** stabilità asintotica in ciclo chiuso (in modo da avere convergenza al regime permanente per qualsiasi condizione iniziale).
- **Specifica 2:** guadagno in continua in ciclo chiuso unitario $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$ (in modo tale che il valore di regime coincida con quello desiderato).

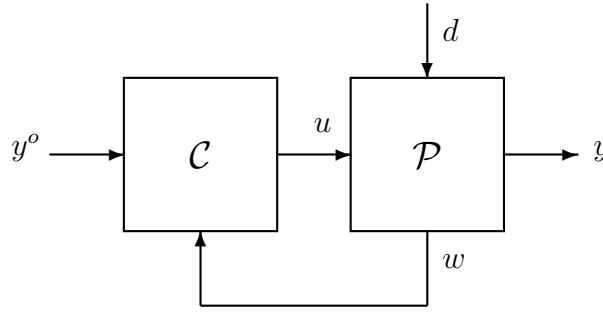


Figura 4: Sistema di controllo in retroazione con disturbo d .

Applicando il teorema fondamentale della risposta in frequenza al sistema a retroazione \mathcal{P}^* si ha infatti il seguente risultato.

Fatto 3.1 Siano il controllore \mathcal{C} progettato in modo da soddisfare le specifiche 1 e 2. Sia inoltre il riferimento costante $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$. Allora, per qualsiasi condizione iniziale si ha **inseguimento perfetto** del riferimento in quanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = Y_0$$

In altri termini, le specifiche 1 e 2 sono sufficienti per garantire che il sistema di controllo riesca a portare l'uscita del sistema al valore desiderato¹. A questo proposito notiamo che la specifica 1 (stabilità asintotica) garantisce anche che il sistema a retroazione sia robusto rispetto a perturbazioni delle condizioni iniziali e dell'ingresso (ricordiamo infatti che la stabilità asintotica implica la stabilità esterna). Nel caso di sistemi con più ingressi e più uscite queste considerazioni continuano a valere, ma in questo caso la specifica 2 diventa $G_{y^\circ y}^*(0) = I$ matrice identica. Nel seguito, comunque, considereremo per semplicità soltanto sistemi SISO.

Come visto le specifiche 1 e 2 garantiscono al sistema in ciclo chiuso il comportamento desiderato a regime. Tuttavia, nella pratica non è importante soltanto raggiungere il valore desiderato ma anche farlo nel modo migliore possibile. In una situazione tipica, infatti, si vuole anche che il valore di regime sia raggiunto in modo sufficientemente rapido e evitando il più possibile grosse variazioni nell'uscita. Ricordando la decomposizione della risposta complessiva in transitorio e regime permanente, notiamo che il modo in cui l'uscita raggiunge il valore di regime dipende proprio dal transitorio e, quindi, dalla forma della funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G_{y^\circ y}^*(s)$ (in particolare, ma non solo, dalla posizione nel piano complesso dei poli in ciclo chiuso). Accanto alla specifica 2 (**specifiche a regime**) si devono quindi usualmente soddisfare anche **specifiche nel transitorio**.

- **Specifiche 3:** assegnare alla funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G_{y^\circ y}^*(s)$ una forma tale da garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate.

Le specifiche a regime sono anche dette **specifiche statiche**. Le specifiche nel transitorio sono anche dette **specifiche dinamiche**. Vedremo più avanti come possono essere formalizzate dal punto di vista matematico tali specifiche dinamiche.

Come ultima osservazione, notiamo che nei sistemi di controllo reali sono sempre presenti ingressi di disturbo (ingressi non manipolabili) che fanno deviare il sistema dal comportamento desiderato in modo

¹Notiamo che il soddisfacimento delle specifiche 1 e 2 garantisce al sistema un ciclo chiuso un buon comportamento anche in risposta a riferimenti non costanti ma variabili lentamente. Dal punto di vista matematico, questa proprietà può essere verificata considerando un riferimento sinusoidale $y^\circ(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t)1(t)$ di bassa frequenza, ossia con $\omega_0 \approx 0$. Applicando il teorema fondamentale della risposta in frequenza si ha infatti che, in questo caso, il regime permanente risulta essere

$$y_f^{Y^\circ}(t) = |G_{y^\circ y}^*(j\omega_0)| Y_0 \sin[\omega_0 t + \angle G_{y^\circ y}^*(j\omega_0)]1(t)$$

Quando $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$, allora per continuità $\omega_0 \approx 0$ implica $G_{y^\circ y}^*(j\omega_0) \approx 1$. Di conseguenza il regime permanente coincide approssimativamente con l'andamento desiderato

$$y_f^{Y^\circ}(t) \approx Y_0 \sin(\omega_0 t)1(t) = y^\circ(t)$$

dove l'errore è tanto più piccolo quanto più vicina a zero è la frequenza, ossia tanto più lentamente varia il riferimento.

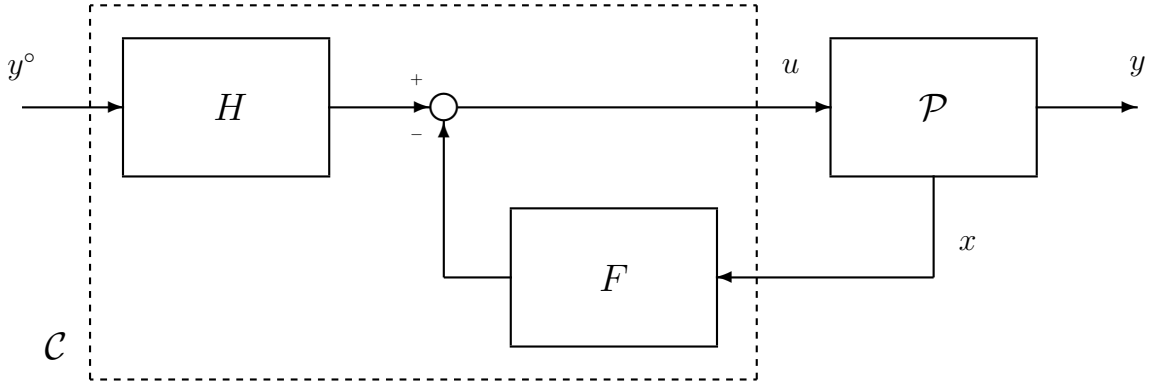


Figura 5: Sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato. La linea tratteggiata rappresenta il controlllore \mathcal{C} .

difficile da prevedere (si veda la figura 4). Quindi agli obiettivi visti si aggiungono usualmente ulteriori specifiche in termini di **attenuazione** e/o **reiezione** dei disturbi (per reiezione si intende la proprietà di un sistema di controllo di annullare completamente l'effetto del disturbo sul comportamento a regime). Vedremo, più avanti nel corso, anche esempi di queste ulteriori specifiche.

3.2 Retroazione algebrica sullo stato

Consideriamo, in prima istanza, il caso in cui si abbia informazione completa e quindi sia possibile, in tempo reale, acquisire informazioni su tutto lo stato del sistema $w(t) = x(t)$. L'azione di controllo u risulta quindi essere una funzione dello stato x e del riferimento y° . Consideriamo in particolare il caso di **retroazione algebrica sullo stato** in cui cioè il controllo è una funzione lineare di x e y°

$$\mathcal{C} : \quad u(t) = -F x(t) + H y^\circ(t)$$

Il corrispondente schema di controllo è rappresentato in Figura 5. Questa legge di controllo costituisce la scelta più semplice possibile per una retroazione sullo stato, ma come vedremo è già sufficiente per perseguire le specifiche di controllo in precedenza illustrate.

Notiamo che la legge di controllo si compone di due termini.

- **Controllo in feedback:** $-F x(t)$ dipendente dal **guadagno in feedback** (retroazione) F . In generale F è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(x)$. Nel caso particolare di sistemi singolo ingresso F è un vettore riga $1 \times \dim(x)$ di dimensione pari all'ordine del sistema.
- **Controllo in feedforward:** $H y^\circ(t)$ dipendente dal **guadagno in feedforward** H . In generale H è una matrice di dimensione $\dim(u) \times \dim(y)$ in quanto $\dim(y^\circ) = \dim(y)$. Nel caso particolare di sistemi SISO H è uno scalare.

I due guadagni F e H rappresentano i parametri di progetto del sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato, da scegliere in modo da soddisfare le specifiche di controllo.

Combinando le equazioni di stato dell'impianto \mathcal{P} con la legge di controllo \mathcal{C} possiamo immediatamente ottenere le equazioni di stato del sistema in ciclo chiuso risultante. In particolare sostituendo la legge di controllo nell'equazione dell'impianto si ha

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) = A x(t) + B [-F x(t) + H y^\circ(t)] = (A - B F) x(t) + B H y^\circ(t)$$

Il sistema in ciclo chiuso assume quindi la forma

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* y^\circ(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

con $A^* = A - BF$ e $B^* = BH$.

