

FORZA ELETTRICA E CAMPO

martedì 10 marzo 2020 20:35

Similitudini tra gravità (più debole) ed elettromagnetismo che tuttavia non è preponderante per prevalenza di materia neutra, secondo Gilbert (1600) ci sono

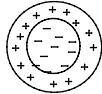
- **ISOLANTI**: VETRO (+) e BACHELITE (-), se si strofinano abbiamo Attrazione/Repulsione

- **CONDUTTORI**: Che consentono Mobilità di cariche Positive e Negative

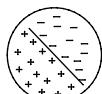
La carica inoltre è QUANTIZZATA (ma grande numero di Elettroni), $q_{min} = -e$ $e > 0$

- CARICAMENTO DI UNA SFERA

Cariche che si spostano sulla superficie ()



Cariche divise nelle semisfere ()



- FORZA ELETTRICA (COULOMB)

Nel 1875 coulomb, tramite molla di CAVENDISH definisce la Formula

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 * 10^9$$
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 * 10^{-12}$$

Le Unità di Misura sono :

$$\text{Ampere (int. di corrente)} \quad i = \frac{\delta q}{\delta t} \quad A = \frac{C}{s}$$

$$\text{Coulomb (Carica)} \quad q \quad C = A * s$$

In Forma Vettoriale ...

PER VARIE DISTRIBUZIONI DI CARICA

- CARICHE PUNTIFORMI

$$\vec{F} = k \frac{q q_0}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \sum_i^N E_i$$

- CARICA CONTINUA

- CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [\frac{N}{C}]$$

$$\delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \delta q \vec{u}$$

$$\vec{E} = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \vec{u} dV$$

ρ : Funzione di Densità

Riprendendo il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q_0 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{u}_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \vec{u}_2 \right)$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

• LINEE DI FORZA

Forza e campo sono paralleli e concordi, posso provare a disegnare delle "linee di Forza", ovvero

linee nello spazio che descrivono graficamente l'andamento del verso del campo elettrico

le linee seguono la convenzione del campo (da positivo a negativo)

DISTRIBUZIONI DI CARICA CONTINUA

martedì 10 marzo 2020 23:35

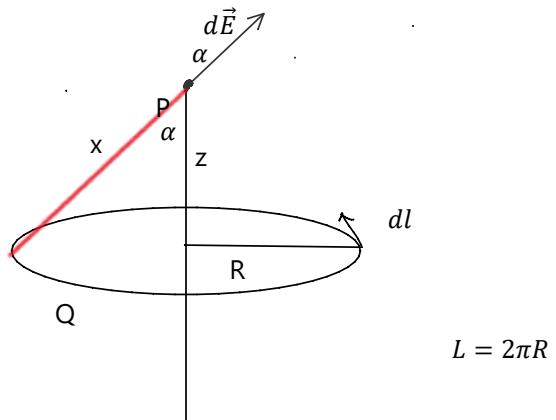
Dalla formula

$$\vec{E} = \frac{1}{4\epsilon_0\pi} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{u} \quad r, \hat{u} \text{ variabili}$$

- ASSE ANELLO

La densità di carica Uniforme sulla circonferenza

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$



La carica infinitesima sull'anello

$$dq = \lambda dl$$

Ci da un Campo infinitesimo (con ipotenusa)

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + z^2}$$

Ora devo integrare **Vettorialmente** !!! (la direzione cambia nell'integrazione)

La simmetria dell'asse mi suggerisce che il campo sarà solo lungo z

Ovvero integro **Vettorialmente** lungo z

$$\vec{E} = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2 + z^2} \hat{u} = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{u}_z = \frac{\lambda z}{4\epsilon_0\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_L dl \hat{u}_z = \frac{\overbrace{2\pi R \lambda z}^Q}{4\epsilon_0\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z = \frac{Q z}{4\epsilon_0\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z$$

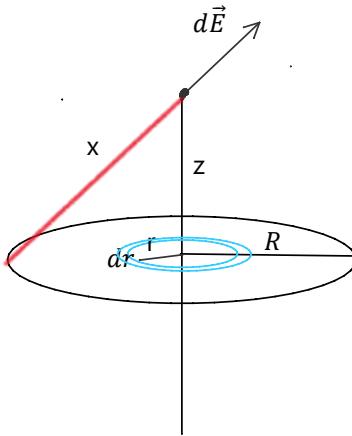
- ASSE DI UN DISCO



• ASSE DI UN DISCO

La densità di carica diventa su cerchio

$$\sigma = \frac{Q}{\pi r^2}$$



L'idea è di sfruttare ancora una simmetria

Bisogna scomporre la superficie negli infinitesimi

Più semplici per la dimensione inferiore

L'infinitesimo più semplice e simmetrico per questo problema è un **anellino centrato** di spessore infinitesimo

Di carica : $dq = \sigma 2\pi r dr$

r è variabile per ogni anellino, mentre dr è infinitesimo

Il campo è per simmetria lungo z , sfrutto il campo dell'anello

$$d\vec{E} = \frac{dQz}{2\epsilon_0\pi(dr^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z = \frac{\sigma 2\pi r dr z}{2\epsilon_0\pi(dr^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z$$

Ora integro lungo tutto il disco

$$\vec{E} = \int_0^R d\vec{E} = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr z}{2\epsilon_0\pi(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{u}_z = \frac{\sigma 2\pi z}{2\epsilon_0\pi} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr \hat{u}_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^R \hat{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right) \hat{u}_z$$

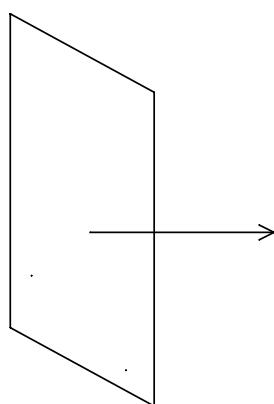
• PIANO INFINITO

si può pensare di far tendere il raggio di un disco ad ∞

Ovvero

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \vec{u}$$

Che non dipende dalla distanza dal piano !



CAMPO ED ALTRO . . .

mercoledì 25 marzo 2020 23:20

• MOTO IN CAMPO COSTANTE

Considerando particelle massicce in un campo elettrico posso rendere un problema di elettrostatica in un problema di Dinamica

Nel caso di campo uniforme: $qE = ma \Rightarrow a = \frac{q}{m} E$

• LAVORO DELLA FORZA ELETTRICA

Dimostriamo che il campo Elettrico è conservativo , ovvero che il lavoro non dipende dal cammino

- il lavoro infinitesimo

$$dW = Fds = q_E * ds = q E \cos\theta ds$$

- su un circuito, integro

$$W = \int_C dW = \int_C q E \cos\theta ds$$

dividendo per la carica ottengo la **TENSIONE**

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B E \cos\theta ds$$

- spezzo il circuito

$$\oint_C dW = \int_{C1} F * ds - \int_{C2} F * ds = W_1 - W_2$$

- f.e.m. (circuitazione), d.d.p, energia

$$f.e.m. = \oint_C E ds , \quad (\text{che è nulla in campo Elettrostatico})$$

$$d.d.p. = \Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B E * ds$$

$$W_{AB} = -q \int_A^B E ds = -q \Delta V$$

$$\Delta U = q \Delta V$$

• DIMOSTRAZIONE CAMPO CONSERVATIVO

- lavoro campo elettrico infinitesimo

$$dW = q_0 E * ds = q_0 \frac{q}{4\epsilon_0\pi r^2} \hat{u} * ds = q_0 \frac{q}{4\epsilon_0\pi r^2} dr$$

- circuitazione

lo spostamento sarà sempre lungo dr

$$V_B - V_A = \oint_A^B E * ds = \frac{q}{4\epsilon_0\pi} \oint_A^B \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{q}{4\epsilon_0\pi r_A} - \frac{q}{4\epsilon_0\pi r_B} \right)$$

se il circuito è chiuso $A = B \Rightarrow f.e.m. = 0$

vale anche per una distribuzione di cariche, posso raccogliere per principio di sovrapposizione la somma di campi elettrici

POTENZIALE ELETROSTATICO

se ipotizzo di calcolare la differenza di potenziale con una carica ed un punto ad ∞

$$\int_{\infty}^r E * ds = \left(\frac{q}{4\epsilon_0\pi \infty} - \frac{q}{4\epsilon_0\pi r} \right) = -\frac{q}{4\epsilon_0\pi r} = V(r) = -\frac{q}{4\epsilon_0\pi r}$$

- con distribuzione di cariche

$$W = \int_{\infty}^r E * ds = \int_{\infty}^r \sum E * ds = \sum \int_{\infty}^r E * ds = \sum_i V_i(r)$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \sum E * ds = - \sum \int_A^B E * ds = \left(\sum \frac{q}{4\epsilon_0\pi r_A} - \sum \frac{q}{4\epsilon_0\pi r_B} \right)$$

PRIMA EQ DI MAXWELL

il riassunto di questo è riassumibile nella prima Equazione di Maxwell

$$f.e.m. = \oint E * ds = 0$$

ENERGIA POTENZIALE ELETROSTATICA

nel caso di una sorgente puntiforme si sono visti due modi di scrivere l'energia potenziale

$$U_q(r) = q_0 V(r) = q_0 \frac{q}{4\epsilon_0\pi r} = -q_0 \int_{\infty}^r \vec{E} * d\vec{s} = - \int_{\infty}^r \vec{F}_e * d\vec{s}$$

ovvero l'energia potenziale è il lavoro necessario di una forza elettrica per portare una carica dall'infinito a distanza r

Per più cariche puntiformi in un sistema di n cariche si è visto che il potenziale segue il principio di sovrapposizione

$$U_c(sistema) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

N.B. l'energia potenziale è rispetto alla distanza dal centro del sistema, r_{ij} è la distanza tra cariche

aggiungere una carica al sistema significa sommare al vecchio potenziale le nuove interazioni
pro tip se non si mette 1/2 basta calcolare il caso i,j, j i una volta sola

GRADIENTE DEL POTENZIALE

domenica 29 marzo 2020 01:44

Prima abbiamo visto come passare dal campo al potenziale

$$\Delta V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Ora cerchiamo la relazione inversa, passando per il gradiente
una variazione infinitesima di potenziale lungo una direzione

$$dV_x = - \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

quindi posso esplicitare il campo come

$$E_x = - \frac{\delta V_x}{\delta x} ,$$
$$\vec{E}_x = - \frac{\delta V_x}{\delta x} \hat{u}_x$$

ovvero, per ogni asse x,y,z posso dire che il vettore

$$\vec{E} = - \left(\frac{\delta V_x}{\delta x}, \frac{\delta V_y}{\delta y}, \frac{\delta V_z}{\delta z} \right) = - \text{grad}V = - \left(\frac{\delta V_x}{\delta x} \hat{u}_x + \frac{\delta V_y}{\delta y} \hat{u}_y + \frac{\delta V_z}{\delta z} \hat{u}_z \right)$$

somma di versori

IN COORDINATE POLARI

devo ricordarmi le relazioni con il ds

2D : $ds = dr \hat{u}_r + rd\theta \hat{u}_\theta$ $\vec{E} = - \frac{dV}{dr} \hat{u}_r - \frac{dV}{rd\theta} \hat{u}_\theta$

