Contents

1 Disuguaglianza di Markov

lode a `https://en.wikipedia.org/wiki/Markov%27s_inequality`

La disuguaglianza di Markov (che in realtà ha pubblicato prima Chebychev) afferma che data

- X una V.A. non negativa per cui
  - $\exists \mathbb{E}[X]$

allora

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$$

1.1 Dimostrazione

Partendo dalla definizione di $\mathbb{E}[X]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx, \text{ ma } X \text{ non negativa, quindi} \\
&= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_0^{\alpha} xf(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\
&\geq \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\
&\geq \int_{\alpha}^{+\infty} \alpha f(x)dx \\
&= \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx, \text{ che per definizione di } f(x) \\
&= \alpha\mathbb{P}(X \in [\alpha, +\infty]) \\
&= \alpha\mathbb{P}(X \geq \alpha)
\end{aligned}
$$

da questo puttanaio si arriva a

$$\mathbb{E}[X] \geq \alpha\mathbb{P}(X \geq \alpha)$$

da cui si ricava abbastanza facilmente che

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$$

2 Chebychev

La disuguaglianza di Chebychev da un limite a quanto può variare dalla media una V.A. data la sua varianza [1]

essa afferma che, dati

- X una V.A. per cui
  - $\exists$ finito $\mathbb{E}[X]$
- μ la media di X
- σ^2 la varianza di x $\iff$ σ la deviazione standard di X

[1] perchè la gente si diverte male

- un qualche k a caso $\in \mathbb{R}$, con $k \geq 0$

allora

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

2.1 Dimostrazione

La disuguaglianza di Chebychev si può dimostrare come "corollario" di quella di Markov, questo si fa facendo gli stronzi con Markov come segue :

da Markov sappiamo che $\forall$ va X e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$$

visto che sta cosa vale $\forall$ va $X, \alpha \in \mathbb{R}$ allora facciamo l'adattatore di tacchini per Markov ponendo

- $Y = (X - \mu)^2$
- $\alpha = (k\sigma)^2$

date queste scelte [2] si arriva a

$$\mathbb{P}(Y \geq (k\sigma)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{(k\sigma)^2}$$

massacriamo ora il primo termine, e poi il secondo

2.1.1 Primo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y \geq (k\sigma)^2) \\ =&\mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq (k\sigma)^2) \end{aligned}$$

visto che sia $(X - \mu)^2$ che $(k\sigma)^2$ sono positivi, allora possiamo mettere la radice da entrambe le parti della disequanzione, ottenendo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq (k\sigma)^2) \\ =&\mathbb{P}(\sqrt{(X - \mu)^2} \geq \sqrt{(k\sigma)^2}) \\ =&\mathbb{P}(|(X - \mu)| \geq |k\sigma|) \end{aligned}$$

[2] fatte palesemente per distruggere il pianeta a semplificazioni

visto che sia k(ipotesi) che σ(definizione) sono positivi, allora $k\sigma \geq 0$, quindi

$$= \mathbb{P}(|(X-\mu)| \geq k\sigma)$$

2.1.2 Secondo

$$\frac{\mathbb{E}[Y]}{(k\sigma)^2}$$
$$=\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{(k\sigma)^2}$$

Visto che $Var[X] = \sigma^2$ si può definire anche come

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

allora

$$\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{(k\sigma)^2}$$
$$= \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2}$$
$$= \frac{\cancel{\sigma^2}}{k^2\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{k^2}$$

2.1.3 Metti insieme

$$\mathbb{P}(Y \geq (k\sigma)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{(k\sigma)^2}$$

riscrivendo il primo termine

$$\mathbb{P}(|(X-\mu)| \geq |k\sigma|) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{(k\sigma)^2}$$

e riscrivendo il secondo termine

$$\mathbb{P}(|(X-\mu)| \geq |k\sigma|) \leq \frac{1}{k^2}$$

$\mathbb{Q}.\mathbb{E}.\mathbb{D}.$, puppa