Notiamo che, come atteso, il sistema in ciclo chiuso è un sistema LTI TC con ingresso $y^\circ(t)$ e uscita $y(t)$. Notiamo anche che il guadagno in feedback F modifica la matrice della dinamica che diventa $A - BF$. Possiamo quindi pensare di utilizzare il guadagno F per modificare il comportamento dinamico e in particolare le proprietà di stabilità del sistema. Il **polinomio caratteristico in ciclo chiuso** risulta infatti essere

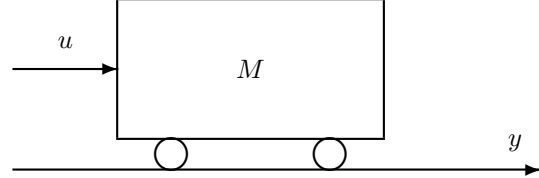
$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

mentre la **funzione di trasferimento in ciclo chiuso** è

$$G_{y^\circ y}^*(s) = C(sI - A^*)^{-1}B^* = C(sI - A + BF)^{-1}BH$$

Esempio 3.1 (controllo di posizione) Consideriamo il sistema meccanico in figura che descrive il moto di un carrello di massa M soggetto ad una forza esterna $u(t)$. Sia $y(t)$ la posizione del carrello al tempo t . Come visto, scegliendo come stato posizione e velocità

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$



le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{aligned}$$

Consideriamo il problema del controllo di posizione, che consiste nel portare il carrello in una posizione desiderata Y_0 applicando una forza $u(t)$. Si tratta di un problema di controllo con riferimento costante $y^\circ(t) = Y_0 1(t)$. Il sistema considerato ha 2 variabili di stato, 1 variabile di ingresso, e 1 variabile di uscita. Quindi $F = [f_1 \ f_2]$ è un vettore riga di dimensione 2 e H è uno scalare. Applicando un controllo in retroazione $u = -Fx + Hy^\circ$, la matrice della dinamica in ciclo chiuso è

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_1/M & -(b + f_2)/M \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso è quindi

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ f_1/M & s + (b + f_2)/M \end{bmatrix} = s^2 + \frac{b + f_2}{M}s + \frac{f_1}{M}$$

Si vede che variando i due guadagni f_1 e f_2 possiamo assegnare in modo arbitrario i coefficienti del polinomio $\varphi^*(s)$. In particolare, per la regola di Cartesio, per avere entrambi gli autovalori in ciclo chiuso con $\text{Re} < 0$ i due guadagni f_1 e f_2 vanno scelti in modo che entrambi i coefficienti $(b + f_2)/M$ e f_1/M siano positivi. Quindi le condizioni per la stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1) sono

$$f_1 > 0 \quad f_2 > -b$$

La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è

$$G_{y^\circ y}^*(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BH = \frac{1}{\varphi^*(s)} C \text{Adj}(sI - A + BF)BH$$

Poiché

$$\begin{aligned} C \text{Adj}(sI - A + BF)B &= [1 \ 0] \text{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ f_1/M & s + (b + f_2)/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 0] \text{Adj} \begin{bmatrix} s + (b + f_2)/M & 1 \\ -f_1/M & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} = 1/M \end{aligned}$$

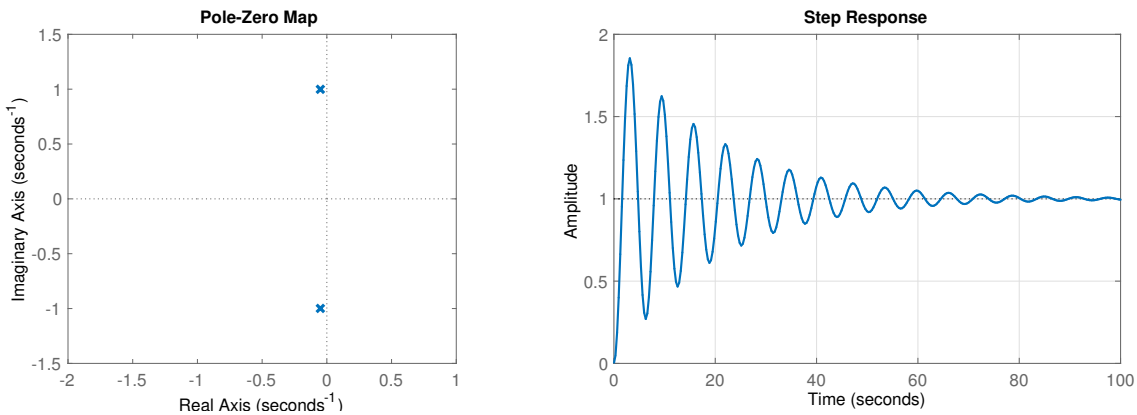


Figura 6: Autovalori e risposta in ciclo chiuso con $\varphi^*(s) = s^2 + 0.1s + 1$.

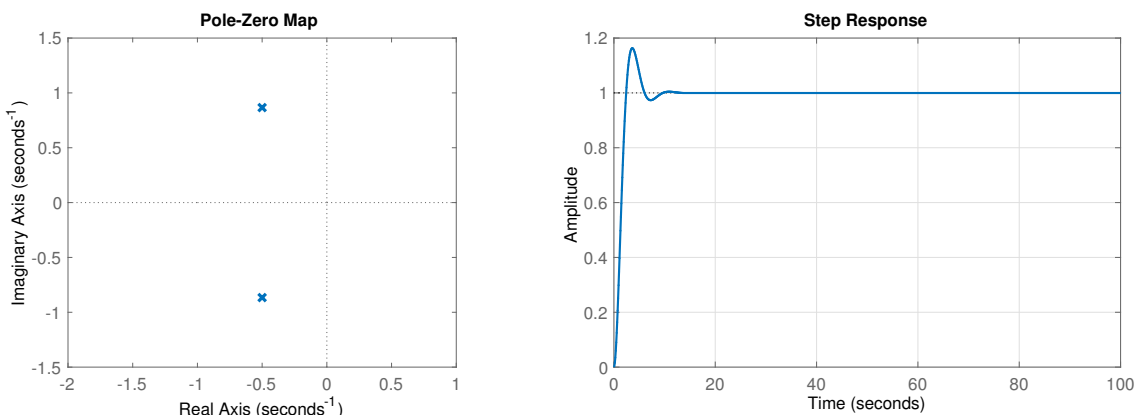


Figura 7: Autovalori e risposta in ciclo chiuso con $\varphi^*(s) = s^2 + s + 1$.

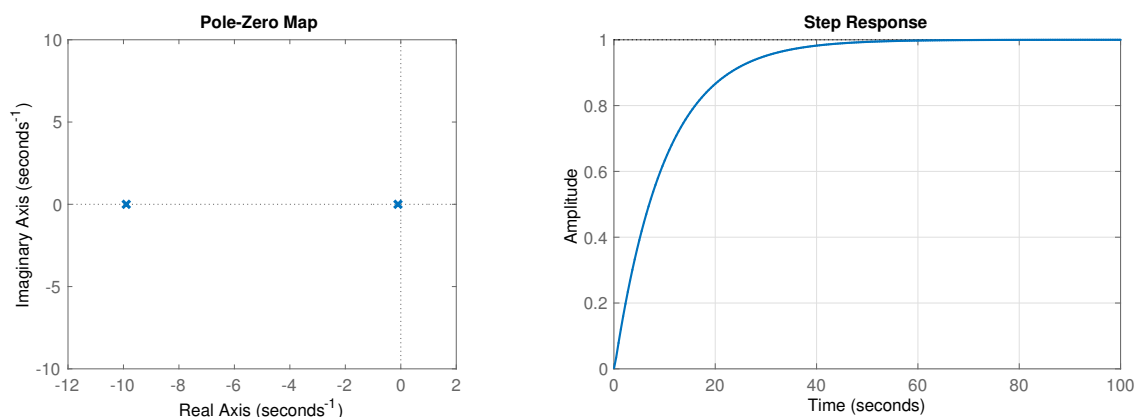


Figura 8: Autovalori e risposta in ciclo chiuso con $\varphi^*(s) = s^2 + 10s + 1$.

abbiamo quindi

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{1/M}{s^2 + \frac{b+f_2}{M}s + \frac{f_1}{M}} H$$

Per avere inseguimento perfetto del riferimento costante (specifica 2) imponiamo $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$ e quindi

$$G_{y^\circ y}^*(0) = \frac{H}{f_1} = 1 \implies H = f_1$$

Nelle figure 6-8 sono riportati gli andamenti della risposta del sistema in ciclo chiuso ad un riferimento a gradino unitario per diverse scelte del polinomio caratteristico in ciclo chiuso (e quindi dei guadagni f_1 e f_2). Notiamo come in tutti e 3 i casi si abbia stabilità e convergenza al valore desiderato, tuttavia il comportamento nel transitorio cambia molto, tanto in termini di tempo necessario per arrivare al valore di regime quanto in termini di escursioni (oscillazioni) del valore di uscita. Questo ci fa capire come la scelta della forma della funzione di trasferimento in ciclo chiuso, e in particolare della posizione dei poli in ciclo chiuso, debba essere guidata dalle specifiche nel transitorio (specifica 3).