Cili : $ds = dr \hat{u}_r + rd\theta \hat{u}_\theta + dz \hat{u}_z$

DIPOLO ELETTRICO

sabato 18 aprile 2020 20:27

distribuzione di carica, importante, la base della materia è costituita da dipoli elettrici, inoltre qualsiasi distribuzione di carica sbilanciata è approssimabile a grandi distanze come un dipolo

Definizione

$$\vec{p} = q \vec{a}$$

\vec{p} è il vettore **momento** del dipolo

\vec{a} è il vettore **distanza** tra le cariche da (-) a (+)

q è il valore di ciascuna carica

Possiamo ricavarci il potenziale generato dal dipolo in un punto P distante dai poli r_1, r_2

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}$$

Se il punto P si trova a distanza lontana, ho un angolo sempre minore, che approssima in modo

$$r_1 r_2 = r^2 \quad (\text{distanza dal centro del dipolo})$$

$$r_2 - r_1 = a \cos(\theta) \quad (\text{con } \theta \text{ angolo di incidenza tra la distanza e l'asse del dipolo})$$

$$\Rightarrow V(P)_{r \gg a} = \frac{q a \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} * \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

LEGGE DI GAUSS

domenica 10 maggio 2020 19:51

Caratterizza il campo elettrico , ci suggerisce come calcolarlo in presenza di sorgenti

• IL FLUSSO DI UN VETTORE

Dato un vettore $\vec{v}(x, y, z)$ ed una superficie ($d\Sigma$) , versore \vec{u}_n perpendicolare ad Σ

il flusso è

$$d\Phi(\vec{v}) = \vec{v} * \vec{u}_n d\Sigma$$

$$\Phi(\vec{v}) = \int d\Sigma = \int \vec{v} * \vec{u}_n d\Sigma$$

su superficie chiusa il flusso (diretto verso l'esterno) è

$$\oint \vec{v} * \vec{u}_n d\Sigma$$

Talvolta il flusso segue la proprietà (es. flusso di velocità in idrodinamica)

$$\Phi(\vec{v}) = 0$$

• ANGOLO SOLIDO

è un angolo sotto cui viene vista una superficie ($d\Sigma$) da un certo punto (O) , è l'estensione a 3 dimensioni del concetto di *angolo piano*

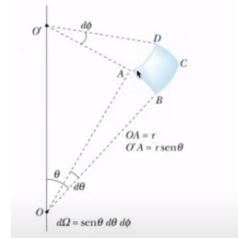
$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

$d\Sigma \rightarrow$ è orientata in modo arbitrario rispetto ad O

$\alpha \rightarrow$ è l'angolo tra la normale di $d\Sigma$ e la radiale rispetto ad O

$r \rightarrow$ è la distanza tra $d\Sigma$ ed O

moltiplicare per $\cos \alpha$ equivale a rotare $d\Sigma$ in modo che sia perpendicolare ad O
dividendo la superficie per la distanza al quadrato ottengo proprio l'angolo



Integro ...

con una superficie non infinitesima, voglio calcolarmi l'angolo solido, allora procedo

supponendo calotta sferica, mi pongo ai poli della sfera e trovo gli angoli piani rispetto ai segmenti della superficie (AB , AD)

posso approssimare AD come ($rsin\theta$) , perché angoli infinitesimi

$$d\Sigma = (AB)(AD) = (rd\theta)(rsin\theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \Omega = \int \sin \theta d\theta d\phi$$

è un integrale su due angoli infinitesimi che mi definiscono l' estensione dei rispettivi segmenti della superficie

comunque l'integrale rispetto a ϕ sarà banale $\phi_2 - \phi_1$

se integro con ϕ per tutta l'escursione ho che moltiplico per 2π nell'infinitesimo

$$d\Omega = \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sin \theta d\theta$$

in questo caso (**calotte anelliformi**) ho che l'angolo Solido rispetto ad un escursione θ_1, θ_2

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = 2\pi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Se integro una sfera ? -> mi risulta 4π se moltiplico per r^2 ottengo proprio la superficie sferica

- **LEGGE DI GAUSS**

Calcolo il flusso rispetto al vettore di campo elettrico

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

con superficie chiusa ...

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

La legge dice :

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum_i q_i)_{int}$$

ovvero il flusso dipende solo dalle cariche interne , una superficie vuota ha flusso nullo

è un altro modo di esprimere la legge di coulomb (scegliendo una sup. sferica ho legge di coulomb)

in una distribuzione continua di cariche avrà un integrale sulla carica $\frac{1}{\epsilon_0} \int dq$

Unità di misura

il campo ha unità di misura $\frac{V}{m} \Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ avrà $\frac{V}{m} * m^2 = V \cdot m$

Dimostrazione

Da un flusso di carica puntiforme, da superficie(Σ) qualunque, si esprime, con versore radiale e normale

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u_r * u_n d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} \rightarrow \text{con superficie } \Sigma_0 \text{ rotata e perpendicolare rispetto a } q$$

ho ottenuto la definizione di Angolo solido rispetto alla superficie

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

integrandi ho che

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Nel caso in cui la carica sia contenuta nella superficie allora l'angolo Solido Ω sarà l'angolo sferico, ovvero 4π

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{4\pi}$$

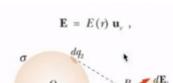
Nel caso in cui sia esterna ho due superfici successive, una entrante ed una uscente del campo, associate **allo stesso angolo solido**

che si sottraggono ed annullano quindi il valore del flusso

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = 0$$

- **ESEMPI DI GAUSS**

è conveniente ricorrere a Gauss in



• ESEMPI DI GAUSS

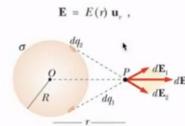
è conveniente ricorrere a Gauss in

- Distribuzioni di carica simmetriche

Converrà prendere una superficie che sia perpendicolare alle linee di campo

- Distribuzioni di carica piane

in questi casi posso ridurre in modo semplice $\Phi(\vec{E}) = E\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$



Distribuzione di carica sferica superficiale

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

per ogni punto esterno alla sfera posso pensare a due contributi simmetrici per il campo

Gauss su sfera che passa per punto esterno

$$\Phi(\vec{E}) = \oint E(r)\vec{u}_r d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

in punto interno ho che il q è nullo , ovvero all'interno il campo è nullo

Sfera a densità uniforme

all'esterno si comporta come un punto, ovvero non mi interessa la distribuzione, il flusso è simmetrico

$$E(r)_{r>R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_{sf}^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} =$$

all'interno contribuisce solamente la porzione di carica attualmente interna

$$E(r)_{r < R} = \frac{4/3\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

nel caso in cui ρ non fosse costante dovrei integrare su r la $\rho(r)$

Cilindro Uniformemente Carico

Gauss su una superficie cilindrica simmetrica

il campo sarà sempre perpendicolare, ovvero ricavo la formula

$$\Phi(\vec{E}) = \oint E(r)\vec{u}_r d\Sigma = E(r) 2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0}$$

con la carica

$$q = \int_c \rho d\tau = \rho \pi R_c^2 h = \lambda h \rightarrow \text{con densità lineare di carica}$$

$$E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

è interessante notare il potenziale tra due punti r_1, r_2 è logaritmico

$$V(r_1) - V(r_2) = - \int_{r_1}^{r_2} E dr = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Piano Uniformemente Carico infinito

conviene prendere un cilindro ortogonale al piano

attraverso la superficie laterale non avrò flussi

le basi del cilindro sono 2 , quindi il flusso si raddoppia

$$\Phi(\vec{E}) = 2 E \Sigma = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

il campo è costante indipendentemente dalla distanza

- **SULLA DIVERGENZA**

la divergenza è definita dalla somma delle derivate parziali del campo

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z}$$

il flusso di campo, secondo gauss a distribuzione di carica

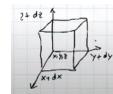
$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} * \vec{u}_r d\Sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} * \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau$$

L'unico modo del per cui siano uguagliati i due integrali è necessario che gli argomenti si egualino, da cui

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

ovvero che la divergenza :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z)$$



il campo conservativo mi assicura che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} * \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{EQUAZIONE DI POISSON}$$

nello spazio vuoto

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0 \rightarrow \text{EQUAZIONE DI LAPLACE}$$

Sono entrambi Equazioni note risolvibili Tramite software e metodologie

- **CAMPPI A DIVERGENZA E ROTORI NON NULLI**

La divergenza

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z}$$

il rotore (somme di derivate miste)

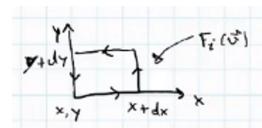
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \det \begin{bmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y} \right) \vec{u}_z$$

Campo a divergenza non nulla

un campo radiale dipendente dal raggio in modo lineare

$$\vec{E} = k \vec{r} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\delta kx}{\delta x} + \frac{\delta ky}{\delta y} + \frac{\delta kz}{\delta z} = 3k$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\delta kz}{\delta y} - \frac{\delta ky}{\delta z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\delta kx}{\delta z} - \frac{\delta kz}{\delta x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\delta ky}{\delta x} - \frac{\delta kx}{\delta y} \right) \vec{u}_z = 0$$

Campo a rotore non nullo

un campo che dipende dal prodotto vettoriale tra un vettore \vec{k} ed \vec{r} , perpendicolari

$$\vec{E} = \vec{k} \times \vec{r}, \quad \vec{k} = k \vec{u}_z$$

$\vec{E} = -ky \vec{u}_x + kx \vec{u}_y$, perché vettori perpendicolari b

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\delta(-ky)}{\delta x} + \frac{\delta(kx)}{\delta y} + 0 = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left[\frac{\delta}{\delta x}(kx) - \frac{\delta}{\delta y}(-ky) \right] \vec{u}_z = 2k \vec{u}_z = 2 \vec{k}$$

• TEOREMA DEL GRADIENTE

La differenza di un campo scalare da A e B posso calcolarlo come un integrale su un cammino qualunque

$$\Delta f = f_B - f_A = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}$$

Dim

l'argomento è proprio il passo di integrazione df

$$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy + \frac{\delta f}{\delta z} dz = df$$

allora

$$\Delta f = \int_A^B df = f_B - f_A$$

• TEOREMA DELLA DIVERGENZA (GAUSS)

il flusso su superficie chiusa di un vettore è uguale all'integrale su volume della divergenza

$$\Phi(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

Dim

Dividiamo il volume in cubetti infinitesimi, ci rendiamo conto che il flusso su superficie esterna equivale a sommare i flussi dei cubetti infinitesimi

$$\Phi_i(\vec{v}) = I_i \Phi_i$$

ogni cubetto infinitesimo ha flussi sui 3 assi

$$\Phi_i(\vec{v}) = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$$

$$\Phi_x = [v_x(x+dx, y, z) - v_x(x, y, z)] dy dz \cong \frac{\delta v_x}{\delta x} dx dy dz$$

$$\Phi_y = [v_y(x, y+dy, z) - v_y(x, y, z)] dx dz \cong \frac{\delta v_y}{\delta y} dy dx dz$$

$$\Phi_z = [v_z(x, y, z+dz) - v_z(x, y, z)] dy dx \cong \frac{\delta v_z}{\delta z} dz dy dx$$

$$\Rightarrow \Phi_i(\vec{v}) = \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right) dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Rightarrow$$

$$\Phi(\vec{v}) = \int_V \Phi_i(\vec{v}) dv = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dv =$$

