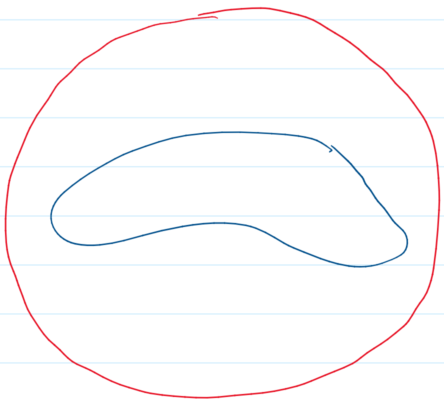
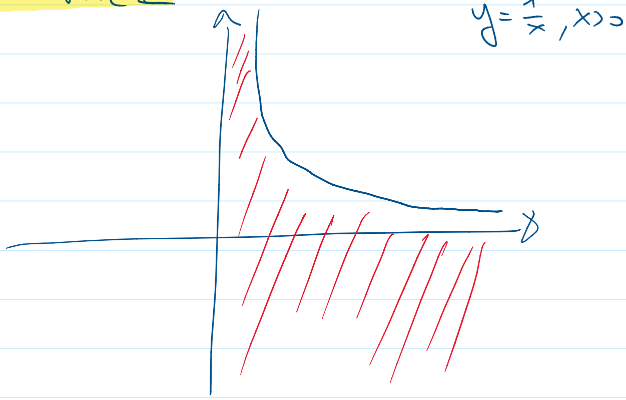
INSIEMI LIMITATI

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E si dice limitato se $\exists R>0$ t.c. $E \subseteq D(0,R)$ ⟵
$\exists R>0$ t.c. $\|x\| \leq R \quad \forall x \in E$

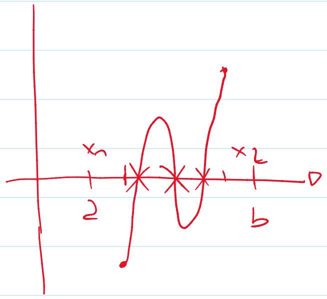




TEOREMA DI WEIERSTRASS (no dim)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato e sia $f: E \to \mathbb{R}$ continua.
Allora f AMMETTE MASSIMO E MINIMO IN E
$\exists\, \underline{x}_m, \underline{x}_M \in E$ t.c.

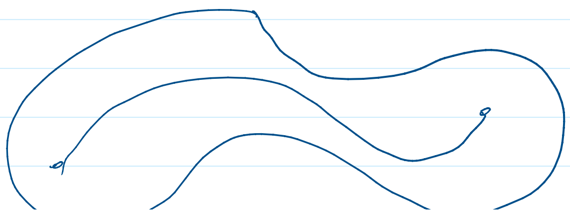
$$f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_M) \quad \forall \underline{x} \in E.$$

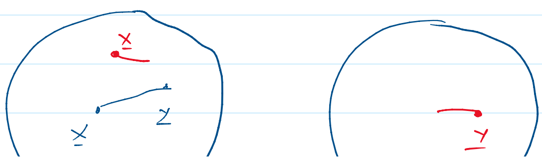


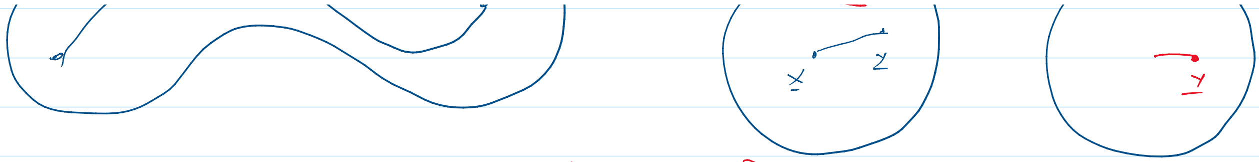
INSIEMI CONNESSI PER ARCHI

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E si dice connesso (per archi) se $\forall \underline{x}, \underline{y} \in E$, esiste un arco di curva continua, tutto contenuto in E e avente primo estremo in $\underline{x}$ e secondo estremo in $\underline{y}$ cioè

