AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI BİZNES UNİVERSİTETİ

Dərs vsaiti Bakı Biznes Universitetinin
20 illik yubileyinə bir töhfədir

ALİ RİYAZİYYAT
I hissə
(Dərs vəsaiti)

Dərs vəsaiti Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 21 noyabr 2012-ci il tarixli 2113 saylı əmri ilə təsdiq edilmişdir.

Bakı - 2012

Dərs vəsaitini pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent Q.M.Namazov hazırlamışdır.

Redaktor: fizika, riyaziyyat elmləri doktoru
professor **H.İ.Aslanov**

Rəyçilər: AzDPU-nun professoru
Ə.M. Məmmədov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
dosent **R.B.Alıyev**

Namazov Q.M.
«Ali riyaziyyat» dərs vəsaiti – Bakı, 2012.– s.

Bakı Biznes Universitetinin tələbələri üçün Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirliyinin 08.04.2010-ci ildə təsdiq olunmuş "Ali riyaziyyat" proqramı əsasında yazılmış bu dərs vəsaiti I hissəsində Çoxluqlar, çoxluqlar üzərində əməllər, mütləq qiymət haqqında teoremlər, funksional asılılıqlar, funksiyanın limiti və kəsilməzliyi, törəmə, törəmənin tətbiqləri, qeyri –müəyyən və müəyyən inteqrallar, məxsusi inteqrallar, çoxdəyişənli funksiyaların diferensial və inteqral hesabı, diferensial tənliklər və ədədi sıralar və s. bu kimi məsələlər ətraflı şərh edilmişdir.

Dərs vəsaitindən digər ali və orta məktəblərinin professor-müəllim və tələbələri də istifadə edə bilərlər.

GİRİŞ

Ali təhsil sisteminin yenidən qurulması tələbə kontingentindən dərin və möhkəm riyazi biliyə malik olmağı, riyaziyyatı müasir elmi məsələlərin həllinə tətbiqetmə bacarığı və müstəqil işləmə vərdişi tələb edir.

Gələcək iqtisadi kadrların hazırlandığı ali məktəblərdə öyrənilən fənlər arasında riyaziyyatın xüsusi əhəmiyyəti vardır. İqtisadiyyatın ən müxtəlif sahələrinə riyazi metodlar geniş tətbiq edilir. Tələbələrin riyazi biliyini yüksəltmək, onların yaradıcı təfəkkürünü, şəxsiyyətini, məntiqi və fərdi düşünmə qabiliyyətini və istedadlarını inkişaf etdirmək, müstəqil işləmə və hesablama aparmaq vərdişlərini artırmaq üçün "Ali riyaziyyat" kursu mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Bakı Biznes Universitetinin tələbələri üçün Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirliyinin 08.04.2010-cu ildə təsdiq olunmuş "Ali riyaziyyat" proqramı əsasında yazılmış bu dərs vəsaiti iki hissədən ibarətdir.

I hissədə çoxluq, mütləq qiymət haqqında teoremlər, funksiyalar, funksiyaların limiti, kəsilməzliyi, törəmə, diferensial, qabarıq və çökük əyrilər, Lopital qaydası, qeyri-müəyyən və müəyyən inteqrallar, inteqrallama üsulları, qeyri məxsusi inteqrallar, çoxdəyişənli funksiyaların diferensial hesabı, diferensial tənliklər, ədədi sıralar və s. bu kimi mövzular ardıcıllıqla və oxunaqlı şəkildə şərh edilmişdir. Hər bir mövzu və fəslin sonunda nəzəri materialların tələbələr tərəfindən daha yaxşı qavranılması üçün məsələ və misallar həll edilmişdir.

Dərs vəsaitindən digər iqtisad yönümlü Universitetlərin professor-müəllim və tələbələri də istifadə edə bilərlər.

I FƏSİL. ÇOXLUQLAR NƏZƏRİYYƏSİ

1.1. Çoxluq anlayışı. Sonlu və sonsuz çoxluqlar. Çoxluqlar haqqında teoremlər.

Çoxluq ilkin riyazi anlayışlardan biridir. Odur ki, ona məntiqi tərif verilmir. Alman riyaziyyatçısı Kantora görə: çoxluq dedikdə vahid tam halında birləşmiş çox şey başa düşülür. Çoxluq sözünün sinonimi olaraq işlədilən “elementlər yığımı”, “küllü”, “toplu” kimi söz və söz birləşmələrini onunla əvəz etmək çətindir. Bu anlayışın özünəməxsus xüsusi məna çalarları vardır.

Çoxluğu təşkil edən ünsürlərə onun elementləri deyəcəyik.

Elementlərin sayının sonlu və ya sonsuz olmalarına görə çoxluqlar uyğun olaraq **sonlu və ya sonsuz** adlandırılır.

Çoxluq, elementlərinin təqdim edilməsiylə təsvir olunur - verilir. Bu iş iki üsulla aparılır: fiqurlu {,} mötərizələr içərisində çoxluğun bütün elementlərinin vergül işarəsi ilə ayrılmaqla sadalanması yolu ilə və ya çoxluğun elementlərinin hamısına xas olan xarakterik əlamətlərin formallaşdırılmasıyla.

Çoxluqlara aid misallar:

1.Qaraqoyunlu oğuz-türk obasının kəndləri çoxluğu: Y={Gölkənd, Cıvıxlı, Çaykənd, Əmirxeyir, Bəryabad, Yanıqpəyə, Qaraqaya, Salah, Polad, Murteyil, Alaçıqqaya, Vurğun};

2. Oyun kartının mastlarının simvolları yığımı çoxluğu: {♠,♣,♥,♦};

3. Simvollar cütü: {☺,☻};

4. R - tam ədədlər çoxluğu və s.

Çoxluqları böyük, onun elementlərini isə kiçik hərflər ilə işarə edəcəyik.

“a elementi A çoxluğuna aiddir (və ya daxildir)” fikri simvolik olaraq “$a \in A$” və ya “$A \ni a$” kimi yazılır. “$a \notin A$” yazılışı isə “a elementi A çoxluğuna daxil deyil” fikrini ifadə edir.

Əgər A çoxluğunun bütün elementləri B çoxluğuna aiddirsə (A=B halı da istisna deyil), onda A çoxluğu B çoxluğunun altçoxluğu adlanır və $A \subset B$ (və ya $B \supset A$) kimi işarə olunur.

A=B yazılışı aşağıdakı münasibətlərin birlikdə ödənilməsi ilə eynigüclüdür: $A \subset B$ və $B \supset A$. İki çoxluğun bərabərliyi (A=B) eyniliklə bərabərlik kimi başa düşülür; həmin A=B yazılışı onu bildirir ki, A çoxluğunun hər bir elementi B –yə daxildir və tərsinə - B çoxluğunun hər bir elementi A –ya daxildir.

Heç bir elementi olmayan çoxluq “Ø“ kimi işarə olunur və o, boş çoxluq adlanır.

Boş çoxluq istənilən çoxluğun altçoxluğudur.

Çoxluğun özündən və boş çoxluqdan başqa digər altçoxluqları onun məxsusi altçoxluqları adlanır.

Əgər $A \subset B$ və $A \neq B$ (eyni zamanda, aşkardır ki,

$A \neq \emptyset$) isə, onda A-ya B-nin məxsusi altçoxluğu deyirlər.

Məxsusi altçoxluq(“A çoxluğu B-nin məxsusi altçoxluğudur” fikri) simvolik olaraq, aşağldakı kimi yazılır:

$$A \subseteq B \text{ və yaxud } B \supseteq A.$$

Bəzən bu simvollar($\subset$ və $\subseteq$) adi altçoxluq və məxsusi altçoxluqların işarələnməsi baxımından tərsinə də işlədilir.

Verilmiş A çoxluğunun bütün altçoxluqları ailəsini P(A) ilə işarə edək. P(A) –ya A çoxluğunun dərəcəsi deyilir:

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Nəzərə alsaq ki, $\varnothing \subseteq A$ və $A \subseteq A$, onda $\varnothing \in P(A)$ və $A \in P(A)$.

Bütün bunlarla yanaşı, çoxluqlar üzərində bir sıra əməllər mövcuddur.

Sonlu və sonsuz çoxluqlar

Sonsuz çoxluqlardan ən sadəsi natural ədədlər (N) çoxluğudur.

Bütün natural ədədlər çoxluğu ilə biyektiv yolla elementləri qarşı qoyulan çoxluğa hesabi çoxluq deyəcəyik. Yəni, N natural ədədlər sırası ilə ekvivalent (eynigüclü, eyni sayda elementə malik) olan çoxluq hesabi adlanır.

Tutaq ki, A və B iki ixtiyari çoxluqdur. Əgər A çoxluğunun hər bir elementinə qarşı B çoxluğunun ancaq bir elementini və tərsinə - B çoxluğunun hər bir elementinə A çoxluğunun ancaq bir elementini qarşı qoyan inikas (funksiya) mövcud olarsa, onda həmin inikas qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq adlanır. Yəni, həmin inikasa biyeksiya deyirlər.

Başqa sözlə ifadə etsək, hesabi çoxluq dedikdə elementləri sonsuz çoxluğun elementləriylə nömrələnə bilən çoxluq başa düşülür.

Çoxluqlar haqqında teoremlər

Hesabi çoxluq haqqında teoremlər (isbatsız verilir):

1. Hesabi çoxluğun hər hansı altçoxluğu ya sonlu, ya da hesabi çoxluqdur.

2. İstənilən sonsuz çoxluq hesabi altçoxluğa malikdir.

3. İstənilən sonlu sayda hesabi çoxluqların birləşməsi

də hesabi çoxluqdur.

4. Hesabi sayda hesabi çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

Üçüncü teorem onu göstərir ki, hesabi çoxluqlar sonsuz çoxluqların sırasında "ən kiçikləridir".

Hesabi çoxluğa aid misallara baxaq

1. Bütün tam ədədlər çoxluğu. Bütün tam ədədlər və bütün natural ədədlər arasındakı uyğunluğu aşağıdakı kimi yaratmaq olar($n \in N$):

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Yəni, $n \geq 0$ ədədinə (2n+1) tək ədədini, n<0 ədədinə isə $2|n|$ cüt ədədini aşağıdakı kimi qarşı qoyma ($\leftrightarrow$) olar:

$$n \leftrightarrow 2n+1,\ n \geq 0 \text{ olduqda,}$$
$$n \leftrightarrow 2|n|,\ n<0 \text{ olduqda.}$$

2. Bütün müsbət cüt ədədlər çoxluğu. Bu uyğunluğu aşağıdakı kimi yaratmaq olar: $n \leftrightarrow 2n$.

3. Bütün rasional ədədlər çoxluğu.Məlum olduğu kimi, rasional ədədlər çoxluğu $\frac{p}{q}(p \in Z, q \in N)$ şəklində təsvir edilir. Burada, Z – tam ədədlər çoxluğu, N – natural ədədlər çoxluğudur.

R_- ilə mənfi rasional ədədlər çoxluğunu, R_+ilə müsbət rasional ədədlər çoxluğunu işarə edək.

Əvvəlcə p və q-nün hər ikisinin rasional ədədlər çoxluğundan olduğu hala baxaq. Bu halda, aşkardır ki, inikas biyektivdir; yəni, $\frac{p}{q}$ şəkilli kəsrlər çoxluğu hesabidir. Həmin çoxluqdan ixtisar olunan kəsrləri kənarlaşdırdıqdan sonra alınan R_+ çoxluğu da hesabi çoxluq olacaqdır. Çünki, hesabi çoxluğun sonlu və ya sonsuz çoxluqla fərqi də hesabidir. Digər tərəfdən,

$R_- \sim R_+$ olduğundan, R_- çoxluğunun da hesabiliyi aşkarlanır.

Bundan əlavə, rasional ədədlər çoxluğu $R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$ kimi təyin edilə bilənliyindən, R -hesabi çoxluq olacaqdır.

2 ədədinin qüvvətləri çoxluğu: 2,4,8,...,2^n,.... Bu uyğunluğu (qarşıqoymanı) aşağıdakı kimi yaratmaq olar:

$$2^n \leftrightarrow n$$

Hesabi olmayan sonsuz çoxluq qeyri-hesabi çoxluq adlanır.

1.2.Çoxluqlar üzərində əməllər

Çoxluqlar üzərində aşağıdakı əməlləri şərh edək.

Çoxluqların birləşməsi

a)Birləşmə əməli. Tutaq ki, A və B – ixtiyari iki çoxluqdur; A və B çoxluqlarından heç olmasa birinə daxil olan elementlərdən ibarət olan $C=A \cup B$ çoxluğu onların birləşməsi adlanır. (Element birləşməyə bir dəfə daxil olur).

Birləşmə əməlini riyazi simvolikalardan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\},$$

burada $\vee$ simvolu “və ya” bağlayıcısının işarəsidir.

Analoji olaraq istənilən sayda çoxluğun cəmi və ya birləşməsi təyin edilir:İstənilən (sonlu və ya sonsuz) sayda çoxluğun cəmi və ya birləşməsi - $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ - elə çoxluğa deyilir ki, ona daxil olan hər bir element verilən çoxluqlardan heç olmasa, birinə daxil olsun. Bunu simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazmaq münasibdir:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\ x \mid \text{ elə } i_0 \in I \text{ var ki, } x \in A_{i_0}\ \}.$$

b)Kəsişmə əməli

A və B çoxluqlarının hər birinə daxil olan elementlərdən ibarət olan C=A∩B çoxluğu onların kəsişməsi adlanır.

Kəsişmə əməlini riyazi simvolikadan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A\cap B = \{\ x \mid \ x \in A \wedge x \in B\ \},$$

burada $\wedge$ simnolu "və" bağlayıcısının işarəsidir.

Analoji olaraq: istənilən sayda $A_\alpha$çoxluqlarının kəsişməsi (hasili) – $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ - bu çoxluqların hər birinə aid olan elementlərin küllüsündən ibarət olan çoxluğa deyilir. Bunu simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\ x \mid \text{ bütün } i_0 \in I \text{ üçün } x \in A_{i_0}\ \}.$$

Çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi kommutativlik (yerdəyişmə qanunu), assosiativlik (birləşmə qanunu), qarşılıqlı distributivlik (paylama qanunu) xassələrinə malikdir:

kommutativlik: $A\cup B = B\cup A$,
$A\cap B = B\cap A$;

assosiativlik: $(A\cup B) \cup C = A \cup (B\cup C)$,
$(A\cap B) \cap C = A \cap (B\cap C)$;

distributivlik: $(A\cup B) \cap C= (A\cap C) \cup (B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C = (A\cup C) \cap (B\cup C)$.

Bunlardan əlavə, aşağıdakı münasibətlər də doğrudur:

$$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A;$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing;$$

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A.$$

Çoxluqlar nəzəriyyəsində bu və ya digər düsturların iki isbat metodu var: birincisi – Eyler və ya Venn diaqramları vasitəsilə, ikincisi -məntiqi mühakimə üsulu ilə.

Birinci üsulla isbat zamanı bərabərlik işarəsindən sağda və solda yerləşən ifadələrin təyin etdiyi çoxluqlar üçün ayrı-ayrılıqda Eyler və ya Venn diaqramları qurulur. Həmin diaqramların təyin etdikləri oblastlar eyni olduqda bərabərliyin doğruluğu isbat edilmiş hesab olunur.

İkinci qayda - məntiqi mühakimə üsulu ilə isbat bərabərlik işarəsindən sağda və ya solda yerləşən ifadələrin təyin etdikləri çoxluqlara aid edilən ixtiyari elementin digər tərəfə də aid olduğu nəticəsinə gəlmək yolu ilə aparılır. Daha dəqiq desək, istənilən elementin bir tərəfə (ya sağ, ya da sol) aidliyindən bərabərliyin diğər tərəfinə də daxil olması (həm sağ, həm də sol istinadlar üçün) isbat edilə bildikdə həmin bərabərliyin doğruluğu nəticəsinə gətirilir.Proses, aydındır ki, sağ və sol tərəflərin hər biri üçün ayrı-ayrılıqda istinadlar kimi qəbul edilmələri hallarına müvafiq olaraq, iki dəfə yerinə yetirilir.

c)Çoxluqların fərqi

Çıxma əməli. A çoxluğunun B çoxluğuna aid olmayan elementləri küllüsünə A və B çoxluqlarının fərqi deyilir; simvolik olaraq C= A \ B kimi işarə və təyin edilir. Bu zaman, ümumiyyətlə desək, $A \supset B$ fərz olunmur. Çıxma əməlini(A və Bçoxluqlarının fərqini) riyazi simvolikadan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}.$$

Bəzən (məsələn, ölçmə nəzəriyyəsində) çoxluqların simmetrik fərqindən istifadə etmək daha əlverişli olur.

Çoxluqların simmetrik fərqi əməli. Çoxluqların simmetrik fərqi əməli aşağıdakı kimi işarə və təyin olunur:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Yəni, iki çoxluğun simmetrik fərqi onların bir-birlərindən fərqlərinin birləşməsinə bərabərdir.

Çoxluqların simmetrik fərqini aşağıdakı kimi də hesablamaq olar:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Axırıncı düsturu sözlə ifadə edək: iki çoxluğun simmetrik fərqi onların birləşmələri ilə kəsişmələrinin fərqinə bərabərdir.

d)Tamamlayıcı çoxluq

Tutaq ki, S universal çoxluqdur. Qeyd edək ki, hər bir çoxluq müəyyən S universal çoxluğunun altçoxluğudur.

Yəni, universal çoxluq baxılan məsələdə iştirak edən çoxluqların hamısının malik olduqları elementlərin hamısını özündə cəmləşdirir.

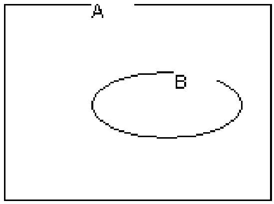
$A \subset S$ olduqda $S \setminus A$ fərqinə A çoxluğunun S tamamlayıcısı deyilir.Tamamlayıcı çoxluq aşağıdakı kimi işarə və təyin olunur:

$$A' = S \setminus A \quad \text{və yaxud} \quad C_s A = S \setminus A .$$

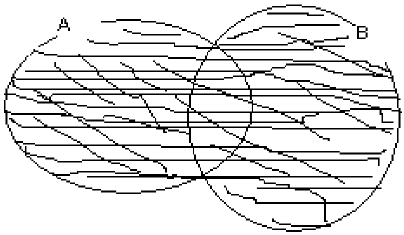
Çoxluqlar üzərində əməlləri, eləcə də onlar arasındakı münasibətləri, **Eyler-Venn diaqramlarının** köməyi ilə əyani olaraq təsvir etmək əlverişlidir.

Şəkil 1.1. -də $B \subset A$(altçoxluq) münasibəti, şəkil 1.2. ÷ 1.6.-nın ştrixlənmiş sahələrində isə uyğun olaraq, $A \cup B$ (birləşmə), $A \cap B$ (kəsişmə), $A \setminus B$ (fərq-cıxma), $A \Delta B$ (simmetrik fərq) və $C_s A$ (tamamlayıcı çoxluq) təsvir olunur. Şəkil 1.7-dəki ştrixlənmiş sahə isə $A \cap (B \cup C)$ münasibəti ilə təyin edilən çoxluğa uyğundur.

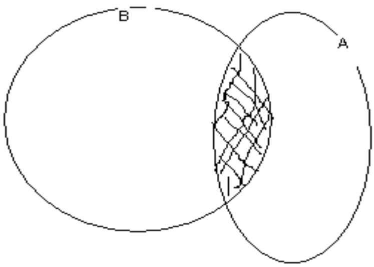
İndi həmin diaqramları quraq.



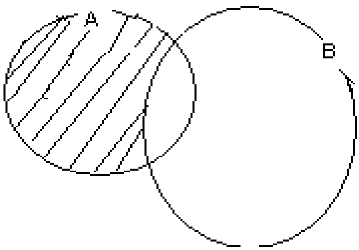
Şəkil 1.1. B$\subset$A (altçoxluq) münasibətinin diaqramı



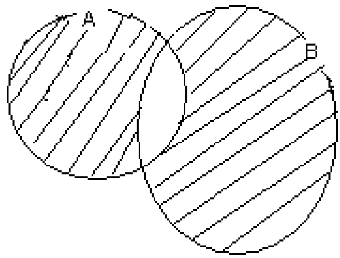
Şəkil 1.2. $A \cup B$ (birləşmə əməli) münasibətinin diaqramı



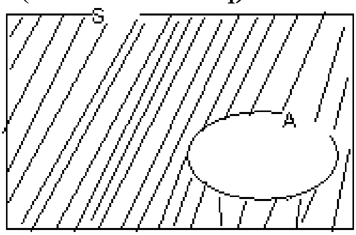
Şəkil 1.3. A $\cap$ B (kəsişmə əməli) münasibətinin diaqramı



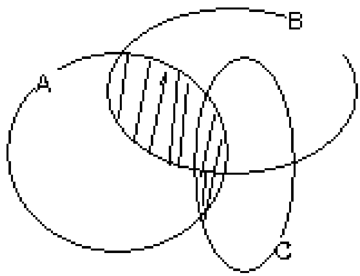
Şəkil 1.4. A\B (cıxma əməli) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.5. A∆B (simmetrik fərq) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.6. S\A (tamamlayıcı çoxluq) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.7. $A\cap(B\cup C)$ münasibətinin diaqramı

e)Kəmiyyət və onun ölçüsü

Təbiəti öyrənən hər bir elmin özünəməxsus səciyyəvi kəmiyyətləri vardır. Məsələn,istilik tutumu, müqavimət, təcil və.s. fiziki kəmiyyətlərdir, parçanın uzunluğu, sahə, həcm və.s. isə həndəsi kəmiyyətlərdir.

Bu kəmiyyətlərin hamısı üçün bir səciyyəvi cəhət vardır: hər bir kəmiyyət öz cinsindən (növündən) olan ölçü vahidi ilə ölçülə bilir. Hər bir ölçmə prosesinin nəticəsi,baxılan kəmiyyətin ölçü vahidinə nisbətini göstərən adsız bir ədədlə ifadə olunur. Bu ədədə verilmiş kəmiyyətin ədədi qiyməti (və ya sadəcə olaraq qiyməti) deyilir. Deməli hər bir ədədə ölçmə nəticəsi kimi baxmaq olar.

Kəmiyyətin ifadə olunduğu ölçü vahidinə onun ölçüsüdeyilir. Məsələn,uzunluq santimetr (sm) və ya metrlə (m) ifadə olunduğu üçün santimetr və ya metr uzunluq kəmiyyətinin ölçüsüdür. Kvadrat santimetr (sm^2) və ya kvadrat metr (m^2) isə sahə ölçüsüdür. Kiloqram kütlə ölçüsüdür.

Ancaq eyni ölçüsü olan kəmiyyətləri toplamaq və çıxmaq olar. Bu halda cəmin (və fərqin) ölçüsü toplananların ölçüsünün eyni olar. Müxtəlif ölçülü kəmiyyətləri isə həmişə vurmaq və bölmək olar. Bu halda qismətin ölçüsü bölünənin ölçüsünün bölənin ölçüsünə nisbətinə, hasilin ölçüsü isə vuruqların ölçüləri hasilinə bərabər olar.

Riyaziyyatda əsasən ölçüsüz, adsız kəmiyyətlərə baxılır. Eyni ölçülü iki kəmiyyətin nisbəti ölçüsüz kəmiyyətdir.

Riyaziyyat elminin öyrəndiyi ölçüsüz kəmiyyətlərin-**adsız ədədlərin “ölçü vahidi” 1 ədədidir.**

1.3.Həqiqi ədədlər çoxluğu

Həqiqi ədədlər ali riyaziyyatın əsasını təşkil edir;onlar qədimdən insanların həyat tələbatı və ehtiyacı nəticəsində yaranmışdır.

İnsanlar ilk dəfə natural ədədlərdən istifadə etmişlər.Natural ədədlər çoxluğunda toplama və vurma əməlləri həmişə aparıla bilər:istənilən iki natural ədədin cəmi və hasili yenə də natural ədəddir.Lakin natural ədədlər çoxluğunda çıxma və bölmə əməlləri həmişə aparıla bilmir.İki natural ədədin fərqi və nisbəti natural ədəd olmaya da bilər. Buna görə də natural ədədlər çoxluğuna yeni ədədlər (sıfır,tam mənfi ədədlər,müsbət və mənfi kəsrlər) əlavə edərək,onu genişləndirmək zərurəti qarşıya çıxmışdır. Beləliklə, **R={r}** rasional ədədlər çoxluğu yaranmışdır. **R** çoxluğu mənfi və müsbət işarələri bütün tam ədədlərdən, kəsrlədən və sıfırdan təşkil olunmuşdur.

Məlumdur ki,hər bir rasional **r** ədədi **p** və **q** iki ədədin nisbəti $\mathbf{r = \frac{p}{q} (q \neq 0)}$ şəklində göstərilir.

Teorem. Bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.

İsbatı. $\mathbf{\frac{p}{k}}$ **(p=1,2,...)** şəklində olan bütün rasional kəsrlər çoxluğunu $\mathbf{E_k}$ ilə işarə edək. $\mathbf{E_k}$ hesabi çoxluqdur. Aydındır ki,hər bir müsbət rasional ədəd $\mathbf{E_k}$ **(k=1,2,...)** çoxluqlarının heç olmasa birisinə daxildir. Hesabi sayda hesabi E_k çoxluqlarının birləşməsi

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{E_k}$$

hesabi olduğundan bütün müsbət rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.Buradan mənfi rasional ədədlər çoxluğunun və bütün rasional ədədlər çoxluğunun hesabi olması aydındır.

Sonralar riyaziyyatın inkişafı göstərmişdir ki,uzunluğun ölçülməsi, tənliklərin həll edilməsi və.s. kimi çox sadə məsələlərin həlli rasional ədədlər çoxluğunda mümkün deyildir. Buna görə də rasional ədədlər çoxluğuna yeni ədədlər əlavə edilərək onu genişləndirmək zərurəti qarşıya çıxmışdır. Beləliklə, rasional ədədlər (R çoxluğu) və yeni daxil edilən (irrasional ədədlər adlanan) ədədlər birlikdə həqiqi ədədlər çoxluğunu əmələ gətirir.İrrasional ədədlər çoxluğunu İ və həqiqi ədədlər çoxluğunu H ilə işarə edək, onda:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \cup \text{İ}$$

İrrasional ədədlərin bir-birinə ekvivalent bir çox tərifləri vardır. Bu təriflərin hər birinə əsaslanaraq həqiqi ədədlər nəzəriyyəsi qurulur və bu nəzəriyyə elmi şəkildə əsaslandırılır.

Riyaziyyatda həqiqi ədədlərin Dedikind, Kantor, Veyerştras və b. nəzəriyyələri vardır.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda çıxma və bölmə əməlləri, toplama və vurma əməllərinin tərsi kimi təyin olunur.

Orta məktəbin riyaziyyat kursundan məlumdur ki, hər bir rasional ədəd sonsuz dövri onluq kəsr (sonlu onluq kəsri dövri sıfırlar olan sonsuz dövri onluq kəsr hesab edirik)şəklində göstərilir. Tərsinə, hər bir sonsuz dövrü onluq kəsr isə rasional ədədi ifadə edir.

Deməli, rasional ədədlər çoxluğu sonsuz dövri onluq kəsrlər ilə üst-üstə düşür. Dövri olmayan sonsuz onluq kəsrlər (və ya belə kəsrlərlə ifadə olunan ədədlər) çoxluğu isə irrasional ədədlər çoxluğunu təşkil edir. İrrasional ədədlərə $\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{5}}, \boldsymbol{\pi}$ və s. misal ola bilər.

Verilmiş tərifə əsaslanaraq həqiqi ədədlərin bütün xassələrini müəyyən etmək olar.

1.4. Nizamlı çoxluğun xassələri

a)Nizamlılıq xassəsi

Boş olmayan X={x} çoxluğunun istənilən iki $x_1 \in X$ və $x_2 \in X$ elementləri arasında üç $x_1<x_2, x_1>x_2$ və $x_1=x_2$ münasibətindən ancaq biri ödənilərsə və eyni zaman-

da, $x_1<x_2$ və$x_2<x_3$ olmasından $x_1<x_3$ çıxırsa, onda həmin çoxluğa nizamlı çoxluq deyilir.

Həqiqi ədədlərin bərabər, böyük və kiçik (=,>,<) olmasına yuxarıda verdiyimiz təriflər həqiqi ədədlər çoxluğunu nizamlamağa imkan verir. Həmin təriflərə əsasən isbat etmək olar ki,həqiqi ədədlər çoxluğu nizamlı çoxluqdur,yəni həqiqi ədədlər üçün aşağıdakı xassə doğrudur.

