Contents

1 Definizione

1.1 Formula

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

con z variabile complessa

1.2 Rapporto con Fourier

prendiamo la definizione di trasformata z e la definizione di Fourier per sequenze

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\overline{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

le due formule sono abbastanza simili, entrambe hanno $\sum x[n]\ qualcosa^{-n}$, nel caso di Fourier questo qualcosa $= e^{j2\pi F}$, nel caso della z questo può essere qualsiasi cosa, vediamo allora il caso particolare in cui z ha la forma $e^{j2\pi F}$.

$$\begin{aligned}
&X(z)|_{z=e^{j2\pi F}} \\
=&(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n})|_{z=e^{j2\pi F}} \\
=&\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](e^{j2\pi F})^{-n} \\
=&\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn} \\
=&\overline{X}(F)
\end{aligned}$$

quindi $X(z)|_{z=e^{j2\pi F}} = \overline{X}(F)$, vale a dire, la trasformata z equivale alla trasformata di Fourier per sequenze nei punti della forma $z = e^{j2\pi F}$, se lo riscriviamo come $z = 1 \times e^{j2\pi F}$ si può notare un po' meglio che questa è una forma generica per indicare punti con modulo 1 e fase arbitraria, in umanese vuol dire che è un punto sul cerchio unitario. (se F arbitrario $\in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ allora $2\pi F$ arbitrario $\in (-\pi$ e $\pi))$

2 Esempii

2.1 Sequenza finita

2.2 Monolatera destra

si prenda la sequenza

$$x[n] = 2^n u[n]$$

allora

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 2^n u[n] z^{-n}$$

per il gradino

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] = 2^n z^{-n}$$
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] = (2z^{-1})^{-1}$$

essendo questa diventata una serie geometrica, si ricordi intanto che

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Rightarrow f(q) = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 0 \\ \text{non converge} & \text{se } |q| \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Monolatera sinistra

2.4 Importanza della RoC

3 Teoremi

3.1 Linearità

3.2 Ritardo

3.3 Inversione temporale

3.4 Derivazione in z

L'ipotesi è che

$$x[n] \iff X(z)$$
$$nx[n] \iff -z\frac{dX(z)}{dz}$$

la dimostrazione è che se

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

allora facendo la derivata a entrabmi i lati ottieni

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n})$$

sia la derivata che la sommatoria sono lineari, quindi puoi fare

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(x[n]z^{-n})$$

$x[n] non dipende da z, quindi si porta fuori dalla derivata e

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(x[n]z^{-n})$$
$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{dz^{-n}}{dz}$$
$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] - nz^{-n-1}$$
$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] - nz^{-n}z^{-1}$$

z^{-1} non dipende da n quindi lo portiamo fuori insieme al segno $-$ del $-n$ introdotto dalla derivazione

$$\frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]nz^{-n}$$
$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]nz^{-n}$$

si nota [1] che la parte destra dell'equazione corrisponde a $\mathcal{Z}\{nx[n]\}$, da ciò si ottiene la tesi.

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

3.5 Convoluzione

[1] come se qualcuno andasse effettivamente a cercarsi ste cose