$\exists\, \gamma: t \in [a,b] \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma([a,b]) \subset E$
γ continua
$\gamma(a) = \underline{x}$, $\gamma(b) = \underline{y}$







TEOREMA DEGLI ZERI (no dim)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme connesso e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono $\underline{x}, \underline{y} \in E$ t.c. $f(\underline{x}) < 0 < f(\underline{y})$, allora $\exists\, \underline{p} \in E$ t.c. $f(\underline{p}) = 0$.

ESEMPIO

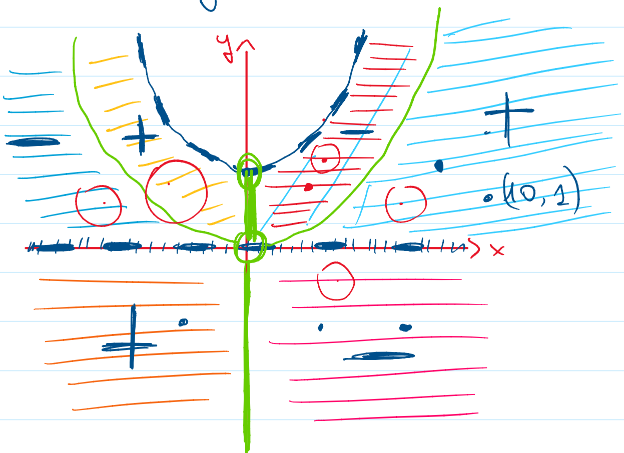
$$f(x,y) = \frac{x \ln(1+x^2-y)}{y}$$

Individuare il dominio E, disegnarlo e descriverne le proprietà

Individuare gli insiemi

$E_+ := \{x \in E : f(x) > 0\}$, $E_0 := \{x \in E : f(x) = 0\}$, $E_- := \{x \in E : f(x) < 0\}$

Dominio:
$$\begin{cases} 1 + x^2 - y > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y < 1 + x^2 \\ y \neq 0 \end{cases}$$



$y = 1 + x^2 \qquad V(0,1)$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \text{ e } y < 1 + x^2\}$

APERTO, NON LIMITATO, NON CONNESSO

$$f(x,y) = \frac{x \ln(1+x^2-y)}{y}$$

$(x,y) \in E$

$x = 0 \ \vee \ \ln(1+x^2-y) = 0$

$x = 0 \ \vee \ 1 + x^2 - y = 1$

$x = 0 \ \vee \ y = x^2$

$$f(10,1) = \frac{10 \ln(\cancel{1} + 100 - \cancel{1})}{1} > 0$$

$$f\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{1 \ln\left(1 + 1 - \frac{3}{2}\right)}{3/2} = \frac{2}{3} \ln \frac{1}{2} < 0$$

$$f\left(-1, \frac{3}{2}\right) = \frac{-1 \ln(1 + 1 - 3/2)}{\frac{2}{3}} = \frac{-2}{3} \ln \frac{1}{2} > 0$$

$$f(-10,1) = \frac{-10 \ln(1 + 100 - 1)}{+1} = -10 \ln 100 < 0$$

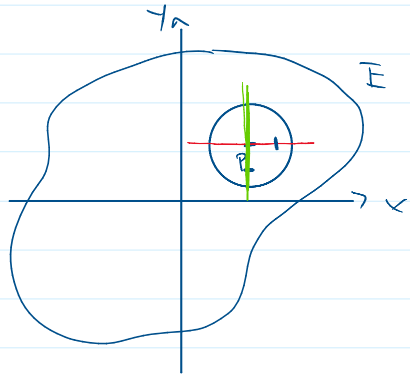
$$f(-1,-1) = \frac{-1 \ln(1 + 1 + 1)}{-1} = \ln 3 > 0$$

$$f(1,-1) = \frac{1 \cdot \ln(3)}{-1} = -\ln 3 < 0$$

— o —

DERIVATE PARZIALI

$n=2$ $\quad f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad P_0(x_0,y_0) \in \text{int}(E)$



