

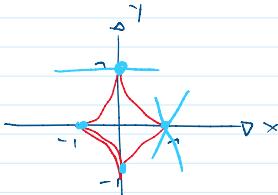
I intervallo, $\gamma: t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \quad \text{se questo limite esiste finito}$$

$\gamma': t \in I \mapsto \gamma'(t) \in \mathbb{R}^m$ funzione derivata

Es. ASTROIDE

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

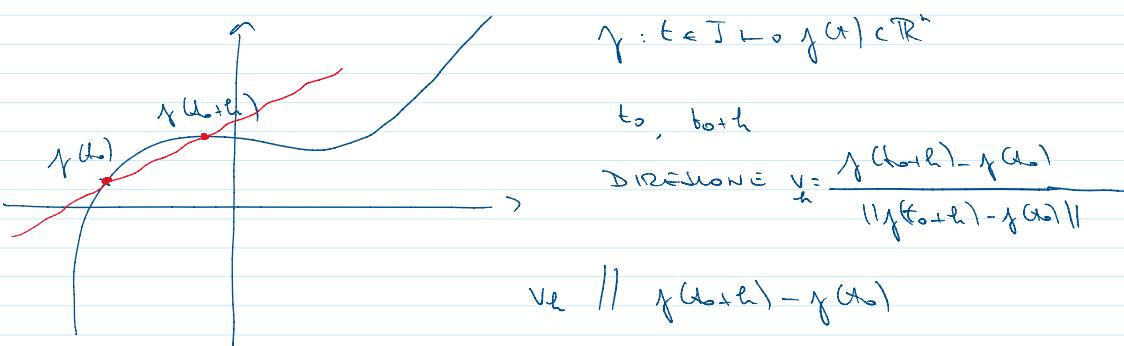


$\gamma: t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

$t_0, h \neq 0$

$$\text{direzione } v_h = \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)\|}$$

$$v_h \parallel \gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)$$



La retta seconda è parallela a $\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) \rightarrow \gamma'(t_0)$

anche parallela a $\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} \forall h \neq 0$

$$\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} \rightarrow \gamma'(t_0)$$

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ viene individuata una direzione limitata alla direzione

$$\text{delle rette secanti da } \gamma'(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$$

VERSORE
TANGENTE
AL SISTEMA
(IN t_0)

DEF Se $I \subset \mathbb{R}$ intervallo - Se $\gamma: t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$ è

1) $\gamma(t) \in C^1$ (γ è derivabile e γ' è una funzione continua)

2) $\forall t \in I \quad \gamma'(t) \neq 0$,

dico che γ è un ARCO DI CURVA REGOLARE

Se γ è regolare \Rightarrow è ben definito $T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in I$

Se fissi $t_0 \in I \Rightarrow$ è ben definita la retta tangente al vettore in $\gamma(t_0)$:

Retta per $\gamma(t_0)$ è parallela a $T(t_0)$

$$x \in \mathbb{R}^m : x - \gamma(t_0) \parallel T(t_0)$$

$$x \in \mathbb{R}^m : \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \gamma(t_0) + \lambda T(t_0)$$

$$x \in \mathbb{R}^m : x - \gamma(u_0) \parallel T(u_0)$$

$$x \in \mathbb{R}^m : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x - \gamma(u_0) = \lambda T(u_0)$$

$$x = \gamma(u_0) + \lambda T(u_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x = \gamma(u_0) + \lambda \frac{\gamma'(u_0)}{\|\gamma'(u_0)\|}$$

$$\lambda := \frac{\lambda}{\|\gamma'(u_0)\|}$$

$$\boxed{x = \gamma(u_0) + \lambda \gamma'(u_0)}$$

ESEMPIO Circonferenza centrale in $(5, 3)$ e raggio 5

$$\lambda \begin{cases} x = 5 + 5 \cos(t) \\ y = 3 + 5 \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Saranno le rette Tg al semicerchio in $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(5 + 5 \cdot \frac{1}{2}, 3 + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{6+5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\gamma' = \begin{cases} x' = -5 \sin(t) \\ y' = 5 \cos(t) \end{cases}$$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-5 \frac{\sqrt{3}}{2}, 5 \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{6+5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{15}{2} - \lambda \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{6+5\sqrt{3}}{2} + \lambda \frac{5}{2} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{2}{5} \left(y - \frac{6+5\sqrt{3}}{2}\right) = \lambda \frac{\cancel{5}}{2} \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}$$

$$x = \frac{15}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \cancel{\lambda} \cancel{\frac{2}{5}} \left(y - \frac{6+5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{-x}{\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} - y + \frac{6+5\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{15}{2\sqrt{3}} + \frac{6+5\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10\sqrt{3} + 6}{2}$$

$$15 = 3 \cdot 5 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 5\sqrt{3} + 6$$