- **TEOREMA DEL ROTORE (STOKES)**

la circuitazione di campo vettoriale \vec{v} su cammino chiuso Γ

è equivalente a calcolare il flusso del rotore attraverso una qualunque superficie Σ che abbia Γ come contorno

$$\Gamma(\vec{v}) = \oint_{\Gamma} \vec{v} * d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

vale la regola della mano destra per la direzione di u_n in base al senso antiorario di percorrenza del cammino

Dim

Divido la superficie in circuitini infinitesimi rettangolari perché si elidono le intersezioni interne

$$\Gamma(\vec{v}) = \oint \vec{v} d\vec{s} = \sum_i \Gamma_i(\vec{v})$$

la circuitazione della celletta (le frecce dei lati della cella)

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\vec{v}) &= v_x(x, y) dx + v_y(x + d, y) - v_x(x, y + dy) - v_y(x, y) = \\ &= -[v_x(x, y + dy) - v_x(x, y)] dx dy + [v_y(x + dx, y) - v_y(x, y)] dy \\ &\cong \left(-\frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) dx dy = \vec{\nabla} \times \vec{v} * \vec{u}_n d\Sigma_i = \phi_i(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\ \Rightarrow \Gamma(\vec{v}) &= \sum_i \Gamma_i(\vec{v}) = \sum_i \Phi_i(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \not\equiv \Phi(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

- **EQUAZIONI DI MAXWELL PER L'ELETTROSTATICA**

1)

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

2)

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} * \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} * \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

CONDUTTORI

martedì 12 maggio 2020 13:26

Si dividono in base alla proprietà di caricarsi con strofinio

- ISOLANTI

Possono essere caricati per strofinio, le cariche non si muovono e rimane quindi la carica sul corpo

- CONDUTTORI

anche se si crea la carica per strofinio esse sono libere di muoversi e tendono a distribuirsi nel corpo al fine di ridurre le interazioni

Proprietà

Nei conduttori l'equilibrio interno è determinato, a livello macroscopico $E = 0$

- ◆ il potenziale è costante su tutto il conduttore
- ◆ l'eccesso di carica si trova sulla superficie del conduttore
- ◆ il campo in un punto esterno vicino alla superficie è perpendicolare alla superficie di intensità σ/ϵ_0

Dim

Per ThM Gauss il flusso su una superficie interna è nulla , perché il campo è nullo, quindi la carica interna è nulla fino alla superficie

$$V(P_1) - V(P_2) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} * d\vec{s} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2)$$

Concentrandosi su una piccola zona di superficie ed un volumetto che interseca la superficie del conduttore, Gauss

$$\oint \vec{E} * \vec{u}_n d\Sigma = E d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d\Sigma \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \vec{u}_n \quad \rightarrow \text{Detto TEOREMA DI COULOMB}$$

Conduttori in un Campo

Si assiste al fenomeno di induzione di carica nel conduttore ad opera del campo elettrico esterno

le cariche del conduttore si dispongono al fine di annullare, se possibile , il campo all'interno del conduttore

Conduttori a contatto

Conduttori a contatto muovono le loro cariche in modo da risultare a stesso potenziale

$$\text{per due sfre vale la } \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Conduttori Cavi

Si potrebbe pensare che la carica potesse distriubirsi anche sulla superficie interna ... ma questa condizione contraddirebbe il principio di conservazione del campo , potrei individuare un cammino a circuitazione **non nulla**

⇒ campo sempre e soltanto su **superficie esterna**

CONDENSATORI

martedì 12 maggio 2020 15:10

CONDENSATORE SFERICO

Suppongo di avere una sfera (1) contenuta all'interno di un guscio sferico (2-3)

allora le cariche si disporranno in modo da avere campo interno nullo

comunque avremo d. d. p. nella cavità tra le armature

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ora definisco la Capacità di un condens. sferico in Farad [F]

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Posso talvolta approssimare se

$$h = R_2 - R_1 \ll R_2 \Rightarrow R_2 \approx R_1 = R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{h} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\Sigma}{h}$$

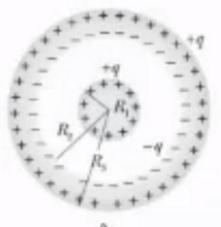
\Rightarrow ridurre h amplifica la capacità

e riscrivo la legge del condensatore

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

Tendendo $R_2 \rightarrow \infty$, ho la capacità di un conduttore sferico isolato

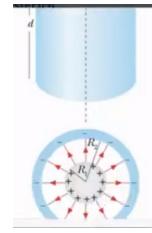
$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1$$



CONDENSATORE CILINDRICO



CONDENSATORE CILINDRICO



Sfruttando sempre Gauss

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} * d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Definisco la capacità

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = q \frac{2\pi\epsilon_0}{q/d \ln R_2/R_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln R_2/R_1}$$

$$approssimando \quad R_2 \cong R_1 \Rightarrow R_2 - R_1 = h$$

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{h}{R}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

Noto che quando ho armature a distanze molto piccole la formula per la capacità non dipende dalla geometria !!

CONDENSATORE PIANO

Campo elettrico come distribuzione planare di carica

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$$

d.d.p.

$$V_2 - V_1 = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h$$

La capacità

$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

abbiamo supposto che il campo sia Nullo bruscamente all'esterno delle armature
il che contraddirrebbe il principio di conservazione, ho cammino a circuitazione non nulla

in realtà esiste il campo elettrico disperso, che è curvato, ai bordi

COLLEGAMENTO DI CONDENSATORI

in circuiti, condensatori come elementi circuitali
Voglio calcolare capacità equivalente

IN PARALLELO

dovrò avere stessa ddp nei due condensatori

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \dots$$

$$\Rightarrow q_{eq} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)V$$

$$C_{eq} = \sum C_i$$

IN SERIE

devo avere tra i condensatori carica opposta

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1}, \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$$

$$V = V_C - V_A = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$C_{eq} = \left(\sum \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

ENERGIA DEL CAMPO DI CONDENSATORE

il processo di carica del condensatore richiede lavoro, devo spostare le cariche contro campo infinitesimo

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

integro per trovare complessivo

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

quindi ho la formula dell'energia in base a potenziale e carica finale

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} C V^2$$

sostituisco C, V

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Volume$$

ho la formula generale per la densità di energia del campo elettrico

$$u = \frac{U}{Volume} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

e quindi l'energia del campo sarà la sua integrazione

$$U_e = \int_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

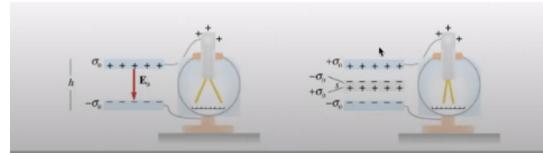
DIELETTRICI

martedì 12 maggio 2020 15:47

I materiali isolanti hanno talvolta delle proprietà Dielettriche, in questo caso ci sarà un campo interno non nullo

Consideriamo condensatore in campo esterno

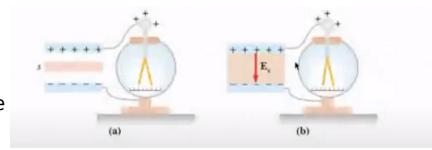
$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$



all'interno del condensatore mettiamo una lastra di conduttore, che si caricherà in modo da annullare all'interno del condensatore, il campo elettrico

Si può notare che la ddp si riduce inserendo la lastra (si riduce lo spazio)

$$V = E_0 (h - s) < V_0$$



Se mettiamo un Dielettrico al posto del condutttore, il ddp non si annulla, anche se definisco il rapporto co il ddp senza il dialettrico rispetto a ddp con dielettrico

Costante dielettrica relativa

$$K = \frac{V_0}{V_K} > 1$$

Suscettività elettrica

$$\chi = K - 1$$

NEL CONDENSATORE DIELETTRICO

il campo

$$E_k = \frac{V_K}{h} = \frac{V}{Kh} = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

in variazione

$$E_0 - E_K = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{K-1}{K} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

Densità superficiale di carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \frac{K-1}{K} \sigma$$

la capacità

$$C_K = \frac{q}{V_K} = \frac{Kq}{V} = KC_0 = \frac{K\epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{K\epsilon \Sigma}{h}$$

la densità di energia

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

NB : IL VUOTO ha $K = 1, X = 0, \epsilon = \epsilon_0$

In un esercizio per calcolare il potenziale effettivo in condens dovrò integrare per il vuoto e per il dielettrico e sommare in modo lineare la capacità equivalente si calcola sempre sommando il caso del vuoto ed il caso del dielettrico in SERIE (con i reciproci)

POLARIZZAZIONE NEI DIELETTRICI

all'interno dei dielettrici ci sono piccolissimi spostamenti di cariche che restano ancorate nel reticolo cristallino, ovvero i nuclei si spostano dal centro degli atomi formando dipoli

Anche la disposizione delle molecole può polarizzarsi spostando i vari atomi , Applicando il campo elettrico i dipoli tendono ad allinearsi

Il Vettore di polarizzazione

in un volumetto τ , dato il momento di dipolo medio $\langle \vec{p} \rangle$

$$\vec{P} = \frac{\langle \vec{p} \rangle}{\tau}$$

$$\Rightarrow d\vec{p} = \vec{P} d\tau = \vec{P} d\Sigma dh$$

posso quindi interpretare un volume dielettrico come le due facce esterne a densità

definiz momento dipolo

$$\pm dq = \pm P d\Sigma$$

$$\pm \sigma_p = \pm \frac{dq}{d\Sigma} = \pm P$$

Se la superficie è incinta e non allineata devo considerare

$$\sigma_p = P \cos \theta = \vec{P} * \vec{u}_n$$

Reazione al campo elettrico Esterno applicato

Applicando il campo elettrico dall'esterno al dielettrico vale

$$\vec{P} = \epsilon_0 X \vec{E}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL PER I DIELETTRICI

Considerando un condensatore con dielettrico

Interpreto il dielettrico come un volume polarizzato (in modo opposto al condensatore) sulle superfici a contatto le armature

La legge di gauss su una superficie che racchiude una armatura dovrà tenere conto anche delle cariche di polarizzazione

$$\Phi(E) = \oint \vec{E} * \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\epsilon_0}$$

con la polarizzazione

$$q_p = \pm \sigma_p \Sigma = \pm P \Sigma$$

ora posso riscrivere $P\Sigma$ come flusso di vettore polarizzazione su superficie

$$P\Sigma = \oint \vec{P} * \vec{u}_n d\Sigma$$

e quindi la legge di gauss diventa

$$\Phi(E) = \oint \vec{E} * \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q \pm \oint \vec{P} * \vec{u}_n d\Sigma}{\epsilon_0}$$

ovvero

$$\oint (\vec{E} + \vec{P}) * \vec{u}_n d\Sigma = q$$

Induzione dielettrica

ho definito quindi un nuovo vettore per il flusso di Gauss

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 X \vec{E} = K \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

all'interno del dielettrico ho un campo

$$E_k = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

e quindi una induzione che coincide con la densità di carica

$$\vec{D} = \sigma \vec{u}_n$$

ed una nuova legge di Gauss

$$\oint \vec{D} * \vec{u}_n d\Sigma = q$$

Considerando il TEOREMA SULLA DIVERGENZA

il flusso di vettore \vec{D} su superficie chiusa è pari all'integrale su volume della divergenza

$$\Rightarrow \oint \vec{D} * \vec{u}_n d\Sigma = \oint_{vol} \vec{\nabla} * \vec{D} d\tau = q$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} * \vec{D} = \frac{q}{volume} = \rho$$