$\exists r>0$ t.c. $\forall h \in [-r,r]$: più

$(x_0+h, y_0) \in E$ $\qquad g(h) = f(x_0+h)$ $\quad g'(x_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Se questo limite esiste ed è finito, lo chiamo DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x nel pto (x_0,y_0) e lo indico

$\to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $f_x(x_0,y_0)$, $D_x f(x_0,y_0)$

Se esiste finito il $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$, lo chiamo DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE y NEL PTO (x_0,y_0) e lo indico

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ $\qquad f_y(x_0,y_0)$ $\qquad D_y f(x_0,y_0)$ $\qquad \partial = de$

In $\mathbb{R}^n$, n generico

$\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \_\_ x_n^0)$ $\qquad$ variare la i-esima componente

$(x_1^0, x_2^0, \dots x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0 \dots x_n^0)$

$\underline{e}_i = (0, \_\_, 0, 1, 0, \_\_ 0)$ $\qquad \underline{x}_0 + h\underline{e}_i$

$\quad \hookrightarrow$ i-esima componente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

Se questo limite esiste finito, lo chiamo derivata parziale di

Se questo limite esiste finito, lo chiamo derivata parziale di f rispetto alla i-esima variabile nel pto $\underline{x}_0$ e lo indico

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \qquad f_{x_i}(\underline{x}_0) \qquad D_{x_i} f(\underline{x}_0)$$

DEF Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0 \in \text{int}(E)$.
Se $\forall i = 1 \ldots n$ esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$, dico che f è derivabile in $\underline{x}_0$
Il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right)$
si dice GRADIENTE DI f IN $\underline{x}_0$ e si indica

$$\nabla f(\underline{x}_0) \qquad Df(\underline{x}_0) \qquad \text{grad}\, f(\underline{x}_0)$$

Se f è derivabile in ogni pto $\underline{x}_0 \in \text{int}(E)$, dico che f è derivabile.

ESEMPI $\quad f(x,y) = x^3 y^2 - x^2 e^{y+x} \qquad E = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 3x^2 - 2x e^{y+x} - x^2 \cdot e^{x+y} = 3x^2y^2 - xe^{x+y}(2+x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 2y - x^2 e^{y+x} = x^2(2xy - e^{x+y})$$

$$Df(x,y) = \left(3x^2y^2 - x(x+2)e^{x+y},\ x^2(2xy - e^{x+y})\right)$$

$n=3$ PIANO AFFINE $\quad \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$P_0 \in$ piano $\qquad (P - P_0) \perp v$ per ogni altro pto del piano
$P_0 = (x_0\ y_0\ z_0) \qquad P(x, y, z)$

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)) \circ (v_1, v_2, v_3) = 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0\}$$

$n \geq 4$ π IPERPIANO AFFINE
$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n)$
$P_0 = (x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0) \in \pi$

$$\pi := \{\underline{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n) \text{ t.c. } : (\underline{x} - P_0) \circ \underline{v} = 0\}$$

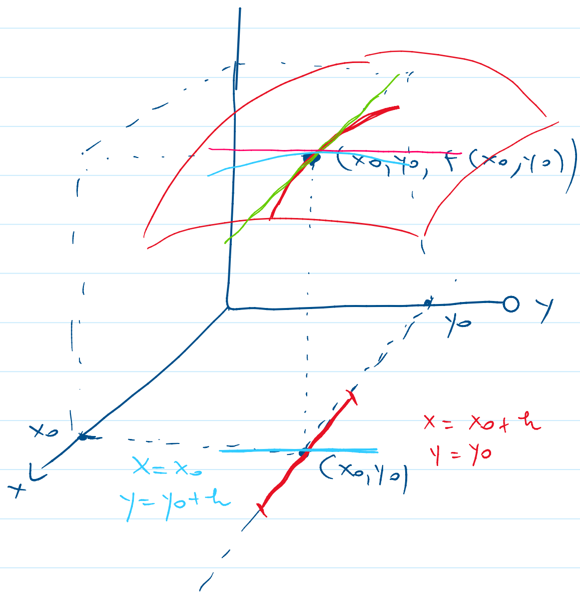
$$= \{\underline{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n) \text{ t.c. } (x_1 - x_1^0)v_1 + (x_2 - x_2^0)v_2 \ldots + (x_n - x_n^0)v_n = 0\}$$