İstənilən həqiqi a və b ədədləri üçün aşağıdakı üç münasibətdən ancaq biri doğru ola bilər:

$$a<b\ ,\ a=b\ ,\ a>b.$$

Bu zaman **$a<b$ və $b<c$** olarsa, onda**$a<c$** olmalıdır.

b)Sıxlıq xassəsi

İstənilən iki müxtəlif həqiqi a və b ədədi arasında heç olmasa bir həqiqi c ədədi vardır.Yəni **$a<b$ (və ya $a>b$)** olduqda elə həqiqi c ədədi var ki,**$a<c<b$ ($a>c>b$)** olur. Məsələn,**$a<b$ olduqda$c=\frac{a+b}{2}$ ədədi $a<c<b$** bərabərsizliyini ödəyir.Buradan aydındır ki,iki müxtəlif həqiqi ədəd arasında sonsuz sayda həqiqi ədəd vardır.

c) Arximed xassəsi

İki müxtəlif $a>0$ və $b>0$ həqiqi ədədi üçün natural n ədədi var ki, $na>b$ olar.

d) Qeyri-hesabi olması

Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabidir.

Bu xassənin doğruluğu yuxarıda isbat edilmiş 3-cü teoremdən və həqiqi ədədlərin tərifindən aydındır.

Həqiqi ədədlər çoxluğu rasional və irrasional ədədlər çoxluğunun birləşməsindən ibarət olduğundan və rasional ədədlər çoxluğunun hesabi olmasından, irrasional ədədlər çoxluğunun qeyri-hesabi olması aydındır.

Həqiqi ədədlər çoxluğunun bundan başqa digər xassələri də vardır.

Misallar.

Sonuncu şəkil aşağıdakı düsturun doğruluğunu təsdiqləyir:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Çoxluqlar nəzəriyyəsində **ikilik prinsipi** mühüm əhəmiyyət kəsb edir. O, aşağıdakılara əsaslanır:

1.Cəmin (birləşmənin) tamamlayıcısı tamamlayıcıların kəsişməsinə (hasilinə) bərabərdir:

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(S \setminus A_{\alpha})$$

2. Kəsişmənin (hasilin) tamamlayıcısı tamamlayıcıların birləşməsinə (cəminə) bərabərdir:

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha}(S \setminus A_{\alpha})$$

İkilik prinsipinin məğzi ondan ibarətdir ki, qeyd olunmuş S çoxluğunun altçoxluqları sisteminə aid istənilən bərabərlikdən bütün baxılan çoxluqları onların tamamlayıcıları, çoxluqların birləşmələrini kəsişmələri, çoxluqların kəsişmələrini isə birləşmələriylə əvəz etmək yolu ilə tam avtomatik surətdə başqa (ikilik) bərabərlik alına bilər.

İki sonlu çoxluq öz elementlərinin sayına görə müqayisə oluna bilər. Başqa cür ifadə etsək: iki sonlu çoxluq arasındakı inikas biyeksiyadırsa (yəni, hər iki çoxluğun elementlərinin qarşılıqlı birqiymətli uyğuluq münasibəti mövcuddursa), onda onları müqayisə etmək olar.

İndi isə çoxluqlar üzərində əməllərə dair bir sira tapşırığın həllini nəzərdən keçirək[3].

1.5.Çoxluqların Dekart hasili

n elementdən ibarət $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ardıcıllığını $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ilə işarə edək. Burada dairəvi mötərizələr elementlərin yazılma sırasını göstərmək üçün istifadə olunur. Məsələn, əgər $x_1 \neq x_2$ isə, onda $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$ ardıcıllığı$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ilə üst-üstə düşmür. Belə sıranı n uzunluqlu yığım adlandıraq; 2 uzunluqlu yığımı isə cütlük adlandıraq.

Tutaq ki, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kimi işarə edilmiş n dənə çoxluq verilmişdir. $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$ şərtini ödəyən bütün $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yığımları çoxluğuna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ çoxluqlarının birbaşa və ya Dekart hasili deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n .$$

Digər işarələmədən istifadə etməklə $A_1, A_2, \ldots, A_n$ çoxluqlarının Dekart hasilini qısa şəkildə aşağıdakı kimi də yazmaq olar: $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Misal 1.10. Tutaq ki, X={0,1}, Y={x,y}.

Onda, alarıq: X×Y={(0,x),(0,y),(1,x),(1,y)},

Y×X={(x,0),(x,1),(y,0),(y,1)}.

Deməli, X×Y ≠ Y×X.

Çox zaman eyni çoxluqların düz hasilindən istifadə edirlər. Bu halda A×A× ... ×A(vuruqların sayı n -ə bərabərdir) əvəzinə A^n işarələməsi götürülür.

1.6. İnikas. Siniflərə bölmə. Çoxluqların gücü

Əgər **M** çoxluğundan olan hər bir a elementinə **N** çoxluğundan müəyyən f qaydası ilə bir və ancaq bir **b** elementi uyğun olaraq qarşı qoyulursa, onda bu uyğunluq “funksiya” adlanır. Burada **M**verilən funksiyanın təyin olunma oblastı, **N** isəqiymətlər çoxluğu (dəyişmə oblastı) adlanır.

Başqa sözlə desək, bir çoxluq digərinə inikas olunur. Odur ki, “funksiya” anlayışı “inikas” anlayışıyla əvəz oluna biləndir.

f qaydası ilə **M**-dən **N**- ə inikas (“funksiya”) f: $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ kimi işarə olunur.

f inikası zamanı $\mathbf{a \in M}$-ə qarşı (uyğun) qoyulan $\mathbf{b}=f(\mathbf{a})$ elementi $(\mathbf{b \in N})$**a**-nın obrazı (surəti), **a** isə **b**-nin proobrazı (örnəyi) adlanır və $\mathbf{a=f^{-1}(b)}$ ilə işarə edilir.

Əgər $f(\mathbf{M})=\mathbf{N}$ olarsa, onda f**M**-in **N**-ə inikası adlanır.f $(\mathbf{M}) \subset \mathbf{N}$ olduqda isə, f -ə **M**-in **N**-də inikası deyilir.

Əgər ixtiyari $\mathbf{x_1 \neq x_2 \in M}$ üçün onların obrazları $\mathbf{u_1}=f(\mathbf{x_1})$və $\mathbf{u_2} = f$ $(\mathbf{x_2})$ də müxtəlif olarlarsa $(\mathbf{u_1 \neq u_2})$, onda f inikası inyeksiya adlanır.

f**:** $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ inikası eyni zamanda syuryeksiya və inyeksiyadırsa onda o, biyeksiya və ya **M** və **N** arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq(yəni, biyektiv inikas) adlanır.

İnikasın əsas xassələrini şərh edək. Bu xassələri teoremlərlə(isbatsız) verək.

Teorem 1. İki çoxluğun cəminin (birləşməsinin) proobrazı onların proobrazlarının cəminə bərabərdir:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Teorem 2. İki çoxluğun kəsişməsinin proobrazı onların proobrazlarının kəsişməsinə bərabərdir:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Teorem 3. İki çoxluğun birləşməsinin obrazı onların obrazlarının birləşməsinə bərabərdir:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Lakin, iki çoxluğun kəsişməsinin obrazı isə onların obrazlarının kəsişməsinə bərabər olmaya da bilər.

Məsələn, tutaq ki, baxılan inikas müstəvinin x oxuna proyeksiyalanmasıdır. Onda aşağıdakı parçalar kəsişmirlər, lakin eyni zamanda, onların obrazları üst-üstə düşür:

$$0 \le x \le 1,\ y=0,$$
$$0 \le x \le 1,\ y=1.$$

İsbat etmək olar ki, tamamlayıcının proobrazı proobrazın tamamlayıcısına bərabərdir.

Çoxluqları elementlərinin müəyyən əlamətlərinə görə siniflərə bölmək olar. Tutaq ki, M - hər hansı çoxluqdur və onun bir sıra elementləri (a,b) cütü “nişanlanmışdır”. Əgər (a,b) cütü “nişanlanmışdırsa”, onda a elementi φ münasibətlə b elementi ilə əlaqədadır,deyəcəyik: $a\varphi b$. Bu φ münasibəti aşağıdakı xassələri ödədikdə ekvivalentlik münasibəti adlanır:

1. Refleksivlik: $a\varphi a$ (ixtiyari $a \in M$ üçün).
2. Simmetriklik: əgər $a\varphi b$ isə, onda $b\varphi a$ (ixtiyari $a,b \in M$ üçün).

3. Tranzitivlik: əgər $a \varphi b$ və $b \varphi c$ isə, onda $a \varphi c$ (ixtiyari $a,b,c \in M$ üçün).

Bu şərtlər M çoxluğunun φ münasibəti (əlaməti) vasitəsilə siniflərə bölünməsi üçün zəruri və kafidir.

Ekvivalentlik anlayışı daha geniş anlayış olan

$$a \varphi b \in M \times M = M^2$$

binar münasibətinin xüsusi halıdır və o da yuxarıdakı üç xassəni ödəyir.

Tərif. İki M və N çoxluğu onların elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olduqda ekvivalent adlanırlar.(M~N kimi işarə olunur). Odur ki, hesabi çoxluğa natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent çoxluq kimi də tərif vermək olar.

Teorem. [0; 1] parçasına daxil olan həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri- hesabidir.

Çoxluqların ekvivalentliyinə dair isbatsız olaraq aşağıdakı teoremi verək.

Kantor – Bernşteyn teoremi

Tutaq ki, A və B iki ixtiyari çoxluqdur. Əgər A çoxluğunun B çoxluğunun B_1 altçoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli f uyğunluğu və B çoxluğunun A çoxluğunun A_1 altçoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli g uyğunluğu mövcuddursa, onda A və B çoxluqları ekvivalentdir.

[0;1] parçasındakı həqiqi ədədlər çoxluğuna ekvivalent çoxluğun gücü kontinumdur, deyirlər.

A çoxluğunun güçünü m(A) ilə işarə edək.İxtiyari A və B çoxluqları üçün: ya $m(A) = m(B)$, ya

$$m(A) > m(B), \text{ yaxud da } m(A) < m(B).$$

A çoxluğunun elementləri sayını $n(A)$ kimi işarə edək.

Əgər $A \cap B = \varnothing$ olarsa, onda $A \cup B$ çoxlugunun elementlərinin sayı aşagıdakı kimi təyin olunur:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Bu qayda istənilən cüt-cüt kəsişməyən sonlu sayda olan sonlu çoxluqların birləşmələrinin elementləri sayının tapılmasına da şamil edilir.

Ekvivalent çoxluqların elementlərinin sayları bərabərdir.

Tutaq ki, A və B ixtiyari iki sonlu çoxluqdur. Onda onların birləşməsinin elementləri sayı aşağıdakı düsturla hesablanılır:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

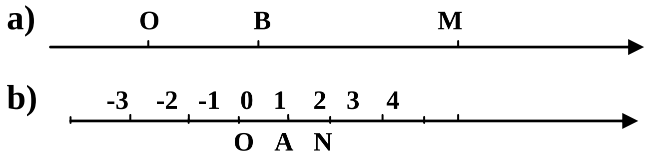
II FƏSİL.QEYRİ-HESABİ ÇOXLUQ. HƏQİQİ ƏDƏDLƏRİN HƏNDƏSİ TƏSVİRİ

2.1.Qeyri-hesabi çoxluq

Tərif: Hesabi olmayan sonsuz çoxluğa **qeyri hesabi (və ya hesabi olmayan)** çoxluq deyilir.Tərifdən aydındır ki, eynigüclü olan iki sonlu çoxluğun elementlərinin sayı bərabərdir.Belə təklif “müəyyən mənada” sonsuz çoxluqlar üçün də doğrudur. Məsələn, eynigüclü olan $X=\{n^2\}$ və$Y=\{2n\}$ sonsuz çoxluqlarının elementləri eyni “saydadır”, lakin onların elementlərinin “sayını” ifadə edən natural ədəd yoxdur.

2.2.Düz xətt üzərində koordinat sistemi. Həqiqi ədədlərin həndəsi təsviri

Həqiqi ədədlər həndəsi olaraq ədəd və ya koordinat oxunun nöqtələri ilə göstərilir.Verilmiş düz xətt üzərində başlanğıc adlanan O nöqtəsi,ölçü vahidi və müsbət istiqamət seçildikdə deyirlər ki, həmin düz xətt üzərində koordinat sistemi təyin olunmuşdur. Bu halda düz xətt koordinat oxu, O nöqtəsinə isə koordinat başlanğıcı deyilir (bax: şəkil 1a,b).



Şəkil 1.

Koordinat oxu üzərində istənilən M nöqtəsi götürək. OM parçasını vahid OB parçası ilə ölçdükdə nəticə birx ədədi ilə ifadə olunur.OM parçasının istiqaməti OB-nin istiqaməti ilə eyni olduqda həmin x ədədi müsbət (x>0), müxtəlif olduqda isə mənfi (x<0) hesab edilir. M nöqtəsi O ilə üst-üstə düşdükdə x=0 olur.**Belə təyin olunan x ədədinə OM parçasının qiyməti deyilir və x=OM ilə işarə olunur.**

Hər bir həqiqi x ədədi üçün ox üzərində elə yeganə M nöqtəsi var ki, x=OM olur. x>0 olduqda M nöqtəsi O nöqtəsinin oxun müsbət istiqaməti tərəfində, x<0 olduqda isə O nöqtəsinin oxun müsbət istiqamətinin əks tərəfində yerləşər (şəkil 1).

Beləliklə, hər bir həqiqi ədədə oxun müəyyən bir nöqtəsi və tərsinə,oxun hər bir nöqtəsinə bir həqiqi ədəd uyğun olur. **Bu halda verilmiş oxa ədəd oxu,M nöqtəsinə uyğun olan həqiqi x ədədinə həmin nöqtənin koordinatı (latınca co-birlikdə,ordinatus nizamlanmış,müəyyən deməkdir) və M nöqtəsinə x ədədinin həndəsi göstərilişi deyilir. x ədədinin M nöqtəsinin koordinatı olması M(x) şəklində yazılır.**

Adətən, ədəd oxu üfüqi düz xətt və onun üzərində müsbət istiqamət soldan sağa tərəf götürülür.

Aydındır ki,həqiqi ədədlər çoxluğu ilə ədəd oxunun nöqtələri çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır.Buna görə də çox zaman riyazi analizdə “həqiqi” x ədədini ədəd oxu üzərində göstərən “nöqtə” əvəzinə “x nöqtəsi” işlədilir.

Həqiqi ədədləri ədəd oxunun nöqtələri ilə göstərdikdə onların bir sıra xassələri daha aydın görünür. Bu zaman həqiqi ədədlərin nizamlılıq və başqa xassələri pozulmur.

Qeyd edək ki,bütün həqiqi ədədləri ədəd oxu üzərində göstərən nöqtələr həmin oxu (düz xətti) tamamilə doldurur. Bu, həqiqi ədədlər çoxluğunun kəsilməzlik (və ya tamlıq) xassəsini həndəsi olaraq ifadə edir.

Həqiqi ədədləri həndəsi göstərmək üçün işlədilən ədəd oxu bərabər hissələrə bölündüyündən, (şəkil 1b) yəni müntəzəm şkala olduğundan ölçülü kəmiyyətləri də həmin ox üzərində həndəsi göstərmək olar. Bu haqda ölçü vahidi olaraq seçilən parçaya həmin kəmiyyətin adına uyğun ad verilir. Məsələn,ox üzərində kütlə həndəsi göstərilirsə,onda O nöqtəsinə m=0 q, A nöqtəsinə m=1 q, N nöqtəsinə m=2 q vəs. uyğun olar.

2.3.Düz xətt üzərində ədəd oxu və loqarifmik şkala

Bəzi hallarda müntəzəm olmayan şkaladan,məsələn loqarifmik şkaladan istifadə etmək daha əlverişlidir. Bu halda $x>1$ ədədini loqarifmik şkala üzərində seçilmiş müəyyən nöqtədən sağa$\gamma\cdot\lg x$ məsafədə yerləşən nöqtə ilə, $0<x<1$ ədədini isə həmin nöqtədən solda $\gamma|\lg x|$ məsafədə yerləşən nöqtə ilə götərirlər. **(γ, seçilmiş mütənasiblik əmsalıdır).** Loqarifmik şkala loqarifmik funksiyanın xassəsinə əsaslanır (ədəd böyüdükcə onun loqarifmi nisbətən az sürətlə artır:

$$\lg 10 =1, \lg 100=2, \lg 1000=3,...).$$

Biz, riyazi kəmiyyətləri həndəsi göstərmək üçün ədəd oxundan (müntəzəm şkaladan) istifadə edəcəyik.

2.4. Müntəzəm şkala. Ölçü vahidi. Müntəzəm olmayan şkala

Müntəzəm şkalanın bir xüsusiyyətini qeyd etmək lazımdır. Həndəsi silsilə və ya qüvvət funksiyası şəklində sürətlə dəyişən kəmiyyətin müəyyən intervalda dəyişmə xarakterini həndəsi olaraq əyani görmək üçün müntəzəm şkala çox zaman əlverişli olmur. Çünki ölçü vahidi böyük götürüldükdə koordinat başlanğıcından uzaq nöqtələrdə dəyişən kəmiyyətin qrafiki çertyoja yerləşmir. **Ölçü vahidi** çox kiçik olduqda isə qrafikin koordinat başlanğıcına yaxın hissələrinə əsasən kəmiyyətin dəyişmə xarakterini görmək çətin olur. Buna görə belə hallarda **müntəzəm olmayan şkaladan,** məsələn loqarifmik şkaladan istifadə etməkdaha əlverişlidir. Bu halda $x>1$ ədədini loqarifmik şkala üzərində seçilmiş müəyyən nöqtədən sağa $\gamma \cdot \lg x$ məsafədə yerləşən nöqtə ilə, $0<x<1$ ədədini isə həmin nöqtədən solda $\gamma\,|\lg x|$ məsafədə yerləşən nöqtə ilə göstərirlər **(γ seçilmiş mütənasiblik əmsalıdır).**

2.5.Ədədi çoxluğun xüsusi növləri.Kantor teoremi

Çoxluğun bütün elementləri həqiqi ədədlər olduqda ona **ədədi çoxluq** deyilir. Natural ədədlər çoxluğu N, rasional ədədlər çoxluğu R, irrasional ədədlər çoxluğu I vəs. ədədi çoxluğa misal ola bilər. Ədədi çoxluqların çox işlənən bir sıra xüsusi növlərini qeyd edək. Müxtəlif a və b həqiqi ədədlərini götürərək $a<b$ olduğunu qəbul edək.

Tərif.$a<x<b$ bərabərsizliyini ödəyən bütün həqiqi

x ədədləri çoxluğuna interval deyilir və (a,b) ilə işarə edilir: $(a,b) = \{x|\ a<x<b\}$.

Çoxluğun özünə daxil olmayan a və b ədədlərinə intervalın ucları, (b-a) fərqinə isə intervalın uzunluğu deyilir.

Həndəsi olaraq, (a,b) intervalı ədəd oxu üzərində a və b nöqtələri arasında yerləşən nöqtələr çoxluğundan ibarətdir.

Misal 1. $-1<x<1$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğu

$$(-1,\ 1) = \{x|-1<x<1\}$$

intervalını təşkil edir.

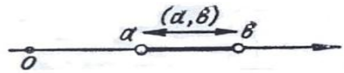
Tərif. **$a \le x \le b$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğuna parça və ya seqment deyilir. Parça $[a, b]$ şəklində göstərilir:**

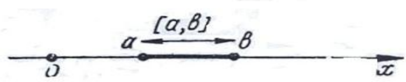
$$[a,b] = \{x|\ a \le x \le b\}.$$

a və b ədədlərinə parçanın ucları, b-a fərqinə isə parçanın uzunluğu deyilir.

Aydındır ki, (a,b) intervalı ilə [a,b] parçasının uzunluqları bərabərdir**(Şəkil 2).**

Həndəsi olaraq [a,b] parçası dedikdə ədəd oxu üzərində a və b nöqtələri və onların arasında yerləşən bütün nöqtələr çoxluğu başa düşülür **(Şəkil 3).**





Şəkil 2. **Şəkil 3.**

Misal 2. $-1\leq x\leq 1$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğu [-1,1] parçasını təşkil edir:

$$[-1,1] = \{x|-1\leq x\leq 1\}.$$

Tərif. $a\leq x<b$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğuna soldan qapalı yarıminterval, $a<x\leq b$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğuna isə sağdan qapalı yarıminterval deyilir. Bunlar uyğun olaraq aşağıdakı kimi işarə edilir:

$$[a,b) = \{x|a\leq x<b\} \quad \text{və} \quad (a,b] = \{x|a<x\leq b\}$$

Aydındır ki,uyğun olaraq soldan və sağdan qapalı [a,b) və (a,b] yarımintervallarının uzunluqları bərabərdir, b-a fərqi onların uzunluğudur.Yeni işarələr də qəbul edək.

Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $(-\infty,\infty)$ şəklində göstərilir. Buradakı ∞ "sonsuzluq" ədəd deyildir, ancaq simvolik işarədir. Onun ayrılıqda heç bir mənası yoxdur.Ona müəyyən təklif və ifadələrdə məna verilir.Çox zaman bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu $-\infty<x<\infty$ şəklində işarə edirlər. Qeyd etmək lazımdır ki,axırıncı münasibət sonsuzluq işarəsinin həqiqi ədədlərlə bir növ əlaqəsini də müəyyən edir.

Hər hansı həqiqi a ədədindən böyük olan bütün ədədlər çoxluğu $(a, +\infty)$ ilə işarə edilir. a ədədindən kiçik olmayan bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu isə $[a, +\infty)$ ilə işarə edəcəyik (a ədədi axırıncı çoxluğa daxildir). Eyni qayda ilə $(-\infty, a)$ və $(-\infty, a]$ ədədi çoxluqlarını da təyin etmək olar.

Misal 3. $\mathbf{-3 \le x < \sqrt{2}}$ münasibərini ödəyən həqiqi **x** ədədləri çoxluğu soldan qapalı $[-3, \sqrt{2})$ yarımintervalını təşkil edir.

Ədədi çoxluğun baxdığımız növləri arasında belə bir münasibət vardır: **hər bir interval istənilən parça, yarımox və bütün ədəd oxu ilə ekvivalentdir.**

Teorem (Kantor teoremi):

İstənilən [a,b] ($a \neq b$) parçasının ((a,b) intervalının) nöqtələri çoxluğu qeyri-hesabidir.

Bütün parçaların və intervalların eynigüclü olmasından aydındır ki, Kantorun bu teoremini **[0,1]** parçası üçün söyləmək kifayətdir.

Tərif. [0,1] parçasının bütün nöqtələri çoxluğuna ekvivalent olan hər bir çoxluğa kontinuum güclü çoxluq deyilir.

Buradan alınır ki, istənilən**[a,b]**parçası,**(a,b)** intervalı və həm də bütün ədəd oxu kontinuum güclü çoxluqdur.

Hər bir parçanın bütün nöqtələri çoxluğuna kontinuum deyilir.

III FƏSİL. MÜTLƏQ QİYMƏT HAQQINDA TEOREMLƏR

3.1. Həqiqi ədədin mütləq qiyməti.

Tərif. Mənfi olmayan və

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{əgər } \ x \geq 0 \text{ olarsa} \\ -x, & \text{əgər } x < 0 \ olarsa \end{cases}$$

kimi təyin olunan $|x|$ ədədinə həqiqi x ədədinin mütləq qiyməti (və ya modulu) deyilir.

Aşkardır ki, istənilən həqiqi x ədədi üçün:

$$|x| = |-x|, \qquad x \leq |x|, \quad -x \leq |x| \qquad \textbf{(1)}$$

Misal 1.

$|-3| = 3$, $|3| = 3$, $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|-1{,}2| = 1{,}2$, $|0| = 0$

x ədədi ədəd oxu üzərindəki M nöqtəsinin koordinatı olduqda $|x|$ ədədi $\overline{OM}$ parçasının uzunluğunu göstərir.

3.2. Mütləq qiymət haqqında teoremlər

Mütləq qiymətin bir sıra mühüm xassələrini qeyd edək.

Teorem 1.

$$|x| < \mathbf{M} \qquad \textbf{(2)}$$

bərabərsizliyi

$$-\mathbf{M} < \mathbf{x} < \mathbf{M} \qquad \textbf{(3)}$$

bərabərsizlikləri ilə ekvivalentdir (eynigüclüdür).

İsbatı. (2) bərabərsizliyi doğru olduqda (1) münasibətlərinə görə

$$x < M \quad \text{və} \quad -x < M.$$

İkinci bərabərsizliyin hər iki tərəfini -1-ə vursaq:

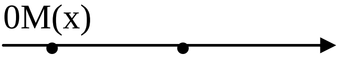
x<M   və x>-M

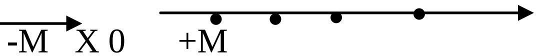
və ya (3) münasibəti alınar:

-M<x<M

İndi isə (3) bərabərsizliyinin ödənildiyini fərz edək.

x ≥ 0 olduqda $|x| = x$ və x<M əvəzinə $|x|$ <M bərabərsizliyini yazmaq olar.





Şəkil 4. **Şəkil 5.**

x <0 olduqda $|x| = -x$ və (3) bərabərsizliklərinin sol tərəfinə görə M>-x və ya M>$|x|$ (Şəkil 4).

Bununla da teorem isbat olunur.

Qeyd (2) bərabərsizliyi və ya (3) bərabərsizlikləri göstərir ki, x ədədi (-M,M) intervalında yerləşir (şəkil 5).

Teorem 2. $x \leq$**M bərabərsizliyi -M**$\leq$**x**$\leq$**M bərabərsizlikləri ilə ekvivalentdir.**

Bu teorem 1-ci teorem kimi isbat olunur.

Teorem 3. $|x|$**>M olduqda x>M, x<-M bərabərsizliklərinin biri ödənilməlidir**.

Teoremin doğruluğu mütləq qiymətin tərifindən aydındır.

3.3.Cəmin, fərqin, hasilin, nisbətin mütləq qiyməti haqqında teoremlər

Teorem 4. İki həqiqi ədəd cəminin mütləq qiyməti, həmin ədədlərin mütləq qiymətləri cəmindən böyük

deyildir:

$$|x+y| \le |x|+|y| \qquad \textbf{(4)}$$

İsbatı. Burada iki hal ola bilər:

1) x+y>0. Onda mütləq qiymətin tərifinə görə $|x+y| = x+y$ və (1) bərabərsizliklərinin ikincisinə əsasən:

$$|x+y| = x+y \le |x|+|y|$$

2) x+y<0. Bu halda da

$$|x+y| = -(x-y) = (-x)+(-y) \le |x|+|y|$$

Bununla da teorem isbat olunur.

Qeyd. İsbat etdiyimiz 4-cü teorem sonlu sayda ixtiyari həqiqi ədədlərin cəmi üçün də doğrudur.

$$|x_1 + x_2 + \ldots x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \qquad \textbf{(5)}$$

Bu təklifin riyazi induksiya metodu ilə 4-cü teoremdən istifadə etməklə asanlıqla isbat etmək olar.

Teorem 5. İki həqiqi ədədin fərqinin mütləq qiyməti, onların mütləq qiymətləri fərqindən kiçik deyildir:

$$|x-y| \ge |x|-|y| \qquad \textbf{(6)}$$

İsbatı. 4-cü teoremə görə

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$$

və buradan

$$|x|-|y| \le |x-y|.$$

Teorem 6.

$$|x-y| \ge |x|-|y| \qquad \textbf{(7)}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əvvəlki teoremə əsasən

$$|x-y| \ge |x|-|y|$$

və

$$|x-y| = |y-x| \geq |y| - |x|.$$

Buradan da (7) bərabərsizliyi alınır.

Teorem 7. İki həqiqi ədəd hasilinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətlərinin hasilinə bərabərdir:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \textbf{(8)}$$

Doğrudan da, x>0 və y> 0 olduqda xy>0 və $|x \cdot y| = xy = |x| \cdot |y|$ x>0 və y< 0 olduqda isə xy< 0 və yenə də $|x \cdot y| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$**.** Ardı aydındır.