CORRENTE ELETTRICA

lunedì 18 maggio 2020 13:55

Considerando conduttori caratterizzati da numeri elevati di cariche libere elettroniche

Quando è posto un campo elettrico in un conduttore si instaura una **velocità media** (v_d) tra le cariche per avere un moto costante nel circuito serve un dispositivo che riesce a generare una fem

l'effetto della resistenza fa sì che il generatore debba compiere lavoro

INTENSITÀ DI CORRENTE

$$i_M = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Considerata una superficie cilindrica a faccia inclinata (θ) all'interno di un conduttore con cariche in moto avrà volume (carica elettronica e) :

$$d\tau = v_d d\Sigma \cos\theta \Delta t$$

$$\Delta q = n e d\tau$$

Allora la corrente sarà

$$di = n e v_d d\Sigma \cos(\theta)$$

la densità di corrente

$$\vec{j} = n e \vec{v}_d$$

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} * \vec{u}_n d\Sigma$$

essendo che si pone superficie perpendicolare risulta

$$i = j \Sigma, \quad j = \frac{i}{\Sigma}$$

CORRENTE ELETTRICA STAZIONARIA

In ogni sezione di area variabile si misura sempre la stessa corrente

ovvero la corrente stazionaria che scorre sul cono è tale che il flusso su ogni sezione si mantiene

$$\Sigma_1 \neq \Sigma_2 \Rightarrow i_1 = j_1 \Sigma_1 = i_2 = j_2 \Sigma_2$$

MODELLO CLASSICO DELLA CONDUZIONE ELETTRICA

la velocità di un elettrone in metallo si avvicina ai 10^6 m/s
a seguito di urti la direzione e verso degli elettroni è casuale

Nel caso di un campo elettrico avrò una forza da considerare, ($t_m = l/v$ tempo medio tra due urti)

$$(a_e = \frac{e \vec{E}}{m})$$

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e \vec{E}}{m} t_m$$

Posso fare la media su N urti e risulta velocità di deriva

$$\vec{v}_d = \frac{\sum_i \vec{v}_i}{N} - \frac{e \vec{E}}{m} t_m$$

considerando l'aleatorietà delle velocità i-esime ho che $\sum_i \vec{v}_i = 0$

$$\vec{v}_d = -\frac{e \vec{E}}{m} t_m$$

e posso quindi riscrivere la densità di corrente

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

Conduttività

si definisce quindi la conduttività

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} , \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

indica la risposta di un conduttore ad uno stimolo da un campo elettrico

LEGGE DI OHM DELLA CONDUZIONE

Partendo dalla condittività

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

riscrivo con la resistività

$$\vec{E} = \rho \vec{j} , \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

calcolando la ddp ai lati di un conduttore

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = E h = \frac{\rho h}{\Sigma} i$$

La Resistenza

$$R = \int_A^B \frac{\rho \, dh}{\Sigma}$$

Resistività in base alla temperatura

si nota che vale in base al coefficiente termico α ,
un aumento di temperatura determina un aumento della resistenza

$$\rho = \rho_{20^\circ} (1 + \alpha \Delta t)$$

EFFETTO JOULE

una carica dq che si muove in un conduttore in ddp $V = V_A - V_B$ sarà compiuto lavoro

$$dW = V dq = Vi \, dt$$

La potenza Elettrica

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi$$

se vale la legge di Ohm $V = Ri$

$$P = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

da cui il lavoro compiuto dal generatore

$$W = \int_0^t P \, dt = \int_0^t Ri^2 dt$$

se corrente costante

$$W = Ri^2 t$$

Effetto Joule : la resistenza tenderà a scaldarsi nel tempo se percorsa da corrente

RESISTORI IN SERIE E PARALLELO

nella conduzione bisogna spendere lavoro per far muovere cariche, data resistenza
nei Resistori viene indicata **resistenza** e intensità **massima sottoponibile**

SERIE

La corrente stazionaria implica che si mantenga all'interno del circuito

la resistenza equivalente è lineare

$$R_{eq} = \sum R_i$$

la potenza equivalente è lineare

$$P_{eq} = (V_1 - V_2)i = R_{eq}i^2 = P_1 + P_2$$

PARALLELO

La ddp tra le due resistenze deve essere la stessa

la corrente si divide tra le due resistenze

$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{V}{R_1} i \quad , \quad i_2 = \frac{V}{R_2} i$$

la potenza risulta

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V^2 = \frac{V^2}{R_{eq}}$$

CAMPO MAGNETICO

martedì 19 maggio 2020 11:08

Si scopre attrazione fra materiali ferrosi e magnetici

La natura dei materiali magnetici è Polare, Nord-Sud

Poli di segni diverso, come le cariche opposte, si attraggono

è impossibile realizzare il monopolo

Fili percorsi da corrente generano campo magnetico

Si misura in **Tesla**

FORZA DI LORENTZ

la forza impressa ad una carica in moto in un campo magnetico è

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB\sin(\theta)$$

non dipende dalla massa, come la forza elettrica, segue la regola della mano destra

inoltre rispetto alla forza elettrica la forza non sarà allineata con le linee di campo ma ortogonale

la forza è anche ortogonale alla velocità in ogni istante, quindi **non compie lavoro**

non si può accelerare il modulo della velocità, ma si può solo variare direzione e verso

Nel caso di campo magnetico variabile

$$F = m \frac{d\vec{B}}{dx}$$

SECONDA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

un filo percorso da corrente in campo magnetico risente dell'azione complessiva delle forze di Lorentz applicate alle cariche

se considero $n \rightarrow$ numero di elettroni in unità di volume
ricordandoci la densità di corrente $\vec{j} = -n e \vec{v}_d$

$$d\vec{F} = n \sum ds \vec{F}_L = -(\sum ds) n e \vec{v}_d \times B = \sum ds \vec{j} \times \vec{B}$$

siccome la corrente è $\vec{i} = \sum \vec{j}$

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

La forza totale sul filo sarà (Effetto di Laplace)

$$\vec{F} = i \left(\int_P^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \vec{PQ} \times \vec{B}$$

in circuiti curvi conviene spezzare il $d\vec{s}$ negli assi perpendicolari al campo e considerare separatamente

• EFFETTI SUI CIRCUITI

MOMENTI DELLA FORZA MAGNETICA

le correnti sulle verticali della spira generano una coppia di forze che portera' ad una rotazione della spira.

I lati orizzontali invece compiono forze di deformazione della spira e non di moto

si ottiene il momento

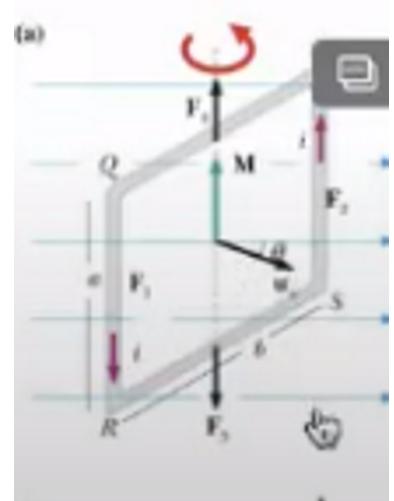
$$M = b \sin \theta F = i a b \sin \theta = i \sum B \sin \theta$$

vettorialmente definisco il momento magnetico dal versore normale

$$\vec{m} = i \sum \vec{u}_n$$

Allora il momento meccanico sarà

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \Rightarrow i \sum \vec{u}_n \times \vec{B}$$



PICCOLE OSCILLAZIONI

$$M = -m B \sin \theta \cong -m B \theta$$

$$\frac{dL}{dt} = I \alpha = \sum_i M_i = M \cong -m B \theta$$

$$I \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{m B}{I} \theta \right) = 0$$

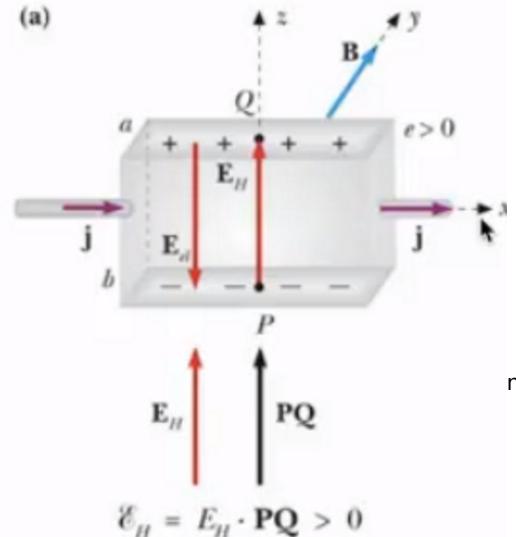
esempio : protoni

definendo la pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{m B}{I}}$, $\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega}$$

il moto tende a tornare all' equilibrio, nel quale la spira è perpendicola



GALVANOMETRO

L'idea per misurare la corrente è di far passare un campo magnetico molla farà resistenza e permetterà di indicare il risultato attraverso un

EFFETTO HALL

ricordandoci la densità di corrente in volume a sezione a b

$$\vec{j} = \frac{i}{ab} \vec{u}_x = n e \vec{v}_d$$

ponendo il mezzo all'interno di un campo magnetico perp.
le cariche andranno ad accumularsi sui lati

il modulo di j seguirà il segno delle cariche della corrente

ovvero avrà due campi elettrici

$E_d \rightarrow$ dovuta ad interazioni delle cariche accumulate

$E_H \rightarrow$ campo di HALL , dovuto dalla forza di Lorentz

(seguirà il segno delle cariche $E_H > 0 \Leftrightarrow q > 0$)

determinando la tensione del campo di Hall

$$\overrightarrow{V_H} = \int_p^Q \overrightarrow{E_H} d\vec{z} = \overrightarrow{E_H} \cdot \overrightarrow{PQ} = \pm E_H b = \pm \frac{jB}{ne} b = \pm \frac{iB}{ne a}$$

il suo segno mi indicherà il segno delle cariche, con la sonda di Hall

$$\alpha = \frac{V_H}{B} = \frac{i}{ne a}$$

• EFFETTI SULLE PARTICELLE

MOTO

Con un $\theta = \frac{\pi}{2}$ iniziale

vale la dinamica circolare del punto materiale ad impulso $\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}$

$$q \vec{v} \times \vec{B} = m \vec{\omega} \times \vec{v} = -m \vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \rightarrow \text{non dipende da velocità e raggio traiettoria}$$

l'asse di rotazione (velocità angolare) è in linea con il campo in moto circolare Uniforme

$$F = q v B = m a_r = m \frac{v^2}{r}$$

dalla quale si ricava il raggio di curvatura

$$r = \frac{m v}{q B} = \frac{p}{q B}$$

Per la velocità angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}} = \frac{qB}{m} \rightarrow \text{relazione valida indipendentemente dall'a}$$

Con un θ iniziale generico

la componente della velocità che contribuirà alla rotazione sarà la norma

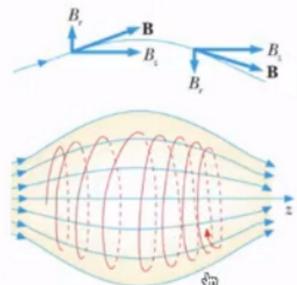
quindi il raggio sarà minore e dato da

$$r = \frac{m v_n}{q B} = r = \frac{m v \sin \theta}{q B}$$

il resto della velocità sarà una componente di traslazione del moto circolare (ad elica di passo costante)