DEF

ARCO DI CURVA REGOLARE A TRATTI

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e no $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dico che γ è un arco di curva regolare e tratti se.

1) γ è continua su I . $\sup(I)$

2) \exists dei pti $t_1 = t_{k+1} < t_2 < \dots < t_k \in I$ t.c. γ è regolare in ciascun intervallo (t_i, t_{i+1}) $\forall i = 1, \dots, k-1$

ASTROIDE

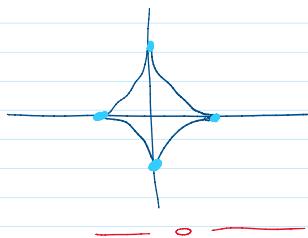
$$\gamma(t) \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma'(t) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t) \right)$$

$$\gamma'(t) = 0 \quad \text{sse} \quad \|\gamma'(t)\| = 0$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t) + 9\sin^2(t)\cos^2(t)} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t) \underbrace{\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)}_{=1}} = 3|\cos(t)\sin(t)|$$



INTEGRALE DI UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI

$\gamma: t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))$

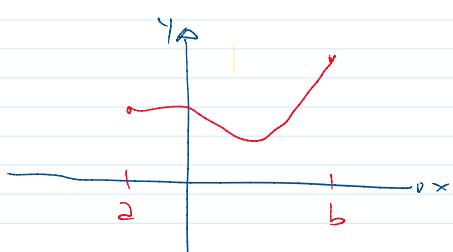
$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \int_a^b \gamma_2(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_m(t) dt \right)$$

PROPRIETÀ

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

GRAFICO DI FUNZIONE

$f: x \in [a, b] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$



$$\gamma(t) \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Supponiamo che f sia derivabile con derivate continue

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\gamma'(t) = \left(1, f'(t) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\gamma(a) = (a, f(a)) \quad \gamma(b) = (b, f(b))$$

$a \neq b \quad \gamma(a) \neq \gamma(b) \rightarrow$ non è chiusa

$$a \leq t_1 < t_2 \leq b \quad \gamma(t_1) = (t_1, f(t_1))$$

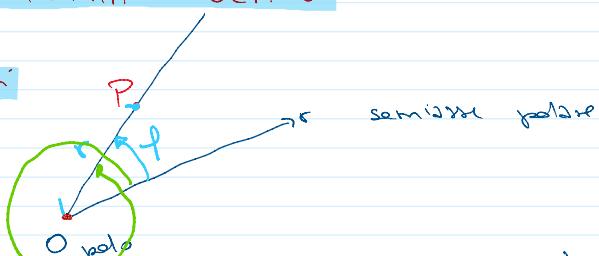
$$\uparrow \quad \gamma(t_2) = (t_2, f(t_2))$$

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \rightarrow \gamma$ è semplice

— o —

CURVE IN FORMA POLARE

Coordinate polari:

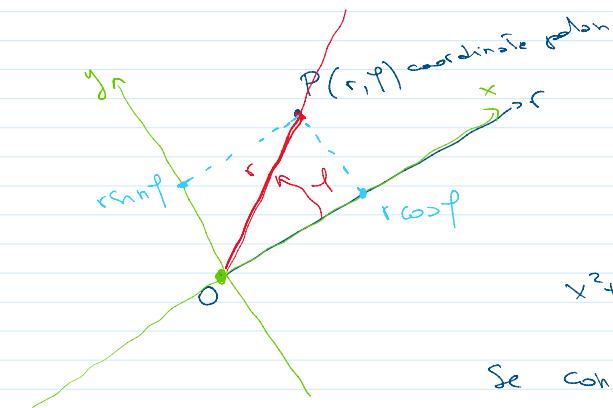


$$P(r, \varphi)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi] \quad \left(\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right)$$