Nəticə. Sonlu sayda x_1, x_2, ..., x_n ədədləri üçün

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot ... \cdot |x_n|$$

Münasibəti doğrudur. Doğrudan da, (8) münasibətinə görə

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2 \cdot ... \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3 \cdot ... x_n|$$
$$= ..... = |x_1| \cdot |x_2| \cdot ... |x_n|$$

Teorem 8. İki həqiqi ədədin nisbətinin mütləq qiyməti həmin ədədlərin mütləq qiymətləri nisbətinə bərabərdir.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ (y \neq 0). \qquad \textbf{(9)}$$

Teoremin isbatı aşkardır.

Misal 2. Bərabərsizliyi həll edin: $|x-3|$<2

1-ci teoremə görə

-2<x-3<2

Bu bərabərsizliklərin bütün tərəflərinə 3 ədədini əlavə etsək

1<x<5.

Misal 3. . Bərabərsizliyi həll edin:

$$|2x-1|<3$$

$$-3<2x-1<3$$

və ya

$$-2<2x<4$$

$$-1<x<2$$

3.4. Ətraf anlayışı. Ətrafın daxili və sərhəd nöqtələri. Limit nöqtəsi

Ətraf anlayışı

Tərif. Verilmiş həqiqi x_0 ədədini (həndəsi olaraq x_0 nöqtəsini) öz daxilinə alan hər bir intervala həmin ədədin **ətrafı deyilir**.

(α,β) intervalı x_0 ədədinin ətrafı olduqda

$\alpha<x_0<\beta$ münasibəti ödənilir. $(-1,1), (-\frac{1}{2},1)$, $(-1,3)$ və $(-1,\frac{1}{2})$ intervalları sıfır ədədinin ətrafıdır.

$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ $\varepsilon>0$ intervalında x_0 ədədinin (nöqtəsinin) ε-ətrafı, x_0 ədədinə ε-ətrafın mərkəzi, ε-ədədinə isə **ε-ətrafın radiusu deyilir.**

Aşkardır ki, $x_0$nöqtəsinin ε- ətrafında yerləşən hər bir x ədədi üçün $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ münasibəti ödənilir.Bu bərabərsizliklərin bütün tərəflərinə $-x_0$ ədədini əlavə etsək:

$$-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

(1) münasibəti isə yuxarıda icbat etdiyimiz 1-ci teoremə görə

$$|x-x_0|<\varepsilon \qquad \textbf{(2)}$$

bərabərsizliyi ilə ekvivalentdir.

Deməli, $x_0$nöqtəsinin ε-ətrafında yerləşən ixtiyari x ədədi üçün (2) bərabərsizliyi ödənilir.

Qeyd edək ki, x_0 ədədinin ixtiyari (α, β) ətrafı daxilində yerləşən həmişə müəyyən ε -ətraf vardır. Buna inanmaq üçün ε ədədi olaraq $\beta - x_0$ və $x_0 - \alpha$ ədədlərinin hər birindən kiçik müsbət ədədi götürmək kifayətdir.

Daxili və sərhəd nöqtəsi

Tərif. X= $\{x\}$ ədədi çoxluğunu götürək. Verilmiş $x_0 \in X$ nöqtəsinin X çoxluğuna tamamilə daxil olan hər hansı ətrafı varsa, onda x_0 nöqtəsinə X çoxluğunun **daxili nöqtəsi deyilir.**

x_0 nöqtəsinin istənilən ətrafında həm X çoxluğuna daxil olan və həm də daxil olmayan nöqtələr yerləşirsə, onda x_0 nöqtəsinə X çoxluğunun **sərhəd nöqtəsi deyilir**. Çoxluğun bütün sərhəd nöqtələri çoxluğuna həmin çoxluğun **sərhəddi deyilir.**

Misal 1. X= $[a,b]$ (a<b)çoxluğunun $a<x_0<b$ bərabərsizliyini ödəyən hər bir nöqtəsi (elementi) həmin çoxluğun daxili nöqtəsidir. a və b nöqtələri isə həmin çoxluğun sərhəd nöqtələridir və çoxluğun özünə daxildir.

Misal 2. X=(a,b) çoxluğunun hər bir nöqtəsi həmin çoxluğun daxili nöqtəsidir. a və b nöqtələri yenə də çoxluğun sərhəd nöqtələridir, lakin bu halda onlar çoxluğun özünə daxil deyildir.

Misal 3. X=$\{0,1,2\}$çoxluğunun bütün nöqtələri həmin çoxluğun sərhəd nöqtələridir.

Limit nöqtəsi

Tərif. x_0 nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğunun həmin nöqtədən fərqli heç olmazsa bir nöqtəsi varsa, onda x_0 nöqtəsinə X çoxluğunun **limit nöqtəsi deyilir.**

Aydındır ki, bu tərifi belə də demək olar: $\mathbf{x_0}$ nöqtəsinin istənilən ətrafında X çoxluğunun sonsuz sayda nöqtəsi yerləşdikdə ona həmin çoxluğun limit nöqtəsi deyilir.

Çoxluğun limit nöqtələrinin sayı sonlu və ya sonsuz ola bilər, yaxud da heç limit nöqtəsi olmaya bilər. Verilmiş çoxluğun limit nöqtələri həmin çoxluğun özünə daxil ola da bilər, olmaya da bilər.

3.5.Qapalı çoxluq. İzolə edilmiş nöqtə

Bütün limit nöqtələri özünə daxil olan çoxluğa **qapalı çoxluq deyilir.** Qapalı çoxluğa $[a,b]$ parçası misal ola bilər.

Tərif: X çoxluğuna daxil olan x_0 nöqtəsinin həmin çoxluğun heç bir elementi yerləşməyən ətrafı olduqda, x_0 nöqtəsinə X çoxluğun **izolə edilmiş nöqtəsi deyilir.**

Misal 4. X=$[a,b]$ çoxluğunun bütün nöqtələri özünün limit nöqtəsidir və həmin çoxluğa daxildir.

Misal 5. X=(a,b) çoxluğunun bütün nöqtələri və a, b nöqtələri onun limit nöqtələridir. Bu çoxluğun limit nöqtələrinin bir hissəsi, yəni (a,b) intervalı, həmin çoxluğun özünə daxildir; $(a,b)\subset X$, a və b nöqtələri isə həmin çoxluğun özünə daxil deyil.

Misal 6. Sonlu X=$\{0,1,2\}$ çoxluğunun heç bir limit nöqtəsi yoxdur. 0, 1 və 2 nöqtələrinin hər biri X çoxluğunun izolə edilmiş nöqtəsidir.

IV FƏSİL. FUNKSİONAL ASILILIQ

4.1. Dəyişən kəmiyyətlər. Funksiya. Həqiqi dəyişənli funksiya. Funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu

Müxtəlif ədədi qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərə **dəyişən kəmiyyətlər** deyilir. Adətən, riyaziyyatda dəyişən kəmiyyətlər x,y,z, ... ilə, sabit kəmiyyətlər isə a,b,c, ... ilə işarə edilir.

Dəyişmə xarakterinə görə dəyişən kəmiyyətlər əsasən iki qrupa bölünür:

1.Sonlu və ya hesabi qiymətlər ala bilən dəyişən kəmiyyətlər.Bunlara **diskret tipli** və ya sadəcə, **diskret dəyişən kəmiyyətlər** deyilir.

Məsələn, dəyişən x kəmiyyəti ancaq 2,4,6,8,.. qiymətlərini ala bilirsə, o diskret dəyişən kəmiyyətdir. Diskret dəyişən kəmiyyətə başqa bir misal natural 1,2,3,...., n, ... ədədlərini ala bilən dəyişən kəmiyyətdir. Belə dəyişən kəmiyyətə <<**tam qiymətli dəyişən** >>deyilir və **n**ilə işarə edilir.

2.Öz dəyişmə oblastındakı hər hansı $x=x_0$ və $x=x_1$ qiymətləri ilə bərabər, həmin ədədlər arasında yerləşən bütün həqiqi ədədləri, yəni $x_0<x< x_1$ qiymətlərini ala bilən dəyişən kəmiyyətlər. Belə dəyişən kəmiyyətlərə **kəsilməz tipli dəyişən kəmiyyətlər** deyilir.

Məsələn, (0,1) intervalındakı bütün qiymətləri ala bilən x kəmiyyəti kəsilməz tipli dəyişən kəmiyyətdir.

Dəyişən x kəmiyyətinin ala bildiyi bütün qiymətlər çoxluğuna onun **dəyişmə oblastı** deyilir. Məsələn, x kəmiyyəti [a,b] parçasındakı bütün qiymətləri ala bilirsə, onda [a,b] parçası onun dəyişmə oblastıdır. X (və ya n) diskter dəyişən kəmiyyəti bütün natural ədədləri ala bilirsə, onda N={1,2,3,...,n,...} çoxluğu onun dəyişmə oblastıdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, kəsilməz tipli x dəyişən kəmiyyətinin dəyişmə oblastı (a,b) intervalı, [a,b] parçası, (a,b], [a,b), [a,∞) və (-∞,a] yarımintervalları və bütün ədəd oxu (-∞,∞) və s. ola bilər.

a) Funksiya

Verilmiş x və y dəyişən kəmiyyətləri bir-birindən asılı olmayaraq istənilən qiymətləri ala bilirsə, yəni birinin aldığı qiymətlər, o birinin bu və ya başqa qiymətləri alıb-almamasından asılı deyilsə, onlara asılı olmayan və sərbəst dəyişən kəmiyyətlər deyilir. Aydındır ki, belə dəyişən kəmiyyətləri ayrılıqda öyrənməyin heç bir mənası yoxdur. Buna görə də riyaziyyat elmində asılı olan dəyişən kəmiyyətlər öyrənilir.

Tərif : Dəyişmə oblastları uyğun olaraq X və Y olan iki x və y dəyişən kəmiyyətini götürək. Hər hansı f qayda və ya qanunu vasitəsilə dəyişən x kəmiyyətinin X dəyişmə oblastındakı hər bir qiymətinə,dəyişən y kəmiyyətinin müəyyən bir qiymətini (Y çoxluqundan) uyğun və ya qarşı qoymaq mümküdürsə, onda X çoxluqundan Y çoxluğuna funksiya (X çoxluğunun Y-ə inikası) verilmişdir deyilir və y=$f(x)$ ilə göstərilir.

Funksiya bəzən

$$Y=y(x)\ ,y=f(x)\ ,\ y=\varphi(x)\ ,\ y=F(x)$$

və s. şəklində göstərilir. Bu ifadələrdəki $f, \varphi, F\ldots$ hərfləri hər hansı qanun və ya qaydalar vasitəsilə $x-in$ verilmiş qiymətinə y-in uyğun qiymətinin qarşı qoyulmasını göstərir.

b) Həqiqi dəyişənli funksiya

Riyaziyyat kursunda dəyişən kəmiyyətlər öyrənilir. Dəyişən kəmiyyətlər iki növə bölünür. Bunlardan birincisi sərbəst dəyişən kəmiyyətlər, ikincisi isə sərbəst dəyişənlərdən asılı olaraq dəyişən kəmiyyətlərdir. Asılı olaraq dəyişən kəmiyyətlərə funksiya deyilir.

Məsələn, dairənin sahəsində ($S=\pi R^2$) radius sərbəst dəyişən, dairənin sahəsi isə funksiyadır.

c) Əsas elementar funksiyalar

Analitik üsulla verilmiş aşağıdakı beş növ funksiyaya əsas elementar funksiyalar deyilir.

1.Qüvvətfunksiyası: $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$.

2.Üstlü funksiya: α^{x} ($\alpha>0, \alpha \neq 1$).

3.Loqarifmik funksiya: $y=\log_{\alpha} x$ ($\alpha>0, \alpha \neq 1$).

4.Triqonometrik funksiyalar: y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx, y=secx, y=cosecx.

5. Tərs triqonometrik funksiyalar: y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx , y=arcctgx, y=arcsecx, y=arccosecx.

d)Funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu.

Yuxarıda funksiyanın tərifində götürülən **X** və **Y** çoxluqları **R** həqiqi ədədlər çoxluğunun alt çoxluqları olarsa, onda **y=f(x)** funksiyasına ədədi (və ya həqiqi dəyişənli) funksiya deyilir.

X çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı (və ya varlıq oblastı), Y çoxluğuna isə funksiyanın dəyişmə oblastı (və ya qiymətlər çoxluğu) deyilir. Bunu aşağıdakı tərif şəklində söyləmək olar.

Tərif.Verilmiş y=f(x) funksiyasında x arqumentinə ədədi qiymət verdikdə funksiya müəyyən sonlu qiymət alarsa, arqumentin bütün belə qiymətləri çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı deyilir.

Funksiyanın aldığı qiymətlər çoxluğuna bu funksiyanın dəyişmə oblastı deyilir.

Bir qayda olaraq funksiyanın təyin oblastı **D(f)**, dəyişmə oblastı isə **E(f)** ilə işarə olunur. Tərifə əsasən:

$D(f)=\{x / x\in X\}$ və $E(f)=\{y / y\in Y\}$

Ümumiyyətlə funksiya təyin olunmuşdur dedikdə aşağıdakılar başa düşülür:

1)funksiyanın təyin oblastı verilmiş olur;

2)funksiyanın qiymətlər çoxluğu verilmiş olur;

3)təyin oblastının hər bir qiymətinə uyğun qiymətlər çoxluğundan yeganə bir qiyməti qarşı qoyan qayda verilmiş olur.

$x=\alpha$ qiyməti y=f(x) funksiyasının təyin oblastına daxil deyilsə, ondaf(x) simvolunun mənası yoxdur.

Məsələn, y=f(x)=x! funksiyasının təyin oblastı mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğudur.

Odur ki, f(3)=3!=6 simvolunun mənası olduğu halda, f (3,5) və $f\left(\sqrt{2}\right)$ simvollarının mənası yoxdur.

Funksiyasının təyin oblastının təyinində əsasən aşağıdakı dörd halı nəzərə almaq lazım gəlir.

1. Məxrəcin sıfra çevrilməsi.

Bu halda funksiyasının ifadəsinə kəsr daxil olubsa, məxrəcin sıfra çevrildiyi nöqtələrdə funksiya təyin olunmur.

2. Cüt dərəcədən kökün daxil olması.

Funksiyasının ifadəsində cüt dərəcədən kök iştirak edərsə, kökaltı ifadənin mənfi olduğu nöqtələrdə funksiya təyin olunmur.

3. $\log_{\alpha} x$ ifadəsinin funksiyaya daxil olması.

Yalnız x>0, 0 <α<1 və α> 1 olduqda funksiya təyin olunur.

Əgər funksiyaya bir neçə ifadə daxil olarsa, onda funksiyanın təyin oblastı bunların hamısının təyin oblastlarının ortaq hissələri götürülür.

Misallar: Funksiyaların təyin oblastını tapın.

1. $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ funksiya x-in elə qiymətlərində təyin olunub ki, x aşağıdakı şərtləri ödəsin

$$\lg\frac{5x-x^2}{4}\geq 0$$

buradan

$$\frac{5x-x^2}{4}\geq 1 \text{ və ya } x^2-5x+4\leq 0$$

bərabərsizliyi həll etsək

$$1\leq x\leq 4$$

alarıq.

Beləliklə funksiyanın təyin oblastı

$$D(f)=[1;4] \quad \text{olur.}$$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12+\lg(x-1)}}{x^2-4}$

Həlli. $\sqrt{x^2-7x+12}$ ifadəsi $]-\infty;3[$ və $[4;+\infty[$,

lg (x-1) ifadəsi $]1;+\infty[$, $\dfrac{1}{x^2-4}$ ifadəsi]-∞;-2[,]-2;2[və $]+2;+\infty[$ aralıqlarında təyin olunur. Funksiya bu aralıqların ortaq hissəsində təyin olunduğu üçün

$$D(f)=]1;2[\cup]4;+\infty[.$$

Qeyd edək ki, funksiyanın dəyişmə oblastını təyin etmək üçün elə bir qayda yoxdur. Bunu yalnız misalın xarakterinə görə xüsusi qaydalarla tapmaq lazım gəlir.

Odur ki, funksiyanın dəyişmə oblastının tapılması bəzən çox çətin olur.

3. f(x) = $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ funksiyasının dəyişmə oblastını tapın.

Həlli.y= $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ götürək və bu bərabərlikdən x-i tapaq;

$$x = \pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}$$

Burada x dəyişəninin həqiqi qiymət alması üçün $\frac{4y-1}{y-1}$>0 olmalıdır. Bu isə $y \le \frac{1}{4}$ və y>1 olduqda ödənilir.

Deməli, E(f)= $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right] \cup \left]\mathbf{1};+\infty\right[$.

4.2.Sərbəst və asılı dəyişənlər.Funksiyanın qrafiki və nöqtələrin həndəsi yeri

Funksiyaya tərif verilərkən qeyd olunmuşdu ki, y=f(x) funksiyasında x, X çoxluğundan götürülmüş ixtiyari kəmiyyət, y isə f uyğunluğu vasitəsilə Y-dən götürülmüş müəyyən bir kəmiyyətdir. Göründüyü kimi x üzərinə heç bir şərt qoyulmamışdır, yəni sərbəst dəyişəndir. Y isə x-dən asılı olaraq dəyişən kəmiyyətdir.

Bu halda x-ə sərbəst dəyişən və ya arqument, y-ə isə funksiyanın asılı dəyişəni və ya qiyməti deyilir. X çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı, Y çoxluğuna isə onun qiymətləri çoxluğu deyilir.

F(x) ilə Y çoxluğunun elə elementləri çoxluğunu işarə edək ki, onların hər biri y=f(x) funksiyasının heç olmazsa bir $x \in X$ nöqtəsində aldığı qiymət olsun. Aydındır ki , $f(x) \subset Y_1$ vəf(x), Y çoxluğları bərabər olmaya da bilər.

Xüsusi halda, f(x)=Y olarsa, onda deyirlər ki, y=f(x) funksiyası X çoxluğunu Y çoxluğu üzərində inikas etdirir.Bu halda istənilən $x_1 \neq x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) üçün$f(x_1) \neq f(x_2)$ olarsa, onda X çoxluğunun Y çoxluğuna y=f(x) inikasına **qarşılıqlı birqiymətli inikas deyilir.**

X çoxluğu ədədi çoxluq olduqda f(x) funksiyasına həqiqi dəyişənli funksiya deyilir.

Təbiətdə asılı dəyişən kəmiyyətlər istənilən qədər çoxdur.

Misal 1. R radisulu dairənin sahəsi

$$S=\pi R^2$$

Düsturu ilə hesablanır.

Aydındır ki, R radiusu dəyişdikdə ona uyğun olaraq dairənin sahəsi də dəyişəcəkdir, yəni R-in bir qiymətinəS-in müəyyən bir qiyməti uyğundur. Bu uyğunluqla bir S=f(R) funksiyası təyin olunur.

Bu funksiyanın uyğunluq qanunu (f) göstərir ki, R-in verilmiş qiymətinə S-in uyğun olan qiymətini tapmaq üçün onu kvadrata yüksəldib nəticəni π ədədinə vurmaq lazımdır.

Qeyd 1. Tərifdən aydındır ki, funksiya verildikdəx-in hər bir qiymətinə onun müəyyən bir **y** qiyməti uyğun olmalıdır. Bu uyğunluğun hansı qanun-qayda və ya vasitələrlə yaradılmasının prinsipial heç bir mənası yoxdur. Tərifdə bu uyğunluğun xarakteri haqqında heç bir tələb qoyulmur.

Qeyd 2. Tərifdə arqumentin müxtəlif qiymətlərinə funksiyanın da hökmən müxtəlif qiymətlərinin uyğun olması tələb edilmir.Arqumentin bütün qiymətlərinə funksiyanın ancaq bir qiyməti uyğun ola bilər. Buna görə də arqumentin bütün qiymətlərinə eyni sabit C qiyməti alan funksiyaya da baxılır.

Verilmiş y=f(x) funksiyanın $x_0 \in X$ nöqtəsində aldığı qiymətə onun həmin nöqtədəki xüsusi qiyməti deyilir və

$$Y_0=f(x_0)=y$$

Misal 3. $F(x)=x^2+\lg x$ funksiyasının x=1 və x=10 nöqtələrindəki qiymətləri

F(1)=1vəF(10)=101olacaqdır.

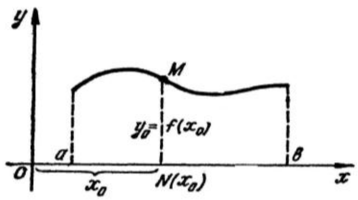
Funksiyanın qrafiki və nöqtələrin həndəsi yeri

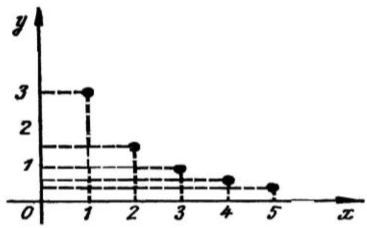
Fərz edək ki, y=f(x) funksiyası [a,b] parçasında təyin olunmuşdur. Müstəvi üzərində düzbucaqlı Oxy koordinant sistemi götürək və absis oxu üzərində [a,b] parçasını qeyd edək.[a,b] parçasının hər hansı nöqtəsi $x=x_0$ və ya $N(x_0)$ olsun. Bu nöqtədə y=f(x) funksiyası $y_0=f(x_0)$ qiymətini alır, $N(x_0)$ nöqtəsindən absis oxuna perpendikulyar çəkək. Bu perpendikulyar üzərində elə M nöqtəsi var ki, $NM=f(x_0)$ olur.

Bundan sonra NM düz xətt parçasının M nöqtəsini f(x) funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsindəki qiymətinin həndəsi göstərilişi hesab edəcəyik. Bu qayda ilə f(x) funksiyasının [a,b] parçasının hər bir nöqtəsindəki qiymətini həndəsi olaraq göstərən nöqtəni tapa bilərik. y=f(x) funksiyasının [a,b] parçasındakı qiymətlərini həndəsi göstərən bütün nöqtələrin həndəsi yeri həmin funksiyanın həndəsi göstərilişi və ya [a,b] parçasında qrafiki adlanır. Başqa sözlə, absisləri arqumentin qiymətləri, ordinatları isə funksiyanın arqumentin həmin qiymətinə uyğun qiymətləri olan M(x,y) nöqtələrinin həndəsi yerinə y=f(x) funksiyasının qrafiki deyilir(şəkil 1,2).

Təyin oblastı [a,b] parçası (və ya hər hansı sonsuz çoxluq) olan funksiyanın qrafikini praktiki olaraq qurmaq üçün onun bütün qiymətlərini həndəsi göstərən nöqtələri tapmaq mümkün olmur.

Buna görə də verilmiş funksiyanın qrafiki, ya onun müəyyən xassələrinə əsasən və ya da, qrafik üzərində yerləşən sonlu sayda $M_k(x_k,y_k)$ $(k=\overline{1,n})$ nöqtələrini tapıb onları bütöv xətlə birləşdirərək təqribi qurulur.





Şəkil 1. **Şəkil 2.**

Aydındır ki, verilmiş funksiyanın qrafiki onun təyin oblastından asılı olaraq bütöv bir xətt, hissə-hissə xətlər çoxluğu ,izolə edilmiş nöqtələr çoxluğu və s. şəklində ola bilər.Bunu aşağıdakı misallardan da aydın görmək olur.

Misal 1. N={1,2,3,...} çoxluğunda təyin olunmuş

$$f(x)=\frac{3}{x}$$

Funksiyanın qrafiki sonsuz sayda izolə edilmiş nöqtələr çoxluğundan ibarətdir.

Misal 2. y=x+5 funksiyasının qrafiki düz xətdir. Bu düz xətti qurmaq üçün x arqumentinə x=0 və x=-5 qiymətlərini verərək funksiyanın uyğun qiymətlərini hesablayaq :

y=5 və y=0.

Deməli, $M_1(0,5)$ və $M_2(-5,0)$ nöqtələrindən keçən düz xətt verilmiş funksiyanın qrafikidir.

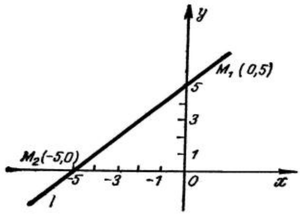
Verilmiş funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğu, yəni (-∞,∞) çoxluğudur.

Misal 3. Aşağıdakı kimi iki düsturla təyin olunan

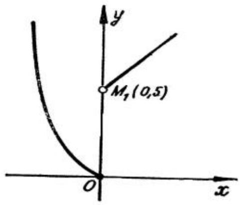
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \quad \text{olduqda,} \\ x+5, x > 0 & \mathit{olduqda} \end{cases}$$

Funksiyasının qrafiki iki hissədən ibarət xətdir: Oy oxundan sol tərəfdə (sol yarımmüstəvidə) parabola hissəsi, sağ tərəfdə isə düz xəttin bir hissəsidir (şəkil 4).

Baxdığımız funksiyanın təyin oblastı bütün ədəd oxu və ya (-∞,∞) çoxluğudur:



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Misal 4.

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x < 0 \ \mathit{olduqda,} \\ 1, & x > 0 \ \mathit{olduqda,} \\ 0, & x = 0 \ \text{olduqda} \end{cases}$$

kimi təyin olunan f(x)=sign x (belə oxunur: <<ef iks bərabərdir siqnium x>>) funksiyasının qrafiki iki şüadan ibarətdir (şəkil 5).

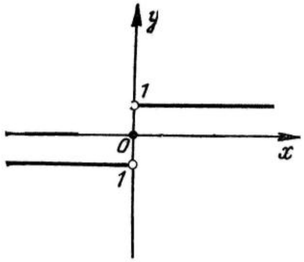
Bu funksiyanın təyin oblastı (-∞,∞) çoxluğudur.

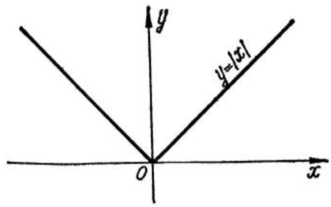
Misal 5. Təyin oblastı (-∞,∞) çoxluğu olan

$$Y=|x|$$

və ya

$$Y=\begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ olduqda,} \\ -x, & x < 0 \; olduqda \end{cases}$$





Şəkil 5. **Şəkil 6.**

Funksiyasının qrafiki 1-ci və 2-ci koordinat bucaqlarının tənbölənlərindən ibarət olan sınıq xətdir (şəkil 6).

Tərif. Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları (x,f(x)), $x \in D(f)$ olan nöqtələrin həndəsi yerinə y=f(x) funksiyasının qrafiki deyilir.

Funksiyasının qrafiki onun təyin oblastından asılı olaraq bütöv bir xətt, hissə-hissə xətlər və nöqtələr çoxluğu ola bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, koordinatları verilmiş tənliyi ödəyən nöqtələr çoxluğuna həmişə bir funksiyasının qrafiki kimi baxmaq olmaz. Məsələn,

$$\mathbf{x^2+y^2=1} \qquad \mathbf{(1)}$$

tənliyini vahid çevrə üzərində olan bütün nöqtələrin koordinatları ödəyir. Lakin bu çevrəni funksiyanın qrafiki kimi qəbul etmək olmaz. Çünki burada arqumentin bir qiymətinə qarşı iki qiymət qarşı qoyulur.

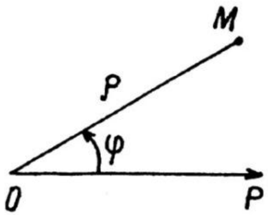
Buna, verilən x $\left(x \in [-1;+1] \right)$ absisinə nəzərən ordinatı **(1)** tənliyindən təyin olunan nöqtələrin həndəsi yeri kimi baxmaq lazımdır. Bu çevrənin yuxarı yarım hissəsi y=+ $\sqrt{1-x^2}$ funksiyasının qrafiki, aşağı yarım çevrəsi isə y=- $\sqrt{1-x^2}$ funksiyasının qrafikidir.

Teorem. Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sisteminə nəzərən götürülmüş əyri müəyyən bir funksiyasının qrafiki olması üçün, ordinat oxuna paralel olan hər bir düz xəttin əyrini ən çoxu bir nöqtədə kəsməsi zəruri və kafi şərtdir.

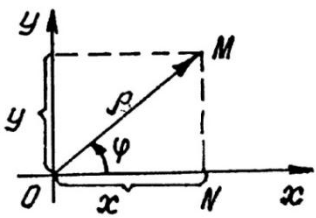
4.3. Polyar koordinat sistemi. Polyar koordinat sistemində funksiya qrafikinin qurulması

Koordinat metodunun ideyası ondan ibarətdir ki, nöqtənin vəziyyəti iki ədədin köməyi ilə birqiymətli təyin edilir. Bu ədədlərin həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, bunlar müəyyən bir koordinat sistemini verir. Düzbucaqlı koordinat sistemindən az vacib olmayan polyar koordinat sistemi vardır .Bu koordinat sistemini quraq.