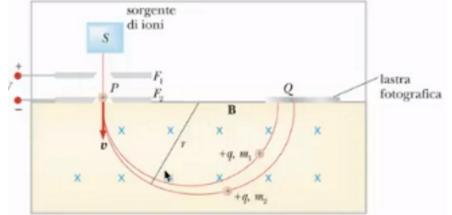
il passo dell'elica si identifica calcolando quanto si è traslato in un periodo di rotazione

$$p = T v_p = \frac{2\pi m}{q B} v \cos \theta$$



• APPLICAZIONI

BOTTIGLIA MAGNETICA E FASCE DI VAN ALLEN



in un campo magnetico non uniforme a componente parallela e radiale

il passo dell'elica si vede che dipende incersamente dall'intensità di campo
e quindi l'elica sarà più fitta agli estremi della bottiglia (agli estremi diverge in moto circolare)

Una volta che una particella si avvicina ai poli si presenta il contributo della componente Radiale del campo che da luogo ad una forza di Lorenz ad effetto repulsivo che riporta la particella verso il polo opposto

ovvero le particelle vengono intrappolate, nel fenomeno di intrappolamento magnetico

SPETTROMETRO DI MASSA

Per misurare massa di particelle caricate si accelerano tali ioni e si fanno passare per una regione a campo magnetico

le particelle uscenti avranno diversa velocità ma stessa energia cinetica

il raggio di curvatura del moto mi indicherà appunto la massa

vale che

$$r = \frac{mv}{qB}, \quad V = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{V}{2m}}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2Vm}{B^2 q}}$$

SELETTORE DI VELOCITA'

l'idea è di predisporre una regione attraversata da campo elettrico e magnetico ortogonali

gli ioni vengono accelerati e tramite una fenditura si seleziona solo le particelle con un certo margine di curvatura

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

allora applicando uno spettrometro di Massa con una regione di campo B_0

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{E}{BB_0} \frac{m}{q}$$

IL CICLCOTRONE

in passato il limite dell'accelerazione di particelle era dato dalla ddp massima di $10^7 V$
si propose il ciclotrone, un disco diviso a metà a potenziali diversi.

Le particelle compiono a causa di un campo magnetico dei moti a spirale, ed alternando il potenziale con la stessa frequenza di transito delle particelle per la metà;

posso ottenere un accelerazione crescente

SORGENTI DI CAMPO MAGNETICO

mercoledì 1 luglio 2020 13:04

CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA CORRENTE

ragionando con la legge elementare di Laplace in modo inverso, un corpo carico che viene mosso genera un campo

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = k_m i \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

dove $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ (vuoto) [H/m] è una costante che dipende dal mezzo del campo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \rightarrow \text{Legge di Ampere Laplace}$$

sostituendo i tale che $j = \frac{i}{\Sigma} = n q \vec{v}$, $d\tau = \Sigma ds$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} n d\tau$$

per singola carica vale che $n d\tau = 1$

Parallelismi Laplace/Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

1° Laplace	$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$	1° Ampere	$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$
2° Laplace	$\vec{F} = i \left(\int_P^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \overrightarrow{PQ} \times \vec{B}$	2° Ampere	$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$

LEGGE BIOT SAVART

ovvero il campo prodotto da un filo percorso da corrente
Le linee di campo risultano cerchi concentrici

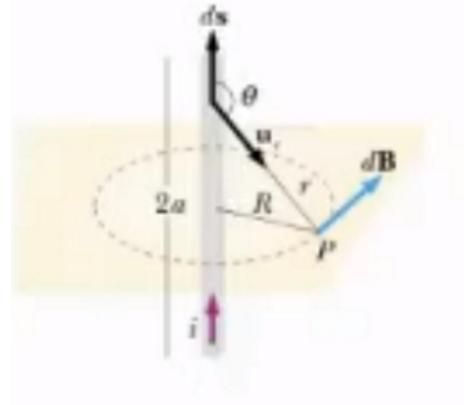
L'idea è di integrare secondo l'angolo θ , conoscendo R

$$r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$s \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -s \operatorname{tg} \theta = R \rightarrow$ derivando tangente

$$ds = R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

si scrive quindi il campo secondo 1° Ampere



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos \theta)}{R}$$

e integro con un filo di lunghezza $2a$

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\cos \theta_1}^0 d(\cos \theta) = \frac{\mu_0 i \cos \theta_1}{4\pi R}$$

$$\vec{B} = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \overrightarrow{u_\phi}$$

a lunghezza ∞

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \overrightarrow{u_\phi}$$

SPIRA CIRCOLARE

considerando il campo lungo l'asse tutte le componenti radiali di \vec{B} si bilanceranno e le componenti lungo l'asse si sommeranno

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \vec{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} ds$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta$$

integro

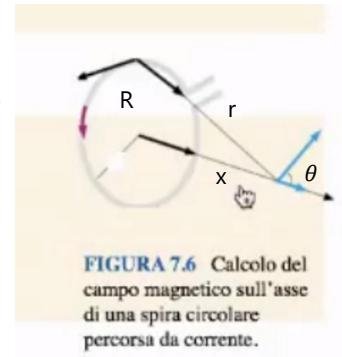
$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta \, ds \, \vec{u}_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta \cdot 2\pi R \, \vec{u}_x$$

con la trigonometria si riesce a dimostrare che $\cos \theta = R/r$ (*rappporto ipotenusa*)

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

il campo è quindi variabile con la distanza x ed è massimo in 0

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_x, \quad B_{\infty} = 0$$



Quando è soddisfatta $x \gg R \Rightarrow$ dipolo

$$B(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 2i\pi R^2}{4\pi x^3} = \frac{\mu_0 2\vec{m}}{4\pi r^3}$$

è una scrittura analoga al campo elettrico di dipolo, ma dipendente dal momento magnetico della spira
Si può anche dimostrare che questo risultato di Dipolo è valido anche fuori dall'asse

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \, u_r + \sin \theta \, u_\theta)$$

SOLENOIDE

con $n = N/d$ la densità di spire per lunghezza d del solenoide

il contributo per passo dx al campo è dato dalla somma dei contributi delle singole spire al centro, ci sono ndx spire nel passo dx

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx$$

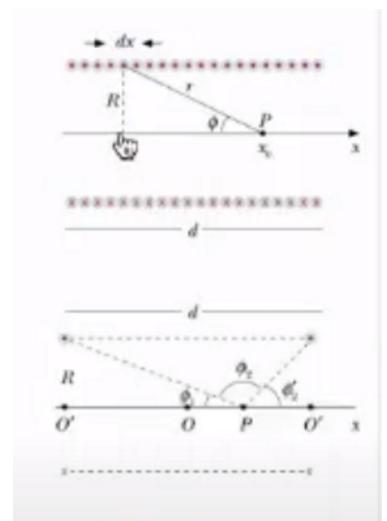
converrà ora integrare secondo angolo θ

$$r \sin \theta = R, \quad x - x_0 = -R \operatorname{ctg} \theta \rightarrow \text{derivando} \quad dx = \frac{R d\phi}{\sin^2 \theta}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i \sin^2 \theta r^2}{2r^3} \frac{r \sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta'_2)$$

$$(\theta'_2 = \pi - \theta_2)$$



riporto ora il risultato secondo x

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{d + 2x}{\sqrt{(d + 2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d - 2x}{\sqrt{(d - 2x)^2 + 4R^2}} \right]$$

con $x = 0$ sono al centro del solenoide (Punto di Massimo)

$$B_{max} = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

con $x = \pm d$ sono agli estremi del solenoide

$$B_d = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

con una lunghezza $d \gg R$ (che è anche il caso di solenoide a lunghezza infinita)

$$B = \mu_0 n i$$

INTERAZIONI TRA FILI

con un passo ds unitario ($dF = i d\vec{s} \times \vec{B}$)

$$\vec{F}_{1,2} = i_2 \vec{u}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{F}_{2,1} = i_1 \vec{u}_1 \times \vec{B}_2$$

con correnti concordi forze di attrazione
con correnti discordi forze di repulsione

ricavando B_1, B_2 secondo Biot Savart ottengo, in accordo con il principio Azione/Reazione

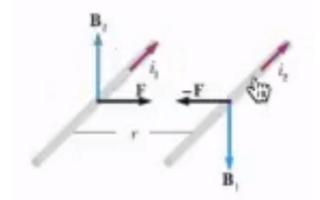
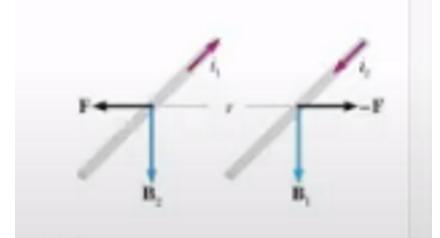
$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$

e per un tratto a lunghezza d

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} d$$

$$ricorda: \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 * 10^{-7} \text{ t.c. } (i = 1 A \Leftrightarrow F = 1 N)$$

l'ampere è l'unità fondamentale



LEGGE DI AMPERE

giovedì 2 luglio 2020 11:09

La legge di Biot-Savart, Forza tra Fili sono casi particolari della legge di Ampere

Intorno ad un filo percorso da corrente ho

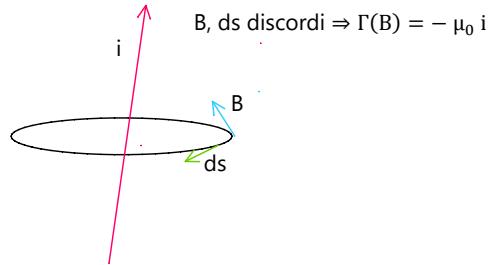
$$\vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$

la circuitazione del campo sarà

$$\int_C^D \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta_{C,D} \rightarrow \text{non dipende dal raggio, né dal percorso particolare}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i \rightarrow \text{Legge di Ampere}$$



ovvero la circuitazione è in relazione alle correnti concatenate al circuito
il segno segue la regola della mano destra

il campo Magnetico quindi **NON è CONSERVATIVO** $\Gamma(B) \neq 0$

FORMA LOCALE DI AMPERE

Applicando Stokes alla circuitazione ho che

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{n}_N d\Sigma$$

inoltre anche la corrente è un flusso

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}_N d\Sigma$$

il teorema di Ampere ...