Le considerazioni fatte nell'esempio possono essere estese a sistemi LTI generici, consentendo di ottenere linee guida generali per il progetto dei guadagni F e H . Prima di illustrare tali linee guida è conveniente però focalizzare l'attenzione sui sistemi SISO e scrivere la funzione di trasferimento in ciclo chiuso in una forma più semplice. Ricordiamo che, in questo caso, la funzione di trasferimento dell'impianto è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\varphi(s)} C \text{Adj}(sI - A)B = \frac{r(s)}{\varphi(s)}$$

con $\varphi(s)$ polinomio di grado $n = \dim(x)$ e $r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B$ polinomio di grado $< n$ (naturalmente $\varphi(s)$ e $r(s)$ possono avere fattori comuni corrispondenti ad autovalori nascosti del sistema). La funzione di trasferimento in ciclo chiuso è come visto

$$G_{y^\circ y}^*(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BH = \frac{1}{\varphi^*(s)} C \text{Adj}(sI - A + BF)BH$$

A questo proposito, è possibile dimostrare che, per sistemi SISO, vale

$$C \text{Adj}(sI - A + BF)B = C \text{Adj}(sI - A)B$$

La dimostrazione è un po' laboriosa e sfrutta la formula di Sherman-Morrison per l'inversa di una somma. Abbiamo quindi il seguente risultato.

Fatto 3.2 Per sistemi LTI SISO, la legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato $u = -Fx + Hy^\circ$

- assegna il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$.
- assegna la funzione di trasferimento in ciclo chiuso

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

$$\text{con } r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B.$$

Il progetto di un sistema di controllo in retroazione algebrica sullo stato consiste quindi nei seguenti passi.

1. Si sceglie il guadagno in feedback F in modo tale che
 - tutti gli autovalori in ciclo chiuso (radici di $\varphi^*(s)$) abbiano $\text{Re} < 0$ in modo da avere stabilità asintotica in ciclo chiuso (specifica 1);
 - gli autovalori in ciclo chiuso siano posizionati in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3).
2. Si sceglie il guadagno in feedforward H in modo tale che $G_{y^\circ y}^*(0) = 1$ ponendo

$$H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

in modo da avere inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2).

Notiamo che la specifica 2 può essere soddisfatta se e solo se $r(0) = -C\text{Adj}(A)B \neq 0$. Tale condizione non dipende dal tipo di sistema di controllo considerato né dalla scelta dei guadagni, ma è semplicemente la condizione necessaria affinché il problema dell'inseguimento sia ben posto. Quando tale condizione non è verificata significa che per il sistema considerato non è possibile mantenere stabilmente l'uscita ad un valore costante con la variabile di controllo u a disposizione. In questi casi, occorre fare un passo indietro nel progetto del sistema di controllo modificando e/o aggiungendo variabili di controllo (ovvero modificando la matrice B) in modo che la condizione necessaria $r(0) \neq 0$ sia soddisfatta.

Per quanto riguarda le specifiche 1 e 3 queste dipendono dal polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$. Abbiamo visto che, nell'esempio del carrello, al variare dei due guadagni f_1 e f_2 era possibile assegnare a piacere i coefficienti di $\varphi^*(s)$ e quindi posizionare a piacere gli autovalori in ciclo chiuso in modo da stabilizzare e garantire un transitorio desiderato. Tuttavia non è sempre così. In alcuni casi, infatti, possono esistere autovalori (detti non controllabili) che non possono essere modificati mediante controllo in retroazione.

3.3 Controllabilità e stabilizzabilità

Prima di introdurre formalmente i concetti di controllabilità e stabilizzabilità vediamo due esempi introduttivi.

Esempio 3.2 Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per questo sistema il polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2)(s+1)$$

e di conseguenza gli autovalori in anello aperto sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Il sistema è instabile internamente per la presenza di un autovalore λ_2 con parte reale > 0 . Ci chiediamo ora se sia possibile rendere questo sistema asintoticamente stabile mediante un controllo in retroazione sullo stato.

$$u = -F x + H y^\circ$$

La corrispondente matrice della dinamica in ciclo chiuso è

$$\begin{aligned} A^* = A - BF &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e di conseguenza il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta essere

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s+1)$$

I due autovalori in ciclo chiuso sono quindi $\lambda_1^* = 2 - f_1$, $\lambda_2^* = -1$. Osserviamo che la retroazione sullo stato modifica l'autovalore $\lambda_1 = 2$ ma non modifica l'altro autovalore $\lambda_2 = -1$. Intuitivamente possiamo quindi dire che l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è **controllabile** (cioè può essere modificato con il controllo) mentre l'autovalore $\lambda_2 = -1$ è **non controllabile** (cioè non può essere modificato con il controllo). Notiamo infine che, nonostante la presenza di un autovalore non controllabile, il sistema in ciclo chiuso può comunque essere reso asintoticamente stabile in quanto l'autovalore non controllabile ha già $\text{Re} < 0$ e quindi non dà problemi in termini di stabilità.

Esempio 3.3 Consideriamo ora un altro sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avente quindi polinomio caratteristico pari a

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-2)(s-1)$$

Di conseguenza gli autovalori in anello aperto sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Anche questo sistema, come il precedente, è internamente instabile a causa della presenza di un autovalore con $\text{Re} > 0$. Applicando una legge di controllo in retroazione algebrica sullo stato, la matrice della dinamica in ciclo chiuso risulta essere

$$\begin{aligned} A^* = A - BF &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-f_1 & 3-f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare il polinomio caratteristico in ciclo chiuso

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det \begin{bmatrix} s-2+f_1 & -3+f_2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-2+f_1)(s-1)$$

e gli autovalori in ciclo chiuso $\lambda_1^* = 2 - f_1$, $\lambda_2^* = 1$. Notiamo che, come nell'esempio precedente, la retroazione dello stato modifica solo uno dei due autovalori, $\lambda_1 = 2$ mentre non modifica l'altro autovalore $\lambda_2 = 1$. Abbiamo quindi $\lambda_1 = 2$ autovalore **controllabile** e $\lambda_2 = 1$ autovalore **non controllabile**. La differenza principale rispetto all'esempio precedente è che, in questo caso, l'autovalore non controllabile ha $\text{Re} > 0$. Ne consegue che, comunque scegliamo il guadagno di retroazione F , il sistema in ciclo chiuso avrà sempre un autovalore con $\text{Re} > 0$ e di conseguenza sarà sempre internamente instabile. Si tratta quindi di un sistema che non può essere stabilizzato mediante retroazione algebrica sullo stato (né con alcuna altra legge di controllo).

Consideriamo ora un generico sistema LTI TC e supponiamo di applicare una retroazione algebrica sullo stato. Consideriamo poi il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risultante

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF)$$

In analogia con quanto visto nei due esempi, possiamo introdurre la seguente definizione.

Definizione: un autovalore λ_i della matrice A si dice: **non controllabile** se non può essere modificato con il controllo, ossia se è radice di $\varphi^*(s)$ per qualsiasi scelta F ; **controllabile** se invece può essere modificato con il controllo.

Naturalmente, poiché il polinomio caratteristico in ciclo chiuso dipende solo dalle matrici A e B , ne consegue che la controllabilità è una proprietà della coppia (A, B) . Sulla base di questa classificazione in autovalori controllabili e non controllabili, possiamo quindi fattorizzare il polinomio caratteristico come

$$\varphi(s) = \varphi_c(s) \varphi_{nc}(s)$$

con $\varphi_c(s)$ **polinomio caratteristico di controllo** avente come radici tutti e soli gli autovalori controllabili e

$$\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$$

polinomio avente come radici tutti e soli gli autovalori non controllabili. Negli esempi visti

Esempio 3.1	$\varphi_c(s) = s^2 + (b/M)s$	$\varphi_{nc}(s) = 1$
Esempio 3.2	$\varphi_c(s) = s - 2$	$\varphi_{nc}(s) = s + 1$
Esempio 3.3	$\varphi_c(s) = s - 2$	$\varphi_{nc}(s) = s - 1$

Come abbiamo visto, in tutti questi esempi al variare del guadagno di retroazione F è possibile spostare gli autovalori controllabili nella regione di stabilità asintotica, cioè renderli a $\text{Re} < 0$. In particolare, è possibile dimostrare che, per qualsiasi sistema LTI, gli autovalori controllabili possono essere **posizionati**

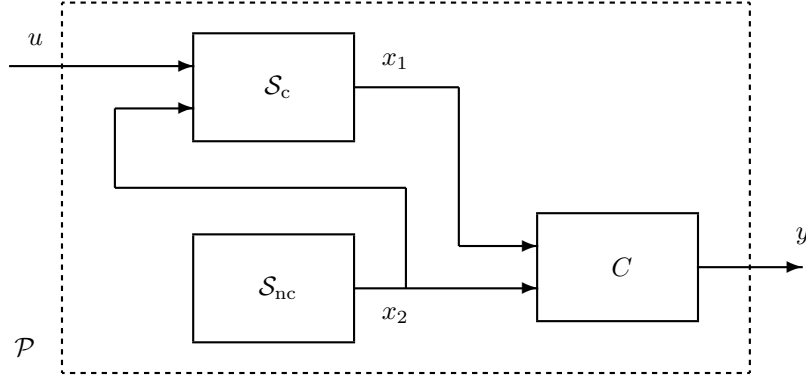


Figura 9: Decomposizione del sistema in parte controllabile e parte non controllabile nel caso dell'esempio 3.2

a piacere nel piano s scegliendo il guadagno di retroazione F . L'unico vincolo è che autovalori complessi devono sempre essere in coppie coniugate, come abbiamo visto nell'esempio 3.1. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Fatto 3.3 Esiste un guadagno in feedback F tale da rendere la dinamica in ciclo chiuso $A^* = A - BF$ asintoticamente stabile **se e solo** se tutti gli (eventuali) autovalori non controllabili hanno $\text{Re} < 0$.