$$r > 0$$

semiasse polare



$$(r, \varphi)$$

$$(x, y)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2$$

Se conosce (x, y) ricavo subito

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

=> Se conoscono le coordinate cartesiane si ricavano le coordinate polari

CURVA IN FORMA POLARE

$$\rho = f(\theta) \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \text{ indice le coordinate angolari}$$

$$\rho = f(\theta) \text{ indice la distanza del polo}$$

$$\rho(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

f sia derivabile con derivate continue

$$\begin{aligned} \gamma'(\theta) &= \left(f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \right) \\ \|\gamma'(\theta)\| &= \sqrt{(f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta))^2 + (f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta))^2} \\ &= \sqrt{(f'(\theta))^2 \cos^2(\theta) + f^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2f(\theta)f'(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (f'(\theta))^2 \sin^2(\theta) + f^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2f(\theta)f'(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta)} \\ &= \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)} = 0 \quad \text{SSE} \quad \boxed{f(\theta) = f'(\theta) = 0} \end{aligned}$$

$$\varphi = f(\theta) \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$P(e, \theta) \text{ CHIUSA SSE } \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi \quad \Leftrightarrow f(\theta_1) = f(\theta_2)$$

SENZA PUNTI?

$$\text{e non } \varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2 \quad \text{T.c.} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad \boxed{f(\varphi_2) = f(\varphi_1)}$$

SPIRALE ~~DI~~ ZEINER

$$A > 0 \quad \varphi = A\theta \quad \theta \in [0, +\infty)$$



$$\gamma(\theta) \begin{cases} x(\theta) = A\theta \cos(\theta) \\ y(\theta) = A\theta \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma'(\theta) = \left(A\cos(\theta) - A\theta \sin(\theta), A\sin(\theta) + A\theta \cos(\theta) \right)$$

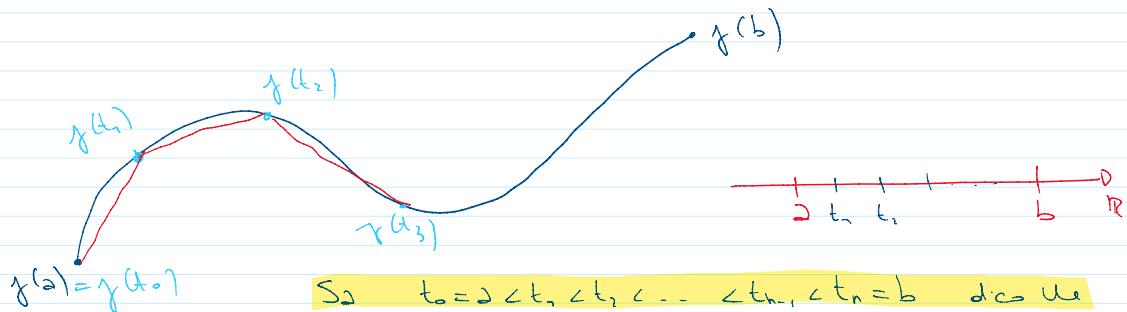
$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \quad f(\theta) = A\theta \quad f'(\theta) = A$$

$$= \sqrt{A^2 \theta^2 + A^2} = |A| \sqrt{\theta^2 + 1} = A\sqrt{\theta^2 + 1}$$

$$T(\theta) = \frac{A(\cos(\theta) - \theta \sin(\theta), \sin(\theta) + \theta \cos(\theta))}{A\sqrt{\theta^2 + 1}}$$

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ arco di curva continua



$$x(a) = x(t_0)$$

Sia $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_n = b$ dico che

t_0, t_1, \dots, t_n è una partizione di $[a, b]$

Indico con P una generica partizione

LUNGHEZZA DELLA SPERATA ASSOCIA A UNA PARTIZIONE P

$$L(P) := \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\|$$

Considero $\sup \{L(P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$

Se questo estremo superiore è finito, lo chiamo LUNGHEZZA DELLA CURVA x e dico che x è una curva rettificabile.