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{n}_N d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}_N d\Sigma$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

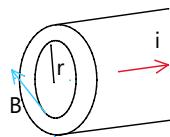
Lega quindi il campo in relazione alla densità di corrente

• DISTRIBUZIONI DI CORRENTE



• DISTRIBUZIONI DI CORRENTE

FILO SPESO



Applico Ampere

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B 2\pi R = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \rightarrow \text{Ho Biot Savart all'esterno}$$

altrimenti

$$i = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_N d\Sigma = \pi r^2 j$$

con Ampere

$$B 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j \Rightarrow B = \frac{\mu_0 r j}{2} = \frac{\mu_0 r i}{2\pi R^2}$$

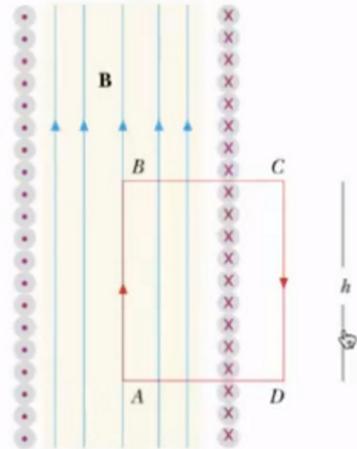
SOLENOIDE INFINITO e CURVO

Ci Aspettiamo che il campo interno sia in linea con L'asse, perché a lunghezza infinita
Posso Applicare Ampere al circuito rettangolare

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B h = \mu_0 n h i$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 n i \rightarrow \forall \text{ profondità}$$

ovvero il campo è costante all'interno del solenoide infinito



Se il solenoide fosse curvato su un Toro

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 N i$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \rightarrow \text{Va come } \frac{1}{r} \text{ all'interno del Toro}$$

FIGURA 7.22

PROPRIETA MAGNETICHE NELLA MATERIA

giovedì 2 luglio 2020 14:39

Mettendo un Materiale di proprietà magnetiche all'interno di un solenoide infinito si formerà un campo interno B

definisco il coefficiente di permeabilità magnetica $k_m = \frac{B}{B_0}$

il campo può essere amplificato o meno dal materiale

il campo

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 k_m \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Posso riesprimere le Leggi Ampere/ BiotSavart ponendo un μ Davanti

il campo di Magnetizzazione

$$\vec{B}_m = \vec{B} - \vec{B}_0 = (k_m - 1)\vec{B}_0 = \chi_m \vec{B}_0 = \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m \rightarrow$ suscettività Magnetica

$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow$ vettore di Magnetizzazione (equiv Polarizzazione)

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_m + \vec{B}_0 = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H})$$

ovvero in presenza di Materiale avrò la somma tra la risposta nel vuoto(H) ed il contributo del Materiale (M)

Anche interpretabile con Correnti aggiuntive, i Materiali

- Diamagnetici $\rightarrow \chi < 0$
- Paramagnetici $\rightarrow \chi > 0$

Anche secondo la temperatura

$$\chi_m = \frac{C \rho}{T} \rightarrow$$
 prima legge di Curie

MATERIALI FERROMAGNETICI

Le leghe a base di ferro/Nichel sono fortemente Paramagnetiche e possono portare ad un' amplificazione di quasi 10^4

L'evoluzione della Magnetizzazione evolve secondo il grafico
(Scala di M più grande di 1000 di Scala H)

si procede secondo *a* fino al valore Massimo e nella scarica invece si segue una curva diversa, a causa delle impurezze del Materiale

Grafici più Stretti sono associati a Ferromagneti Dolci

la magnetizzazione risponde in modo molto lineare alla corrente

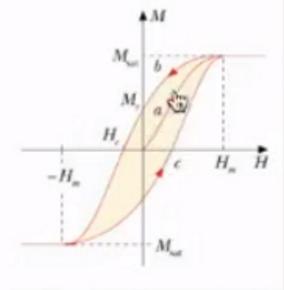
Grafici più larghi di Ferromagneti Duri

utile per materiali permanenti e stabili (servono alte correnti per Smagnetizzare)

Per i materiali ferromagneti va tenuto di conto della Temperatura critica

$$\chi_m = \frac{C \rho}{T - T_c}$$

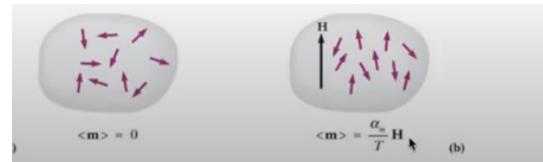
ovvero al di sopra della temperatura critica ho la transizione fra paramagnetismo e diamagnetismo



CORRENTI AMPERIANE

ogni particella ha correnti associate al moto elettronico ed al Momento associato allo Spin
In presenza di campi magnetici gli orbitali atomici possono deformarsi dando vita ad extracorrenti dall'effetto sul momento magnetico dell'atomo :

$$\vec{m}_a = -\alpha_a \vec{H}$$



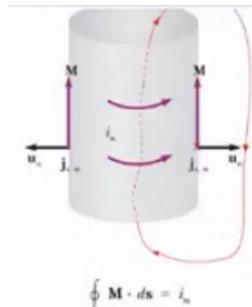
I materiali paramagnetici hanno naturalmente un momento magnetico medio tra le particelle non nullo

Nel Ferromagnetismo ho regioni intere del materiale che condividono un certo momento magnetico medio, l'allineamento dei diversi momenti è associato alla magnetizzazione

$$\vec{M} = \frac{N \langle \vec{m} \rangle}{\tau} = n \langle \vec{m} \rangle \rightarrow n = \text{densità di particelle in volume } \tau$$

con atomi uniformi ...

$$\vec{M} = \frac{n \alpha}{T} \vec{H} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \text{giustifico legge di Curie}$$



Nel cilindro, le correnti Amperiane sono l'interpretazione del momento Magnetico con correnti che circolano all'esterno del materiale, generando appunto il momento magnetico (come fosse un solenoide)

$$d\vec{m} = \vec{M} d\tau = M d\Sigma dz \vec{u}_z$$

$$d\vec{m} = d\Sigma di \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow M = \frac{i_m}{h} \Leftrightarrow Mh = i_m \Leftrightarrow \oint \vec{M} d\vec{s} = i_m$$

ESTENSIONE DI AMPERE CON MATERIALI MAGNETICI

Due Approcci :

Posso quindi pensare di esendere Ampere con il concetto di correnti di Magnetizzazione

$$1^\circ) \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 \left(i + \oint \vec{M} d\vec{s} \right)$$

ricordandoci la definizione di $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, $\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) d\vec{s} = i \Rightarrow$

$$2^\circ) \oint \vec{H} d\vec{s} = i \rightarrow \text{estensione legge di Ampere}$$

TORO FERROMAGNETICO

conviene prima calcolarsi H secondo l'estensione della legge di Ampere

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = 2\pi r H = N i \Rightarrow H = \frac{N i}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 k_m H = \mu_0 k_m \frac{N i}{2\pi r}, \quad M = \chi_m H = \frac{\chi_m N i}{2\pi r}, \quad i_m = \oint \vec{M} d\vec{s} = M 2\pi r = \chi_m N i$$

GAUSS MAGNETICO

giovedì 2 luglio 2020 14:56

Mentre la circuitazione magnetica è non sempre nulla il flusso del campo su superficie chiuso è Nullo

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma , \quad \Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma \quad [Wb = Tm^2]$$

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

Con il Rotore, (Stokes) posso affermare allora che anche la divergenza è Nulla

$$\vec{\nabla} * \vec{B} = 0$$

e questo risultato vale in ogni punto interno della superficie (sennò potrei restringere Gauss)

Infatti non Esistono dei Monopoli Magnetici

CAMPO SOLENOIDALE

La proprietà del campo Magnetico è di essere solenoidale, ovvero Scelto un qualunque cammino chiuso, il flusso di campo è lo stesso per qualunque superficie che si appoggia a quel cammino

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = - \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{B}_{\Sigma_1}) = \phi(\vec{B}_{\Sigma_2})$$

RIASSUNTONE EQUAZIONI MAGNETOSTATICA

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i , \quad \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} , \quad \vec{\nabla} * \vec{B} = 0$$

+ equivalente del potenziale :

potrei pensare che esisterà sempre un vettore A t.c.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} * \vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$$

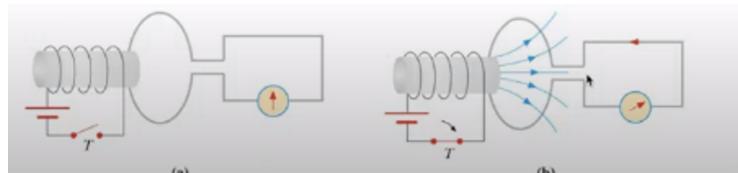
infatti prodotto scalare di vettori perpendicolari, per Shwartz si intercambiano versori

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

CAMPI ELETROMAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

giovedì 2 luglio 2020 18:33

avvicinando o allontanando un Magnete al circuito oppure attivando, disattivando un solenoide, genero un campo magnetico variabile che mi induce scorimento di corrente nel circuito



la relazione che si osserva è la seguente

$$f.e.m. = V_i = \oint \vec{E}_i d\vec{s} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \rightarrow \text{legge Faraday Lenz} \quad [Wb = V * s]$$

Per capire il verso si può pensare che la corrente nel circuito scorrerà in direzione tale che da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo inducente

CAMPO ELETTRICO INDOTTO

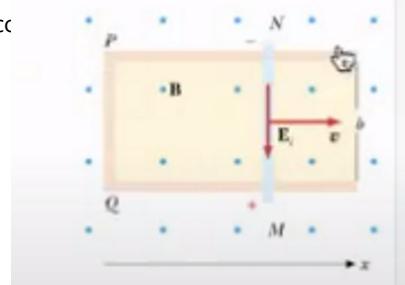
Da Moto

Consideriamo il caso di una sbarretta metallica su dei binari immersi in un campo Magnetico

Se cerco di calcolare la f.e.m. sul circuito solo gli elettroni sulla sbarretta stanno subendo una foza di Lorenz

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_L}{-e} = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow V_i = \oint_{\square} \vec{E}_i d\vec{s} = -v B b$$

se invece procedo secondo il calcolo della variazione di flusso sui semicircuiti



$$\Phi(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = B b x \Rightarrow V_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -B b v$$

Da Variazione

Il flusso concatenato (B_m è il flusso Medio) ad un circuito a bobina di raggio r

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = B_m \pi r^2$$

la f.e.m nelle due definizioni

$$V_i = \oint \vec{E}_i d\vec{s} = 2\pi r E_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB_m}{dt}$$

$$E_i = -\frac{1}{2} r \frac{dB_m}{dt}$$

BETATRONE

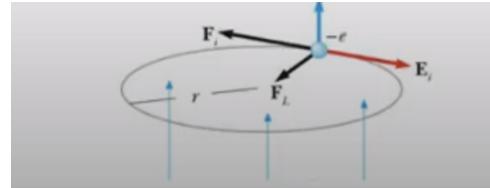
Posso avere anche un'accelerazione degli elettroni se



BETATRONE

Penso avere anche un'accelerazione degli elettronni se

$$\Delta E_k = W = \oint \vec{F} d\vec{s} = -e \oint \vec{E}_i d\vec{s} = -e V_i = e \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$



inoltre il campo B dovrà anche dipendere dal raggio per mantenere l'elettrone in orbita

APPLICAZIONI DI FARADAY

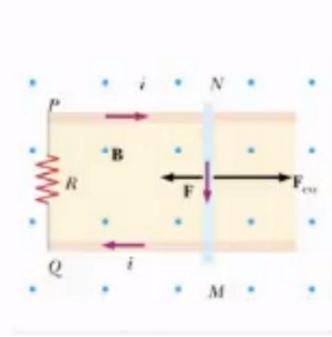
- **Generatore di Corrente**

Come già visto un circuito in un campo magnetico costante che cambia il perimetro sbarretta mossa da forze, se $R, r \rightarrow$ resistenze di Circuito e Sbarretta

la forza di attrito elettromagnetico

$$\vec{F} = i \overrightarrow{NM} \times \vec{B}$$

$$i = \frac{V_i}{R+r} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{B^2 b^2}{r+R} \vec{v}$$