Sulla base di tale risultato, possiamo quindi definire in modo formale il concetto di stabilizzabilità di un sistema.

Definizione: un sistema LTI si dice

- **completamente controllabile** se tutti gli autovalori sono controllabili
- **stabilizzabile** se tutti gli autovalori non controllabili hanno $\text{Re} < 0$

Per studiare la stabilizzabilità dobbiamo fattorizzare $\varphi(s)$ in parte controllabile $\varphi_c(s)$ e parte non controllabile $\varphi_{nc}(s)$. Questo può essere fatto, come negli esempi visti, calcolando il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$ e quindi determinando quali autovalori si modificano e quali invece non si spostano indipendentemente dalla scelta del guadagno di retroazione F . Questo metodo tuttavia può richiedere calcoli complicati in quanto richiede di calcolare in modo esplicito gli autovalori. In alternativa, possiamo determinare direttamente $\varphi_c(s)$ individuando la **parte controllabile** del sistema senza dover fattorizzare $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$. Questo secondo metodo risulta spesso di più semplice applicazione.

Decomposizione di controllabilità

Consideriamo nuovamente il sistema LTI TC dell'esempio 3.2 con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Come abbiamo visto tale sistema ha un autovalore $\lambda_1 = 2$ controllabile e l'altro autovalore $\lambda_2 = -1$ non controllabile. Osserviamo ora che per tale sistema le equazioni di stato sono nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{cases}$$

Possiamo quindi decomporre questo sistema in due parti come in Figura 9, dove

- \mathcal{S}_c sottosistema controllabile:

$$\mathcal{S}_c : \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u$$

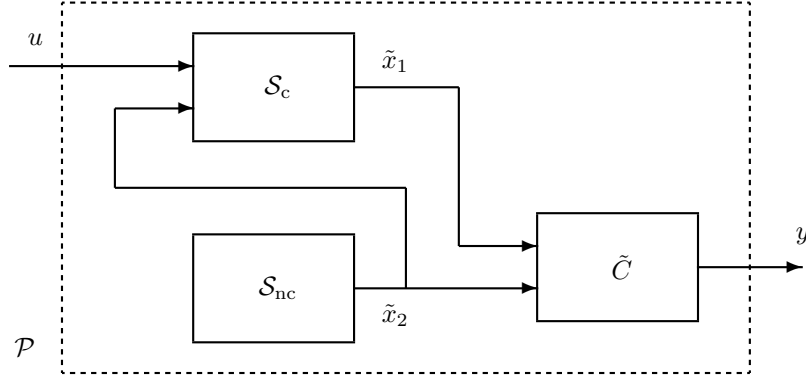


Figura 10: Decomposizione del sistema in parte controllabile e parte non controllabile nel caso generale

- \mathcal{S}_{nc} sottosistema non controllabile:

$$\mathcal{S}_{nc} : \dot{x}_2 = -x_2$$

Notiamo in particolare che il sottosistema non controllabile \mathcal{S}_{nc} è un sistema **autonomo** che non dipende dall'ingresso u né direttamente né indirettamente attraverso x_1 . Tale sottosistema evolve secondo l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$.

Il sottosistema controllabile \mathcal{S}_{nc} invece dipende dall'ingresso al sistema u e ha anche come ingresso lo stato x_2 del sottosistema non controllabile \mathcal{S}_{nc} . Il sottosistema controllabile ha come unico autovalore quello controllabile $\lambda_1 = 2$.

È possibile dimostrare che qualsiasi sistema LTI può essere decomposto in parte controllabile e parte non controllabile come nell'esempio. In alcuni casi, come quello appena illustrato, tale decomposizione è già evidente dalle equazioni di stato. In altri casi, la decomposizione può essere ottenuta mediante un opportuno cambio di coordinate $\tilde{x} = Tx$ con T matrice invertibile.

Consideriamo un generico sistema LTI TC

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

Una qualunque matrice invertibile T di dimensione $n \times n$ con $n = \dim(x)$ definisce un cambio di coordinate $\tilde{x} = Tx$. È immediato verificare² che nel nuovo sistema di coordinate il sistema assume la forma

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases}$$

con $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$. Notiamo che il sistema dinamico non cambia ma cambia la sua rappresentazione interna (cioè la scelta dello stato). Quando il sistema è non completamente controllabile, allora è sempre possibile scegliere la matrice T di cambiamento di coordinate in modo che le matrici \tilde{A} e \tilde{B} che descrivono le equazioni di stato del sistema assumano la forma

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con A_1 matrice quadrata di dimensione pari a n_c numero di autovalori controllabili e A_2 matrice quadrata di dimensione pari a $n - n_c$ numero di autovalori non controllabili. Si noti l'analogia tra questa forma e quella delle matrici A e B nell'esempio 3.2. Il sistema può quindi essere decomposto in due parti

- \mathcal{S}_c sottosistema controllabile:

$$\mathcal{S}_c : \frac{d}{dt}\tilde{x}_1 = \tilde{A}_1\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1u$$

²Moltiplicando per T l'equazione di stato $\dot{x} = Ax + Bu$ otteniamo $T\dot{x} = TAx + TBu$. Ricordando che $Tx = \tilde{x}$ e $x = T^{-1}\tilde{x}$, allora tale equazione può essere riscritta come $\frac{d}{dt}\tilde{x} = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu$.

- \mathcal{S}_{nc} sottosistema non controllabile:

$$\mathcal{S}_{nc} : \frac{d}{dt} \tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 \tilde{x}_2$$

Dove \tilde{x}_1 è il vettore della prime n_c componenti del vettore di stato \tilde{x} e \tilde{x}_2 è il vettore delle rimanenti $n - n_c$ componenti. Di conseguenza il fattore di stato risulta decomposto come $\tilde{x} = [\tilde{x}_1^\top \quad \tilde{x}_2^\top]^\top$.

Il sottosistema non controllabile \mathcal{S}_{nc} è un sistema **autonomo** che non dipende dall'ingresso u né direttamente né indirettamente attraverso \tilde{x}_1 . Tale sottosistema evolve secondo gli autovalori non controllabili. Si dimostra infatti che \tilde{A}_2 ha come polinomio caratteristico proprio $\varphi_{nc}(s)$.

Il sottosistema controllabile \mathcal{S}_{nc} invece dipende dall'ingresso al sistema u e ha anche come ingresso lo stato \tilde{x}_2 del sottosistema non controllabile \mathcal{S}_{nc} . Il sottosistema controllabile ha come autovalori tutti e soli gli autovalori controllabili del sistema, si dimostra infatti che \tilde{A}_1 ha come polinomio caratteristico proprio $\varphi_c(s)$ e che la coppia $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ è completamente controllabile.

Calcolo del polinomio caratteristico di controllo

Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 3.2 e in particolare la corrispondente evoluzione forzata dello stato nel dominio di Laplace

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

Per il sistema considerato la funzione di trasferimento tra ingresso e stato risulta essere

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} B &= \frac{1}{\varphi(s)} \text{Adj}(sI - A) B \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \text{Adj} \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo quindi che l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$ si cancella nel prodotto $(sI - A)^{-1} B$ e quindi non compare come polo nell'evoluzione forzata.

A partire dalla decomposizione in parte controllabile e non controllabile vista, è possibile dimostrare che quanto osservato nell'esempio vale in realtà per qualsiasi LTI, ossia gli autovalori non controllabili si **cancellano** nel prodotto $(sI - A)^{-1} B$ e quindi non compaiono come poli nella funzione di trasferimento tra ingresso e stato. In particolare, vale il seguente risultato.

Fatto 3.4 I poli di $(sI - A)^{-1} B$ sono tutti e soli gli autovalori controllabili del sistema.

Dimostrazione (cenno): Consideriamo un cambio di coordinate $\tilde{x} = Tx$ che decomponga il sistema in parte controllabile e parte non controllabile. Per lo stato \tilde{x} dopo il cambio di coordinate, la risposta forzata assume la forma

$$\tilde{X}_f(s) = (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} U(s)$$

Poiché $\tilde{X}_f(s) = T X_f(s)$ ne consegue che

$$(sI - A)^{-1} B = T^{-1} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$$

Inoltre, data la forma triangolare a blocchi di \tilde{A} e la corrispondente forma di \tilde{B} , con un po' di algebra delle matrici è possibile verificare che

$$(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = (sI - \tilde{A}_1)^{-1} \tilde{B}_1$$

Ne consegue che gli autovalori non controllabili non compaiono come poli di $(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$ e di conseguenza neanche di $(sI - A)^{-1} B$. \square

Il risultato appena enunciato può essere sfruttato per determinare quali autovalori siano controllabili e quali invece siano non controllabili a partire dalla funzione di trasferimento tra stato e uscita $(sI - A)^{-1} B$. In particolare, nel caso di sistemi singoli ingresso $\dim(u) = 1$:

- $\varphi_c(s)$ si calcola come minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1} B$
- $\varphi_{nc}(s)$ si calcola come $\varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$

Per sistemi con più ingressi $\dim(u) > 1$ invece dei denominatori degli elementi di $(sI - A)^{-1} B$ dobbiamo considerare i denominatori dei determinanti delle sottomatrici quadrate della matrice $(sI - A)^{-1} B$.