$= \{ \underline{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n) \text{ t.c. } (x_1 - x_1^0) v_1 + (x_2 - x_2^0) v_2 \ldots + (x_n - x_n^0) v_n = 0 \}$

— o —

$n = 2$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aperto



$$\text{Graf}(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \ z = f(x, y) \}$$

$$(x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$$

$$g(h) = f(x_0 + h, y_0)$$

$$(x_0, y_0 + h, f(x_0, y_0 + h))$$

$$l(h) = f(x_0, y_0 + h)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 \\ z = f(x_0 + h, y_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \text{ libera} \\ y = y_0 \\ z = f(x, y_0) = g(x) \end{cases}$$

retta tangente $\begin{cases} y = y_0 \\ z = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0) \end{cases}$

$g'(x_0)$ esiste se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ esiste e in quel caso sono uguali

retta tangente $\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + h \\ z = f(x_0, y_0 + h) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ y \text{ libera} \\ z = f(x_0, y) = l(y) \end{cases}$$

retta tangente $\begin{cases} x = x_0 \\ z = l(y_0) + l'(y_0)(y - y_0) \end{cases}$

$l'(y_0)$ esiste se esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e in tal caso sono uguali

$\{ x = x_0$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

Il mio candidato ad essere piano Tangente deve contenere le due rette

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

$$\boxed{v_1\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)} \qquad \boxed{v_2\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}$$

$x = x_0$ $\qquad z = f(x_0,y_0)$

$x = x_0+1$ $\qquad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

$\Delta x = 1$ $\qquad \Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$\Pi = \left\{ P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : P - P_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = \lambda_1 \\ y - y_0 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = \lambda_2 \\ z - f(x_0,y_0) = \lambda_1 f_x(x_0,y_0) + \lambda_2 f_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

$$\Pi \quad \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 \\ y = y_0 + \lambda_2 \\ z = f(x_0,y_0) + \lambda_1 f_x(x_0,y_0) + \lambda_2 f_y(x_0,y_0) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= x - x_0 \\ \lambda_2 &= y - y_0 \end{aligned}$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\Pi \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0,y_0) + \underline{f_x(x_0,y_0)}(x-x_0) + \underline{f_y(x_0,y_0)}(y-y_0) \right\}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ (volte scorse)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ?$

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \qquad h \neq 0$$

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} =$$

$$= \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = ?$

$$\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \qquad h \neq 0$$

$$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{0 \cdot h}{0+h^2} - 0}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$f : I = (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I \quad$ f derivabile in x_0

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h f'(x_0) + o(h)$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h) \qquad \text{con } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) - h f'(x_0) = h\,\varepsilon(h) \qquad A(h) := h\,\varepsilon(h)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \underbrace{h\,\varepsilon(h)}_{A(h)} \qquad \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{A(h)}{h} = 0}$$

$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \underbrace{h\varepsilon(h)}_{A(h)}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\quad}{h} = 0$

$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)$ per $h \to 0$

$A(h)$ è un $o(h)$ per $h \to 0$

DEF Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, sia $\underline{x}_0 \in A$

Dico che f è DIFFERENZIABILE NEL PTO $\underline{x}_0$ se

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$$

ZONZIBASA

OSS $n=2$. (x_0,y_0) (h,k)