TEOREMA (no dim) Se $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva regolare

Allora x è rettificabile e la sua lunghezza $l(x)$ è

$$\int_a^b \|x'(t)\| dt.$$

LUNGHEZZA DI UN GRANDE

$$y = f(x) \quad x \in [a, b]$$

derivabile con derivata continua

$$x \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right. \quad t \in [a, b]$$

$$x'(t) = (1, f'(t))$$

$$\|x'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

$$l(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad \text{integrale della norma seconda della derivata prima}$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA IN FORMA POLARE

$$\varphi = f(\theta) \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \quad f \text{ derivabile con derivata continua}$$

$$x \left\{ \begin{array}{l} x = f(\theta) \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\|x'(\theta)\| = \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)}$$

$$l(x) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)} d\theta$$

Zd NPG

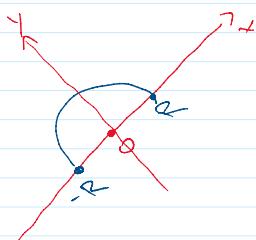
semi circonferenza di raggio $R > 0$



$$\varphi = R \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$f(\theta) = R \quad \theta \in [0, \pi] \Rightarrow f'(\theta) = 0$$

$$l(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{\dot{\theta}^2 + R^2} d\theta = \int_0^\pi R d\theta = R\pi \quad \leftarrow$$



$$(\gamma, \eta) : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 = R^2 - x^2 \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad x \in [-R, R]$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = R \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= R \sin(u) \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad R^2 - x^2 = R^2 - R^2 \sin^2(u) = \\ &\quad = R^2 (1 - \sin^2(u)) = R^2 \cos^2(u) \end{aligned}$$

$$dx = R \cos(u) du$$

$$\Rightarrow l(\gamma) = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{R \cos(u)} R \cos(u) du = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 du = R \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = R\pi$$

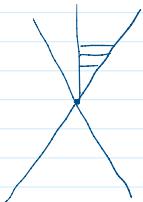
ELICA ALINDRICA

$$\gamma \begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ z = ht \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad R, h > 0$$

$$\gamma'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t), h)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underbrace{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)}_{R^2} + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$l(\gamma) = \int_2^{\beta} \sqrt{R^2 + t^2} dt = (\beta - 2)\sqrt{R^2 + t^2}$$



$$x = Rt \cos(t)$$

$$y = Rt \sin(t)$$

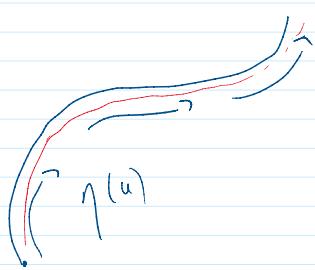
$$z = ht$$

SPIRALE DI ARCHIMEDE $\rho = A\theta$ $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

CURVE EQUIVALENTI

Siano $\gamma: t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$
 $\eta: u \in [c, d] \rightarrow \eta(u) \in \mathbb{R}^m$ due archi di curve regolari

Dico che γ e η sono curve equivalenti se



- $\exists f: u \in [c, d] \rightarrow f(u) \in [a, b]$
- bimonotone e strettamente crescenti
- derivabile e con derivate continue
- f' derivabile e con derivate continue
- e.t.c. $|\eta(u) = \gamma(f(u))|$

$$\text{Se } f \text{ str. crescente} \Rightarrow f(a) = a \quad \Rightarrow \gamma(f(a)) = \eta(a)$$

$$f(b) = b \quad \eta(f(b)) = \eta(b)$$

N.B. Con le altre richieste immute me γ str. strettamente
 decrescente dico che γ e η sono l'una un cambio
 di orientazione dell'altra -

$$\eta(u) = \gamma(f(u)) \quad \forall u \in [c, d] \quad f: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

$$\eta'(u) = \gamma'(f(u)) f'(u) \leftarrow \eta'(u) \parallel \gamma'(f(u))$$

$$\|\eta'(u)\| = \|\gamma'(f(u))\| \cdot |f'(u)|$$

$$T_\eta(u) = \frac{\eta'(u)}{\|\eta'(u)\|} = \frac{\gamma'(f(u)) - f'(u)}{\|\gamma'(f(u))\| \cdot |f'(u)|} = T_\gamma(f(u)) \cdot \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|}$$

$$T_\gamma(u) = \frac{\gamma'(u)}{\|\gamma'(u)\|} = \frac{\gamma'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)}{\|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|} = T_{\varphi}(\varphi(u)) \cdot \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$$