Concludiamo questa trattazione con un'ultima osservazione. Poiché gli autovalori non controllabili non compaiono come poli di $(sI - A)^{-1} B$ allora tali autovalori non compariranno neanche come poli di $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$. Ne consegue quindi che gli autovalori non controllabili sono autovalori **nascosti** del sistema, cioè

$$\{ \text{autovalori non controllabili} \} \subseteq \{ \text{autovalori nascosti} \}$$

3.4 Raggiungibilità

Consideriamo un sistema LTI TC

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Supponendo che il sistema parta da una condizione iniziale nulla $x(0) = 0$, allora lo stato evolve secondo la sola evoluzione forzata

$$x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Ricordando che lo stato $x(t)$ rappresenta la configurazione in cui internamente si trova il sistema al tempo t , allora risulta naturale chiedersi se, fissato uno stato desiderato x° , sia possibile scegliere opportunamente il controllo u in modo da portare il sistema in tale stato $x(t) = x^\circ$.

Consideriamo ad esempio il caso di un manipolatore robotico che deve svolgere un *task* di tipo *pick and place*, cioè afferrare un oggetto e poi posizionarlo in una locazione desiderata. Allora un task di questo tipo può essere scomposto in due obiettivi: il primo è posizionare il manipolatore robotico in una posizione tale che gli consenta di afferrare l'oggetto (questa configurazione rappresenta un primo stato desiderato x°). Successivamente, dopo aver afferrato l'oggetto, posizionare il manipolatore in modo da poter rilasciare l'oggetto nella locazione desiderata (questa configurazione rappresenta un secondo stato desiderato x°).

Lo studio delle condizioni sotto le quali sia possibile, mediante segnali di controllo, portare lo stato di un sistema dinamico ad un valore desiderato è detto studio delle proprietà di **raggiungibilità** del sistema. Notiamo che la raggiungibilità è una proprietà di esistenza di opportuni controlli in grado di portare il sistema in una condizione desiderata. Essa però non dice come scegliere questi controlli, aspetto del quale si occupa ad esempio la teoria del controllo ottimo.

Esempio 3.4 Lo studio della raggiungibilità riveste particolare importanza in tutti quei casi in cui il sistema dinamico descrive l'evoluzione di una rete di agenti/nodi interconnessi tra loro in cui quindi l' i -esima componente dello stato x_i descrive la configurazione in cui si trova il nodo i . Abbiamo già visto esempi di sistemi di questo tipo quando abbiamo introdotto il modello della dinamica delle opinioni in una rete sociale o anche i modelli di trasferimento delle risorse. In questo contesto, possiamo chiederci se sia possibile portare la configurazione complessiva della rete dove vogliamo agendo con il controllo u solo su un sottoinsieme dei nodi della rete e, nel caso sia possibile, su quanti e quali nodi dobbiamo agire (Figura 11).

Rispondere a domande di questo tipo è di fondamentale importanza in diversi ambiti. Ad esempio, nel marketing, in cui il sistema dinamico descrive le opinioni degli individui su un certo prodotto, gli ingressi rappresentano inserzioni pubblicitarie o altre attività di marketing, e si vuole capire come rendere la campagna di marketing il più possibile mirata. Nell'ambito invece della *cyber-security*, l'ingresso u può rappresentare un agente malevolo che cerca di compromettere il funzionamento complessivo agendo su uno dei nodi della rete e si vuole quindi capire quanto il sistema complessivo sia più o meno robusto alla compromissione di un sottoinsieme di nodi.

Per lo studio della raggiungibilità/controllabilità della dinamiche di rete si rimanda all'articolo di Liu, Slotine e Barabási, "Controllability of complex networks", Nature, 2011.

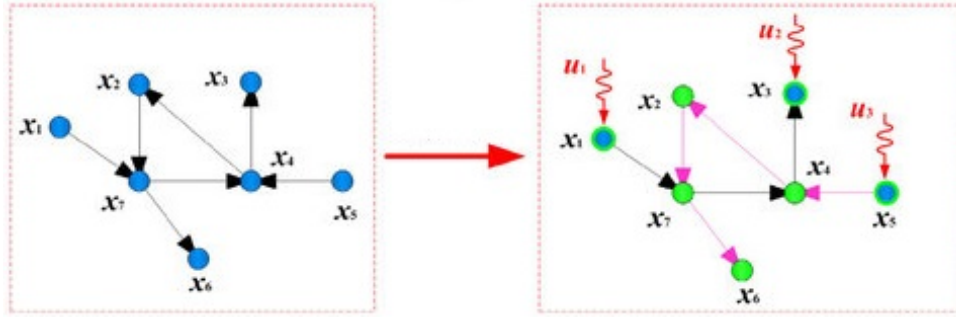


Figura 11: Dinamica di una rete in cui si agisce con il controllo su un sottoinsieme dei nodi.

Prima di introdurre formalmente il concetto di raggiungibilità, vediamo un esempio introduttivo.

Esempio 3.5 Consideriamo ancora il sistema LTI TC dell'esempio 3.2 con \mathcal{S}_c sottosistema controllabile che evolve secondo l'autovalore controllabile $\lambda_1 = 2$

$$\mathcal{S}_c : \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + u$$

e \mathcal{S}_{nc} sottosistema non controllabile che evolve secondo l'autovalore non controllabile $\lambda_2 = -1$

$$\mathcal{S}_{nc} : \dot{x}_2 = -x_2$$

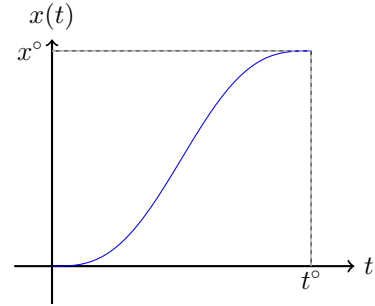
Osserviamo che il sottosistema non controllabile evolve solo in funzione della condizione iniziale

$$x_2(t) = e^{-t} x_2(0)$$

Di conseguenza, quando la condizione iniziale è nulla $x_2(0) = 0$, allora la seconda componente dello stato $x_2(t)$ sarà pari a 0 per ogni $t \geq 0$. Al contrario, scegliendo opportunamente il segnale di controllo u , possiamo portare la prima componente dello stato $x_1(t)$ a qualsiasi valore desiderato. Per il sistema considerato, quindi, partendo da condizioni iniziali nulle $x_1(0) = x_2(0) = 0$ possiamo raggiungere soltanto gli stati con $x_2(0) = 0$.

In generale, per un qualsiasi sistema dinamico, vale la seguente definizione.

Definizione: uno stato x° si dice raggiungibile se esistono un tempo t° e un segnale di controllo $u(t)$, $t \in [0, t^\circ]$ tale da portare lo stato del sistema al valore $x(t^\circ) = x^\circ$ partendo dallo stato zero $x(0) = 0$.



Indichiamo con la notazione X_r l'insieme degli stati raggiungibili. Tale insieme è chiaramente un sottoinsieme dello spazio di stato, cioè $X_r \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n = \dim(x)$. Quando tutti gli stati sono raggiungibili $X_r = \mathbb{R}^n$, il sistema si dice **completamente raggiungibile** in questo caso è possibile portare il sistema in qualunque configurazione mediante il controllo. In generale, invece, X_r è un sottospazio lineare dello spazio di stato \mathbb{R}^n , per questo motivo X_r è anche chiamato **sottospazio di raggiungibilità**.

Per determinare quali stati siano raggiungibili e quali no, possiamo applicare la definizione. Supponiamo quindi che la condizione iniziale sia nulla $x(0) = 0$. Allora il sistema evolve secondo la sola evoluzione forzata

$$x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dove l'esponenziale di matrice è definita in termini della serie di Taylor

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Ad un certo tempo t° possiamo quindi raggiungere tutti gli stati del tipo

$$\begin{aligned} x(t^\circ) &= \int_0^{t^\circ} e^{A(t^\circ - \tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^{t^\circ} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\circ - \tau)^k}{k!} A^k B u(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{t^\circ} \frac{(t^\circ - \tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau \right)}_{u_k(t^\circ)} A^k B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t^\circ) A^k B \end{aligned}$$

Osserviamo che le quantità $u_k(t^\circ)$ sono assegnabili liberamente al variare del segnale u (si tratta dei momenti della funzione u). Di conseguenza, risultano raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di B, AB, A^2B, \dots .

Ricordiamo ora il seguente risultato fondamentale dell'algebra lineare.

Teorema di Caley-Hamilton: data una qualunque matrice quadrata A e il corrispondente polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

vale

$$\varphi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

cioè la matrice A annulla il suo polinomio caratteristico.