Müstəvi üzərində **polyus** adlanan O nöqtəsini götürək.O nöqtəsindən **polyar ox**adlanan istiqamətlənmiş OP yarımoxunu çəkək (Şəkil 7).



Şəkil 7.



Şəkil 8.

Tutaq ki, M müstəvi üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtədir. OM parçası vasitəsilə O polyusu ilə M nöqtəsini birləşdirək.OM=ρməsafəsi**polyar radius**və

$\varphi = \angle XOM$ **polyar bucaq** adlanır. (φ) polyar ox polyar radius arasındakı saat əqrəbi istiqamətində yönəlmiş bucaqdır (şəkil 8).

M nöqtəsinin polyar koordinat sistemində koordinatları ρ və φ-dir və bu aşağıdakı kimi yazılır: M(ρ, φ), belə ki, birinci yerdə polyar radius - ρ,ikinci yerdə polyar bucaq - φ yazılır.

Aydındır ki, polyar koordinatlar aşağıdakı qiymətləri ala bilərlər:

$$0 \le \rho < +\infty ; 0 \le \varphi < 2\pi$$

Nöqtənin düzbucaqlı dekart koordinatları ilə polyar koordinatları arasında

$$x = \rho \cos\varphi , \quad y = \rho \sin\varphi \qquad (1)$$

şəkilndə əlaqə düsturları vardır. Bu bərəbərliklərdən

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad (2)$$

düsturlarını alarıq. Beləliklə, ρ və φ polyar koordinatları məlum olduqda (1) düsturundan nöqtənin düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatlarını və tərsinə x və y dekart koodrinatları məlum olduqda isə (2) düsturunun köməyi ilə ρ və φ polyar koordinatlarını tapmaq olar.

Polyar koordinatlarla verilmiş A (ρ_1, φ_1) və B (ρ_2, φ_2) nöqtələri arasındakı məsafə

$$d=|AB| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (3)$$

düsturu ilə hesablanır.

Polyar koordinat sistemində funksiya qrafikinin qurulması

Fərz edək ki, $\rho=f(\varphi)$ funksiyası polyar koordinatlarla verilmişdir. φ arqumentinin funksiyanın varlıq oblastına daxil olan hər bir qiymətinə ρ-nun bir qiyməti uyğun olar. ρ $və$ φ-nin hər bir belə qiymətləri üçün polyar koordinant sistemində bir M nöqtəsinin koordinatlarıdır: M=(ρ, φ) nöqtələrinin həndəsi yeri bir xətt verər. Bu xəttə verilmiş funksiyanın polyar koordinant sistemində qrafiki deyilir.

Verilmiş ρ =f(φ) funksiyasının polyar koordinant sistemində qrafikini qurmaq üçün φ arqumentinə funksiyanın varlıq oblastına daxil olan $\varphi=\varphi_k$(k=1,2,..., n) qiymətini verərək, funksiyanın uyğun $\rho_k=f(\varphi_k)$ (k=1,2,…,n) qiymətləri hesablanır.Bu ρ_k və φ_k ədədləri polyar koordinanr sistemində $M_k(\rho_k, \varphi_k)$ (k=1,2,…, n) nöqtələrini təyin edir. Həmin nöqtələri tapıb,onları bütöv xətlə birləşdirsək bir əyri alarıq. Bu əyri verilmiş funksiyanın polyarkoordinat sistemində təqribi qrafiki olar.

Misal 1. $\rho = \alpha\varphi$ funksiyasının qrafikini qurmalı, (burada a sabit ədəddir). Bu məqsədlə φ arqumentinə

$$\varphi=0;\ \frac{\pi}{4};\ \ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi;\frac{3\pi}{2};\ 2\pi,...$$

Qiymətlərini verərək, ρ-nun uyğun qiymətləri təqribi olaraq hesablanır:

ρ=0; 0,78 a; 1,57 a; 2,36 a; 3,14 a; 4,71 a; 6,28 a;…

Burada bir qanunauyğunluğu qeyd edək: əgər0,75 $\cdot$ a=bqəbul etsək onda :

$$1{,}57a \approx 2b;\ \ 2{,}36\ a \approx 3b;$$

$3{,}14a \approx 4b$; $4{,}71a \approx 6b$;

$6{,}28a \approx 8b; \ldots$

İndi müstəvi üzərində

$O(0,0)$; $M_1\left(b, \frac{\pi}{4}\right)$; $M_2\left(2b, \frac{\pi}{2}\right)$; $M_3\left(3b, \frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4(4b, \pi)$;

$M_5\left(6b, \frac{3\pi}{2}\right)$; $M_6(8b, 2\pi)$;… nöqtələrini quraq və həmin nöqtələri bütöv xətlə birləşdirək (şəkil 9). Alınan əyri verilmiş funksiyanın qrafikidir. Bu əyriyə Arximed spiralı deyilir.Arximed spiralına, öz başlanğıcı ətrafına müntəzəm fırlanan şüa uzərində müntəzəm hərəkət edən nöqtənin cızdığı əyri kimi də baxmaq olar.

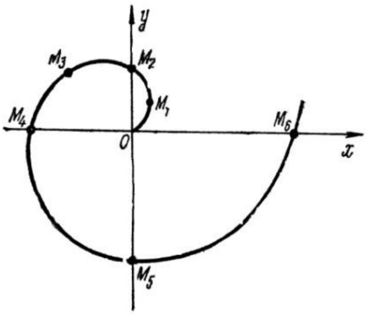
Misal 2. $\rho = \frac{\alpha}{\varphi}$ ($\alpha = const$) funksiyasının qrafikini qurmalı.

Bu funksiyanın qrafiki də əvvəlki misalda verilən funksiyanın qrafiki kimi qurulur (şəkil 10). Alınan əyri hiperbolik spiral adlanır.

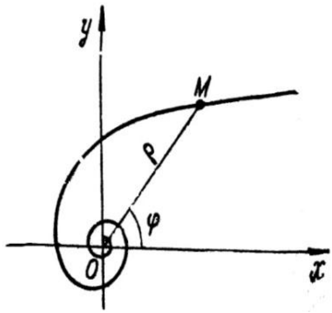
Misal 3. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ funksiyasının qrafiki Lemniskat adlanan xətdir (şəkil 11).

Funksiyanın ifadəsindən aydındır ki, $\varphi=0$ olduqda $\rho=a$ olur. φ arqumenti 0-dan $\frac{\pi}{4}$ -ə qədər dəyişdikdə a-dan sıfra qədər azalır.

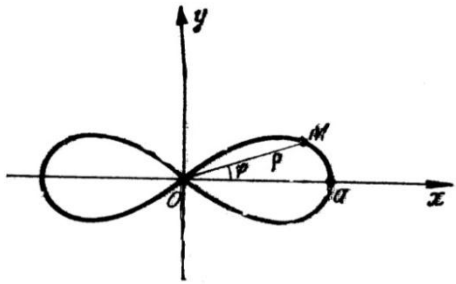
φ -nin $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ qiymətlərinə ρ-nun xəyali qiymətləri uyğundur.Yəni arqumentin həmin qiymətlərinə Lemniskat üzərində heç bir nöqtə uyğun deyildir.



Şəkil 9.



Şəkil 10.



Şəkil 11.

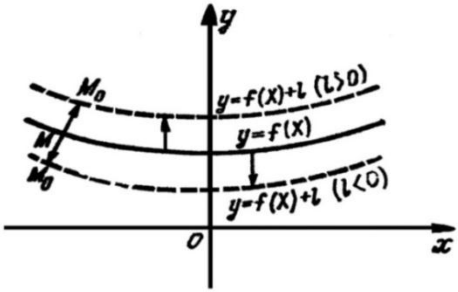
4.4.Qrafiklərin deformasiyası. Funksiyanın verilmə üsulları

Verilmişy=f(x) funksiyasinin qrafiki məlum olduqda onunla "qohum" olan

$$y=mf(px+q)+l \qquad (m\neq o,\ p\neq o) \qquad (1)$$

funksiyasinin qrafikini qurmaq mümkündürmü?

Mümkündür. y=f(x) funksiyasinin qrafikindən (1) funksiyasının qrafikini almaq üçün onun üzərində aşağıda göstərildiyi kimi deformasiya aparmaq lazımdır:



Şəkil 1.

1.Verilmiş y=f(x) funksiyasının qrafikində **y=f(x)+l (2)** funksiyasının qrafikini almaq üçün Oy oxu üzrə onun yerini **|1|**məsafəsi qədər dəyismək lazımdır: **l>0** olduqda **y=f(x)** funksiyasının qrafiki Oy oxu üzrə|1|məsafəsi qədər yuxarıya, **l** < 0 olduqda isə **|l|** məsafəsi qədər aşağıya köçürülməlidir (şəkil 1).Bu o deməkdir ki,verilmiş **y=f(x)** funksiyasının qrafiki üzərində olan hər bir **M(x,y)** nöqtəsini **M_0(x,y+l)**ilə əvəz etmək lazımdır.

2. Verilmiş**y=f(x)** funksiyasının qrafikindən

$$Y=f(x+q) \qquad (2)$$

funksiyasının qrafikini almaq ücün onu Ox oxu istiqamətində q məsafəsi qədər hərəkət etdirmək lazımdır: **q**> 0 olduqda qrafik q məsafəsi qədər sola, **q**< 0 olduqda isə qməsafəsi qədər sağa köçürməlidir.Bu o deməkdir ki, verilmiş **y=f(x)** funksıyasının qrafiki üzərində olan hər bir **M(x,y)** nöqtəsini **M_0(x-q,y)**nöqtəsi ilə əvəz etmək lazımdır (şəkil 2) .

3.Verilmis **y=f(x)** funksiyasının qrafikindən

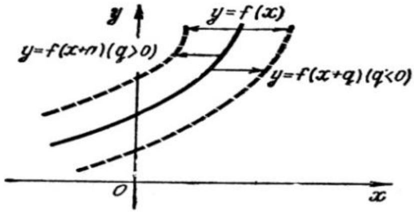
$$Y=mf(x) \qquad (3)$$

Funksiyasının qrafikini almaq ücün Oy oxu istiqamətində qrafik "m dəfə dartılmalıdır " : **|m|** >**1** olduqda qrafik **m** dəfə dartılır (uzanır), **|m|** <**1** olduqda isə **m** dəfə sıxılmalıdır (qısaldılmalıdır). Bu məqsədlə verilmis qrafik uzərində olan hər bir **M(x,y)** nöqtəsini **M_0(x,my)**nöqtəsi ilə əvəz etmək lazımdır (şəkil 3)

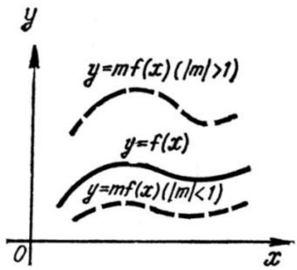
4.Verilmis **y=f(x)** funksiyasının qrafikindən

$$\mathbf{y=f(px)} \tag{4}$$

funksiyasının qrafikini almaq ücün verilmiş qrafiki Ox oxu istiqamətində "p dəfə dartmaq" lazımdır. Bu isə verilmiş

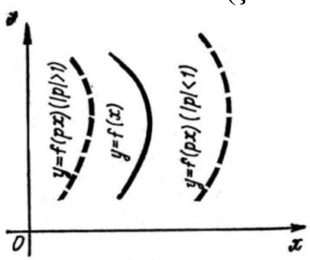


Şəkil 2.



Şəkil 3.

qrafik üzərində olan hər bir M(x,y) nöqtəsini M_0(x/p,y) nöqtəsi ilə əvəz etmək deməkdir (şəkil 4).



Şəkil 4.

Aşkardır ki,verilmiş y=f(x) funksiyasının qrafikindən (1) funksiyasının qrafikini almaq üçün onun üzərində 1-4-cü bənddə göstərilən deformasiyaların lazimi ardıcıllıqla aparmaq lazımdır.

Oxşar qayda ilə verilmiş y=f(x) funksiyasının qrafikindən $y=|f(x)|$, $y=\frac{1}{f(x)}$, $y=\frac{1}{|f(x)|}$ və s. funksiyaların qrafiklərini də almaq olar.

Funksiyanın verilmə üsulları

y=f(x) funksiyası o zaman verilmis,məlum və təyin olunmuş hesab edilir ki:

1)funksiyanın təyin oblastı, yəni x arqumentinin ala bildiyi qiymətlər çoxlugu göstərilsin ;

2) x-in hər bir qiymətinə y-in muəyyən bir qiymətini uyğun qoyma qanunu, yəni **x** vəy arasındakı uyğunluq qanunu göstərilsin;

3)Funksiya əsasən analtik üsulla, cədvəl şəklində, qrafiki üsulla və proqram vasitəsilə verilir.

Funksiyanın analitik üsulla verilməsi

Funksiya, arqumentin verilmiş qiyməti üzərində hansı əməlləri hansı ardıcıllıqla apararaq funksiyanın uyğun qiymətini almağı göstərən düstur ilə verildikdə deyir ki, funksiya analitik üsulla verilmisdir.

Funksiya y=f(x) düsturu ilə verildikdə bərəbərliyin sağ tərəfinə (f(x)-ə) funksiyanın analitik ifadəsi deyilir. Funksiya analitik üsulla verildikdə onun təyin oblastı bəzən göstərilmir. Bunu funksiyanın analitik ifadəsinə əsasən tapmaq mümkündür.

Verilmiş y=f(x) funksiyasının analitik ifadəsinin mənası olduğu və funksiyanın sonlu həqiqi qiymətlər aldığı nöqtələr çoxluğuna həmin funksiyanın varlıq oblastı deyilir.

Misal 1. Analitik üsulla verilmisy= x^2+lgx funksiyasının varlıq oblastını tapmalı.

Funksiyanın x^2+lgx analitik ifadəsinin birinci həddi olan x^2, arqumentin istənilən qiymətində sonlu həqiqi qiymətlər alır. İkinci həddi lg x isə arqumentin ancaq musbət qiymətlərində təyin olunmusdur. Deməli,verilmiş funksiyanın varlıq oblastı arqumentin müsbət qiymətlər çoxluğu, yəni(0,∞)intervalındadır.

Hər hansı çoxluqda təyin olunmuş funksiyanı onun analitik ifadəsi ilə qarişdirmaq olmaz. Funksiya təyin oblastının muxtəlif hissələrində müxtəlif analitik ifadələrlə verilə bilər.

$$\begin{cases} x^2, \ x \le 0 \quad \text{olduqda} \\ x + 5\,, x > 0 \ olduqda \end{cases}$$

funksiyası iki bərabərliklə bütün ədəd oxu üzərində təyin olunmuşdur.Lakin ədəd oxunun (yəni təyin oblastının) bir hissəsində onun analitik ifadəsi x^2 ($x \le 0$ olduqda), o biri hissəsində ($x>0$ olduqda) isə (x+5)-dir. Buradan aydındır ki, funksiya bir və ya bir neçə bərabərlik vasitəsilə verilə bilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, bütün funksiyalar heç də analitik üsulla verilmir. Müəyyən çoxluqda təyin olunmuş funksiyanın analitik ifadəsi məlum olmaya da bilər. Funksiyanın analitik üsulla verilməsi sadə, yığcam və üzərində riyazi əməllər aparmaq üçün munasib olsa da, funksiya belə verildikdə funksional asılılığın xarakteri, funksiya qiymətlərinin arqumentin qiymətlərindən asılı olaraq necə dəyişməsi əyani görünmür.

Funksiyanın cədvəl şəklində verilməsi

Funksiyanın analitik üsulla verilməsinin riyazi tədqiqatlarda böyük üstünlüyü vardır.Lakin bu üsulla verilmiş çox işlədilən bəzi funksiyaların qiymətlərini tapmaq üçün bəzən bir çox mürəkkəb hesablamalar aparmaq lazım gəlir. Praktiki iş zamanı bu üsulla funksiyaların qiymətini tapmaq əlverişli deyildir. Buna görə də çox islədilən bəzi y=f(x) funksiyalarının arqumentin müəyyən qiymətlərinə uyğun olan qiymətləri qabaqcadan hesablanıb, aşağıdakı şəklində göstərilir:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$y_3=f(x_3)$	...	$y_n=f(x_n)$

Arqumentin verilmiş qiymətinə (əlbəttə, arqumentin bu qiyməti cədvəldəki $x_1,$ x_2 …, x_n qiymətləri arasında varsa) funksiyanın hansı qiyməti uyğun olduğu cədvəldən asanlıqla tapılır. Bu halda deyirlər ki,funksiya cədvəl vasitəsilə verilmişdir.

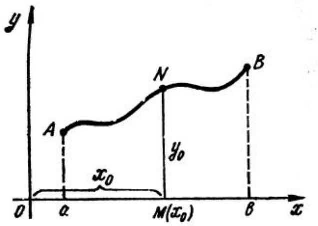
Cədvəldəki x_i (i=1,n) ədədlərindən düzəlmiş x_2-x_1, x_3-x_2 ,…fərqləri həmin cədvəlin addımları adlanır.Bu addımlar eyni,yəni x_{i+1}-x_i=h (i=1,2, …, n-1) olduqda ona sabit addımlı cədvəl deyilir. Bu halda arqument ancaq x_1, x_1+h, x_2+2h, … qiymətlərini ala bilir. Praktiki işlərdə belə cədvəllərdən istifadə etmək daha əlverişlidir. Bir sıra hadisələri təcrübi olaraq öyrənərkən,dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılıq bəzən cədvəl şəklində yaradılır. Triqonometrik və loqarifmik funksiyaların cədvəl vasitəsilə verilməsi orta məktəbdən məlumdur.

Funksiyanın qrafik üsulla verilməsi

Tutaq ki, müstəvi üzərində hər hansı AB əyrisi verilmişdir(şəkil 1). Fərz edək ki,absis oxuna perpendikulyar qaldırılmış düz xətlər bu əyrini ancaq bir nöqtədə kəsir. A nöqtəsinin absisi a, B nöqtəsinin absisi isə b olsun. x-in [a b] parçasındakı hər bir qiymətinə uyğun olan M nöqtəsindən absis oxuna perpendikulyar keçirək. Bu perpendikulyar AB əyrisini bir N nöqtəsində kəsər. MN parçasının qiyməti y_0 olsun. Bu y_0 ədədini arqumentin x_0 qiymətinə uyğun qoyar:

$$\mathbf{x_0 \rightarrow y_0}$$

Beləliklə, yuxarıdakı qurma vasitəsilə x-in $[a, b]$ parçasındakı hər bir qiymətinə bir y ədədi qarşı (uyğun) qoyulur. Deməli, verilmiş əyrinin ordinatı (y) absisi(x) funksiyasıdır və bu funksional asılılıq (y=y(x)) **AB** əyrisinin verilməsi ilə tamamilə təyin olunub. Bu halda deyirlər ki, y=y(x) funksiyası qrafik üsulla verilmişdir.



Şəkil 1.

Funksiyanın qrafiki üsulla verilməsinin bir cəhəti ondan ibarətdir ki,həmin funksiyanın dəyişmə xarakterini əyani olaraq görmək mümkün olur.Bundan başqa,bir sıra məsələlərin həllində dəyişən kəmiyyətlər arasındakı funksional asılılığı bəzən ancaq qrafiki olaraq almaq mümkün olur. Məsələn, baroqraf adlanan cihaz atmosfer tezyiqinin zamandan asılı olaraq dəyişməsini qrafiki olaraq cızır.Bu qrafik isə uçan təyyarənin yerdən olan yüksəlişini zamandan asılı olaraq təyin etməyə imkan verir.

Funksiyanın proqram vasitəsilə verilməsi

Bu üsulla arqumentin verilmiş qiymətinə funksiyanın uyğun qiymətini tapmaq üçün muasir hesablama maşınlarından istifadə olunur. Arqumentin verilmiş qiymətlərinə uyğun funksiya qiymətlərini tapmaq qanunu (məsələn, riyazi düstur) proqram şəklində yazılır və hesablama maşınına daxil edilir. Maşın göstərilən proqram əsasında funksiyanın qiymətlərini hesablayır.

Qeyd. Biz funksiyanın əsas verilmə üsullarını (analitik, cədvəl, qrafik, proqram) göstərdik. Funksiya bunlardan fərqli başqa üsulla da verilə bilər. Məsələn, funksiyanın verilmə qaydasını sözlərlə də təsvir etmək olar.

Misal 3. Dirixle funksiyası aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

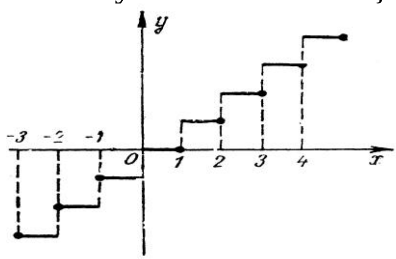
$$D(x)=\begin{cases} 1, x \text{ rasional ədəd olduqda} \\ 0, x \text{ irrasional ədəd olduqda} \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Bu funksiyanın verilmə qaydası sözlərlə təsvir olunmuşdur.

Misal 4. $[x]$ ilə x ədədini aşmayan ən böyük tam ədədi işarə etməklə

$$y=[x] \qquad \textbf{(2)}$$

funksiyasını təyin edə bilərik.Buna x-in tam hissəsi və ya antye x funksiyası deyilir.(2) funksiyasının təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər coxluğudur. $[2]$= 2, $[1{,}3]$=1, $[-0{,}5]$= -1 və s. Onun qrafiki 2-ci şəkildə göstərilən "Pilləvari" xətdir. Bu funksiya sözlərlə verilmişdir.



Şəkil 2.

Misallar.

1) $y=x^2-1$;   2) $y=x+\sin x$;

3) $y=2^x$; 4) $y=|x|$;

5) $y=\text{sign}x=\begin{cases} -1, x<0 \text{ olduqda} \\ 0, x=0 \text{ olduqda} \\ +1, x>0 \text{ olduqda} \end{cases}$

4.5. Qeyri – aşkar funksiya

Funksiya analitik üsulla verildikdə iki hal ola bilər: x (arqument) və y (funksiya) arasındakı asıllılığı ifadə edən riyazi düstur y-ə nəzərən həll olunmuş şəkildə, yəni y=f(x) şəklində verilə bilər.**Bu halda funksiya aşkar şəkildə verilmişdir deyilir.**

Misal 1. $y=2x+1$, $y=2x^3$, $y=x^3+3x+1$ və s. funksiyaları aşkar şəkildə verilmişdir.

Aşkar şəkildə verilmiş y=f(x) funksiyasına **aşkar funksiya** deyilir.

x və y arasındakı asıllılığı ifadə edən riyazi düstur y-ə nəzərən həll olunmamış şəkildə, yəni

$$\mathbf{f(x, y)=0} \qquad \mathbf{(1)}$$

şəklində verildikdə, deyirlər ki, y=y (x) və ya y= f (x)funk-
siyası qeyri-aşkar şəkildə verilmişdir. Bu halda təyin olunan y= y(x) funksiyasına **qeyri-aşkar funksiya** deyilir.

(1) tənliyi ilə verilmiş qeyri-aşkar funksiyanı bəzən y-ə nəzərən həll edərək, aşkar şəklə gətirmək mümkün olur.Bir çox hallarda isə (1) tənliyini y-ə nəzərən həll etmək çox çətin olur və ya mümkün olmur. Tərsinə, funksiya y= f(x) aşkar şəkildə verildikdə onu y-f (x)=0 şəklində yazmaqla qeyri-aşkar şəkildə verilmiş funksiya alarıq.

Misal 2. $3x-y+2=0$ tənliyi ilə y dəyişəni x-in qeyri-aşkar funksiyası kimi verilmişdir. Həmin tənliyi y-ə nəzərən həll edərək funksiyanı

$$\mathbf{y= 3x+2}$$

kimi aşkar şəklə gətirmək olur.

(1) şəklində verilmiş hər bir tənlik bir funksiyanı təyin edir demək səhvdir. Belə tənlik ola bilər ki, heç bir funksiyanı təyin etməsin və ya bir neçə funksiyanı təyin etsin.

Misal 3. $x^2+y^2+5=0$ tənliyi heç bir funksiya təyin etmir. x-in həqiqi qiymətlərində y-in bu tənliyi ödəyən heç bir həqiqi qiyməti yoxdur.

Misal 4. $x^2+y^2-5=0$ tənliyi $y=+\sqrt{5-x^2}$ və $y=-\sqrt{5-x^2}$ kimi iki funksiyanı təyin edir.

(1) tənliyi ilə verilmiş qeyri-aşkar $y=y(x)$ funksiyasının təyin oblastından götürülmüş x_0 nöqtəsində qiymətini hesablamaq üçün həmin tənlikdə x əvəzinə x_0 yazaraq, alınan

$$\mathbf{f\,(x_0, y)=0}$$

tənliyini y-ə nəzərən “ həll etmək lazımdır”.

Beləliklə, hər hansı çoxluqdan götürülmüş hər bir
x-ə qarşı y-in

$$\mathbf{f\,(x, y)= 0}$$

tənliyini ödəyən qiymətini uyğun qoysaq, (1) tənliyi ilə həmin çoxluqda təyin olunmuş qeyri-aşkar $y=y(x)$ funksiyasını almış olarıq.

V FƏSİL. MƏHDUD FUNKSİYA. MONOTON FUNKSİYA

5.1.Funksiyanın parametrik şəkildə verilməsi

Funksiyanın analitik üsulla verilməsinin bir yolunu da göstərək.

Tutaq ki, x(arqument) və y(funksiya) dəyişənləri başqa bir t dəyişəninin aşkar funksiyası şəklində verilmişdir:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,(t) \\ y &= \ t \end{aligned}\right\} \quad t \in T \qquad \textbf{(1)}$$

t-nin T çoxluğundakı hər bir t_0 qiymətinə (1) münasibəti vasitəsilə x və y-in $x_0 = \varphi\,(t_0)$ və $y_0 = \psi\,(t_0)$ qiymətləri uyğun qoyulur. Bu ədədlərin ikincisini birincisinə qarşı qoysaq

$$x_0 \to y_0 \qquad \textbf{(2)}$$

onda, ydəyişəni x-in funksiyası kimi təyin olunar. Aydındır ki, (1)münasibəti bir və ya bir neçə funksiyanı təyin edə bilər.

Funksiyanın belə üsulla verilməsinə onun parametrik şəkildə verilməsi, t-yə isə parametr deyilir.

Misal 1.

$$\left.\begin{aligned} x &= \ t - 2 \\ y &= 3t + 1 \end{aligned}\right\} [t \in (-\infty, \infty)] \qquad \textbf{(3)}$$

parametrik şəklində verilmiş funksiya $y=f_0(x)$ olsun. (3) münasibətinin təyin etdiyi yeganə funksiyanın aşkar ifadəsini almaq üçün həmin münasibətdən t-ni yox etmək lazımdır:

$$y=3x+7$$

Deməli, $f_0(x)=3x+7$.

Ümumiyyətlə, (1) bərabərliklərinin birincisindən t parametrini tapıb ikincisində yerinə yazsaq, onda funksiyanın y= f(x) şəklində ifadəsini alarıq.

Misal 2.

$$\begin{cases} \mathbf{x=\cos t+1 (0\le t\le 2\pi)} \\ \mathbf{y=\sin t+3} \end{cases} \qquad \mathbf{(4)}$$

münasibəti iki funksiya təyin edir.

Doğrudan da, (4) münasibətindən t-ni yox etsək

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 -1 =0$$

bərabərliyini alarıq. Axırıncı bərabərlik isə

$$y= 3+\sqrt{1-(x-1)^2}$$

və

$$y= 3-\sqrt{1-(x-1)^2}$$

kimi iki funksiyanı təyin edir.

Qeyd etmək lazımdır ki, verilmiş hər bir y=f(x) funksiyasını parametrik şəkildə göstərmək olar. Bu məqsədlə x arqumentini parametrik hesab etmək kifayətdir.