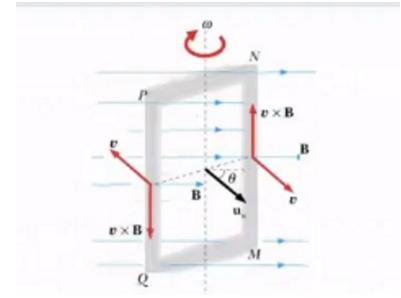
calcolando la potenza

$$P = \vec{F} * \vec{v} = \frac{B^2 b^2 v^2}{r+R} = (r+R)i^2 = V_i i$$

Questa è proprio la potenza di un Generatore di corrente continua di un circuito

- **Generatore di Corrente alternata**

Una bobina immersa in campo magnetico che ruota su se stessa il campo magnetico intercetta con inclinazione variabile (flusso variabile)



$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} * \vec{u}_n d\Sigma = B\Sigma \cos \theta = B\Sigma \cos(\omega t)$$

$$f.e.m. = V_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \omega B\Sigma \sin(\omega t)$$

$$i = \frac{V_i}{R} = \frac{\omega B\Sigma}{R} \sin(\omega t), \quad P = V_i i = \frac{\omega^2 B^2 \Sigma^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\text{La potenza Media non dipende dal tempo ed è } P_m = \frac{\omega^2 B^2 \Sigma^2}{2R}$$

MISURATORE DI CAMPO MAGNETICO

La legge di Faraday mi dice che

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

un circuito che mi permette di misurare la carica che transita, posto ortogonalmente al campo poi sposto il circuito in una regione a campo magnetico nullo

$$\Phi_2 = 0 \Rightarrow q = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{N B \Sigma}{R} \Rightarrow B = \frac{qR}{N \Sigma}$$

(nel caso del campo magnetico terrestre non è semplice annullare il campo ... quindi conviene ribaltare la spira per invertire il campo)

AUTOINDUZIONE

giovedì 2 luglio 2020 20:09

Da un circuito chiuso in cui circola corrente i viene prodotto un campo magnetico, il flusso di questo campo sul circuito stesso è l'autoflusso

$$\Phi(\vec{B}) = \int \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \vec{u}_n d\Sigma$$

posso estrarre i come costante

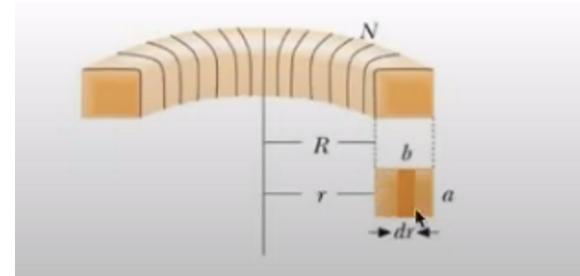
$$\Phi = L i$$

$$L \quad [\frac{Wb}{A} = \frac{V}{s} = \Omega s = H] \rightarrow \text{induttanza del circuito (dipende da geometria e materiali)}$$

INDUTTANZA DI UN SOLENOIDE A TORO

il procedimento conveniente è ricavarla da $L = \frac{\Phi}{i}$

Posso calcolare il flusso sul toroide tenendo conto che il campo è tangenziale a circonferenze interne al toro



Nota che il campo interno è variabile e quindi per calcolare il flusso totale su una spira devo integrare i flussi sulle sezioni infinitesime dell'area della spira

$$\Phi_s(\vec{B}) = \int_R^{R+b} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 N a i}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

poi per N spire

$$\Phi(\vec{B}) = N \Phi_s(\vec{B}) = \frac{\mu_0 N^2 a i}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

Allora l'induttanza sarà

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

INDUTTANZA DI UN SOLENOIDE INFINITO

$$\vec{B} = \mu_0 n \vec{i} \Rightarrow \Phi_l(\vec{B}) = \mu_0 n i \Sigma \rightarrow \text{in tratto di lunghezza } l$$

$$\Phi(\vec{B}) = n l \Phi_l(\vec{B}) = \mu_0 n^2 l i \Sigma$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 l \Sigma \rightarrow \text{per unità di lunghezza} \rightarrow L = \mu_0 n^2 \Sigma$$

ENERGIA MAGNETICA

Come quando definimmo l'energia elettrica, la potenza di un generatore è

$$V i = R i^2 + L i \frac{di}{dt}$$

il lavoro è quindi

$$dW = Vi dt = Ri^2 dt + L i di$$

$$U_L = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow \text{energia magnetica}$$

$$\rightarrow U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2 \mu_0} \tau \rightarrow \text{con } \tau \text{ volume}$$

$$u_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} \rightarrow \text{è la densità di energia magnetica}$$

Energia in un Toro

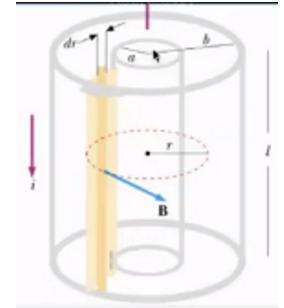
$$u_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 i^2}{8 \pi^2 r^2}, \quad dU_m = u_m d\tau = u_m 2\pi r a dr = \frac{\mu_0 N^2 i^2}{4\pi r} a dr \rightarrow \text{in volumetto di Toro}$$

$$\Rightarrow U_m = \int_R^{R+b} dU_m = \frac{\mu_0 N^2 a i^2}{4\pi} \ln \frac{R+b}{R} = \frac{1}{2} L i^2$$

CAVO COASSIALE

è un cavo composto da due superfici cilindriche conduttrici coassiali dove scorre corrente in verso opposto

si può analizzare partendo da Biot Savart / Ampere, considerando la corrente concatenata come i passante nel cilindro interno



$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad a \leq r \leq b \rightarrow$$

$$u_m(r) = \frac{B^2(r)}{2 \mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8 \pi^2 r^2}, \quad dU_m(r) = u_m(r) d\tau = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi r} dr$$

$$U_m = \int_a^b dU_m = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi r} \ln \frac{b}{a} \rightarrow \text{in unità di lunghezza} \rightarrow U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{b}{a} i^2 = \frac{1}{2} L i^2$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi r} \ln \frac{b}{a}$$

INDUZIONE MUTUA

venerdì 3 luglio 2020 09:01

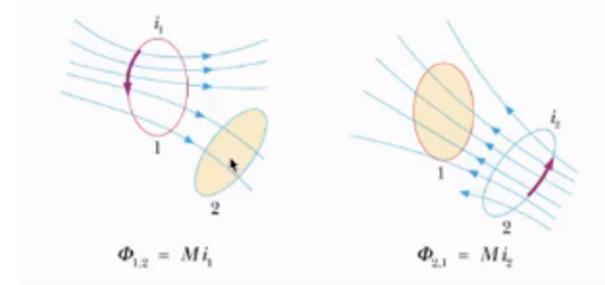
L'idea è che con due circuiti posso considerare

$$\Phi_{1,2} = M i_1 \rightarrow \text{flusso di } B_1 \text{ su 2}$$

$$\Phi_{2,1} = M i_2 \rightarrow \text{flusso di } B_2 \text{ su 1}$$

a seconda del **coefficiente di mutua induzione**

$$M = M_{1,2} = M_{2,1}$$



MUTUA INDUZIONE FRA DUE BOBINE

Supponendo di avere due Bobine coassiali, di cui quella interna è di lunghezza infinita (n_1) , invece quella esterna ha N_2 spire

Conviene calcolare il coefficiente M considerando il campo di 1(che è noto e costante) che fa flusso su 2

$$\Phi_{1,2} = N_2 \Phi_S = N_2 \mu_0 n_1 \Sigma_1 i_1 \Rightarrow M = \mu_0 n_1 N_2 \Sigma_1$$

DIMOSTRO : ENERGIA MAGNETICA DI CIRCUITI ACCOPPIATI

Considerando invece circuiti accoppiati (collegati da campo magnetico)
Pensando di portare la corrente in 1 da 0 ad i_1

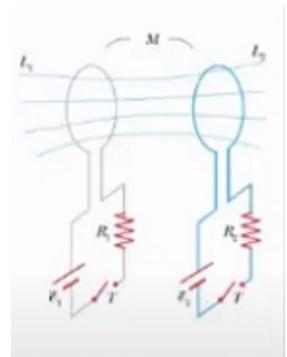
Se calcolo l'energia Magnetica

$$U_{2,1} = - \int V_1 i_1 dt = \int M_{2,1} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{2,1} i_1 i_2$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{2,1} i_1 i_2$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{1,2} i_1 i_2$$

$$\Rightarrow M_{1,2} = M_{2,1} = M$$



LEGGE DI AMPERE MAXWELL

venerdì 3 luglio 2020 10:44

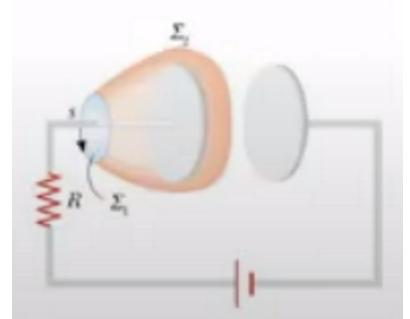
La legge di Ampere mi diceva che

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c$$

e causa problemi nell'caso di carica/scarica di condensatore
Maxwell introduce una corrente di Spostamento tra le armature del condensatore

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d \Phi(E)}{dt}$$

il senso fisico però è che il campo magnetico è prodotto sia dalle correnti concatenate che dalle variazioni da campo elettrico



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_c + i_s) = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{d \Phi(E)}{dt} \right)$$

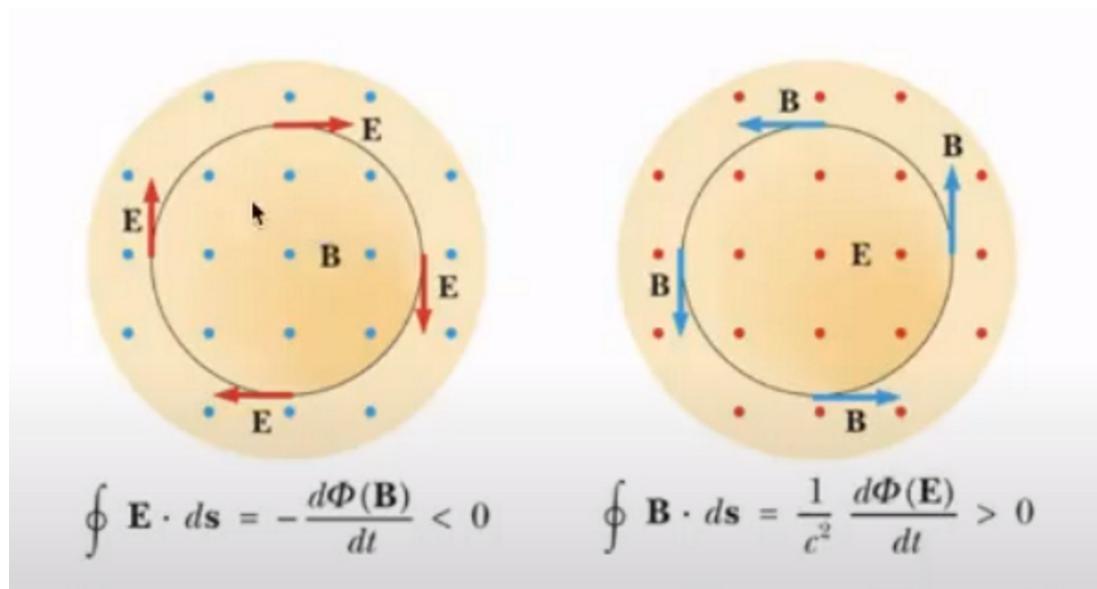
CORRENTE DI SPOSTAMENTO

ricordandoci che in condensatore $C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$, $E = \frac{V}{h} \rightarrow$ perché campo uniforme

$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Sigma V}{h} \right) = \epsilon_0 \frac{d \Sigma E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d \Phi(E)}{dt}$$

$$j_s = \frac{i_s}{\Sigma} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \rightarrow \text{ovvero su qualunque superficie vale la legge}$$

Simmetria dei campi



CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA CORRENTI DI SPOSTAMENTO

Considerando un condensatore ad armature circolari a raggio R, collegato ad un generatore di corrente alternata che stabilisce un campo $E = E_0 \sin \omega t$, calcolarsi la f.e.m indotta in un toroide inserito fra le armature

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \epsilon_0 \mu_0 \pi r \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{r \omega E_0}{2c^2} \cos(\omega t)$$

Questo campo magnetico mi produrrà una f.e.m. secondo Faraday

$$V_i = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = -N \Sigma \frac{dB}{dt} = \frac{N \Sigma r \omega^2 E_0}{2c^2} \sin(\omega t)$$

EQUAZIONI DI MAXWELL

venerdì 3 luglio 2020 11:28

Il riassunto del corso tramite 4 equazioni

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} , \quad \Gamma(\vec{E}) = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 , \quad \Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

Leggi simmetriche per l'esclusione della non esistenza della Carica Magnetica ...