Una conseguenza fondamentale del teorema di Cayley-Hamilton è che tutte le potenze A^k con $k \geq n$ possono essere scritte come combinazione lineare delle prime n potenze $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, A^0 = I$, infatti

$$\begin{aligned} A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I \\ A^{n+1} &= A A^n = A(-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I) \\ &= -a_{n-1}A^n - \dots - a_1A^2 - a_0A \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I) - a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A^2 - a_0A \end{aligned}$$

e così via.

Questo fatto implica che nella combinazione lineare

$$x(t^\circ) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t^\circ) A^k B$$

possiamo fermarci alla potenza $n-1$ perché aggiungendo potenze successive non possiamo raggiungere nuovi stati. Di conseguenza risultano raggiungibili tutti gli stati ottenibili come combinazione lineare di $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$.

L'insieme degli stati raggiungibili può quindi essere determinato a partire dalla cosiddetta **matrice di raggiungibilità**

$$\mathcal{R} = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

Infatti l'immagine della matrice \mathcal{R} corrisponde proprio all'insieme dei vettori ottenibili come combinazione lineare delle colonne della matrice $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$. Vale quindi il seguente risultato.

Fatto 3.5 L'insieme X_r degli stati raggiungibili è uguale all'immagine della matrice di raggiungibilità \mathcal{R} .

Notiamo che, per sistemi LTI TC, le proprietà di raggiungibilità sono del tutto indipendenti dalla scelta del tempo t° . In altre parole se uno stato x° è raggiungibile in un certo tempo t° allora è raggiungibile per ogni $t^\circ > 0$.

Ricordiamo che, in generale, l'immagine di una matrice è un sottospazio lineare di dimensione pari al rango della matrice stessa, cioè pari al numero di righe/colonne linearmente indipendenti della matrice. Di conseguenza X_r è un sottospazio lineare di \mathbb{R}^n di dimensione pari a $\text{rank}(\mathcal{R})$.

Ne consegue che il sistema è **completamente raggiungibile** (ossia tutti gli stati sono raggiungibili) **se e solo se**

$$\text{rank}(\mathcal{R}) = n \quad \text{con } n = \dim(x)$$

in modo che $X_r = \mathbb{R}^n$.

Notiamo che in generale la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

ha dimensione pari dimensione $n \times n \dim(u)$ (in quanto B è una matrice $n \times \dim(u)$). Nel caso particolare di sistemi **singolo ingresso** $\dim(u) = 1$, \mathcal{R} risulta essere una matrice quadrata di dimensione $n \times n$. Nel caso particolare di sistemi singolo ingresso, quindi, la condizione di completa raggiungibilità $\text{rank}(\mathcal{R}) = n$ è equivalente³ a richiedere che

$$\det(\mathcal{R}) \neq 0$$

Siamo a questo punto in grado di reinterpretare quanto visto nell'Esempio 3.5 in termini di matrice di raggiungibilità.

Esempio 3.5 (continua) Per il sistema considerato le matrici che descrivono le equazioni di stato sono

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema con un singolo ingresso $\dim(u) = 1$ e stato di dimensione pari a $n = 2$. Di conseguenza la matrice di raggiungibilità risulta essere una matrice quadrata 2×2 pari a

$$\mathcal{R} = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che per tale matrice $\det(\mathcal{R}) = 0$ e quindi, coerentemente con quanto già visto, il sistema non è completamente raggiungibile. In particolare, $\text{rank}(\mathcal{R}) = 1$ (la seconda colonna è il doppio della prima) e quindi X_r è un sottospazio lineare di \mathbb{R}^2 . Tale insieme corrisponde all'insieme di tutti i vettori ottenibili come combinazione lineare delle colonne della matrice \mathcal{R}

$$\begin{aligned} X_r &= \text{Immagine di } \mathcal{R} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Come già visto quindi sono raggiungibili tutti e soli gli stati con $x_2 = 0$.

Per concludere lo studio della raggiungibilità, vediamo ora la sua relazione con la proprietà di controllabilità vista nel precedente paragrafo. A tal riguardo, ricordando la scomposizione del sistema in parte controllabile e non controllabile (Figura 10), risulta immediatamente evidente che lo stato della parte non controllabile \mathcal{S}_{nc} non può essere assegnato mediante il controllo u in quanto evolve in modo del tutto autonomo:

$$\mathcal{S}_{nc} : \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 \tilde{x}_2$$

Si dimostra invece che lo stato della parte controllabile del sistema \mathcal{S}_c può essere assegnato liberamente mediante controllo. In particolare, ricordando che il sottosistema controllabile ha dimensione pari al numero n_c di autovalori controllabili del sistema (corrispondente al grado del polinomio caratteristico di controllo $\varphi_c(s)$), allora vale il seguente risultato.

Fatto 3.6 L'insieme X_r degli stati raggiungibili è un sottospazio lineare di dimensione pari al numero n_c di autovalori controllabili.

Una conseguenza immediata di questo fatto è che per un sistema LTI la completa raggiungibilità e la completa controllabilità sono proprietà del tutto equivalenti, ossia un sistema LTI è **completamente raggiungibile se e solo se è completamente controllabile**. Questo equivalenza può essere sfruttata per semplificare, in alcuni casi, lo studio della controllabilità.

³Ricordiamo che una matrice quadrata ha rango pieno se e solo se il suo determinante è diverso da 0.

Esempio 3.6 Consideriamo un sistema LTI TC con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vogliamo studiare controllabilità e raggiungibilità al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Per prima cosa, possiamo determinare per quali α si ha completa raggiungibilità e controllabilità calcolando la matrice di raggiungibilità. Il sistema considerato ha dimensione $n = 2$ e quindi la matrice di raggiungibilità risulta essere

$$\mathcal{R} = [B|AB] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$$

avente determinante pari a

$$\det(\mathcal{R}) = \alpha(\alpha + 1)$$

Per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ la matrice \mathcal{R} ha rango pieno in quanto $\det(\mathcal{R}) \neq 0$, di conseguenza il sistema è completamente raggiungibile $X_r = \mathbb{R}^2$ e quindi anche completamente controllabile $\varphi_c(s) = \varphi(s)$.

Per $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$ abbiamo invece $\det(\mathcal{R}) = 0$ e di conseguenza in questo caso il sistema non è completamente controllabile/raggiungibile. In particolare, per $\alpha = 0$ si ha

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice \mathcal{R} e quindi

$$X_r = \left\{ x = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Notiamo che il sottospazio di raggiungibilità in questo caso ha dimensione 1 (corrisponde a una retta in \mathbb{R}^2). Sulla base del Fatto 3.6, possiamo quindi concludere che il numero n_c di autovalori controllabili è pari a 1. Per capire quale dei due autovalori del sistema sia quello controllabile dovrei calcolare $(sI - A)^{-1}B$. Quando $\alpha = -1$ la matrice di raggiungibilità è invece

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio generato dalle colonne della matrice \mathcal{R} e quindi

$$X_r = \left\{ x = \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Anche in questo caso il sottospazio di raggiungibilità ha dimensione 1 (corrisponde a una retta in \mathbb{R}^2) e di conseguenza anche il numero n_c di autovalori controllabili è pari a 1.

3.5 Risposta al gradino e specifiche dinamiche

Come già anticipato la scelta del guadagno di retroazione F determina la posizione degli autovalori in ciclo chiuso e, di conseguenza, tanto la stabilità in ciclo chiuso quanto il comportamento nel transitorio. Vediamo ora come scegliere il polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$ in modo da avere un comportamento soddisfacente nel transitorio (specifica 3). Le specifiche dinamiche (nel transitorio) sono usualmente espresse in termini di **risposta al gradino in ciclo chiuso**. Consideriamo quindi un riferimento a gradino $y^\circ(t) = Y_0 \cdot 1(t)$ e la corrispondente risposta forzata in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_{y^\circ y}^*(s) \frac{Y_0}{s} \right\}$$

dove

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H$$

L'idea è quella di scegliere $\varphi^*(s)$ in modo tale che la funzione di trasferimento in ciclo chiuso $G_{y^\circ y}^*(s)$ abbia una forma desiderata. In particolare siano n e m i gradi dei polinomi $\varphi^*(s)$ e $r(s)$, rispettivamente. Posso quindi scrivere

$$\varphi^*(s) = s^n + \varphi_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + \varphi_1^* s + \varphi_0^*$$

$$r(s) = r_m s^m + r_{m-1} s^{m-1} + \dots + r_1 s + r_0$$

dove ho sfruttato il fatto che, per costruzione, il polinomio $\varphi^*(s)$ è monico, ossia ha il coefficiente di grado massimo pari a 1. Supponiamo ora per semplicità che

1. il sistema sia completamente controllabile;
2. il polinomio $r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B$ abbia tutte le radici con $\text{Re} < 0$.

Notiamo che la prima ipotesi mi garantisce di poter assegnare in modo arbitrario, al variare di F , i coefficienti $\varphi_0^*, \dots, \varphi_{n-1}^*$ del polinomio caratteristico in ciclo chiuso $\varphi^*(s)$. Possiamo ad esempio porre

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m} a^*(s)$$

con $a^*(s)$ polinomio di grado $n - m$

$$a^*(s) = s^{n-m} + a_{n-m-1}^* s^{n-m-1} + \dots + a_1^* s + a_0^*$$

scelto da me. Notiamo che la divisione per r_m si rende necessaria perché $\varphi^*(s)$ deve avere il coefficiente di grado massimo pari ad 1.

