

Serie Fourier spiegata molto male

[Insert author here]

01/01/1970

Introduzione

Il seguente documento e i suoi compagni sono fatti con la speranza di poter aiutare anche il maggiore tra i cretini nella strada verso il 18 al primo parziale, più che altro perché l'autore dei seguenti documenti è il suddetto cretino, e vuole quel cazzo di 18.

Questo fine assai nobile ha avuto però come risultato il fatto che sti appunti sono di un lento immane, spero almeno che non sia un lento inutile da lezione di automatica.

1 Idea

Abbiamo un segnale periodico, e il suo periodo è T_0 , e vogliamo analizzarlo in frequenza, vorremo quindi sapere quanto di questo segnale è fatto da onde a frequenza tot, quanto di questo segnale è fatto da onde a frequenza tat, e così via.

Detta in matematiche, vogliamo scomporre questo segnale in un'onda base di frequenza tot, una di frequenza tat, e così via, in modo che la somma di tutte le onde base dia come risultato il segnale di partenza.

L'idea matematica di onda base è un seno o un coseno. Qui useremo coseni perché li usa il prof.

2 Arriviamo alla cazzata di formula

2.1 la frequenza fondamentale

Una grandezza che verrà abusata nella formula è la cosiddetta *frequenza fondamentale*, per definirla diciamo che un segnale è periodico periodo T_0 , se la frequenza è $\frac{1}{\text{periodo}}$, allora sto segnale ha frequenza

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Visto che però dovremo vedere un sacco di frequenze diverse ci si impallerebbe a chiamarla la *frequenza* del segnale, e visto che questa frequenza è di base per

tutta la parte di Fourier, diciamo che f_0 è la **frequenza fondamentale** del segnale.

2.1.1 frequenza fondamentale, ora in tutte le componenti

Se il segnale di sopra, chiamiamolo $x(t)$, è periodico di periodo T_0 non avrebbe molto senso se una sua componente ha periodo $0.7T_0$, visto che il suo contributo o lo annulla o ti sfotte il periodo, quindi possiamo dire che le componenti di $x(t)$ si ripetono uguali dopo un periodo T_0 , questo succede quando la componente ha periodo T_0 (grazialcazzo), vale a dire quando si è ripetuta *una* volta dopo T_0 secondi, ma anche quando si è ripetuta 2, 3, o 4 volte dopo T_0 , quindi se come periodo ha $\frac{T_0}{2}$ o $\frac{T_0}{3}$... Generalizzando, una componente base di questo segnale avrà periodo $\frac{T_0}{\text{qualche intero } n}$, quindi di frequenza di sta componente sarà

$$\frac{1}{\frac{T_0}{n}} = \frac{n}{T_0} = n \frac{1}{T_0} = n f_0$$

un multiplo intero della frequenza fondamentale.

2.1.2 forma della singola componente

Abbiamo detto che rappresenteremo le componenti base del segnale come coseni, e visto il pippone sulle frequenze di sopra capirete che ci servono coseni col periodo giusto (o alla frequenza giusta, tanto vuol dire la stessa cosa).

La frequenza/ periodo di un coseno dipende dal suo argomento, in particolare da quanto è “veloce” il suo argomento, $\cos(\text{roba} \times 2)$ ha metà del periodo (e quindi il doppio della frequenza) di $\cos(\text{roba})$, quindi vediamo un po’ come cazzo mettere sti coseni.

Un $\cos(x)$ ha periodo 2π , se facciamo accelerare x e lo rendiamo $\cos(2\pi x)$ abbiamo periodo 1, già più maneggiabile, ma ci serve un periodo di $\frac{T_0}{\text{qualche intero } n}$.

Se $\cos(\text{roba} \times n)$ divide il periodo per n , per moltiplicarlo per n dividerò, quindi $\cos(\frac{\text{roba}}{n})$, dal periodo 1 di $\cos(2\pi)$ moltiplichiamo il periodo per $\frac{T_0}{n}$, ottenendo

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{n}}\right)$$

Che, ricordandoci di aver dichiarato $f_0 = \frac{1}{T_0}$, può essere riscritto in umaneso come

$$\cos(2\pi n f_0)$$

E con questo abbiamo un segnale di frequenza f_0 , alleluja, ma vorremo essere il più generici possibile, sappiamo che sta componente ha periodo $\frac{T_0}{n}$ (o frequenza $n f_0$, che mi sembra più pronunciabile), ma la frequenza è l’unico vincolo che abbiamo su sto coseno, non sappiamo quanto è alto o che fase iniziale ha questa componente.

Data una generica ampiezza A_n , e data una generica fase iniziale θ_n , possiamo quindi scrivere la nostra componente a frequenza $n f_0$ come

$$A_n \cos(2\pi n f_0 + \theta_n)$$

Da notare infatti come ne' l'ampiezza ne' la fase iniziale cambiano la velocità dell'argomento, la frequenza resta quindi la stessa, abbiamo solo scritto un coseno a frequenza nf_0 nel modo più generico possibile.

2.1.3 ecco la cazzo di formula

Qualche era geologica fa avevamo detto che il segnale alla fine era la somma di tutte le componenti di base, per riallinearci con il prof useremo il nome k invece che n , visto che tanto il nome da se non conta¹.

Date le componenti base come le abbiamo appena descritte il segnale potrà essere quindi riscritto come:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

L'elemento con $k = 0$ sarà un A_k costante moltiplicato per $\cos(0 + \theta_k)$ costante, e sarà quindi tutto costante, visto ci fa comodo levarcelo dalla sommatoria, riscriviamo il tutto come

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

Visto che abuseremo a breve delle formule di Eulero, e non vogliamo portarci dietro $\frac{1}{2}$ dappertutto, possiamo dimezzare tutti gli A_k e riscrivere questa cosa come fece il prof

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

Passiamo ora a sti maledetti esponenti complessi, iniziamo sperando che siate un minimo familiari con questa formula ²

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

Sappiate che torna utile riscrivere il seno e il coseno con questa formula, ricordandoci che il $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e che il $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, e sfottendo un minimo con queste formule, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) + \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) \\ e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) + \cos(\theta) - j \sin(\theta) \\ e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2 \cos(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{aligned}$$

¹Vedi: scena del balcone

²usiamo la j invece della i perché il prof usa la j invece della i , in molte branche dell'ingegneria & CO. la i ha già fin troppi significati come lettera per usarla *pure* come numero immaginario