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big) \cdot (h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$\to f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h f_x(x_0,y_0) + k f_y(x_0,y_0) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

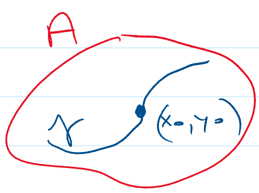
$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

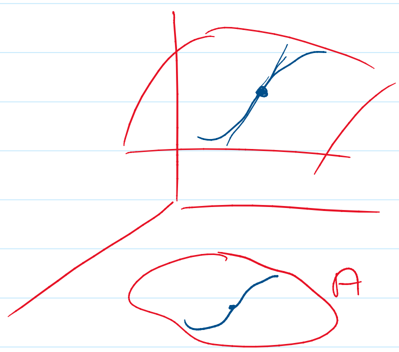
$x = x_0+h$, $y = y_0+k$

$$\to z = f(x_0,y_0) + h f_x(x_0,y_0) + k f_y(x_0,y_0)$$

$f(x_0+h, y_0+k) - z = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$

$f(x_0+h, y_0+k) - z = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) = o(\|(h,k)\|)$





$\gamma(t)$ $t \in (a,b)$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)) = g(t)$

$$\eta(t) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = g(t) = f(x(t), y(t)) \end{cases} \quad \Big\| \ \gamma(t) \qquad t \in (a,b)$$

$$\eta(t)\ \begin{cases} y = y(t) & \text{''} \quad \text{''} \\ z = g(t) = f(x(t), y(t)) \end{cases} \qquad t \in (a,b)$$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\underline{x}_0 \in A$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$
Supponiamo che esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{v} \circ \underline{h} + o(\|\underline{h}\|) \quad \text{per } \underline{h} \to \underline{0}$$

$$\frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0)}{\|\underline{h}\|} = \frac{\underline{v} \circ \underline{h}}{\|\underline{h}\|} + \varepsilon(\|\underline{h}\|) \qquad \text{con } \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \varepsilon(\|\underline{h}\|) = 0$$

$$\underline{h} = (h_1, 0, \_\_\_, 0) \qquad \underline{x}_0 + \underline{h} = (x_1^0 + h_1, x_2^0, \dots x_n^0) = \underline{x}_0 + h_1 \underline{e}_1$$

$$\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \qquad \underline{e}_1 = (1, 0, \_\_, 0)$$

$$\|\underline{h}\| = |h_1|$$

$$\frac{f(\underline{x}_0 + h_1 \underline{e}_1) - f(\underline{x}_0)}{|h_1|} = \frac{h_1 v_1}{|h_1|} + \varepsilon(|h_1|) \qquad \lim_{h_1 \to 0} \varepsilon(|h_1|) = 0$$

$$\frac{f(\underline{x}_0 + h_1 \underline{e}_1) - f(\underline{x}_0)}{\cancel{|h_1|}} \cdot \frac{\cancel{|h_1|}}{h_1} = \frac{\cancel{h_1} v_1}{\cancel{|h_1|}} \frac{\cancel{|h_1|}}{\cancel{h_1}} + \frac{|h_1|}{h_1} \varepsilon(|h_1|)$$

$$\frac{f(\underline{x}_0 + h_1 \underline{e}_1) - f(\underline{x}_0)}{h_1} = v_1 + \boxed{\frac{|h_1|}{h_1}} \varepsilon(|h_1|) \to 0 \quad \text{per } h_1 \to 0$$

limitata perché vale 1 se $h_1 > 0$
-1 se $h_1 < 0$

quando $h_1 \to 0$
il secondo membro dell'uguaglianza converge a v_1

$$\Rightarrow \exists \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h_1 \underline{e}_1) - f(\underline{x}_0)}{h_1} = v_1$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) = v_1$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = v_i \quad \forall i = 1 \_\_\_ n$

ovvero $\quad \mathrm{grad}(f)(\underline{x}_0) = \underline{v}$