Con questa scelta la funzione di trasferimento in ciclo chiuso assume la forma

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H = \frac{r(s)}{r(s)a^*(s)/r_m} H = \frac{r_m}{a^*(s)} H$$

A questo punto, per avere inseguimento perfetto di un riferimento costante (specifica 2), imponiamo come di consueto $G_{y^o y}^*(0) = 1$ e quindi

$$G_{y^o y}^*(0) = \frac{r_m}{a^*(0)} H = \frac{r_m}{a_0^*} H = 1 \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{a_0^*}{r_m}$$

Quindi nel complesso si ha

$$G_{y^o y}^*(s) = \frac{r_m}{a^*(s)} H = \frac{a_0^*}{a^*(s)}$$

Facciamo ora due **osservazioni fondamentali**.

- Poiché il polinomio $a^*(s)$ è scelto da me, posso dare alla funzione di trasferimento in ciclo chiuso la forma che desidero, in modo da avere un buon comportamento della risposta al gradino in ciclo chiuso e soddisfare le specifiche nel transitorio. Vedremo nel seguito le scelte tipiche.
- Il procedimento visto si basa sull'ipotesi che $r(s)$ abbia tutte radici con $\text{Re} < 0$. Infatti sotto questa ipotesi posso scegliere $\varphi^*(s)$ in modo da cancellare completamente il numeratore $r(s)$, altrimenti non posso farlo! Ricordiamo infatti che $\varphi^*(s)$ deve essere un polinomio con tutte le radici a $\text{Re} < 0$ per avere stabilità asintotica (specifica 1). Una **regola generale** nel progetto dei sistemi di controllo è infatti che non si possono mai effettuare cancellazioni tra poli/zeri instabili, cioè a $\text{Re} \geq 0$.

Esempio 3.7 Consideriamo un sistema LTI TC con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

Applicando un controllo in retroazione algebrica sullo stato si ha

$$A^* = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - f_1 & -f_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso risulta quindi essere

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 + f_1 & s + f_2 \end{bmatrix} = s^2 + f_2 s + f_1 + 1$$

che ha grado $n = 2$. Al variare di f_1 e f_2 possiamo assegnare a piacere i coefficienti di $\varphi^*(s)$ (il sistema è infatti completamente controllabile). Si ha inoltre

$$r(s) = C \text{Adj}(sI - A)B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \text{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2s + 1$$

Quindi in questo caso $r(s)$ è un polinomio di grado $m = 1$ con coefficiente di grado massimo pari a $r_m = r_1 = 2$. Il polinomio $a^*(s)$ sarà quindi di gradi $n - m = 1$ cioè $a^*(s) = s + a_0^*$. Ad esempio poniamo $a_0^* = 10$. Notiamo che per il sistema considerato valgono le ipotesi 1 e 2 e quindi possiamo porre

$$\begin{aligned} \varphi^*(s) &= \frac{r(s)}{r_m} a^*(s) = \frac{2s+1}{2} (s+10) = s^2 + \frac{21}{2}s + 5 \\ H &= \frac{a_0^*}{r_m} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione otteniamo quindi $f_2 = 21/2$ e $f_1 = 4$. Con queste scelte la funzione di trasferimento in ciclo chiuso sarà

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{a_0^*}{a^*(s)} = \frac{10}{s+10}$$

che ha guadagno in continua unitario e un polo in -10 poiché abbiamo scelto $a_0^* = 10$. Naturalmente, cambiando il valore di a_0^* cambierebbe la posizione del polo in ciclo chiuso.

Seguendo le linee guida sopra illustrate per la scelta di $\varphi^*(s)$, il polinomio $a^*(s)$ definisce i poli in ciclo chiuso e di conseguenza la forma della risposta al gradino in ciclo chiuso

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G_{y^\circ y}^*(s) \frac{Y_0}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a_0^*}{a^*(s)} \frac{Y_0}{s} \right\}$$

Vediamo ora come è fatta tale risposta al gradino nei casi tipici e come possono essere definite le specifiche dinamiche nel transitorio.

- a) Considero per primo il caso $n - m = 1$ (come nell'esempio 3.7). In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso corrisponde a quella di un sistema stabile del I ordine

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{a_0^*}{s + a_0^*}$$

con $a_0^* > 0$ per la stabilità. La quantità $\tau = 1/a_0^*$ è detta **costante di tempo** del sistema e definisce la velocità della risposta al gradino. Consideriamo come riferimento un gradino unitario $y^\circ(t) = 1(t)$ si ha infatti

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a_0^*}{s(s + a_0^*)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + a_0^*)} \right\} = (1 - e^{-a_0^* t}) 1(t)$$

che ha l'andamento riportato in Figura 9. La risposta al gradino converge quindi al valore di regime con un andamento monotono. In questo caso, la specifica dinamica è usualmente espressa in termini del cosiddetto **tempo di assestamento** $T_{a,\varepsilon}$, definito come il tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro l' $\varepsilon\%$ del valore di regime da $T_{a,\varepsilon}$ in poi (valori tipici per ε sono 1 e 5). Data l'espressione analitica per la risposta al gradino è immediato verificare che in questo caso

$$T_{a,\varepsilon} = \tau \ln(100/\varepsilon) = \frac{1}{a_0^*} \ln(100/\varepsilon)$$

Si vede quindi che più grande è a_0^* (ovvero più è lontano dall'asse immaginario il polo) più piccolo è il tempo di assestamento (e quindi più rapida la convergenza al valore di regime).

- b) Consideriamo ora il caso $n - m = 2$ (come nell'esempio del carrello). In questo caso la funzione di trasferimento in ciclo chiuso corrisponde a quella di un sistema stabile del II ordine

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{a_0^*}{s^2 + a_1^* s + a_0^*}$$

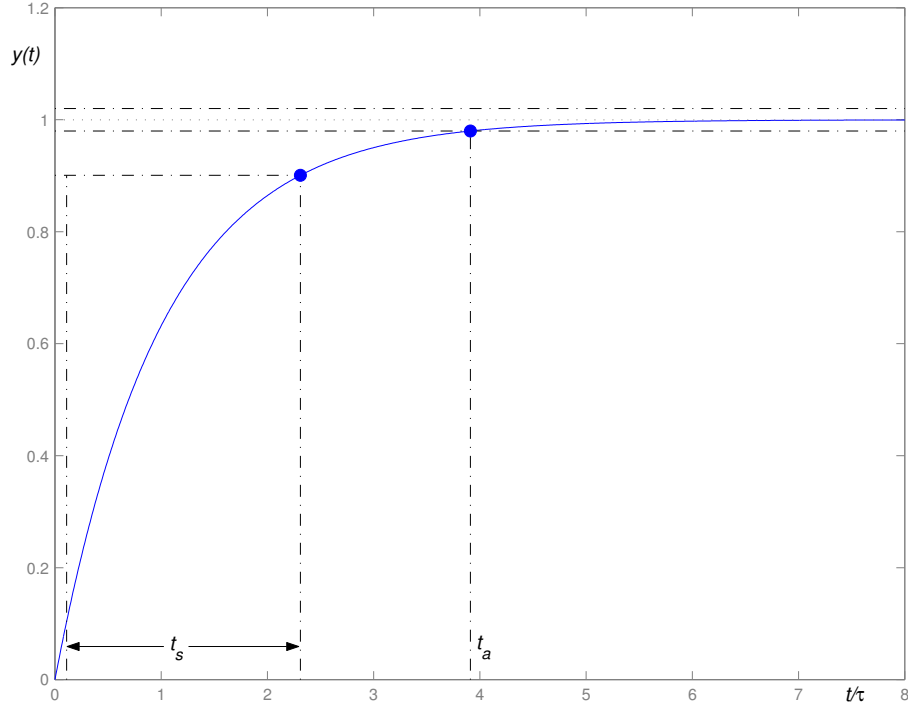


Figura 12: Andamento nel tempo della risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso a).

con $a_0^* > 0$ e $a_1^* > 0$ per la stabilità. Definiamo come parametri caratteristici la quantità $\zeta = \frac{a_1^*}{2\sqrt{a_0^*}}$ detta **smorzamento** e la quantità $\omega_n = \sqrt{a_0^*}$ detta **pulsazione naturale**. Possiamo quindi riscrivere la funzione di trasferimento nella forma equivalente

$$G_{y^\circ y}^*(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Notiamo che i poli in ciclo chiuso sono

$$p_{1,2}^* = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Distinguiamo quindi due casi:

- Quando $\zeta \geq 1$ (caso sovrasmorzato) ho due poli reali. L'andamento della risposta al gradino è simile al caso a).
- Quando $0 < \zeta < 1$ (caso sottosmorzato) ho una coppia di poli complessi coniugati.