Inoltre si nota che il campo Magnetico si genera anche con variazioni nel campo elettrico senza Spostamento effettivo di cariche nello spazio

La forza di una carica in un campo ElettroMagnetico

$$\vec{F} = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La densità di energia del campo ElettroMagnetico

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} B^2$$

Nel vuoto non ci sono cariche elettriche, ovvero

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 , \quad \Gamma(\vec{E}) = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 , \quad \Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Nel 1873 Maxwell ricavò, risolvendo queste equazioni, le espressioni delle onde elettromagnetiche che, nel vuoto si propagano alla velocità c

Ricordandoci la formulazione **locale** attraverso vettore di divergenza

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} * \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

per quanto riguarda la circuitazione di Campo Elettrico, secondo THM STOKES, mi dice che *si può esprimere come flusso del rotore*

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \vec{u}_n d\Sigma = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \vec{u}_n d\Sigma$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Anche per quanto riguarda il campo magnetico posso dimostrare il risultato

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

TABELLA 8.1 Le equazioni di Maxwell nel vuoto

	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Legge di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \right)$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

Conservazione della carica elettrica

In generale si può dire che la divergenza di un rotore è nulla $\vec{\nabla} * \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, da cui

$$\vec{\nabla} * \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} * \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Ho l'equazione di continuità della carica

$$\vec{\nabla} * \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \text{ovvero } j \text{ è solenoidale se la carica è costante (non varia)}$$

Quindi in casi in cui ci sono accumuli di cariche in un circuito ad esempio non vale più Kirchoff ai Nodi

ONDE ELETTROMAGNETICHE

venerdì 3 luglio 2020 12:26

ONDE

perturbazioni di grandezza fisica che vengono trasportate nello spazio in un mezzo

- Trasversali → se la perturbazione è su un asse perpendicolare alla direzione di propagazione
- Longitudinali → se la perturbazione è in linea con la propagazione

ONDE PIANE

Sono onde tali che la grandezza viene perturbata solo nella direzione di perturbazione, ovvero il fronte dell'onda (insieme di punti a stesso valore) è costituito da piani ad esempio l'onda sonora non è planare

Soddisfano, per la grandezza E perturbata, l'equazione

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E(z)}{\partial x} = \frac{\partial E(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial E(z)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial E(z)}{\partial t} = \frac{\partial E(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial E(z)}{\partial z},$$

Da qui posso definire le soluzioni dell'equazione delle onde piane

$$E(x - vt) \rightarrow \text{soluzione Progressiva}$$

$$E(x + vt) \rightarrow \text{soluzione Regressiva}$$

gli argomenti vanno come Moto rettilineo

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2},$$

ONDA ARMONICA

$$E(x, t) = E_0 \sin(k(x - vt)), \quad E_0 \cos(k(x - vt))$$

$$\Rightarrow E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \omega &= k v, & \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = v T, & T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \phi &= kx - \omega t \end{aligned}$$

La costante k rende adimensionale l'argomento

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Partendo dalle Equazioni di Maxwell

$$\text{I} \quad \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad \text{II} \quad \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\text{III} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad \text{IV} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$$

Supponendo x come direzione di propagazione avrò

$$\vec{E}(x, t) = E_y(x, t) \vec{u}_y + E_z(x, t) \vec{u}_z, \quad \vec{B}(x, t) = B_y(x, t) \vec{u}_y + B_z(x, t) \vec{u}_z$$

I campi sono solenoidali ovvero la divergenza è nulla

$$\vec{\nabla} * \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \vec{\nabla} * \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Calcolandosi i rotori con il prod vettoriale (ricorda determinante Matrice). Ricordandosi che x è il verso di propagazione dell'onda piano, ovvero tutte le derivate parziali in $\partial z, \partial y$ sono nulle

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \rightarrow -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \rightarrow -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \rightarrow -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{analogamente a Prima} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{cases}$$

il fatto che $\partial E_x, \partial B_x \rightarrow$ sono nulle sia nel tempo che nello spazio vorrà dire che lungo la direzione di propagazione i campi saranno proprio perpendicolari alla direzione

Se ora derivo 2 volte posso ottenere le equazioni delle onde lungo la direzione x

$$\begin{aligned} \text{Es. } \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Le Equazioni in forma vettoriale quindi saranno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \end{cases}$$

le soluzioni saranno le onde a velocità luce $v = c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.997 * 10^8 \text{ m/s}$

$$\vec{E} = E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

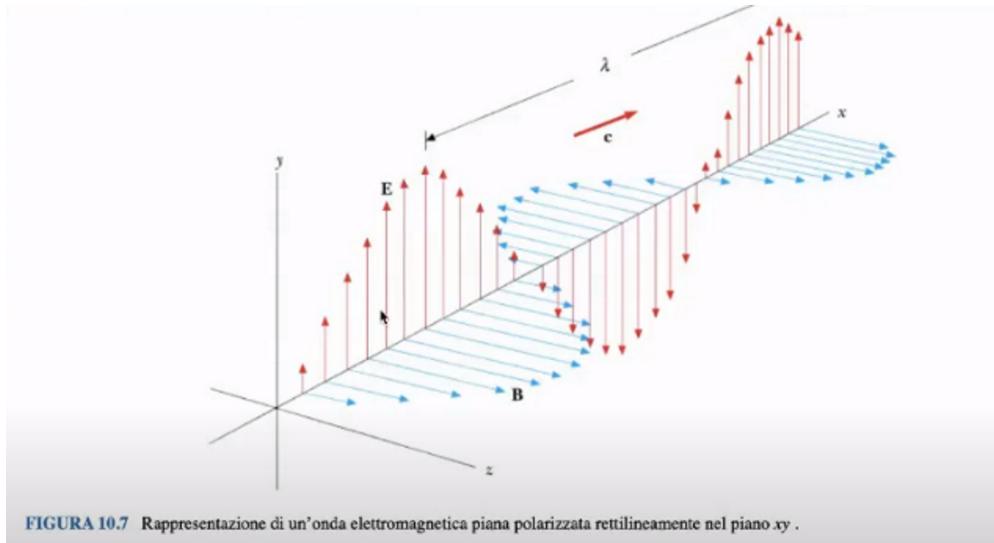
$$\vec{B} = B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z = B_{0y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + B_{0z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

inoltre posso mettere in relazione le ampiezze se penso

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -k E_{0x} \sin(kx - \omega t) = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \omega B_{0y} \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow B_{0y} = -\frac{E_{0x}}{c}, \quad B_{0x} = \frac{E_{0y}}{c}$$

$$\rightarrow B = \frac{E}{c}, \quad \vec{E} * \vec{B} = 0, \quad \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c} (E_y^2 + E_z^2) \vec{u}_x = \frac{E^2}{c} \vec{u}_x = EB \vec{u}_x \rightarrow \text{il verso di propagazione}$$



CAVO COASSIALE

In precedenza ricavammo i risultati per Capacità ed Induttanza per unità di lunghezza del Cavo Coassiale

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}, \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

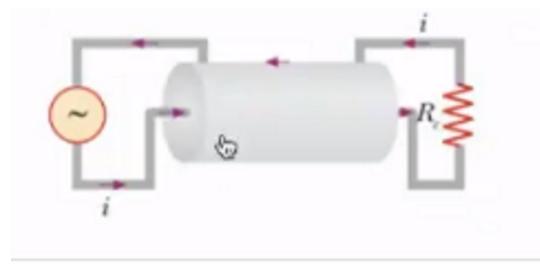
$$\Rightarrow CL = \frac{1}{c^2}$$

Con un circuito composto da Antenna (generatore AC), Coassiale e Resistore
Calcolo variazione di tensione e corrente

$$dV = L dx \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = L \frac{di}{dt}$$

$$di = C dx \frac{dV}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dx} = C \frac{dV}{dt}$$

Sono risultati analoghi ai quelli delle onde elettromagnetiche



Ovvero in un cavo coassiale il potenziale e la corrente si comportano come i Campi Elettromagnetici e quindi è possibile trasmettere il segnale dell'onda attraverso questi cavi

ENERGIA IN UN ONDA

Essendo che i moduli dei campi sono in relazione

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = u_e$$

Allora il contributo di entrambi i campi è semplicemente il doppio della densità di energia di ciascun campo

$$u = u_e + u_m = 2u_e = \epsilon_0 E^2$$

VETTORE DI POYNTING

Esplicitando la Potenza di un volume attraversato da un onda elettromagnetica

$$dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt$$

$$\Rightarrow P = \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 c \Sigma$$

Posso allora definire il Vettore di Poynting

$$\vec{S} = \epsilon_0 E^2 \hat{c}$$

ha la proprietà che il flusso $\Phi(\vec{S}) = P$ attraverso una superficie è proprio la Potenza trasferita dall'onda alla superficie

è utile Avere conoscenza sulla potenza Media (Metà i valore massimo) del vettore di Poynting (che dipende dal campo E che oscilla)

$$S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E^2)_m = \epsilon_0 c \frac{1}{l} \int_0^t E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt$$

$$S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \rightarrow \text{Intensità dell'onda elettromagnetica}$$

ONDE SFERICHE

le onde prodotte dal sole sono in realtà onde sferiche, anche se sulla terra arrivano approssimativamente come piane.
Nel caso di onda sferiche le onde vanno secondo il raggio, i fronti non saranno più piani ma superfici sferiche ad un certo r

$$E(r, t) = E_0(r) \cos(kr - \omega t)$$

Infatti la potenza deve conservarsi e, distribuendosi su superfici sempre più grandi mi risulta che $E_0(r) = \frac{E_0}{r}$

$$P_m = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{r} 4\pi r^2 , \quad I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2}$$

QUANTITA' DI MOTO

Anche la quantità di moto è associata ad un onda piana, i fotoni provocano forza su superfici
Diamo per buona l' equazione della pressione

$$p = \frac{I}{c}$$

Questo se il corpo è completamente assorbente, nel caso di superficie completamente riflettente avrà invece

$$p_{max} = \frac{2I}{c}$$

Durante l'urto vale il principio di conservazione della quantità di moto, a seconda di coefficienti di riflessioni (percentuali di onda riflessa)