Se $\gamma \in \eta$ sono equivalenti, φ è strettamente crescente $\Rightarrow \varphi'(u) > 0$
 $\Rightarrow \varphi'(u) > 0 \Rightarrow T_\gamma(u) = T_{\varphi}(\varphi(u))$

Se $\gamma \in \eta$ sono cammini di orientazione φ è strettamente
decrecente $\Rightarrow \varphi'(u) \leq 0 \Rightarrow \varphi'(u) < 0 \quad T_\gamma(u) = -T_{\varphi}(\varphi(u))$

PROPRIETÀ Curve rettilinee equivalenti o cammini di
orientazione hanno la stessa lunghezza

DIM $\gamma: t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\eta: u \in [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$
con le proprietà indicate
T.c. $\eta(u) = \gamma(\varphi(u))$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\begin{aligned} t &= \varphi(u) \\ dt &= \varphi'(u) du \end{aligned}$$

$$1) \gamma \in \eta \text{ equivalenti.} \quad \varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b$$

$$\begin{aligned} &= \int_c^d \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot \varphi'(u) du = \varphi'(u) > 0 \\ &= \int_c^d \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)| du = \\ &= \int_c^d \|\eta'(u)\| du = l(\eta) \end{aligned}$$

$$2) \gamma \in \eta \text{ cammino di orientazione: PER ESERCIZIO}$$

ZONA PARANETRO D'ARCO (o ASASSA CURVILINEA)

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ arco di curva regolare

$$s: t \in [a, b] \mapsto \int_a^t \|\gamma'(z)\| dz$$

$$\|\gamma'(z)\| > 0 \quad \forall z \in [a, b] \quad s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$$

$\Rightarrow s$ è una funzione strettamente crescente.

$$s(a) = 0$$

$$s(b) = l(\gamma)$$

t

$$\rightarrow s: t \in [a, b] \mapsto \int_a^t \| \gamma'(z) \| dz \in [0, \ell(\gamma)]$$

ASASSA
CURVILINEA

è invertibile, derivabile con derivate continue

dei suoi inversi $t = t(s)$ $t: s \in [0, \ell(\gamma)] \mapsto t(s) \in [a, b]$

è derivabile con derivate continue

$\eta(s) := \gamma(t(s)) \Rightarrow \gamma \in \eta$ sono equivalenti
 $s \in [0, \ell(\gamma)]$

$$\eta'(s) = \gamma'(t(s)) t'(s)$$

$$\|\eta'(s)\| = \|\gamma'(t(s))\| |t'(s)|$$

$$= \|\gamma'(t(s))\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} = 1 \quad \forall s$$

$$\eta'(s) = T_{\eta}(s) = T_{\gamma}(t(s))$$

$$\begin{aligned} t'(s) &= \frac{1}{\gamma'(t(s))} \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} \end{aligned}$$

ELICA CILINDRICA

$$\gamma \begin{cases} x = R \cos(\theta) \\ y = R \sin(\theta) \\ z = h\theta \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\gamma'(\theta) = (-R \sin(\theta), R \cos(\theta), h) \quad \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$s(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} \sqrt{R^2 + h^2} \, dz = (\theta - \theta_1) \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$s = (\theta - \theta_1) \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\theta - \theta_1 = \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad \theta = \theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$x = R \cos \left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$$

$$y = R \sin \left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$$

$$z = h \left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} s &\in [0, \ell(\gamma)] = \\ &[0, \sqrt{R^2 + h^2} (\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned}$$

ESERCIZIO

$$\gamma \begin{cases} x = x_0 + R \cos(t) \\ y = y_0 + R \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Trovare la curva equivalente parametrizzata dall'asse

curvilinee.

INTEGRALI DI 1^a SPECIE

$\gamma: t \in [a,b] \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$ curva regolare

$f: x \in A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ T.c. Sostegno di $\gamma \subseteq A$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

PROPOSITIONE Se γ ed η sono due curve regolari equivalenti o due cammini di orientazione, allora

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\eta} f ds$$

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

 $\eta: [\zeta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\stackrel{\text{cioè}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_c^d f(\eta(u)) \|\eta'(u)\| du$$

f non negativa