In questo secondo caso, considerando un riferimento a gradino unitario $y^\circ(t) = 1(t)$, la risposta al gradino in ciclo chiuso risulta essere

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

che ha l'andamento riportato in Figura 10. In questo caso al tendere di ζ a 0 i poli sono sempre più vicini all'asse immaginario e quindi si ha una componente oscillatoria sempre più evidente. Notiamo la presenza di una **sovraelongazione**, cioè la risposta al gradino supera temporaneamente il valore di regime prima di convergere ad esso. In questo caso le specifiche dinamiche sono usualmente espresse in termini di **tempo di assestamento** $T_{a,\varepsilon}$, definito come nel caso precedente, e di **massima sovraelongazione percentuale** $S\%$ definita come la massima percentuale di superamento del valore di regime. In particolare, per un sistema del II ordine, si ha

$$\begin{aligned} T_{a,\varepsilon} &\approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(100/\varepsilon) \\ S\% &= 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

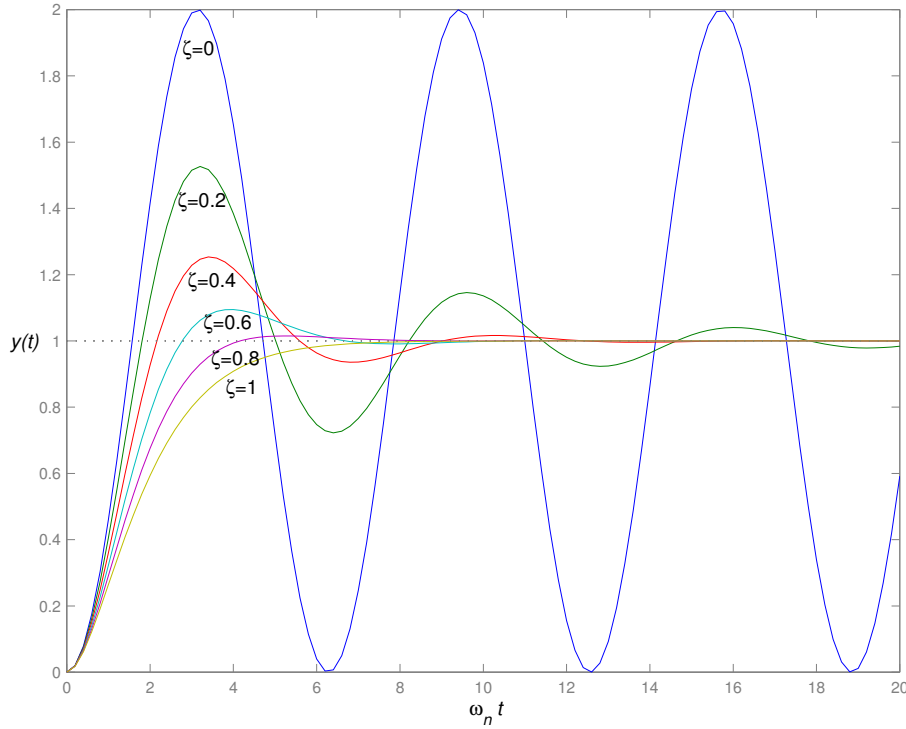


Figura 13: Andamento nel tempo della risposta al gradino in ciclo chiuso nel caso b) al variare dello smorzamento ζ nell'intervallo $(0, 1)$.

Quindi in generale: più grande in valore assoluto è la parte reale dei poli $\zeta \omega_n$ (ossia più lontani dall'asse immaginario sono i poli) più piccolo è il tempo di assestamento (e quindi più rapida la convergenza al valore di regime); maggiore è lo smorzamento ζ minore è la sovraelongazione (in Figura 11 è riportato l'andamento di $S\%$ in funzione di ζ). Sfruttando queste relazioni, specifiche espresse in termini di $T_{a,\varepsilon}$ e $S\%$ possono essere tradotte in specifiche espresse in termini di ζ e ω_n (o equivalentemente di a_0^* e a_1^*).

- c) Consideriamo ora il caso $n - m > 2$. In questo caso per posizionare gli $n - m$ poli della funzione di trasferimento in ciclo chiuso si cerca di ricondursi ai casi a) o b). Tipicamente 2 poli sono posizionati sulla base delle specifiche dinamiche (ad esempio espresse in termini di $T_{a,\varepsilon}$ e $S\%$). Tali poli sono detti **poli dominanti**. I rimanenti $n - m - 2$ poli sono scelti con una parte reale molto minore di quella dei poli dominanti, in modo che abbiamo quindi un transitorio molto veloce che si esaurisce rapidamente nella risposta al gradino. Questi poli sono detti **poli in alta frequenza**. Il polinomio $a^*(s)$ viene quindi scelto nella forma

$$a^*(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \tilde{a}^*(s)$$

con $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ il polinomio dei poli dominanti e $\tilde{a}^*(s)$ il polinomio stabile dei poli in alta frequenza.

Concludiamo questa breve disamina sulle specifiche nel transitorio con due osservazioni finali.

Per prima cosa, ricordiamo che il procedimento visto per assegnare la funzione di trasferimento in ciclo chiuso non si può applicare quando il polinomio $r(s)$ ha radici con $\text{Re} \geq 0$. Infatti tali zeri instabili non possono essere cancellati e si ritrovano immutati nella funzione di trasferimento in ciclo chiuso. In questo caso, l'andamento della risposta al gradino può essere sostanzialmente diverso da quelli tipici (in particolare può essere presente una **sottoelongazione**, ossia la risposta può assumere temporaneamente un valore opposto in segno a quello desiderato) e il soddisfacimento delle specifiche dinamiche diventa più complicato. La presenza di zeri instabili comporta infatti limitazioni in termini delle specifiche ottenibili. Per analisi di questo tipo si rimanda a testi/corsi specifici di controlli automatici.

Come ulteriore considerazione valida in generale, abbiamo visto che posizionare i poli in ciclo chiuso con una parte reale molto negativa garantisce un transitorio rapido in termini di tempo di assestamento $T_{a,\varepsilon}$. Tuttavia va sempre tenuto presente che per posizionare i poli in ciclo chiuso con una parte reale molto

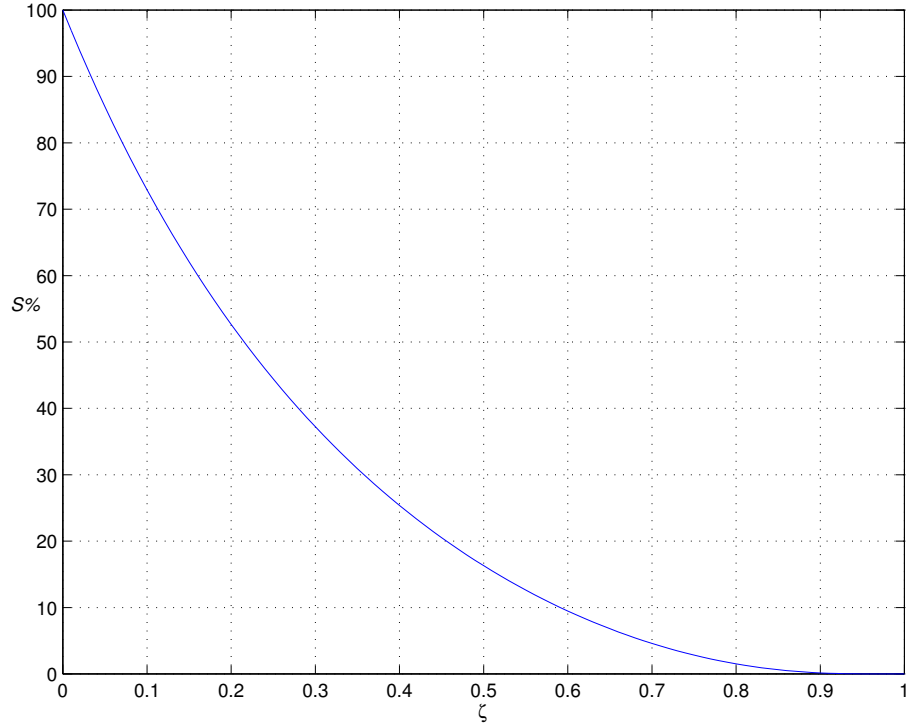


Figura 14: Andamento della massima sovraelongazione percentuale $S\%$ in funzione dello smorzamento ζ nel caso b).

negativa può essere necessario un guadagno di retroazione F molto grande in quanto

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)$$

A sua volta, un guadagno di retroazione F grande può comportare un'azione di controllo $u = -Fx + Hy^\circ$ non moderata. Questo si scontra con il fatto che nei sistemi di controllo reali esistono limitazioni intrinseche alle azioni di controllo che si possono applicare (ad esempio legate alla fisica degli attuatori). Nella pratica, quindi, devo scegliere F in modo da avere un buon compromesso tra velocità di convergenza al regime permanente e **moderazione dell'azione di controllo**. Questo può essere fatto in modo sistematico mediante tecniche di **controllo ottimo** in cui il guadagno F viene scelto in modo da minimizzare funzionali di costo del tipo

$$J = \int_0^\infty \{[y^\circ(\tau) - y(\tau)]^2 + \rho u^2(\tau)\} d\tau$$

che tengono conto congiuntamente di obiettivi di inseguimento nel termine $(y^\circ - y)^2$ e di obiettivi di moderazione dell'azione di controllo nel termine u^2 . In questo caso, lo scalare ρ rappresenta un parametro di progetto che pesa l'importanza relativa dei due obiettivi di controllo. Anche per approfondimenti sul controllo ottimo si rimanda a testi/corsi specifici di controlli automatici.