5.2.Məhdud və qeyri-məhdud funksiya. Çoxdəyişənli funksiya. Artan və azalan funksiyalar

Tərif. Tutaq ki, y=f(x) funksiyası X ($X \subset D(f)$) çoxluğunda verilmişdir. x-in X çoxluğundan götürülmüş bütün qiymətlərində

$$|f(x)| \le M \qquad \mathbf{(1)}$$

bərabərsizliyini ödəyən sabit və müsbət M ədədi varsa,

onda f(x) funksiyasına X çoxluğunda məhdud funksiya deyilir.

f funksiyası $]-\infty;+\infty[$ intervalında məhdud olduqda bu funksiyaya məhdud funksiya deyilir.

x-in X çoxluğundan götürülmüş bütün qiymətləri üçün **(1)** bərabərsizliyini ödəyən M ədədi tapmaq mümkün olmazsa, ondaf funksiyasına X çoxluğunda qeyri-məhdud funksiya deyilir. Başqa sözlə, M ədədi necə seçilərsə seçilsin X çoxluğundan elə bir x_1ədədi tapılsa ki, f $(x_1)>M$ bərabərsizliyi ödənilir, onda f funksiyasına X çoxluğunda qeyri-məhdud funksiya deyilir.

Məhdud funksiyasının qiymətləri çoxluğu (dəyişmə oblastı) sonsuz interval ola bilməz.

Qeyri-məhdud funksiyanın qiymətlər çoxluğu isə sonlu interval və ya parça ola bilməz.

Misallar. Aşağıdakı funksiyaların qiymətlər çoxluğunun sonsuz interval omadığını göstərək.

1.f (x) = $\dfrac{x}{1+x^2}$, f(x) məhdud funksiyadır.

burada $|x| < \dfrac{x^2+1}{2}$ olduğu üçün

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| = \frac{|x|}{1+x^2} < \frac{1}{2}, E(f) = \left]-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right[$$

2. f(x)=$\sqrt{4-x^2}$, f(x) məhdud funksiyadır. Burada

$\left|\sqrt{4-x^2}\right| = \sqrt{4-x^2} \le 2$,D(f) = [-2 ; 2] , E (f) = [0 ; 2]

3. f(x)=2^x, D(f)=R qeyri-məhdud funksiyasının qiymətlər çoxluğunun sonlu interval olmadığı aşkarlanır.

Yəni , E(f) = $]0;+\infty[$.

Çoxdəyişənli funksiya

Baxdığımız funksiyalarda bir sərbəst dəyişən iştirak edir. Elə asılılıqlar var ki, orada bir yox, bir neçə sərbəst dəyişən iştirak edir:

Məsələn:

1. Üçbucağın sahəsi:

$S=\frac{1}{2}a\cdot h$, (S-üçbucağın sahəsi a-oturacaq, h-hündürlük) iki sərbəst dəyişəndən asılı olaraq dəyişir.

2. Konusun həcmi:

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ (V - konusun həcmi, R – oturacağının radiusu, H -hündürlüyüdür) iki sərbəst dəyişəndən asılı olaraq dəyişir.

Tərif: x və y dəyişənlərinin D çoxluğundan olan hər hansı bir cüt (x,y) qiymətinə qarşı z dəyişəninin E çoxluğundan müəyyən bir qiymətini qarşı qoyma qanunu verilərsə, onda D çoxluğunda ikidəyişənli funksiya verilmişdir deyilir və z=f(x,y)şəklində işarə olunur.

D çoxluğu funksiyanın təyin oblastı, E çoxluğu isə qiymətlər çoxluğu adlanır.

Artan və azalan funksiyalar

Funksiyaların öyrənilməsində funksiyanın artan və azalan olması xassəsi mühüm rol oynayır.

Artan və azalan funksiyaların tərifi

(törəmənin tətbiqi olmadan)

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası X çoxluğunda təyin olunmuşdur.

Tərif 1. x artqumentinin X çoxluğundan götürülmüş ixtiyari iki x_1 və x_2 qiymətləri arasında $x_1 < x_2$bərabərsizliyi ödənildikdə y=f(x) funksiyasının uyğun qiymətləri arasında $f(x_1) < f(x_2)$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f funksiyasına X çoxluğunda artan (və ya ciddi artan) funksiya deyilir.

Tərif 2. x arqumentinin X çoxluğundan götürülmüş ixtiyari iki x_1 və $x_2$qiymətləri arasında $x_1 < x_2$bərabərsizliyi ödənildikdə y=f(x) funksiyasının uyğun qiymətləri arasında$f(x_1) \leq f(x_2)$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f funksiyasına X çoxluğunda azalmayan funksiya deyilir.

Artan funksiya həm də azalmayan funksiyadır. Azalmayan funksiya artan olmaya da bilər.

Tərif 3. x arqumentinin X çoxluğundan götürülmüş ixtiyari iki x_1 və x_2 qiymətləri arasında $x_1 < x_2$ bərabərsizliyi ödənildikdə y=f(x) funksiyasının uyğun qiymətləri arasında $f(x_1) > f(x_2)$ bərabərsizliyi ödənilərsə, ffunksiyasına X çoxluğunda azalan (və ya ciddi azalan) funksiya deyilir.

Tərif 4. x arqumentinin X çoxluğundan götü-rülmüş ixtiyari iki x_1və $x_2$qiymətləri arasında $x_1 < x_2$ bərabərsizliyi ödənildikdə y=f(x) funksiyasının uyğun qiymətləri arasında $f(x_1) \geq f(x_2)$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f funksiyasına X çoxluğunda artmayan funksiya deyilir.

5.3.Monoton funksiyalar.Cüt və tək funksiyalar.Dövrü funksiya

Tərif. Verilmiş çoxluqda artan, azalmayan, azalan və artmayan funksiyalara monoton funksiyalar deyilir.

Elə funksiyalar vardır ki, bütün təyin oblastında monoton deyil. Belə ki, bunlar təyin oblastının bir hissəsində monoton artan, o biri hissəsində monoton azalan olur. Belə funksiyalara hissə-hissə monoton funksiyalar deyilir.

Bütün təyin oblastında nə artan və nə də azalan olmayan funksiyalar da vardır ki, bunlar da monoton funksiyalar deyil.

Hissə-hissə monoton funksiya

Tərif. Funksiya təyin olduğu oblastda monoton deyilsə, lakin bu oblastı elə hissələrə ayırmaq olsa ki, hissələrin hər birsində funksiya monoton olur, onda belə funksiyaya hissə-hissə monoton funksiya deyilir.

$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=x^2$funksiyaları hissə-hissə monoton funksiyalardır.

Cüt və tək funksiyalar.

Cüt və tək funksiya anlayışı riyaziyyatın bir sıra sahələrində tətbiq olunur. Xüsusilə funksiyaların araşdırılmasında cüt və tək funksiyaların xassələrindən geniş istifadə olunur.

Cüt və tək funksiyaların tərifi

Tərif 1. $y=f(x)$ funksiyasının təyin oblastından olan istənilən x ədədi ilə birlikdə "-x" ədədi də həmin oblasta daxil olarsa və

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda f funksiyasına cüt funksiya deyilir.

Tərif 2. $y=f(x)$ funksiyasının təyin oblastından olan istənilən x ədədi ilə birlikdə "-x" ədədi də həmin oblasta daxil olarsa və$f(-x)= -f(x)$ bərabərliyi ödənilərsə, onda f funksiyasına tək funksiya deyilir.

Funksiyanın cüt və ya tək olması əlaməti

Teorem 1. y=f(x) funksiyasının təyin oblastından olan bütün x ədədləri üçün $|f(-x)|=|f(x)|$ bərabərliyi ödənilərsə, ondaffunksiyası ya cüt, ya da tək funksi-yadır, x - in heç olmazsa bir qiymətində $|f(-x)|\neq|f(x)|$ olduqda isə f funksiyası nə cüt və nə də tək funksiya deyil.

Teorem 2. f(x)=0 funksiyası eyni zamanda həm cüt, həm də tək olan yeganə funksiyadır.

Cüt və tək funksiyaların qrafiki

Teorem 3. Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

Teorem 4.Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Bu teoremlərin tərsi də doğrudur.

Teorem 5. Qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrik olan funksiya cüt funksiyadır.

Teorem 6. Qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan funksiya tək funksiyadır.

Cüt və tək funksiyalar üzərində əməllər

Cüt və tək funksiyaların cəmi, fərqi, hasili və nisbətinin nə zaman cüt və ya tək olması barədə aşağıdakı teoremlər vardır.

Teorem 7. Təyin oblastları eyni olan iki cüt funksiyanın cəmi, fərqi, hasili və nisbəti cüt funksiyadır.

Teorem 8. Təyin oblastları eyni olan iki tək funksiyanın cəmi və fərqi tək, hasili və nisbəti isə cüt funksiyadır.

Təyin oblastları eyni olan cüt sayda təkfunksiyaların hasili cüt, tək sayda tək funksiyaların hasili tək funksiyadır.

Teorem 9. Təyin oblastları eyni olan cüt funksiya ilə tək funksiyanın hasili və nisbəti tək funksiyadır.

Təyin oblastları eyni olan cüt funksiya ilə funksiyanın nisbəti tək funksiya olur. Lakin bu tək funksiyanın təyin oblastı əvvəlki funksiyaların təyin oblastı ilə eyni olmaya da bilir.

Dövrü funksiya

Period yunan sözü olub, peridos-dövretmə sözündən götürülmüşdür.

Riyaziyyatda sonsuz təkrarlanan proseslərin qanunauyğunluqları öyrənilir. Bunun üçün periodik funksiya anlayışından istifadə edilir. Bu anlayışdan riyaziyyatın bir çox sahələrində funksiyaların araşdırılmasında; qrafiklərin qurulmasında; sıralar nəzəriyyəsinə və s. geniş istifadə olunur.

Periodik funksiya

Tərif. y=f(x) funksiyası üçün elə $T\,(T \neq 0)$ ədədi varsa ki, bu funksiyasının təyin oblastından olan istənilən x ədədi ilə birlikdə $|x-T|$ və $|x+T|$ ədədləri də həmin oblasta daxil olur və

$$f(x+T)=f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərliyi ödənilir, onda f funksiyasına periodik funksiya, T ədədinə isə onun periodu deyilir.

Bu tərifə əlaqədar olaraq aşağıdakı teoremlər vardır:

Teorem 1. $T\,(T \neq 0)$ ədədi f funksiyasının periodudursa $|-T|$ ədədi də bu funksiyanın periodudur.

Periodik funksiyanın təyin oblastı

Teorem 2. y=f(x) periodik funksiyadırsa, onda onun təyin oblastı sıfır ədədinə nəzərən simmetrik və qeyri-məhdud çoxluqdur.

Təyin oblastı müsbət ədədlər və ya mənfi ədədlər çoxluğu olan funksiya periodik funksiya deyil.

Təyin oblastı sonlu aralığa daxil olan funksiya periodik funksiya deyil.

Periodik funksiyanın qiymətlər çoxluğu

Teorem 3. Periodik funksiya özünün hər bir qiymətini arqumentin sonsuz sayda qiymətlərində alır.

Qiymətlər çoxluğundan olan bir qiyməti arqumentin sonlu sayda qiymətlərində alan funksiya periodik funksiya deyil.

Periodik funksiyanın sonlu sayda ekstremum nöqtəsi ola bilməz.

Funksiyanın ən kiçik müsbət periodu

Tərif.y=f(x) periodik funksiyasının periodları içərisində ən kiçik müsbət ədəd varsa, bu ədədə funksiyanın ən kiçik müsbət periodu deyilir.

Misallar.

1.f(x)=sinx funksiyasının ən kiçik müsbət periodu 2π-dir.

2.f(x)=tgx funksiyasının ən kiçik müsbət periodu π-dir.

3.f(x)=$\{x\}$ funksiyasının ən kiçik müsbət periodu 1 ədədidir.

Qeyd edək ki, periodik funksiyanın ən kiçik müsbət periodu olmaya da bilir. Məsələn,sabit funksiya periodik funksiyadır və bütün həqiqi ədədlər bunun periodudur. Dirixle funksiyası periodik funksiyadır və bütün rasional ədədlər bunun periodudur. Aydındır ki, bunların periodları içərisində ən kiçik müsbət ədəd yoxdur.

Funksiyaların ən kiçik müsbət periodunun varlığı üçün kafi şərtə aid aşağıdakı teorem vardır.

Teorem 4. Sabit funksiyadan başqa, bütün kəsilməyən periodik funksiyaların ən kiçik müsbət periodu vardır.

Arqumentin miqyası dəyişdikdə periodik funksiyanın ən kiçik müsbət periodunun dəyişməsi.

Teorem 5. $y=f(x)$ funksiyası ən kiçik müsbət periodu T olan periodik funksiyadırsa, $y=f(ax+b),(a>0)$ funksiyası ən kiçik müsbət periodu $\frac{T}{a}$ olan periodik funksiyadır.

Misallar.

1. $f(x)=\sin \pi x$ funksiyası, ən kiçik müsbət periodu $T_1=\frac{2\pi}{\pi}=2$ olan periodik funksiyadır.

2. $f(x)=\cos^2(3x+5)$ funksiyasının ən kiçik müsbət periodunu tapmalı.

$y=\cos^2 x$ funksiyası ən kiçik müsbət periodu π olan periodik funksiya olduğu məlumdur. Odur ki, verilən funksiya ən kiçik müsbət periodu $T_1=\frac{\pi}{3}$ olan periodik funksiyadır.

Ən kiçik müsbət periodun təyini üçün bəzi xüsusi üsullar.

Periodik funksiyaların ən kiçik müsbət periodunu tapmaq üçün müəyyən üsullar yoxdur. Bunu ancaq misalların xarakterinə görə xüsusi üsullarla təyin etmək olur. Bunlardan bəzilərini göstərək.

a) T-yə nəzərən tənliyi həll etməklə.

Ən kiçik müsbət periodu tapmaq üçün verilən funksiyanın

$$f(x+T)=f(x)$$

bərabərliyini ödəməsini qəbul edib, x-ə funksiyanın təyin oblastından olan bir qiymət verib həmin bərabərliyi T-yə nəzərən tənlik kimi həll etməli, T üçün tapılan qiymətlərdən ən kiçik müsbət ədəd olanını seçməli. Tapılan bu qiymət verilən funksiyanın ən kiçik müsbət periodu olacaq.

Misal. $f(x)=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}$ funksiyasının ən kiçik müsbət periodunu tapmalı.

$$\cos\frac{3}{2}(x+T)+\sin\frac{1}{2}(x+T)=\cos\frac{3}{2}x+\sin\frac{x}{2}$$

bərabərliyində x=0 yazsaq,

$$\cos\frac{3}{2}T-\sin\frac{1}{2}T=1$$

tənliyi alınır. Buradan $T=12\pi$ ədədi funksiyanın ən kiçik müsbət periodu olduğu məlum olur.

b) Eyni çevirmələr aparmaqla.

Ən kiçik müsbət periodu tapmaq üçün verilən funksiya üzərində eyni çevirmələr aparıb, bunu ən kiçik müsbət periodu məlum olan funksiyaya gətirməli.

Misal. $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$ funksiyası verilmişdir. Eyni çevirmələr aparsaq

$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$$

bərabərliyi alınır. Sağ tərəfdəki funksiyanın ən kiçik müsbət periodu T= $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ olduğu üçün, verilən funksiyanın ən kiçik müsbət periodu $\frac{\pi}{2}$ ədədi olur.

v) Verilən funksiyanın xarakterinə görə ən kiçik müsbət periodun təyini.

Misal. $f(x)=\cos^2 x$ funksiyası verilmişdir.

İstənilən x üçün

$$\cos^2(x+\pi)=(-\cos x)^2=\cos^2 x$$

bərabərliyinin doğru olması göstərir ki, funksiya periodik funksiyadır və π ədədi bunun periodudur.$\cos^2(0+\pi)=\cos^2 0=1$bərabərliyi və $x\in[0, \pi]$ qiymət-lərində $\cos^2 x<1$ bərabərsizliyinin ödənilməsi göstərir ki, π ədədi verilən funksiyanın ən kiçik müsbət periodudur.

Funksiyanın ən kiçik müsbət perioduna görə bütün periodlarının təyini.

Teorem 6. y=f(x) funksiyası ən kiçik müsbət periodu T olan periodik funksiyadırsa, onda $nT(n\in Z, n\neq 0)$ ədədləri bu funksiyanın periodlarıdır və bunlardan başqa periodu yoxdur.

Antiperiodik funksiya

Tərif. T periodlu y=f (x) periodik funksiyası $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=-f(x)$ şərtini ödəyərsə, bu funksiyayaanti-periodik funksiya deyilir.

Misal. f(x)=cosx funksiyası 2π periodlu periodik funksiyadır.Burada $\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=$ cos(x+π)=-cosx şərti ödə-nildiyi üçün, bu funksiya antiperiodik funksiyadır.

Teorem7.y=f(x) funksiyası T periodlu funksiyadır-sa, bu funksiyanı antiperiodik funksiya ilə $\frac{T}{2}$ periodlu funksiyanın cəmi şəklində göstərmək olur.

5.4.1.Mürəkkəb funksiya

Tutaq ki, x=φ (t) funksiyası T çoxluğunda təyin olunmuşdur və onun qiymətləri çoxluğu y=f(x) funksi-yasının X təyin oblastına daxildir. Bu halda,t-nin T çoxluğundakı hər bir qiymətinəy-in müəyyən bir qiy-məti uyğun olur, yəni y dəyişəni (x vasitəsilə) t-nin funksiyasıdır:

$$y=f\left[\varphi(t)\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Bu halda alınan $f\left[\varphi(t)\right]$ funksiyasına mürəkkəb funksiya vəya funksiyanın funksiyası deyilir.

Misal 1. $x=t^3$ vəy$=2^x$ olduqda $y=2^{t^3}$ funksiyasıt-nin mürəkkəb funksiyasıdır.

y dəyişəni x vasitəsilət-nin mürəkkəb funksiyası olduqda x-ə ara dəyişəni və ya ara arqumenti deyilir.

x=φ (t) vəy=f(x) funksiyalarından düzəldilmiş (1) mürəkkəb funksiyasına bəzən həmin x=φ (t) (daxili) vəy=f(x) (xarici) funksiyalarının superpozisiyası da de-yilir.

Qeyd etmək lazımdır ki, mürəkkəb funksiyanın ara arqumentinin sayı bir deyil, iki vəçox ola bilər. Məsələn,

$$y=f(u),\ u=\psi(x),\ \ x=\varphi\ (t)$$

olduqda

$$y=f\{\psi[\varphi(t)]\}$$

mürəkkəb funksiyasının iki ara arqumenti (x və u) vardır.

Misal 2. y=sin x və$x=t^4$ olduqda bir ara arqumenti olan

$$y=\sin t^4$$

mürəkkəb funksiyası alınır.

Misal 3. y= sin u, u=lgx və$x=t^4$ olduqda

$$y = \sin \lg t^4$$

mürəkkəb funksiyasının iki ara arqumenti (u və x) vardır.

5.4.2.Tərs funksiya

Təbiətdə müxtəlif qarşılıqlı tərs olan münasibətlər vardır. Riyaziyyatda belə qarşılıqlı tərs münasibətlər düz və tərs funksiya anlayışı ilə öyrənilir.

Tərs funksiya anlayışının geniş tətbiq sahələri vardır.Məsələn,kəsilməyən funksiyaların öyrənilməsi,qrafiklərin qurulması,sahələrin hesablanması və s.

Tərs funksiyanın tərifi

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyasının təyin oblastı X çoxluğu, qiymətlər çoxluğu isə Y çoxluğudur. Funksiyanın tərifinə görə x arqumentinin X çoxluğundan olan hər bir x_0 qiymətinə qarşı y funksiyasının Y çoxluğundan yeganəbir $y_0$qiyməti uyğun olur. Lakin tərifdən belə çıxmır ki, tərsinə baxsaq Y çoxluğundan olan ixtiyari y_0 ədədi üçün X çoxluğundan x arqumentinin

$$y_0 = f(x_0) \quad \textbf{(1)}$$

bərabərliyini ödəyən ancaq bir x_0 qiyməti vardır.

Ola bilər ki, y-in bir qiymətinə qarşı x-in (1) bərabərliyini ödəyən bir neçə və hətta sonsuz sayda qiyməti olsun.

Tərs funksiya anlayışı yalnız birqiymətli funksiyalara aiddir.

Tərif. X çoxluğunda təyin olunmuş y= f(x) funksiyasının, Y qiymətləri çoxluğundan olan hər bir y_0 ədədinə x arqumentinin $f(x)=y_0$ bərabərliyini ödəyən ancaq bir x_0 ($x_0 \in X$) qiyməti uyğun olarsa, bu uyğunluqla təyin olunan $x=\varphi(y)$ funksiyasına y= f(x)funk-siyasının tərs funksiyası deyilir.

Bu tərifdən aşağıdakı mülahizələr alınır.

1. y= f(x) funksiyası verildikdə, onun tərsi olan $x=\varphi(y)$ funksiyası y-f(x)=0 tənliyini x-ə nəzərən həll etməklə alınır.

2. Düz funksiyasının təyin oblastı tərs funksiyanın dəyişmə oblastı, dəyişmə oblastı isə tərs funksiyasının təyin oblastı olur.

Yəni: $D(f)=E(\varphi)$ və $D(\varphi)=E(f)$.

3.y= f(x) funksiyasını da $x=\varphi(y)$ funksiyasının tərs funksiyası hesab etmək olar. Elə buna görə də $y=f(x)$ və $x=\varphi(y)$ funksiyalarına qarşılıqlı tərs funksiyalar da deyilir.

f funksiyasının tərs funksiyası f^{-1} və ya f_{-1} şəkillərdə işarə edilir. Hesab və cəbrdə α və $\frac{1}{\alpha}$ kəmiyyətlərinə qarşılıqlı tərs kəmiyyətlər deyilir. Bu işarələməni nəzərə alsaq $\frac{1}{f}$ funksiyasına f funksiyasının cəbri mənada tərs funksiyası deyilir və bu $(f)^{-1}$ kimi yazılır.

4.y=f(x) funksiyasının təyin oblastından olan x-lər üçün $\varphi[\ f(x)\ ]$=x bərabərliyi, x=φ(y) funksiyasının təyin oblastından olan y-lər üçün isə $f[\varphi(y)]$=y bəra-bərliyi doğrudur.

5.Funksiya artan (azalan) olduqda, onun tərsi də artan (azalan) funksiya olur.

Tərs funksiyanın qrafiki

Verilmiş y= f(x) funksiyası ilə onun x=$\varphi(y)$ tərs funksiyası xarakter etibarı ilə müxtəlif asılılıqları ifadə etmələrinə baxmayaraq, bunların qrafikləri eyni bir xəttdir. Belə ki,y=f(x) funksiyasının arqumenti absis oxu üzərində, x=$\varphi(y)$ funksiyasının arqumenti isə ordinat oxu üzərində götürülür. Bir qayda olaraq arqument x və funksiya y ilə işarə olunduğu üçün y= f(x) funksiyasının tərsi y=$\varphi(x)$ şəklində yazılır. Onda tərs funksiyanın da arqumenti absis oxu üzərinə düşür.

Teorem 1. y= f(x) və y=$\varphi(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalar olduqda, bunların qrafikləri y=x düz xəttinə nəzərən simmetrik olur.

Qarşılıqlı tərs funksiyalardan birinin qrafiki məlum olarsa, o birisinin qrafikini qurmaq üçün məlum qrafiki y=x düz xəttinə nəzərən simmetrik olaraq köçürmək lazımdır.

Misal.y= e^x funksiyasını tərsi y=lnx funksiyasıdır.

5.4.3.Tərs funksiyanın varlığı üçün vacib şərtlər

Fərz edək ki, y=f(x) funksiyasının təyin oblastı X çoxluğu dəyişmə oblastı isə Y çoxluğudur. Tərs funksiyanın varlığı üçün aşağıdakı teoremlər vardır.

Teorem 1. X oblastında təyin olunmuş y=f(x) funksiyası həmin oblastda artan (və ya azalan) olduqda, bu funksiyanın tərs funksiyası vardır.

Verilən funksiyanın tərs funksiyasını yazmaq üçün onun artan və azalanolduğu aralıqlara baxmaq lazımdır.

Funksiya azalmayan və ya atrmayan olduqda funksiyanın sabitlik aralığı varsa, onda bu funksiyanın tərs funksiyası yoxdur.

Teorem 2. X oblastında təyin olunmuş y= f(x) funksiyası oblastın daxilində diferensiallanan və törəməsi müsbət (və ya mənfi) olduqda, bu funksiyanıntərs funksiyası vardır.

5.5.Düz funksiya ilə tərs funksiya arasında əlaqə

Tutaq ki, hər hansı

$$\mathbf{y=f(x)} \qquad \mathbf{(1)}$$

funksiyası verilmişdir. Fərz edək ki, **(1)** münasibətindən x- in y vasitəsi ilə ifadə etmək, yəni

$$\mathbf{x=\varphi(y)} \qquad \mathbf{(2)}$$

kimi yazmaq mümkündür. Onda φ (y) funksiyasına f(x) funksiyasının tərs funksiyası deyilir. Bu halda y=f(x)-ə düz funksiya deyirlər.

Misallar.

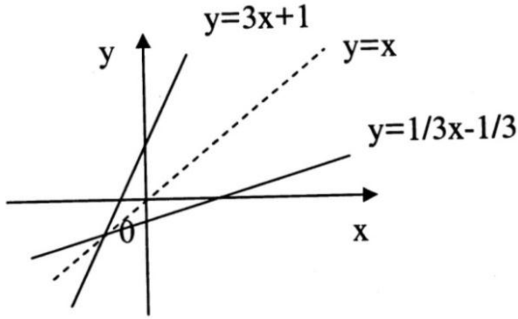
y=3x+1 xətti funksiyasının tərsi $x = \frac{y-1}{3}$ (yaxud $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$) xətti funksiyası olar.

$y=4x^2$funksiyası üçün $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{y}$ kimi iki funksiya alarıq. Bu funksiyalardan hər birinin $y = 4x^2$ funksiyasının $x \geq 0$ olduqda $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$, x<0 olduqda $x = -\frac{1}{2}\sqrt{y}$ tərs funksiyası hesab etmək olar.Burada tərs funksiyanın birqiymətliyini təmin etmək üçün verilmiş funksiyada arqument üzərinə əlavə şərt qoymaq lazımdır.

Yuxarıda deyilənlərdən aydındır ki, x=φ(y) funksiyası y=f(x)–funksiyasının tərs funksiyasıdırsa, onda y=f(x) də x=φ(y) funksiyasının tərs funksiyası olar. Yəni y=f(x) və x=φ(y) qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

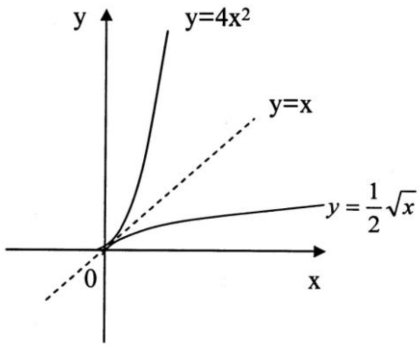
Düz və tərs funksiyaların qrafikləri y=x düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər.

y=3x+1(düz funksiya) və $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$(tərs funksiya) funksiyalarının qrafikləri 5-ci şəkildə verilmişdir.



Şəkil 5.

y=4x² (düz funksiya, $x \geq 0$) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (tərs funksiya, $y \geq 0$) funksiyalarının qrafikləri isə 6-cı şəkildə verilmişdir.



Şəkil 6.

Ümumiyyətlə, əgər arqumentin müxtəlif qiymətlərinə funksiyanın da müxtəlif qiymətləri uyğundursa (məsələn, funksiya artırsa və ya azalırsa), onda onun tərs funksiyası var və birqiymətlidir.

VI FƏSİL. XƏTTİ FUNKSİYA. ELEMENTAR FUNKSİYA

6.1.1.Xətti funksiya.Xətti funksiyanın tərifi və qrafiki

Tərif. y=кx+b (1) şəklində verilmiş funksiyaya xətti funksiya deyilir. Burada k və b sabit kəmiyyətlərdir. Xətti funksiyanın təyin oblastı $(-\infty,+\infty)$ intervalıdır.

Teorem. Koordinatları y=кx+b tənliyini ödəyən bütün nöqtələr bir düz xətt üzərində yerləşir (yəni, y=кx+b funksiyasının qrafiki düz xətdir).

Düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə (k=tgφ) düz xəttin bucaq əmsalı, ordinat oxundan ayırdığı b parçasına onun başlanğıc ordinatı deyilir. (1) tənliyi ilə yanaşı

$$y=кx+c(c\neq b) \qquad \textbf{(2)}$$

tənliyinə baxaq. **(1)** və **(2)** tənliklərinin ifadə etdiyi düz xətlərin hər ikisinin bucaq əmsalı, yəni absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqlar eynidir. Deməli, bu düz xətlər paralleldir. Tərsinə, verilmiş iki düz xətt paraleldirsə onda onların bucaq əmsalları bərabər olur. Tənliyi verilən düz xətti qurmaq üçün :

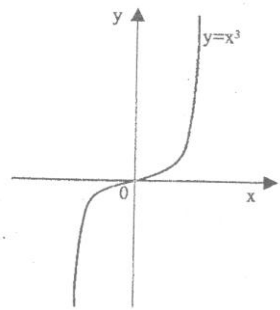
1) düz xəttin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri (x=0) qiymətində y, y=0 qiymətində x) tapılır,

2) yaxud da düz xəttin ixtiyari iki nöqtəsi (x-in ixtiyari iki qiymətinə y-in uyğun qiymətləri) tapılır. Hər iki halda həmin nöqtələrindən keçən düz xətt axtarılan düz xətdir.

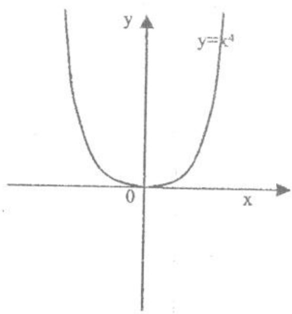
Tərif. x vəykimi dəyişən iki kəmiyyət bir-biri ilə y=кx (b=0) münasibəti ilə bağlı olduqda deyirlər ki, həmin kəmiyyətlər arasında düz mütənasib asılılıq vardır.

6.1.2.Qüvvət funksiyası.Qüvvət funksiyasının tərifi və qrafiki

Tərif. $y=x^{\alpha}$şəklində funksiyaya qüvvət funk-siyası deyilir (α-həqiqi ədəddir).Bundan əvvəlki paraq-raflarda qüvvət funksiyasının α =1 (düz xətt), α =2 (parabola), α = -1 (hiperbola) olan halları nəzərdən keçirilmişdir. α=3 olduqda alınan $y=x^3$ funksiyasının qrafikinə üç dərəcəli parabola, α=4 olduqda isə ($y=x^4$) dörddərəcəli parabola deyilir. Bu funksiyaların qrafiki 1 və 2-ci şəkillərdə verilmişdir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

6.1.3. Üstlü funksiya, onun xassələri və qrafiki. Üstlü funksiyanın tərifi

Tərif. a vahiddən fərqli müsbət sabit ədəd olduqda $y = a^x$ şəklində funksiyaya üstlü funksiya deyilir.

$y = 2^x, y = 3^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ üstlü funksiyaya aid sadə misallardır. Burada uyğun olaraq $a = 2$, $a = 3$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$ götürülmüşdür. $a = 1$ olduqda $y = 1^x = 1$ alınır ki, bunu da xətti funksiyanı öyrənərkən nəzərdən keçirmişik. a<0 olduqda a^x ifadəsi həqiqi ədədlər çoxluğunda ümumiyyətlə, mənasız olur. Buna görə də, tərifdə $a \neq 1$və a>0 şərtləri xüsusi qeyd edilmişdir.

Üstlü funksiyanın xassələri

Üstlü funksiyanın aşağıdakı xassələri var:

1.Üstlü funksiya bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur.

2.$y=a^x$ funksiyası həmişə müsbətdir.

3.x=0 olduqda $y=a^0=1$ olur, yəni funksiyanın qrafiki ordinat oxunu (0,1) nöqtəsində kəsir.

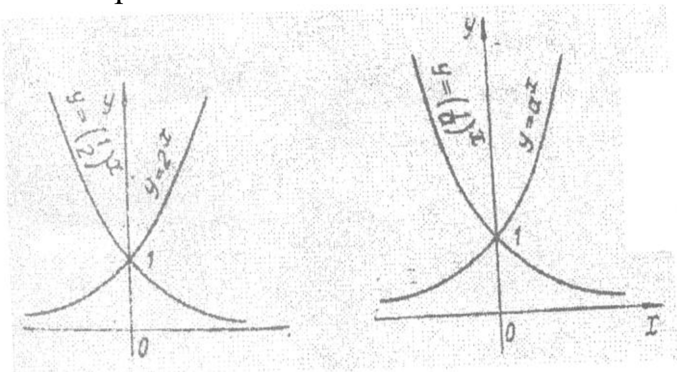
4.a>1 olarsa x-in müsbət qiymətlərində $a^x>1$, mənfi qiymətlərində isə $0 <a^x<1$ olar.

5.Əsas (a) vahiddən böyük olduqda, üstlü funksiya artandır.

6.Əsas (a) 0<a<1 olarsa, x>0 olduqda $a^x<1$ və x<0 olduqda $a^x>1$ olar.Bu halda funksiya azalandır.

7.a<b olarsa, x>0 olduqda $a^x<b^x$,x<0 olduqda $a^x>b^x$, x=0 olduqda isə $a^x=b^x$ olar.

$y=2^x$ və $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiyalarının qiymətlər cədvəlini tərtib edib, qrafikini qursaq, 3-cü şəkildə göstərilən əyriləri alırıq.



Şəkil 3.

Loqarifmik funksiya və onun xassələri.Loqarifmik funksiyanın tərifi

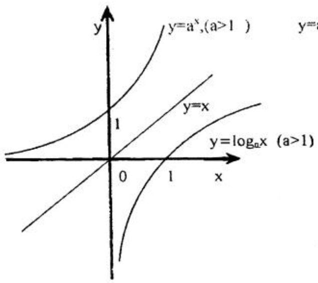
6.1.4.Loqarifmik funksiya

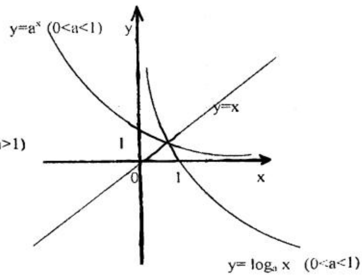
Tərif. $y=\log_a x$ şəklində olan funksiyaya loqarifmik funksiya deyilir ($a>0$, $a \neq 1$).

$a \neq 1$ müsbət ədəd olduqda $y=a^x$ üstlü funksiyasının tərs funksiyası $y=\log_\alpha x$ ($x=\log_\alpha y$funksiyasında x ilə y-in yerini dəyişməklə alınır) olar.

$y=\log_\alpha x$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün

$y=\alpha^x$ üstlü funksiyasının qrafikini 1-ci və 3-cü rüblərin tənböləninə görə simmetrik çevirmək lazımdır.





Şəkil 4. **Şəkil 5.**

Loqarifmik funksiyanın xassələri

Loqarifmik funksiyasının qrafikinə əsasən aşağıdakı xassələri söyləmək olar:

1.Loqarifmik funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət ədədlər çoxluğudur, yəni $(0;\infty)$ intervalıdır. Deməli, funksiyanın qrafiki ordinat oxunun sol tərəfindədir.

2.a>1 olduqda x>1 olarsa y= $\log_{\alpha}$ x>0,

x<1 olarsay= $\log_{\alpha}$ x<0 olar.

3. a>1 olduqda loqarifmik funksiya artandr.

4.0<a<1 olduqda x<1 olarsa loqarifmik funksiya müsbət, x>1 olarsa mənfi qiymətlər alır.

5.0<a<1 olduqda loqarifmik funksiya azalandır.

6.a>1 olduqda loqarifmik funksiyanın qrafiki qabarıq, 0<a<1 olduqda isə çökükdür.

6.2.1.Triqonometrik funksiyalar

Triqonometrik funksiyaların tərifi

Tərif 1. Absis oxu ilə α bucağı əmələ gətirən radiusvektorun ordinatının həmin vektorun uzunluğuna nisbətinə α bucağının sinusu deyilir və

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} \qquad \textbf{(1)}$$

kimi yazılır.

Tərif 2. Absis oxu iləα bucağı əmələ gətirən radius vektorun absisinin həmin vektorun uzunluğuna nisbətinə α bucağının cosinusu deyilir və

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \qquad \textbf{(2)}$$

kimi yazılır.

Tərif 3. Absis oxu iləα bucağı əmələ gətirən radius vektorun ordinatının absisinə olan nisbətinə, həmin bucağın tangensi deyilir və

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(3)}$$

kimi yazılır.

Tərif 4. Absis oxu iləα bucağı əmələ gətirən radius vektorun absisinin ordinatına olan nisbətinə, həmin bucağın kotangensi deyilir və

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} \qquad \textbf{(4)}$$

kimi yazılır.

Triqonometrik funksiyaların tək və cütlüyü

Triqonometrik funksiyaların tərifindən aydındır ki, y=sinα və y=cosα funksiyaları $(-\infty;+\infty)$ intervalında təyin olunmuşdur və onların qiymətlər çoxluğu $[-1;+1]$ parçasını təşkil edir. tgα funksiyası $\alpha -$ nın $\frac{\pi}{2}+\kappa\pi, y = ctg\alpha$ funksiyası isə kπ-dən (k=0, $\pm1,\pm2,\pm3,.....$)

fərqli bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur və onların qiymətlər çoxluğu $(-\infty,+\infty)$ intervalıdır.

Teorem.y=cosx funksiyası cüt, y=sinx, y=tgx, y=ctgx funksiyaları isə tək funksiyalardır

Triqonometrik funksiyaların qrafiki

Triqonometrik funksiyaların qrafikini qurmaq üçün onların dövrü olmasına əsaslanıb, uzunluğu dövrə bərabər olan parçada (və ya intervalda) onların qrafikini qurmaq, kənarda isə dövri olaraq təkrar etmək lazımdır. Tutaq ki, x radianla ölçülür.

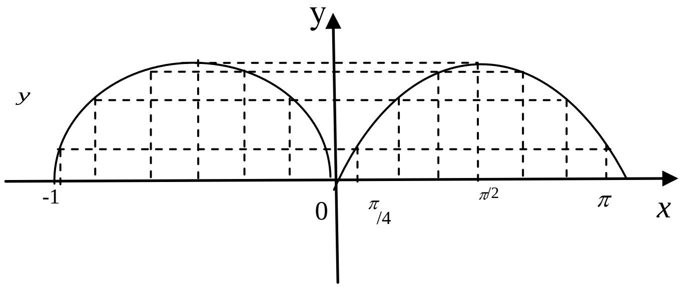
a) y=sinx funksiyasının qrafiki. y=sinx funksiyası x-in bütün qiymətlərində, yəni $(-\infty;+\infty)$ intervalında təyin olunmuş və dövrü 2π-dir. Onun qrafikini $[-\pi;\pi]$ parçasında qurmaq üçün y=sinx funksiyasının tək funksiya olmasını nəzərə alaraq $[-\pi;0]$ parçasına davam etdirmək lazımdır.

Qurma üçün aşağıdakı iki üsulu göstərmək olar:

I üsul.sinx-in bölgü nöqtələrindəki qiymətlərini cədvəlin köməyi ilə tapmaq və koordinat müstəvisində (x, sinx) nöqtələrini qurmaqla onları ardıcıl birləşdirmək lazımdır.

II üsul. (həndəsi üsul). Yuxarı yarımmüstəvidə mərkəzi (-1;0) nöqtəsində olan vahid radiuslu yarımçevrə götürüb, səkkiz bərabər $\left(0;\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8};\pi\right)$ hissəyə bölək. Əvvəlcə $[0,\pi]$ parçasının yuxarıda qeyd etdiyimiz bölgü nöqtələrindən Ox oxuna perpendikulyarlar qaldırırıq, sonra isə çevrə üzərindəki hər bir bölgü nöqtəsindən ona uyğun nöqtədən qaldırılan perpendikulyarla kəsişənə qədər Ox oxuna paralellər çəkirik.

Aydındır ki, kəsişmə nöqtələrinin ordinatı sinx-in böl-gü nöqtələrindəki qiymətləri olacaq (şəkil 6).



Şəkil 6.

Funksiyaların təsnifatı

Funksiyalar xarakterinə, formalarına və aldıqları qiymətlərinə görə müəyyən siniflərə bölünür.

Əsas elementar funksiyalar

Analitik üsulla verilmiş aşağıdakı beş növ funk-siyaya əsas elementar funksiyalar deyilir.

1.Qüvvət funksiyası: $y = x^{\alpha} \left(\alpha \in R\right)$**.**

2.Üstlü funksiya: α^{x} (α>0, α $\neq 1$).

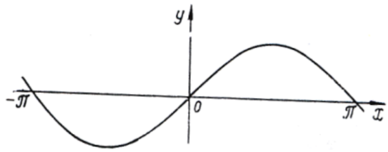
3.Loqarifmik funksiya: y=log $_{\alpha}$ **x**(α>0, α $\neq 1$).

4.Triqonometrik funksiyalar: y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx, y=secx, y=cosecx.

5.Tərs triqonometrik funksiyalar: y=arcsinx, y=arccosx, y=arcctgx, y=arcsecx, y=arccosecx, y=arctgx

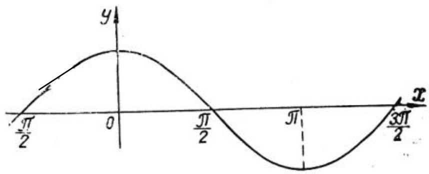
Alınmış nöqtələri ardıcıl olaraq səlis xətlə birləş-dirsək $[0;\pi]$ parçasında **y=sinx** funksiyasının qrafikini alarıq. Sonra isə aldığımız əyrini $[-\pi;0]$ parçasına elə davam etdiririk ki, qrafik koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olsun.

Sonradan qrafiki sağa $[\pi;3\pi],[3\pi;5\pi]$ və s.., sola $[-3\pi,-\pi],[-5\pi,-3\pi]$ və s. parçalarına köçürməklə bütün oxda **y=sinx** funksiyasının qrafikini alırıq (şəkil 7). Alınan əyriyə **sinusoid**deyilir.



Şəkil 7.

b) y=cosx funksiyasının qrafiki**.** y=sinx funksiyasının qrafikinə oxşar olaraq qurulur (şəkil 8).
Alınan əyriyə **kosinusoid**deyilir.



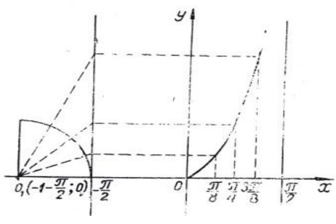
Şəkil 8.

c) y=tgx funksiyasının qrafiki**.** y=tgx funksiyası x-in $\frac{\pi}{2}(2k+1)-$ dən $(\kappa = 0;\pm1;\pm2;\pm3;....)$ fərqli bütün qiymətlərində təyin olunmuş, dəyişmə oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur və dövrü π -dir. Funksiyanın təkliyini nəzərə alıb $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ yarımintervalında onun qrafikini quraraq koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olmaqla $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ yarımintervalına köçürək.

Qurma üçün aşağıdakı iki üsulu göstərmək olar.

I üsul. Cədvəlin köməyi ilə bölgü nöqtələrində $\left(x \neq \frac{\pi}{2} \text{ olmaqla}\right)$, funksiyanın qiymətləri müəyyən dəqiqliklə tapılır, alınan (x;y) nöqtələri koordinat müstəvisində qurulur və bu nöqtələr ardıcıl olaraq səlis xətlə birləşdirilir

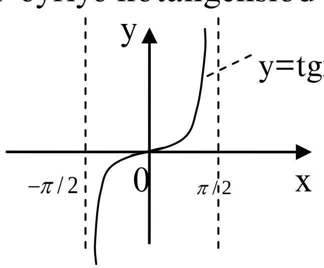
II üsul. Mərkəzi $O_1\left(-1-\frac{\pi}{2};0\right)$ nöqtəsində olan vahid radiuslu çevrənin I rübünü və $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ parçasını dörd bərabər hissəyə bölək və tangenslər oxu üzərində qiyməti uyğun bucaqların tangensinə bərabər parçalar quraq. Sonra parçanın bölgü nöqtələrindən absis oxuna perpendikulyarlar qaldırırıq, daha sonra isə tan-genslər xətti üzərində aldığımız hər bir nöqtədən ona uyğun olan bölgü nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyarı kəsənə qədər Ox oxuna paralellər çəkirik. Alınmış nöqtələri ardıcıl olaraq səlis xətlə birləşdirsək $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ yarımintervalında y=tg x funksiyasının qrafikini alarıq (şəkil 9).



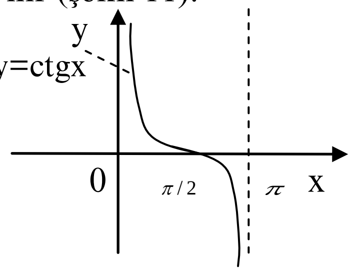
Şəkil 9.

Sonradan qrafiki koordinat başlanğıcına simmetrik olmaqla, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ yarımintervalına köçürüb $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalında tgx-in qrafikini alarıq. Alınan qrafiki sağa $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$ və s. intervallarına, sola $\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right)$ və s. intervallarına köçürməklə y=tgx funksiyasının bütün təyin oblastında qrafikini alırıq (şəkil 10). Bu əyriyə **tangensoid**deyilir.

d) y=ctg xfunksiyasının qrafiki y=tg x funksiyasının qrafikinə analoji qayda ilə qurulur. Lakin burada nəzərə almaq lazımdır ki, y=ctg x funksiyası x-in π -dən fərqli $(n=0;\pm1;\pm2;.....)$ bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur. Odur ki, qrafiki $(0;\pi)$ intervalında qurulan əyriyə kotangensiod deyilir (şəkil 11).



Şəkil 10.



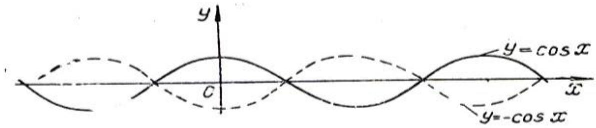
Şəkil 11.

6.2.1.1. Triqonometrik funksiyaların qrafikinin sürüşmə və deformasiya üsulu ilə qurulması

İndi y=sinx, y=cosx, y=tgx və y=ctg x funksiyalarının məlum qrafiklərinə əsaslanaraq aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini quraq.

a) y=-cosx funksiyasının qrafikinin qurulması.

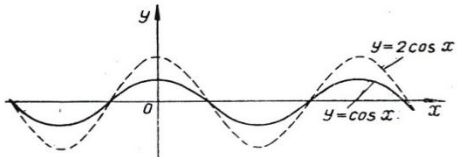
Aydındır ki, y=cosx və y=-cosx funksiyalarının qrafiki absis oxuna nəzərən bir-birilə simmetrikdir. Deməli, y=-cosx funksiyasının qrafikini almaq üçün y=cosx funksiyasının qrafikini absis oxu ətrafında 180^0 döndərmək lazımdır (şəkil 12).



Şəkil 12.

b) y=acosx funksiyasının qrafikinin qurulması.

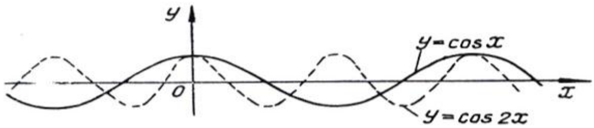
Bu funksiyanın qrafikini qurmaq üçün absisi dəyişmədən y=cosx funksiyası qrafikinin bütün ordinatlarını a ədədinə vurmaq lazımdır; a>1 olduqda qrafik ordinat oxu boyunca uzanır (dartılır), a<-1 olduqda həm dartılır, həm də absis oxu ətrafında 180^0 dönür,0<a<1 olduqda sıxılır,-1<a<0 olduqda isə həm sıxılır, həm də absis oxu ətrafında 180^0dönür. 13-cüşəkildə y=2cosx funksiyasının qrafiki göstərilmişdir.



Şəkil13.

c) y=cosωx funksiyasının qrafikinin qurulması.

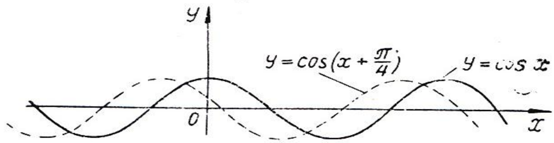
Bu funksiyanın qrafikini qurmaq üçün ordinatı dəyişmədən y=cosx funksiyası qrafikinin absisini ω ədədinə vurmaq lazımdır. ω>1 olduqda qrafik absis oxu boyunca sıxılır (ω dəfə), 0<ω<1 olduqda isə dartılır.(1/ω dəfə) y=cosx funksiyasının çütlüyünə əsasən deyə bilərik ki, ω ədədi mənfi olduqda qrafik y=cos$|\omega|$x funksiyası qrafikinin eyni olacaqdır. $\omega=2$ olduqda qurulan qrafik 14-cü şəkildə göstərilmişdir.



Şəkil 14.

d) y=cos(x+ α) funksiyasının qrafikinin qurulması.

Bu funksiyanın qrafikini qurmaq üçün y=cosx funksiyasının qrafikini bütünlüklə absis oxu boyunca $|\alpha|$ qədər (α >0 olduqda sola, α <0 olduqda isə sağa) sürüşdürmək lazımdır. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ olduqda qurulmuş qrafik 15-ci şəkildə göstərilmişdir.



Şəkil 15.

e)y=- α cos(ω x+ α)funksiyasının qrafikinin qurulması

Funksiyanın qrafikini qurmaq üçün yuxarıda deyilənləri nəzərə almaqla aşağıdakı funksiyaların qrafikini ardıcıl olaraq yerinə yetirmək lazımdır:

1)y=cosx,

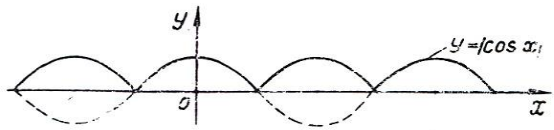
2)y= α cosx,

3)y= α cos ω x,

4) y=-$\alpha\cos(\omega$x+$\alpha)$

f) y=$|\cos x|$ funksiyasının qrafikinin qurulması

Mütləq qiymətin tərifindən alınır ki, cosx ≥ 0 olduqda bu funksiyanın qrafiki y=cosx funksiyasının qrafiki ilə, cosx<0 olduqda isə y=-cosx funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşür. Odur ki, həmin funksiyanın qrafikini qurmaq üçün əvvəlcə y=cosx funksiyanın qrafiki qurulur, sonra isə qrafikin absis oxundan yuxarı hissəsi saxlanmaqla, aşağı hissəsi absis oxu ətrafında 180^0 döndərilir. Nəticədə, absis oxundan yuxarıda alınmış əyri y=$|\cos x|$ funksiyasının qrafiki olar (şəkil 16).



Şəkil 16.

y=$|\sin x|$, $y=|tgx|$, $y=|ctgx|$ funksiyalarının qrafikləri də bu qayda ilə qurulur.

6.2.1.2. Tərs triqonometrik funksiyaların xassələri və qrafikləri

1) Tərs triqonometrik funksiyaların tərifi.

Tərif 1. a ədədinin arksinusu $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ parçasından götürülmüş elədədə deyilir ki, onun sinusu a-ya bərabərdir.

Tərif 2. $[0;\pi]$ parzasından gütürülən və kosinusu a-ya bərabər olan ədədə a ədədinin arkkosinusu deyilir.

Tərif 3 . $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ intervalındangötürülən və tangensi a-ya bərabər olan ədədə a ədədinin arktangensi deyilir.

Tərif 4. $(0;\pi)$ intervalından götürülən və kotangensi a-ya bərabər olan ədədə a ədədinin arkkotangensi deyilir.

2) y=arcsinx funksiyasının xassələri və qrafiki.

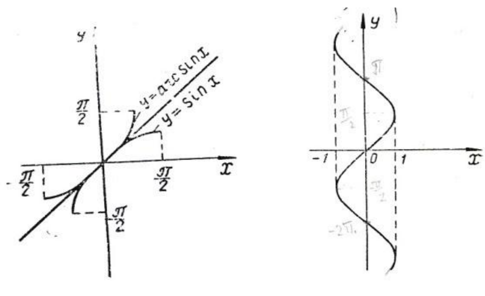
a)Bu funksiyanın təyin oblastı $[-1;1]$ parçasıdır.

b) y=arcsinx funksiyası $[-1;1]$ parçasında monoton artandır və onun qiymətləri $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ parçasını təşkil edir.

c) y=arcsinx funksiyası tək funksiyadır:

$$\mathbf{arcsin\,(-x)=-arcsin\,x.}$$

y=arcsinx funksiyasının qrafikini qurmaq üçün y=sinx funksiyasının qrafikini birinci koordinat bucağının tənböləni ətrafında çevirmək lazımdır (şəkil 17a,b).



a) b)

Şəkil 17.

3) y=arccosx funksiyasının xassələri və qrafiki.

a). y=arccosxfunksiyasının təyin oblastı $[-1;1]$par-çasıdır.

b). y=arccosxfunksiyası $[-1;1]$ parçasında monoton azalandır və onun qiymətləri $[0;\pi]$parçasını təşkil edir.

c). y=arccosx funksiyası üçün:

$$\mathbf{arccos\,(-x) = \pi - arccosx}$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlik göstərir ki, y=arccosx funksiyası y=cosx funksiyasından fərqli olaraq cütlüyü olmayan funksiyadır. y=arccosxfunksiyasının qrafikini qurmaq üçün y=cosx funksiyasının qrafikini birinci koordinat bucağının tənböləni ətrafında çevirmək lazımdır (şəkil 18 a,b).

a) b)

Şəkil 18.

4) y=arctgxfunksiyasının xassələri və qrafiki.

a)y=arctgxfunksiyasının təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur: $(-\infty;\infty)$.

b)y=arctgxfunksiyası $(-\infty;\infty)$ intervalında monoton artandır və onun qiymətləri $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalını təşkil edir.

c)y=arctgx tək funksiyadır: arctg(-x)=-arctgx.

y=arctgx funksiyasının qrafiki 19-cu şəkildə verilmişdir.

5) y=arcctgxfunksiyasının xassələri və qrafiki.

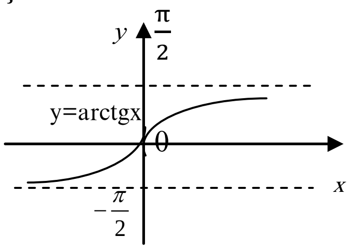
a) y=arcctgx funksiyasının təyin oblastı $(-\infty;\infty)$ intervalıdır.

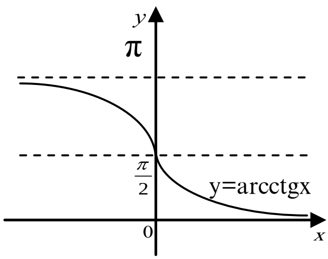
b) y=arcctgx funksiyası $(-\infty;\infty)$intervalında π –dən 0-a qədər monoton azalır və qiymətləri $(0;\pi)$ intervalını təşkil edir.

c)y=arcctgx funksiyası üçün:

$$\mathbf{arcctg(-x)=}\pi\mathbf{-arcctgx}$$

bərabərliyi ödənilir. Bu, cütlüyü olmayan funksiyadır. y=arcctgx funksiyasının qrafiki 20-ci şəkildə göstərilmişdir.





Şəkil 19. **Şəkil 20.**

6.2.2.Elementar funksiyalar

Tərif. Əsas elementar funksiyalar və sabitlər üzərində sonlu sayda dörd hesab əməli (toplama, çıxma, vurma, bölmə) və superpozisiyalar tətbiq etməklə alınan və y=fx) şəklində düsturla ifadə olunan funksiyalara elementar funksiyalar deyilir.

Məsələn,

1) $y=\frac{10^x-1}{4x+1}$

2) $y=\lg^3\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

3) $y=\sqrt{3+x\sin x}$;

4) $y=\arcsin\left(2+x^2\right)$;

funksiyaları elementar funksiyalardır.

Elementar funksiyalar cəbri və transendent funksiyalar adlanan iki sinfə bölünür.

Elementar funksiyaların şərtlərini ödəməyən funksiyalara elementar olmayan funksiyalar deyilir.

6.3.Cəbri və transendent funksiyalar.Hiperbolikfunksiyalar

6.3.1. Cəbri funksiyalar

Tərif. Qiymətləri arqument üzərində sonlu sayda toplama, çıxma, vurma, bölmə və rasional üstə nəzərən qüvvətə yüksəltmə kimi cəbri əməllər aparmaqla alına bilən funksiyalara cəbri funksiyalar deyilir.

Məsələn,

1) $y=5x^2-3x+2$;

2) $y=\frac{2x-3}{1-x}$;

3) $y=\sqrt{2x-\pi}$;

4) $y=\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x+1}}$;

funksiyaları cəbri funksiyalardır.

