Serie Fourier spiegata molto male

[Insert author here]

01/01/1970

Introduzione

Il seguente documento e i suoi compagni sono fatti con la speranza di poter aiutare anche il maggiore tra i cretini nella strada verso il 18 al primo parziale, più che altro perché l'autore dei seguenti documenti è il suddetto cretino, e vuole quel cazzo di 18.

Questo fine assai nobile ha avuto però come risultato il fatto che sti appunti sono di un lento immane, spero almeno che non sia un lento inutile da lezione di automatica.

1 Idea

Abbiamo un segnale periodico, e il suo periodo è T_0, e vogliamo analizzarlo in frequenza, vorremo qundi sapere quanto di questo segnale è fatto da onde a frequenza tot, quanto di questo segnale è fatto da onde a frequenza tat,e così via.

Detta in matematichese, vogliamo scomporre questo segnale in un onda base di frequenza tot, una di frequenza tat, e così via, in modo che la somma di tutte le onde base dia come risultato il segnale di partenza

L'idea matematichese di onda base è un seno o un coseno. Qui useremo coseni perché li usa il prof.

2 Arriviamo alla cazzo di formula

2.1 la frequenza fondamentale

Una grandezza che verrà abusata nella formula è la cosiddetta *frequenza fondamentale*, per definirla diciamo che il segnale, visto che è periodico, ha periodo T_0, e se la frequenza è $\frac{1}{periodo}$, allora sto segnale ha frequenza

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Visto che però dovremo vedere un sacco di frequenze diverse ci si impallerebbe a chiamarla la *frequenza* del segnale, e visto che è di base per tutta la formula, f_0 è detta **frequenza fondamentale** del segnale.

2.1.1 frequenza fondamentale, ora in tutte le componenti

Se il segnale di sopra, chiamiamolo $x(t)$, è periodico di periodo T_0 non avrebbe molto senso se una sua componente ha periodo $0.7T_0$, visto che il suo contributo o lo annulli o ti scazza il periodo, quindi possiamo dire che le componenti di $x(t)$ si ripetono uguali dopo un periodo T_0, questo succede quando la componente ha periodo T_0 (grazialcazzo), quindi quando si è ripetuta una volta dopo T_0 secondi, ma anche quando si è ripetuta 2,o 3 volte dopo T_0, quindi se come periodo ha $\frac{T_0}{2}$ o $\frac{T_0}{3}$... Generalizzando, una componente base di questo segnale avrà periodo $\frac{T_0}{qualchen \in \mathbb{N}}$, quindi di frequenza avrà

$$\frac{1}{\frac{T_0}{n}} = \frac{n}{T_0} = n\frac{1}{T_0} = nf_0$$

un multiplo intero della frequenza fondamentale.

2.1.2 forma della singola componente

Abbiamo detto che rappresenteremo le componenti base del segnale come coseni, e visto il pippone sulle frequenze di sopra capirete che ci servono col periodo giusto (o alla frequenza giusta, vuol dire la stessa cosa).

La frequenza/perido di un coseno dipenderà dal suo argomento, in particolare da quanto è "veloce" il suo argomento, $\cos(roba \times 2)$ ha metà del periodo di $\cos(roba)$, vediamo un po' come cazzo mettere sti coseni.

Un $\cos(x)$ ha periodo 2π, se facciamo accelerare x e lo rendiamo $\cos(2\pi x)$ abbiamo periodo 1, già più maneggiabile, ma ci serve un periodo di $\frac{T_0}{qualche\ intero\ n}$.

Se $\cos(roba \times n)$ divide il periodo per 2, per moltiplicarlo per 2 dividerò, quindi $\cos(\frac{roba}{n})$, dal periodo 1 di $\cos(2\pi)$ moltiplichiamo il periodo per $\frac{T_0}{n}$, ottenendo

$$\cos(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{n}})$$

Che, ricordandoci di aver dichiarato $f_0 = \frac{1}{T_0}$, può essere riscritto in umanese come

$$\cos(2\pi n f_0)$$

E con questo abbiamo un segnale di frequenza f_0, alleluja, ma vorremo essere il più generici possibile, sappiamo che sta componente ha periodo $\frac{T_0}{n}$ (o frequenza nf_0, che mi sembra più pronunciabile), ma la frequenza è l'unico vincolo che abbiamo su sto coseno, non sappiamo quanto è alto o che fase iniziale ha questa componente.

Data una generica ampiezza A_n, e data una generica fase iniziale θ_n, possiamo quindi scrivere la nostra componente a frequenza nf_0 come

$$A_n cos(2\pi n f_0 + \theta_n)$$

Da notare infatti come ne' l'ampiezza ne' la fase iniziale cambiano la velocità dell'argomento, la frequenza resta quindi la stessa, abbiamo solo scritto un coseno a frequenza nf_0 nel modo più generico possibile.

2.1.3 ecco la cazzo di formula

Qualche era geologica fa avevamo detto che il segnale alla fine era la somma di tutte le componenti di base, per riallinearmi con il prof useremo il nome k invece che n, visto che tanto il nome da se non conta[1].

Date le componenti base come le abbiamo appena descritte il segnale potrà essere quindi riscritto come:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

L'elemento con $k = 0$ sarà un A_k costante moltiplicato per $\cos(0 + \theta_k)$ costante, e sarà quindi tutto costante, visto ci fa comodo levarcelo dalla sommatoria, riscriviamo il tutto come

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

Visto che abuseremo a breve delle formule di Eulero, e non vogliamo portarci dietro $\frac{1}{2}$ dappertutto, possiamo dimezzare tutti gli A_k e riscrivere questa cosa come fece il prof

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_0 + \theta_k)$$

Passiamo ora a sti maledetti esponenti complessi, iniziamo sperando che siate un minimo familiari con questa formula [2]

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Sappiate che torna utile riscrivere il seno e il coseno con questa formula, ricordandoci che il $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e che il $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, e sfottendo un minimo con queste formule, si ottiene

$$\begin{aligned}
e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) \\
e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \\
e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2\cos(\theta) \\
\cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}
\end{aligned}$$

[1] Vedi: scena del balcone

[2] usiamo la j invece della i perché il prof usa la j invece della i, in molte branche dell'ingegneria & Co. la i ha già fin troppi significati come lettera per usarla *pure* come numero immaginario