Cəbri funksiyalar rasional və irrasional olan iki növə bölünür.

Rasional funksiyalar

Tərif. Arqumenti üzərində kökalma əməlindən başqa qalan bütün əməllər aparıla bilən cəbri funksiyalara rasional funksiyalar deyilir.

Rasional funksiyalar **tam** rasional və **kəsr** rasional funksiyalara bölünür

a) Tam rasional funksiyalar

Aşağıdakı düsturla verilən funksiyaya tam rasional funksiya deyilir.

$$\mathbf{y=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n}$$

burada: n-mənfi olmayan tam ədəd (yaxud n=0)$\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n}$ verilmiş ədədlər və $a_0 \neq 0$;

b) Kəsr rasional funksiyalar

İki tam rasional funksiyanın nisbəti:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + .. + b_{m-1}x + b_m}, \qquad m \neq 0$$

şəklində verilən cəbri funksiyalara kəsr rasional funksiyalar deyilir.

İrrasional funksiyalar

Tərif. Aqrumenti üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə və həm də kökalma əməlləri aparıla bilən cəbri funksiyalara irrasional funksiyalar deyilir.

6.3.2.Transendent funksiyalar

Tərif.Cəbri olmayan funksiyalara transendent funksiyalar deyilir.

Üstlü,loqarifmik,triqonometrik,tərs triqonometrik və üstü irrasional ədəd olan qüvvət funksiyaları transendent funksiyalardır.

6.3.3.Hiperbolik funksiyalar

Hiperbolik funksiyalar sadə elementar funksiyalar kimi çox geniş tətbiq olunan funksiyalardır.

1)hiperbolik sinus: shx$=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$;

2)hiperbolik kosinus: chx$=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$;

3)hiperbolik tangens: thx$=\frac{shx}{chx}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;

4)hiperbolik kotangens: cthx$=\frac{chx}{shx}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

5)hiperbolik sekans: schx$=\frac{1}{chx}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

6)hiperbolik kosekans: cschx$=\frac{1}{shx}=\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

Triqonometrik funksiyalar arasında olan bir sıra münasibətlər uyğun olaraq hiperbolik funksiyalar üçün də vardır.

Məsələn,

1) $ch^{2}x-sh^{2}x=1$

2)$\mathbf{sh2x = 2chx \cdot sx}$

3) $ch2x=sh^{2}x+ch^{2}x$

4) $sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm chx \cdot shy$

5) $ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy$

6) $ch(-x) = chx$

7) $sh(-x) = -shx$

8) $th(-x) = -thx$

9) $cth(-x) = -cthx$

VII FƏSİL. FUNKSİYANIN LİMİTİ

Funksiyanın limiti riyazi analizin əsas anlayışlarından biridir. Riyaziyyatın diferensial, inteqral və s. kimi çox mühüm anlayışları limit vasitəsilə təyin olunur.

7.1.1.Ardıcıllığın limiti

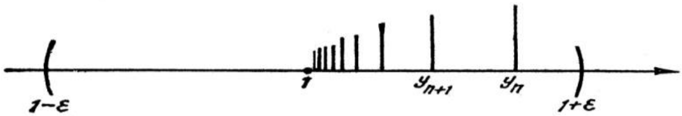
Ardıcıllıq, tam qiymətlər alan n arqumentinin funksiyasıdır.Tutaq ki, n arqumenti ardıcıl olaraq

$$1,2,3,...... \qquad \textbf{(1)}$$

qiymətlərini alır. Bu prosesi zamanla əlaqədar təsəvvür etsək (əlbəttə, n-nin dəyişməsinin zamanla heç bir əlaqəsi yoxdur), vaxt keçdikcə n dəyişəni istənilən böyük qiymətlər alaraq qeyri-məhdud artmaqda davam edəcəkdir.Qabaqcadan götürülmüş istənilən böyük hər bir N ədədi üçün elə bir an gələcəkdir ki, bu andan başlayaraq n dəyişəninin aldığı qiymətlər N ədədindən böyük olacaqdır. n-nin belə sonsuz artmasını qısa olaraq "n sonsuzluğa yaxınlaşır"və ya "$n\to\infty$" kimi ifadə edirlər. Bizim burada məqsədimiz $y_n = f(n)$ funksiyasının $n\to\infty$ -da dəyişmə xarakterini öyrənməkdir.Bu məqsədlə,$n\to\infty$da $y_n = 1+\frac{1}{n}$ funksiyasını və yaxud

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},.....,1+\frac{1}{n} \qquad \textbf{(2)}$$

ardıcıllığının dəyişmə xarakterini izləyək.Bu ardıcıllığın bütün hədləri vahiddən fərqlidir, lakin n dəyişəni (1) qiymətlərini alaraq artdıqda $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ funksiyasının aldığı qiymətlər vahidəçox yaxın olur.Bu yaxınlığın xarakteristikası həndəsi olaraq belədir:



Şəkil 1.

1-in istənilən ε -ətrafıüçün elə N=N(ε) ədədi(nömrəsi) var ki, (2) ardıcıllığının, nömrəsi N-dən kiçik olmayan bütün hədləri 1-in həmin ε-ətrafında yerləşir (şəkil 1).

$$1-\varepsilon<y_n<1+\varepsilon \quad (n\geq N) \qquad \textbf{(3)}$$

Məsələn, ε= $\frac{1}{10}$ olduqda N=11, ε= $\frac{1}{100}$ olduqda N=101, ε= $\frac{1}{1000}$ olduqda N=1001 götürmək olar.(2) ardıcıllığının bu xassəsini belə ifadə edirlər: 1 ədədi n sonsuzluğa yaxınlaşdıqda (2) ardıcıllığının limitidir.

Tutaq ki, A ədədi və $\{y_n\}$ ardıgıllığı verilmişdir.

Tərif. Tutaq ki, istənilən (kiçik) müsbət εədədi verildikdə elə müsbət N ədədi götürmək olur ki, n-in N-dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində

$$|y_n - A|<\varepsilon \qquad (n\geq N) \qquad \textbf{(4)}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə n→∞-da $\{y_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir və

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \qquad \textbf{(5)}$$

və ya

$$y_n \to A \qquad (n \to \infty) \qquad \textbf{(6)}$$

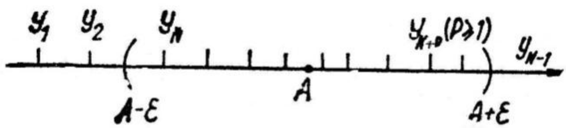
şəklində yazılır.(Burada lim işarəsi, mənası qayə(sərhəd) olan latın sözündən götürülmüşdür).

Qeyd edək ki, A ədədi və $\{y_n\}$ ardıcıllığı verildikdə tərifdə göstərilən N ədədinin seçilməsi ε-dan asılıdır:

N=N(ε). εədədi azaldıqca seçilən N ədədi, ümumiyyətlə, artır. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, verilən ε-na qarşı seçilən N(ε) ədədi yeganə deyil. Tərifdə N(ε) ədədinin ancaq varlığı tələb olunur, yeganəliyi isə tələb olunmur.(4) bərabərsizliyi

$$-\varepsilon<y_n -A<\varepsilon \text{ və ya } A-\varepsilon<y_n<A+ \varepsilon \ (n\geq N) \qquad \textbf{(7)}$$

bərabərsizlikləri ilə eynigüclüdür. Buradan aydındır ki, A ədədi n→∞da $\{y_n\}$ ardıgıllığının limitidirsə, onda həmin ardıcıllığın y_n-dən sonra gələn bütün hədləri A ədədinin ε-ətrafında yerləşir. Bu halda $\{y_n\}$ardıcıllığının ancaq sonlu sayda həddi(A-ε, A+ ε) intervalında yerləşməyə bilər.(şəkil 2)



Şəkil 2.

f(n) funksiyasıhər hansı Q xassəsini n-nin müəyyən N-dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində (n≥N) ödədikdə, deyirlər ki, f(n) funksiyası Q xassəsini n-nin kifayət qədər böyük qiyməylərindəödəyir.

Deməli, a ədədi y_n=f(n) ardıcıllığının n→∞-da limitidirsə, onda n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində (4) bərabərsizliyiödənilir.

Ardıcıllığın öz limitinə yaxınlaşma xarakteri müxtəlif ola bilər: ardıcıllıq artaraq, azalaraq və ya limit ətrafında rəqs edərək ona(öz limitinə) yaxınlaşa bilər.

Misal1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığının limiti sıfra bərabərdir. Doğrudan da, istənilən kiçik εədədi verildikdə

$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$**<**ε olmasıüçün n>$\frac{1}{\varepsilon}$ olması və buna görə də N=$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ götürmək kifayətdir. Bu ardıcıllıq azalaraq limitə yaxınlaşır.

Misal 2. $\left\{2-\frac{1}{n^2}\right\}$ardıcıllığının limiti 2 dədidir:

$$\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})=2$$

Ardıcıllıq artaraq limitə yaxınlaşır.

Misal 3. $\left\{(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığı sıfır ətrafında rəqs edərək ona yaxınlaşır:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right]=0$$

Belə bir sual qarşıya çıxır: bir ardıcıllığın neçə limiti ola bilər ?

Teorem 1. Ardıcıllığın ancaq bir limiti ola bilər.

İsbatı. Əksinə fərz edək ki, $\{y_n\}$ ardıcıllığının müxtəlif iki A_1 və A_2 ($A_1 \neq A_2$) limiti var. Onda limitin tərifinə görə, verilmiş ixtiyari $\varepsilon=\frac{|A_1-A_2|}{2}$ ədədi üçün

$$\left|y_n - A_1\right| < \varepsilon \quad (n \geq N_1) \qquad \textbf{(8)}$$

və
$$\left|y_n - A_2\right| < \varepsilon \quad (n \geq N_2) \qquad \textbf{(9)}$$

bərabərsizlikləri ödənilməlidir. N_1 və N_2ədədlərinin ən böyüyünü N ilə işarə etsək, n≥N olduqda (8) və (9) bərabərsizliklərinin ikisi də eyni zamanda ödənilər.

Buradan n≥N olduqda

$$\left|A_1 - A_2\right| = \left|(A_1 - y_n) + (y_n - A_2)\right| \leq \left|A_1 - y_n\right| + \left|y_n - A_2\right| < 2$$

$$\varepsilon = \left|A_1 - A_2\right|$$

və ya $\left|A_1 - A_2\right| < \left|A_1 - A_2\right|$ alınır. Bu ziddiyyət teoremin doğruluğunu göstərir.

Tərif. Limiti olan ardıcıllığa yığılan ardıcıllıq, limiti olmayan ardıcıllığa isə dağılan ardıcıllıq deyilir.

Misal 4.

$$\mathbf{1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n-1}, ...,}$$

$$\mathbf{0,\ 1,\ 0,\ 1, ...,} \frac{1 + (-1)^n}{2}, ...$$

$$\mathbf{1,\ 4,\ 9,\ 16, ..., n^2, ...}$$

ardıcıllıqları dağılandır.

Qeyd edək ki, verilmiş yığılan ardıcıllığın sonlu sayda həddini atmaq və ya dəyişmək olar, bu onun yığılmasına və limitinin qiymətinə təsir etmir.

Ardıcıllığın bütün hədləri müxtəlif olmaya da bilər. Bütün hədləri bir-birinə bərabər olan

$$A, A, A, ..., A \qquad \textbf{(10)}$$

ardıcıllığına stasionar ardıcıllıq deyilir.

Misal 5. Stasionar $y_n = A(n=1,2,...)$ və ya (10) ardıcıllığı yığılandır və onun limiti A-ya bərabərdir:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = A$$

Doğrudanda, istənilən ε>0 ədədi üçün

$$|y_n - A| = 0 < \varepsilon$$

bərabərsizliyi n-nin bütün qiymətlərindəödənilir.

Teorem2. x_0 nöqtəsi X= $\{x\}$ ədədi çoxluğunun limit nöqtəsi olduqda, həmin çoxluğun elementlərindən x_0ədədinə yığılan $\{x\}$ ardıcıllığını ayırmaq olar.

İsbatı. x_0 nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsi olduğundan onun iatənilən εətrafında həmin çoxluğun sonsuz sayda elementi yerləşir. Onda (x_0 -1, x_0+1) intervalında da X çoxluğunun sonsuz sayda elementi yerləşir. Bu elementlərin birini x_1 ilə işarə edək. Sonra X çoxluğunun $\left(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2}\right)$ intervalında yerləşən və x_1-dən fərqli olan hədlərinin birini götürüb x_2 ilə işarə edək. Bu prosesi davam etdirdikdə n-ci dəfə X çoxluğunun $\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$ intervalında yerləşən x_n elementi $(x_n \neq x_k,\ k = \overline{1,\ n-1})$ götürülür. Beləliklə, ayrılmış x_1, x_2,...,x_n,.... ardıcıllığıüçün

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

münasibəti ödənilir. Buradan:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

İsbat etdiyimiz teoremin müəyyən mənada tərsi də doğrudur: X çoxluğunun x_0 nöqtəsinə yığılan $\{x_n\}$ardıcıllığı ayırmaq mümkündürsə, onda x_0 nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir.

Doğrudan da, $x_n \to x_0 (n\to\infty)$olması o deməkdir ki, ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə qarşı elə$N=N(\varepsilon)$ var ki, n-nin $n\geq N$ qiymətlərində

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \quad \text{və yaxud} \quad x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir.Deməli, x_0-ın εətrafında ardıcıllığın (buna görə də X çoxluğunun) sonsuz sayda həddi yerləşir. Bu isəx_0 nöqtəsinin X çoxluğunun limit nöqtəsi olduğunu göstərir.

7.1.2. Yığılan ardıcıllığın sadə xassələri

Teorem 1. Yığılan ardıcıllıq məhduddur.

İsbatı. Fərz edək ki, $\{y_n\}$ ardıcıllığı yığılandır və onun limiti a-ya bərabərdir. Onda 1= $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə N var ki, $n\geq N$ olduqda

$$|y_n - A| < 1 \quad (n\geq N)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan:

$$|y_n| = |(y_n - A) + A| \leq |y_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

və ya

$$|y_n| < 1 + |A| \qquad (n\geq N)$$

Onda M ilə$|y_1|,\ |y_2|, \ldots |y_{N-1}|,\ 1+|A|$

ədədlərinin ən böyüyünü işarə etsək, n-in bütün qiymətlərində $|y_n| \leq M$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu isə $\{y_n\}$ ardıcıllığının məhdud olması deməkdir.

Bu teoremin tərsi doğru deyildir. Məhdud ardıcıllıq yığılan olmaya da bilər.

Misal 1. Məhdud $\{(-1)^{n-1}\}$ ardıcıllığı yığılan deyildir.

Doğrudan da, 1, -1, 1, -1, ..., $(-1)^{n-1}$,.... ardıcıllığının limiti yoxdur (4-cü misal), lakin onun bütün hədləri mütləq qiymətcə vahidi aşmır. Deməli, ardıcıllığın məhdud olması onun yığılan olmasıüçün zəruri şərtdir, lakin kafi deyildir.

Teorem 2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ **olarsa, onda** $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n| = |A|$

İsbatı. Tərifə görə istənilən εədədi üçün elə N var ki, n≥N olduqda

$$|y_n - A| < \varepsilon \quad (n\geq N) \text{ olur.Onda}$$

$$\left||y_n| - |A|\right| \leq |y_n - A| < \varepsilon \qquad (n\geq N)$$

yəni $\quad |y_n| \to |A| \quad (n\to\infty)$

Hər bir ardıcıllığın altardıcıllığından danışmaq olar. Verilmiş

$$y_1,\ y_2, ..., y_n ... \qquad \textbf{(1)}$$

ardıcıllığının

$$n_1 < n_2 < .... < n_n < ....$$

indeksli sonsuz sayda hədlərini ayıraraq

$$y_{n_1},\ y_{n_2} ......, y_{n_k} .,...... \qquad \textbf{(2)}$$

ardıcıllığını düzəldək; burada k indeksi sonsuzluğa yaxınlaşanda $n_k$da sonsuzluğa yaxınlaşır.(2) ardıcıllığına (1) ardıcıllığının altardıcıllığı deyilir.

Buradan aydındır ki, verilmiş (1) ardıcıllığının sonsuz sayda altardıcıllığıvardır.

Teorem 3. Verilmiş ardıcıllığın A ədədinə yığılan olmasıüçün onun istənilən altardıcıllığının həmin A ədədinə yığılan olması zəruri və kafi şərtdir.

Şərtin zəruri olduğunu isbat etmək üçün ardıcıllığınlimitinin tərifindən istifadə edək:istənilən ε>0 üçün elə N(ε) var ki, n≥N olduqda $|y_n - A| < \varepsilon$ (n≥N) olur.

Buradan aydındır ki, $n_k \geq N$ bərabərsizliyini ödəyən bütün n_kədədləri üçün də $|y_{n_k} - A| < \varepsilon$ ($n_k \geq N$) bərabərsizliyi ödənilir. Buradan:

$$y_{n_k} \to A \qquad (k \to \infty)$$

Şərtin kafiliyi də eyni qayda ilə isbat olunur.

Qeyd. Hər bir ardıcıllıqdan həmişə yığılan monoton altardıcıllığı ayırmaq olar.

Misal 2. $\{y_n\} = \left\{\sin n\frac{\pi}{2}\right\}$ və ya

$$\mathbf{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...} \qquad \mathbf{(3)}$$

ardıcıllığının limiti yoxdur (dağılandır), lakin (3) ardıcıllığının

$$\begin{aligned} &1, 1, 1,...., \\ &0, 0, 0,...., \\ &-1,-1,....... \end{aligned} \qquad (4)$$

kimi üç altardıcıllığından hər birinin ayrılıqda limiti (əlbəttə, müxtəlif) var: 1; 0 və -1. Altardıcıllıqlarınınn hamısı eyni limitə yığılmadığından 3-cü teoremə görə (3) ardıcıllığının limiti yoxdur.

Teorem 4. $\{y_n\}$ ardıcıllığı A ədədinə yığılırsa və A<p (A>q) olarsa, onda elə N var ki, n-nin N-dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində $y_n<p$ ($y_n>q$) bərabərsizliyi ödənilir.

İsbatı. Limitin tərifinə görəε=p-A> 0 ədədi üçün elə N(ε) var ki, n-nin N-dən kiçik olmayan bütün qiymətlərində

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

və ya

$$A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon = p \quad (n \geq N)$$

Bərabərsizlikləri ödənilir. Axırıncı münasibətdən teoremin doğruluğu aydındır. Bu teoremdən bir sıra maraqlı nəticələr çıxarmaq olar.

Nəticə 1. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ və n-nin bütün qiymətlərində

$$y_n \leq p \quad (y_n \geq q)$$

olduqda

$$A \leq p \quad (A \geq q)$$

Doğrudan da, A> p olarsa, onda isbat etdiyimiz teoremə görə elə N ədədi tapmaq olar ki, $y_n > p$ $(n \geq N)$ olur. Alınan münasibət şərtə ziddir, deməli, $A \leq p$.

Nəticə 2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ **<**0 (>0) olduqda elə N>0 ədədi var ki, n-nin $n \geq N$ qiymətləri üçün

$$y_n < 0 \quad (y_n > 0) \quad (n \geq N)$$

Teorem 5. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ və n-nin bütün qiymətlərində

$$y_n \leq \upsilon_n \leq u_n \quad \textbf{(5)}$$

münasibəti ödənilərsə, onda $\{\upsilon_n\}$ ardıcıllığı yığılandır və

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A$$

İsbatı. Ardıcıllığın limitinin tərifinə görə istənilən ε>0 ədədi verildikdə elə N_1 və N_2 ədədləri tapmaq olur ki,

$$A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon \quad (n \geq N_1) \qquad (6)$$

$$A-\varepsilon < u_n < A+\varepsilon \quad (n \geq N_1) \qquad (7)$$

bərabərsizlikləri ödənilir. N ilə N_1 və N_2ədədlərinin ən böyüyünü işarə etsək, onda (5),(6), (7) bərabərsizliklərinə görə n-nin n≥N qiymətlərində

$$A-\varepsilon<\upsilon_n<A+\varepsilon$$

bərabərsizlikləri və ya

$$|\upsilon_n - A|<\varepsilon$$

münasibəti ödənilər. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\upsilon_n = A$$

olması aydındır.

Nəticə. $\lim_{n\to\infty} y_n = A$və n-inbütünqiymətlərində

$$y_n \le \upsilon_n \le A$$

münasibəti ödənilirsə, onda $\{\upsilon_n\}$ardıcıllığı A ədədinə yığılar:

$$\lim_{n\to\infty}\upsilon_n = A.$$

7.2.1.Limit nöqtəsinin varlığı

Tutaq ki, X={x} hər hansıədədi çoxluqdur. Limit nöqtəsinin tərifindənaydındır ki, sonlu x çoxluğunun limit nöqtəsi ola bilməz. Sonsuz çoxluğun isə limit nöqtəsi ola da bilər olmaya da bilər. Məsələn : sonsuz

$$N=\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Çoxluğunun heç bir limit nöqtəsi yoxdur,sonsuz

$$X_1=\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots\}$$

Çoxluğunun isə limit nöqtəsi (x=0) var.

Sonsuz çoxluqların limit nöqtəsinin varlığı haqqında kafi şərti aşağıdakı teorem şəklində söyləmək olar.

Teorem 1(Bolsan -Veyerştrass). Məhdud sonsuz çoxluğun heç olmasa bir limit nöqtəsi var.

İsbatı. X çoxluğu məhdud olduğundan onun bütün nöqtələri bir sonlu [a,b] parçasında yerləşir. [a,b] parçasının iki bərabər [a,a`] və [a`,b] (a<a`<b) hissəyə bölək. Bu hissələrin heç olmazsa birinin daxilində X çoxluğundan sonsuz sayda nöqtə yerləşər (əks halda, [a,b] parçasında X çoxluğunun sonlu sayda nöqtəsi yerləşər ki, bu da X-in tamamilə həmin parçada yerləşməsinə ziddir.) Həmin hissənin $[a_1,b_1]$ ilə işarə edək. Bu parçanı da yarıya bölərək daxilində X çoxluğunda sonsuz sayda nöqtə yerləşən hissəni $[a_2,b_2]$ ilə işarə edək. Prossesi davam etdirsək hər birinin daxilində X çoxluğundan sonsuz sayda nöqtə yerləşən, uzunluqları 0-a yığılan və hər biri özündən əvvəlkinin daxilində yerləşən $[a_{n,}b_n]$ parçaları ardıcıllığını alarıq.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots, \qquad \textbf{(1)}$$

$$b_n\text{-}a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

$$\lim_{n\to 0}(b_n - a_n) = 0$$

Yığılan parçalar prinsipinə görə (1) parçalarının hamısıüçün ortaq olan yeganə bir S nöqtəsi var. Bu nöqtə X çoxluğunun limit nöqtəsidir.

Doğurdan da C nöqtəsinin istənilən (C—ε,C+ ε) ətrafını götürsək, n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində [a,b] parçası həmin ətrafda yerləşər. Bu parçaların hər birinin daxilində X çoxluğundan sonsuz sayda nöqtə yerləşdiyindən, həmin ətrafdada X çoxluğunun sonsuz sayda nöqtəsi yerləşər. Deməli, C nöqtəsi X çoxluğunun limit nöqtəsidir.

Qeyd edək ki , teoremin doğruluğu üçün çoxluğun məhdud olması vacib şərtdir. Lakin sonsuz çoxluğun məhdudluğu limit nöqtəsinin vatlığıüçün kafi şərt olub zəruri deyildir.

Nəticə 1. Məhdud sonsuz çoxluqdan yığılan ardıcıllıq ayırmaq olar.

Doğurdan da , beləçoxluğun heç olmazsa bir limit nöqtəsi var. X çoxluğundan həmin nöqtəyə yığılan ardıcıllıq ayırmaq isə həmişə mümkündür .

Teorem 2 (Bolsan - Veyerştrass). Hər bir məhdud sonsuz $\{x_n\}$ ardıcıllığından yığılan altardıcıllıq ayırmaq olar.

İsbatı. Verilmiş $\{x_n\}$ ardıcıllığı sonsuz sayda müxtəlif nöqtələrdən təşkil olunarsa, onun hər hansı X_{no} həddi sonsuz sayda təkrar olunmalıdır. Bu halda həmin hədlərdən düzəlmiş

$$x_{n\,0},\ x_{n\,0}, \dots, x_{n\,0}, \dots$$

altardıcıllığı tələb edilən atlardıcıllıq olacaqdır.

$\{X_n\}$ ardıcıllığı sonsuz sayda müxtəlif ədədlərdən təşkil olunarsa $x=\{x_n\}$çoxluğuna nəticəni tətbiq etməklə bu halda teoremin doğruluğuna inanmaq olar.

Qeyd. Hər bir məhdud sonsuz ardıcıllıqdan yığılan monoton ardıcıllıq ayırmaq olar.Tutaq ki,$\{X_n\}$məhdud ardıcıllıq və a hər hansı (sonlu) ədəddir. Əgər istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün

$$a-\varepsilon<x_n \qquad (x_n < a+\varepsilon)$$

Bərabsizliyi n-in sonsuz sayda qiymətlərində,

$$a+\varepsilon<x_n \qquad (x_n < a-\varepsilon)$$

bərabərsizliyi isə n-in ancaq sonlu sayda qiymətlərində ödənilisə, onda a ədədinə $\{X_n\}$ ardıcıllığının yuxarı (aşağı) limiti deyilir və

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a)$$

və ya

$$\lim\ \sup x_n \qquad (\lim \inf x_n)$$

şəkilində yazılır.

Ardıcıllığın ancaq bir yuxarı (aşağı) limiti ola bilər. Məhdud $\{x_n\}$ ardıcıllığının həm sonlu yuxarı və həm sonlu aşağı limiti var və onlar arasında

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

münasibəti doğrudur.Bu münasibətdə bərabərlik işarəsi yalnız və yalnız o zaman olar ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti olsun. Bu halda

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Məhdud $\{X_n\}$ və$\{Y_n\}$ ardıcıllıqlarının yuxarı və aşağı limitləri üçün

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

münasibətləri doğrudur.

Nəhayət, qeyd edək ki, məhdud sonsuz ardıcıllıqdan yuxarı(aşağı) limitinə yığılan alt ardıcıllıq ayırmaq olar.

7.2.2. e ədədi, natural loqarifm

Əvvəlcə $y_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad (n = 1, 2, \dots)$**(1)** ardıcıllığının limitini tədqiq edək.

Nyuton binomu düsturuna əsasən:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} \cdot \frac{1}{n^3} +$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Bu bərabərliyi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

şəklində də yazmaq olar (2) bərabərliyinin sağ tərəfində (n+1) sayda hədd vardır. Bu bərabərliyi y_n+1 üçün yazaq:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)++\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

(3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hədlərin sayı (n+2) olur. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hədlər (2) bərabərliinin sağ tərəfindəki uyğun hədlərdən kiçik olmadığından, yəni

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Olduğundan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

və ya

$$y_n < y_{n+1} \qquad \textbf{(4)}$$

Bundan başqa, (2) bərabərliyinə əsasə

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3. \qquad \textbf{(5)}$$

(4) və (5) münasibətlərindən aydındır ki, (1) ardıcıllığı monoton artan və yuxarıdan məhduddur. Belə ardıcıllığın birinci teoremə görə sonlu limiti var.

Həmin limit e ilə işarə olunur.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \textbf{(6)}$$

e, irrasional ədəddir. Onun qiymətini təqribi hesablamaq olar:

$$e=2.718281828459045\ldots .$$

e ədədinin riyazi analizdə böyük əhəmiyyəti vardır. e ədədini çox zaman loqarifmin əsası hesab edirlər. e əsasına görə ədədlərinin loqarifminə natural loqarifm deyilir və «ln» ilə işarə olunur. N ədədinin natural loqarifmi «ln N» şəklində yazılır. Natural loqarifmdən istifadə etdikdə riyazi analizim bir sıra düsturları çox sadə şəkildə alınır. Buna görə də riyaziyyatda natural loqarifmdən çox geniş istifadə olunur.

Hər bir N ədədinin onluq və natural loqarifmləri arasında müəyyən əlaqə yaratmaq olar. Bu məqsədlə lnN=a qəbul edək. Onda $N=e^a$. Bərabərliyinin hər iki tərəfindən 10 əsasına görə loqarifm alsaq

$$\lg N=a \lg e$$

və a=ln N olduğuna görə:

$$\lg N= \ln N \cdot \lg e$$

Buradan

$$\ln N =\frac{\lg N}{\lg e}$$

Bu bərabərlikdən istifadə edərək, N ədədinin onluq loqarifmi məlum olduqda onun natural loqarifmini və tərsinə, N ədədinin natural loqarifmi məlum olduqda onun onluq loqarifmini tapmaq olar.

$$\lg e = \lg 2{,}718281... = 0{,}43429...$$

ədədinə keçmə modulu deyilir və M ilə işarə olunur:

$$M = \lg e = 0{,}43429... \, .$$

Aydındır ki,

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = 2{,}30258..$$

Misal 1. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}$ limitini hesablamalı. e ədədinin tərifinə əsasən:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3} = e.$$

7.2.3. Funksiyanın limiti

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $X=\{x\}$ çoxluğunda təyin olunmuşdur və a nöqtəsi bu çoxluğun limit nöqtəsidir (a nöqtəsi X çoxluğuna daxil ola da bilər, olmaya da bilər). Onda X çoxluğundan a-ya yığılan

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad \textbf{(1)}$$

($x_k \neq a$, $k=1, 2,...$)ardıcıllığını ayirmaq olar. Aydındır ki, X çoxluğu (a-e, a+e) ($\varepsilon>0$) və ($a, a+\varepsilon$) intervalları, [$a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$],[$a-\varepsilon$, a] və [a, $a+\varepsilon$] parçaları, [$a-\varepsilon$, a) yarım intervalı və s. ola bilər. $y=f(x)$ funksiyasının (1) nöqtələrində aldığı qiymətlər

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ... \qquad \textbf{(2)}$$

ardıcıllığını əmələ gətirir. Aydındır ki, X çoxluğundan a-ya yığılan çox ardıcıllıq ayırmaq olar.

a-ya yığılan (1) ardıcıllıqlarına uyğun olaraq (2) ardıcıllıqlarının yığılması haqqında nə demək olar?

Burada iki hal ola bilər: ola bilər ki, a-ya yığılan (1) ardıcıllıqlarına uyğun olan (2) ardıcıllıqlarının hamısı eyni bir A ədədinə yığılır, ola da bilər ki, eyni bir A ədədinə yığılmır.

Birinci halda deyirlər ki, x arqumenti a-ya yaxınlaşdıqda (x→a) və ya x=a nöqtəsində f(x) funksiyasının limiti var və A ədədi onun limitidir. Buna

$$\lim_{x \to a} f(x)=A \qquad \textbf{(3)}$$

və ya

$$f(x)\to A \ (x\to a) \qquad \textbf{(4)}$$

şəkilində yazırlar.

İkinci halda deyirlər ki, f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limiti yoxdur. İndi funksiya limitinin dəqiq tərifini verək.

Tərif1. X çoxluğunun a-ya yığılan istənilən $\{x_n\}(x_n\neq a, n=1, 2, ...)$ nöqtələri ardıcıllığına f(x) funksiyasının uyğun olan $\{f(x_n)\}$ qiymətləri ardıcıllıqlarının hamısı eyni bir A ədədinə yığıldıqda, həmin A ədədinə $x\to a$ şərtində f(x) funksiyasının limiti deyilir.

Buradan aydındır ki a-ya yığılan heç olmazsa iki $\{x`_n\}$ və $\{x``_n\}$ ardıcıllığına f(x) funkisiyasının $\{f(x`_n)\}$ və $\{f(x``_n)\}$ uyğun qiymətləri ardıcıllıqları müxtəlif limitlərə yığılarsa onda f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limiti yoxdur.

Funksiyanınnöqtədəlimitinin başqa tərifi dəvardır.

Tərif 2. Tutaq ki , sonlu a və A ədədləri və istənilən $\varepsilon> 0$ ədədi üçün elə $\varphi > 0$ ədədi var ki, x-in X çoxluqundan götürülmüş və

$$0< |x-a| < \varphi \qquad \textbf{(5)}$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində
$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \textbf{(6)}$$
münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə $x \to a$ şərtində f(x) funksiyasınıın limiti deyilir.

Qeyd edək ki, A ədədi $x \to a$ şərtində f(x) funksiyasının limiti olduqda (6) bərabərliyinin x=a qiymətində ödənilib ödənilməməsinin heç bir əhəmiyyəti yoxdur. f(x) funksiyası x=a nöqtəsində təyin olunduqda isə onun həmin nöqtədə limiti xüsusi f(a) qiymətinə bərabər ola da bilər, olmaya da bilər.

Funksiya qiymətinin 1-ci tərifinə "limitin ardıcıllıq dilində tərifi" (və ya Heyne mənada tərifi) 2-ci tərifinə isə " limitin ε, δ dilində tərifi" (və ya Koşi mənada tərifi) deyilir.

Teorem 1. Funksiyanın nöqtədə limitinin 1 və 2-ci tərifləri ekvivalentdir (eynigüclüdür). Bu o deməkdir ki, A ədədi təriflərin birinə görə f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limitidirsə, təriflərin digərinə görə də həmin nöqtədə f(x)-in limitidir.

İsbatı. Fərz edək ki, A ədədi təriflərin birinə görə f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limitidir, lakin 2-ci tərifə görə x=a nöqtəsində limiti deyil. Bu o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı 2-ci tərifin tələblərini ödəyən $\varphi > 0$ ədədi tapmaq mümkün deyil, yəni elə $\varepsilon_0 > 0$ ədədi var ki,ona qarşı götürülmüş istənilən $\varphi > 0$ ədədi üçün x-in $|x - a| < \varphi$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində (φ) bərabərsizliyi ödənilmir, x-in (5) münasibətini ödəyən heç olmazsa bir x^* qiyməti var ki
$$|f(x^*) - A| \geq \varepsilon_0 \quad \text{olur}$$

Beləliklə б ədədinə ardıcıl olaraq $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$qiymətlərini verməklə elə

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad \textbf{(7)}$$

nöqtələrini taparıq ki,

$$|x_k - a| < \frac{1}{k} \, |f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0 \qquad \textbf{(8)}$$

Münasibətləri eyni zamanda ödənilər. $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ bərabərsizliyi ödənildiyindən (7) ardıcıllığı a ədədinə yığılar. Onda 1-ci tərifə görə

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = A$$

olmalıdır. Bu o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon_0 > 0$ ədədinə qarşı elə $N = N(\varepsilon_0)$ var ki, k-nın $k \geq N$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x_k) - A| < \varepsilon_0 \qquad \textbf{(9)}$$

bərabərsizliyi ödənilir. (8) bərabərsiziliklərinin ikincisinə görə isə (9) bərabərsizliyi ödənilə bilməz.

Alınan ziddiyət göstərir ki A ədədi ikinci tərifə görə də f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limitidir.

İndi fərz edək ki, a ədədi 2-ci tərifə görə f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limitidir. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, x-in $|x - a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu halda, $\{x_n\}$ ardıcıllığı a-ya yığılan istənilən ardıcıllıq olduqda $\varphi > 0$ ədədinə qarşı elə N tapmaq olar ki,

$$|x_n - a| < \varphi \quad (n \geq N)$$

bərabərsizliyi ödənilsin. Belə x_n nöqtələri üçün:

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \ (n \geq N),$$

olar. Bu isə

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

olduğunu, yəni A ədədi 1-ci tərifə görə $f(x_n)$-in$x=a$ nöqtəsində limiti olduğunu göstərir.

Funksiya limitinin 1 və 2-ci tərifləri ekvivalent olduğundan onların hər birindən istifadə etmək olar.

Misal 1.

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0) \qquad \textbf{(10)}$$

funksiyasının x=0 nöqtəsində limitini hesablamalı.

Bu məqsədlə 0-a yığılan $x`_n=\frac{1}{n\pi}$ (n=1, 2, ...) və $x``_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ (n=1, 2, ....) ardıcıllıqıarını götürək: $x`_n \to 0, (n\to\infty)$ və $x``\to 0$ $(n\to\infty)$. Bu ardıcıllıqlara (10)funksiyasının uyğun olan qiymətləri

$$f(x`_n)=\sin\frac{1}{x`n}=\sin n\pi=0 \quad (n=1,2, ...)$$

və $f(x``_n)=\sin\frac{1}{x``n}=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=1$ (n= 1,2, ...) olduğundan $\{f(x`_n)\}$ və $\{f(x``_n)\}$ ardıcıllıqları müxtəlif ədədlərə yığılır.

$$f(x`_n)\to 0 \ (n\to\infty)$$
$$f(x``_n)\to 0 \ (n\to\infty)$$

Funksiya limitini birinci tərifinə görə (10) funksiyasını x=0 nöqtəsində limiti yoxdur.

Misal 2.

$$f(x)=\begin{cases} 1+x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

Funksiyasının x=0 nöqtəsində limitinin 1-ə bərabər olduğunu göstərməli.

Bu məqsədlə (11) funksiyası üçün $x \neq 0$ nöqtəsində doğru olan

$$|f(x) - 1| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

bərabərsizliyini nəzərə alaraq, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\delta = \varepsilon$ seçmək kifayətdir. Onda x-in $|x - 0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - 1| \leq |x| < \varphi = \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğru olar, bu da

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = 1$$

olduğunu göstərir.

İndi $\lim_{x \to a} f(x) = A$ olmasının həndəsi izahını verək. Bu məqsədlə funksiya limitinin 2-ci tərifindən istifadə edək (6) bərabərsizliyinin ona ekvivalent olan

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$

və ya

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

şəklində yazaq. (12) bərabərsizliyi göstərilir ki, $M[x, f(x)]$ nöqtəsi $y = A - \varepsilon$ və ya $y = A + \varepsilon$ düz xəttləri arasında yerləşir.

Deməli, $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ olması həndəsi olaraq o deməkdir ki, (xOy) müstəvisi üzərində $y = A - \varepsilon$ və $y = A + \varepsilon$ düz xətləri ilə hüdudlanmış ixtiyari zolaq üçün elə $(a - \delta, a + \delta)$ intervalı var ki, f(x) funksiyasının bu intervaldakı qrafikinin (qrafik üzərində a-ya uyğun olan nöqtə müstəsna olmaqla) bütün nöqtələri (NQ əyrisi) həmin zolağın daxilində yerləşir.

7.3.1. Limiti olan funksiyanın xassələri

Fərz edək ki, y=f(x) funksiyası $x=x_0$ nöqtəsini öz daxilinə alan hər hansı intervalda təyin olunmuşdur.

Teorem 1. x_0 nöqtəsində sonlu limiti olan f(x) funksiyası həmin nöqtənin müəyyən ($x_0-\delta,\ x_0+\delta$) ətrafında (x_0 nöqtəsi müstəsna olmaqla) məhduddur.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)\to A(x\to x_0)$. Onda $\varepsilon=1$ ədədi üçün elə $\delta>0$ var ki, x-in $0<|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

münasibəti ödənilir. Buradan, x-in ($x_0-\delta,\ x_0+\delta$) intervalında yerləşən bütün qiymətləri (x_0 müstəsna olmaqla) üçün:

$$|f(x)|\le|A|+|f(x)-A|<|A|+1=M$$

Nəticə. X_0 nöqtəsinin heç bir ətrafında məhdud olmayan f(x) funksiyasının $x\to x_0$ şərtində (və ya $x=x_0$ nöqtəsində) sonlu limiti yoxdur.

Teorem 2. f(x) funksiyasının bir x_0 nöqtəsində müxtəlif iki A və B limiti ola bilməz.

Bu teoremin doğruluğu ardıcıllığın limitinin yeganə olması haqqındakı teoremdən aydındır.

Teorem 3. $f(x)\to A(x\to x_0)$ və A>B (A<B) olduqda x_0 nöqtəsinin elə ($x_0-\delta,\ x_0+\delta$) ətrafı var ki, x-in bu ətrafdakı bütün qiymətlərində (x_0 müstəsna olmaqla)

$$f(x)>B \quad (f(x)<B)$$

İsbatı. A>B olduqda $f(x)\to A(x\to x_0)$ olduğundan

ε =A-B ədədi üçün elə δ >0 var ki, x-in 0< $|x - x_0|$ < δ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{və ya} \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

münasibəti ödənilər. Deməli, x-in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervalındkı bütün qiymətlərində (x_0 müstəsna olmaqla)

$$f(x) > A - \varepsilon \ = B$$

Nəticə. $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = A > 0$ (A<0) olduqda $x_0$nöqtəsinin elə$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ ətrafı var ki, x-in bu ətrafdakı bütün qiymətlərində (x_0 nöqtəsi müstəsna olmaqla)

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$$

Teorem 4.(Koşi kriteriyası). y=f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində sonlu limitinin olması üçün aşağıdakı şərtin ödənilməsi zəruri və kafidir: istənilən ε >0 ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon)$ >0, ədədi var ki, x-in 0< $|x' - x_o| < \delta$ və 0< $|x'' - x_o|$ < δ bərabərsizliklərini ödəyən ixtiyari iki x' və x'' qiymətlərində

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu teoremin isbatını vermirik.

İsbat olunan teoremlərdə və 4-cü teoremdə x_0 əvəzinə $-\infty$, $+\infty$ simvollarının hər birini götürmək olar.

Sonsuz kiçilən funksiyalar.

Burada biz $x=x_0$ nöqtəsini öz daxilinə alan hər hansı intervalda təyin olunmuş (x_0 nöqtəsi müstəsna ola bilər) f(x) funksiyasına baxacağıq.

Limiti $x=x_0$ nöqtəsində sıfra bərabər olan y=f(x) funksiyasına həmin nöqtədə və ya $x \to x_0$-da sonsuz kiçilən funksiya deyilir.

Teorem 1. A ədədi $x \to x_0$ şərtində f(x)-in limiti olması üçün α(x)=f(x)-A fərqinin $x \to x_0$şərtində sonsuz kiçilən olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

Şərtin zəruriliyi. Tutaq ki, f(x) $\to$A ($x \to x_0$). Onda ixiyari ε >0 üçünelə δ >0var ki,x-in $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$) münasibətini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$$

(1)

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan

$$\alpha(x) \to 0 \quad (x \to x_0) \text{ alınır.}$$

Şərtin kafiliyi. $\alpha(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$ olduqda x-in $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$) münasibətini ödəyən bütün qiymətlərində (1) bərabərsizliyi ödənilər, bu da f(x) $\to$A($x \to x_0$) olması deməkdir.

Bu teoremdən aydın olur ki, f(x)$\to$A($x \to x_0$) olması funksiyanın

$$f(x)=A+\alpha(x), \qquad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

(2)

Şəklində göstərilməsinə ekvivalentdir.

Misal 1. f(x)=5+(x-1)^2 olduqda $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, çünki,

$$\lim_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$$

7.3.2.Funksiyanın sağ və sol limiti

Funksiya limitinin tərifindən aydındır ki, A ədədi x=a nöqtəsində f(x) funksiyasının limitidirsə, onda x-in a-ya yaxın və onun istənilən tərəfində (sol və sağ) yerləşən bütün qiymətlərində

$$|\ f(x)-A\ |<\varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Funksiyanın x=a nöqtəsində limiti olmadıqda isə (1) bərabərsizliyi x-in a-nın müəyyən tərəfində (məsələn, ya solunda, ya da sağında) yerləşən qiymətlərində ödənilə bilər. Bu halda funksiyanın həmin nöqtədə birtərəfli limitindən danışmaq olar.

Tərif. Tutaq ki, sonlua və A ədədləri verildikdə istənilən $\varepsilon>0$ əədi üçün elə $\delta>0$ ədədi var ki, x-in X çoxluğundan götürülmüş və

$$0<a-x<\delta \qquad \textbf{(2)}$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|\ f(x)-A\ |<\varepsilon \qquad \textbf{(3)}$$

münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə $x\to a$ şərtində (və ya x=a nöqtəsində) f(x) funksiyasının sol limiti deyilir və

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ (x\prec a)}} f(x)=\lim_{x\to\alpha-0} f(x)=f(a-0) \qquad \textbf{(4)}$$

şəklində işarə olunur.

Bu tərifdəki (2) bərabərsizliyini $0<x-a<\delta$ ilə əvəz etsək, f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində sağ limitinin tərifini alarıq. Funksiyanın sağ limiti

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ (x\prec a)}} f(x)=\lim_{x\to\alpha+0} f(x)=f(a+0) \qquad \textbf{(5)}$$

şəklində işarə olunur.

f(x) funksiyasının x=0 nöqtəsində sol və sağ limitini uyğun olaraq f(-0) və f(+0) ilə işarə edirlər

Teorem.y=f(x) funksiyasının x=a nöqtəsində limitinin olması üçün onun həmin nöqtədə sol və sağ limitlərinin varlığı və bir-birinə bərabər olması zəruri və kafi şərtdir.

İsbatı. Tutaq ki, bərabərsizliklərini ödəyən bütün qiymətlərində. Onda (3) bərabərsizliyi, x-in 0< $|x-a|<\delta$ münasibətini ödəyən və buna görə də x-in 0<a-x< δ və0<x-a< δ bərabərsizliklərini ödəyən büytün qiymətlərində ödənilir. Deməli,

$$A=\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(a-0)=f(a+0)$$

yəni şərtin zəruriliyi doğrudur.Şərtin kafiliyini isbat edək.

İndi fərz edək ki, f(x)-in x=a nöqtəsində bir-birinə bərabər olan sağ və sol limitləri var:

$$A=f(a-0)=f(a+0)$$

Onda sol və sağ limitlərin tərifinə görə istənilən ε >0 ədədi üçün elə δ_1 və δ_2 ədədləri var ki, x-in 0<a-x< δ_1 və0<a-x< δ_2 bərabərsizliklərini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad \textbf{(6)}$$

bərabərsizliyi ödənilir.Buradan, $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$ olarsa x-in 0< $|x-a|<\delta$ bərabərsizliklərini ödəyən bütün qiymətlərində (6) bərabərsizliyinin ödənildiyi alınır, yəni

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

a və A ədədlərinin hər hansı biri və ya hər ikisi $-\infty,\ +\infty$ olduqda da funksiyanın sol və sağ limiti (sonlu və ya «sonsuz») uyğun şəkildə təyin olunur.

Misal 1.f(x)= $[x]$ funksiyasının x=n (n natural ədəddir) nöqtəsində sol və sağ limitini hesablamalı.

Funksiyanın tərifinə görə

$$f(x)=\begin{cases} n-1, n-1 \le x < n \text{olarsa}, \\ n, \quad n \le x < n+1 \ \text{olarsa} \end{cases}$$

olduğubdan istənilən $\varepsilon > 0$ üçün x-in $0<n-x<\delta$ (<1) qiymətlərində

$\left|f(x)-(n-1)\right|=0 < \varepsilon$ və x-in $0<n-x<\delta$ (<1) qiymətlərində

$$\left|f(x)-n\right|=0<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir.Deməli,

$$f(n-0)=n-1 \text{ və } f(n+0)=n$$

Aydındır ki, funksiyanın x=n nöqtəsində limiti yoxdur.

Misal 2. f(x)=siqnx funksiyasının x=0 nöqtəsində sol və sağ limitini hesablamalı. x-in x<0 qiymətlərində f(x)= -1 və x>0 qiymətlərində isə f(x)=1 olduğundan

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x\prec 0}} f(x) = -1 = f(-0)$$

və

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x\succ 0)}} f(x) = 1 = f(+0)$$

Misal 3. $\mathbf{f(x)=2}^{\frac{1}{x}}$ funksiyası üçün

$$f(-0)=0 \text{ və } f(+0)=+\infty$$

7.3.3. Limitlər haqqında əsas teoremlər

Əvvəlki paraqrafda olduğu kimi burada da biz, arqumentin sonlu x_0 nöqtəsinə yaxınlaşdığı halda limitləri öyrənəcəyik. Lakin aşağıda isbat edəcəyimiz teoremlər arqumentin $(-\infty)$ və $(+\infty)$ - a yaxınlaşdığı hallarda da doğrudur.

Teorem 1. Sonlu limitləri olan sonlu sayda $f_k(x)$ $(k=1, 2, ...,n)$ funksiyalarının cəminin limiti onların limitləri cəminə bərabərdir:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_k(x) \qquad \textbf{(1)}$$

İsbatı. Fərz edək ki, $f_k(x)\to A_k$ $(x\to x_0)$ $(k=\overline{1,n})$. Onda əvvəlki paraqrafda isbat etdiyimiz 1-ci teoremə görə

$$F_k(x)=A_k+\alpha_k(x) \ (k=1,2,...,n), \qquad \textbf{(2)}$$

burada

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_k(x)=0 \quad (k=\overline{1,n})$ (2) bərabərliklərinəəsasən

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)$$

Sonlu sayda sonsuz kiçilənlərin cəmi sonsuz kiçilən olduğundan

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)$$

funksiyası$x\to x_0$şərtində sonsuz kiçiləndir. Onda:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k + \alpha(x),$$

bu da 1-ci teoremə görə

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to \sum_{k=1}^{n} A_k \ (x\to x_0)$$

və ya (1) bərabərliyini doğru olduğunu göstərir.

Teorem 2. Sonlu limitləri olan sonlu sayda $f_k(x)(k=1,2,..n)$ funksiyalarının hasilinin limiti onların limitləri hasilinə bərabərdir:

$$\lim_{x\to x_0}\prod_{k=1}^{n} f_k(x)=\prod_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_k(x) \qquad \textbf{(3)}$$

İsbatı.Ümumiliyi pozmadan, teoremi n=2 olduqda isbat edək. Əvvəlki teoremin isbatında olduğu kimi yenə də$f_k(x)\to A_k$ $(x\to x_0)$ qəbul etsək (2) bərabərliklərini alarıq

Həmin bərabərliklərəəsasən

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=\left[A_1+\alpha_1(x)\right]\left[A_2+\alpha_2(x)\right]=$$
$$=A_1A_2+\left[A_1\alpha_2(x)+A_2\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)\right]$$

və ya

$\alpha(x)=A_1\alpha_2(x)+A_2\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)$ qəbul etsək, onda:

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=A_1\cdot A_2+\alpha(x)$$

$\alpha(x)$funksiyası sonsuz kiçilən olduğundan(teorem 3,4) axırıncı bərabərlikdən (teorem1) (3) münasibətinin n=2 olduqda doğruluğu aydındır.

Nəticə 1. Sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\lim_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=c\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]$$

Nəticənindoğruluğu sabitin limitinin özünə bərabər olmasından $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ və teoremdən aydındır.

Nəticə 2. Sonlu limiti olan f(x) və $\varphi($ x) funksiyalarının fərqinin limiti onların limitləri fərqinə bərabərdir:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

Doğrudan da,

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)+(-1)\varphi(x)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0}(-1)\varphi(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

Nəticə 3. Sonlu limiti olan f(x) funksiyasıüçün

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

bərabərliyi doğrudur.

Teorem 3. f(x) və $\varphi($ x) funksiyalarının sonlu limitləri varsa və $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$ olarsa, onların nisbətinin limiti limitlərinin nisbətinə bərabərdir:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} \qquad \textbf{(4)}$$

İsbatı. Fərz edək ki, f(x)→A (x→x_0) vəφ(x)→B (x→x_0).Onda f(x)=A+ $\alpha(x)$ və $\varphi(x)=B+\beta(x)$, burada $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ və $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ Bu münasibətlərəəsasən

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right) \text{ və ya}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}+\gamma(x) \qquad \textbf{(5)}$$

Burada

$\gamma(x)=\dfrac{\alpha(x)B-A\beta(x)}{B(B+\beta(x))}$ ifadəsi $x\to x_0$ olduqda sonsuz kiçilən olduğundan (5) göstərilişindən (4) alınır.

Misal. Aşağıdakı limitu tapmalı:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8x^2+4}{4x+1}$$

Limitlər haqqında isbat etdiyimiz 3-cü, 1-ci və 2-ci teoremlərdən ardıcıl istifadə etsək:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8x^2+4}{4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(8x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x+1)}=\frac{8\lim\limits_{x\to 2}x^2+4}{4\lim\limits_{x\to 2}x+1}=\frac{36}{9}=4$$

Bərabərsizlikdə limitə keçmək

Teorem 1. **x-in x_0-ın** müəyyən ətrafındakı bütün qiymətlərində ($x\neq x_0$) $f(x)\geq q$ bərabərsizliyi ödənilirsə və $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limiti sonludursa, onda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\geq q \qquad \textbf{(1)}$$

İsbatı. x_0 nöqtəsinə yığılan ixtiyari x_n ardıcıllığını($x_n\neq x_0$) götürək. Onda n-nin kifayət qədər böyük bütün qiymətlərində

$$f(x_n)\geq q \quad (n>n_0)$$

bərabərsizliyi ödənilər.Burada limitə keçsək və funksiya limitinin tərifini nəzərə alsaq (1) bərabərsizliyi alınar.

Nəticə. $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarının $x\to x_0$şərtində limiti varsa vəx_0-ın müəyyən ətrafındakı bütün ($x\neq x_0$) qiymətlərində

$$\varphi(x)\geq\psi(x)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda:

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)\geq\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

Nəticənin doğruluğuna inanmaq üçünf(x)= $\psi(x)-\varphi(x)$ funksiyasına teoremi tətbiq etmək (q=0 hesab edərək) kifayətdir.

Teorem 2.Əgər sonlu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$$

limiti varsa vəx-in x_0-ın müəyyən ətrafındakı bütün (x_n $\neq x_0$) qiymətlərində f(x)$\leq\psi(x)\leq\varphi(x)$.

Tutaq ki, $\{x_n\}=\{x_1,x_2,...,x_n,...,\}$, $\{y_n\}=\{y_1,y_2,...,y_n,...,\}$ ardıçıllıqları və $m\neq 0$ ədədi verilmişdir. Onda bu ardıcıllıqlar üzərində aşağıdakı əməlləri aparmaq olar:

1) $m\{x_n\}=\{mx_n\}=mx_1,mx_2,...,mx_n,...,$

2) $\{x_n\}\pm\{y_n\}=\{x_n\pm y_n\}=x_1\pm y_1,x_2\pm y_2...,x_n\pm y_n,...,$

3) $\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n\cdot y_n\}=x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2...,x_n\cdot y_n,...,$

4) $y_n\neq 0;\ \dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=\dfrac{x_1}{y_1},\dfrac{x_2}{y_2},...,\dfrac{x_n}{y_n},...,$

Bütün elementləri eyni olan ardıçıllıq, sabit və ya stasionar ardıçıllıq adlanır.

VIII FƏSİL. FUNKSİYALARIN KƏSİLMƏZLİYİ

8.1.1. Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi

Tərif 1.(a,b) intervalında təyin olunmuşf(x) funksiyasının $x_0 \in (a,b)$ nöqtəsindəki limiti $f(x_0)$-a bərabər olarsa, başqasözlə

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

olarsa, deyirlər ki, f(x) funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal 1.$f(x)=x^2$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyini aydınlaşdırın.

Həlli: Funksiya hər bir $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ nöqtəsində kəsilməzdir, çünki

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

Misal 2.Aşağıdakı funksiyanın kəsilməzliyini tədqiq edin :

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x^2 + 1 & x < 0 . \end{cases}$$

Həlli. Bu funksiya x=0 nöqtəsindən başqa hər bir $x \in (-\infty, +\infty)$ nöqtəsində kəsilməzdir. x=0 nöqtəsində isə funksiya kəsilməz deyil, belə ki,

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x^2 + 1) = 1,$$

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} x = 0.$$

8.1.2.Sağdan (soldan) kəsilməz funksiyalar

Tərif 2. Əgər

$$\mathbf{f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0))}$$

olarsa, onda deyirlər ki, f(x) funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində **soldan (sağdan) kəsilməzdir.**

Əgər f(x) funksiyası[a,b] parçasında təyin olunmuşsa, onda aydındır ki, onun x=a nöqtəsində sağdan, x=b nöqtəsində isə soldan kəsilməzliyindən söhbət gedə bilər. Əgər $x_0 \in (a,b)$ olarsa, onda f(x) funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində yalnız və yalnız o zaman kəsilməz olur ki, o həmin nöqtədə həm sağdan və həm də soldan kəsilməz olsun.

8.1.3.Artım vasitəsilə kəsilməzliyin tərifi

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifini başqa cür də vermək olar. **$x \in$ (a,b) və$x_0 \in (a, b)$ olarsa,$\Delta x =$ $x-x_0$fərqinə arqumentin artımı, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ fərqinə isə funksiyanın $x=x_0$nöqtəsində artımı deyilir**:

$$\mathbf{\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Tərif 2.Əgər f(x) funksiyası(a,b) intervalında təyin olunmuşsa və$x_0 \in (a, b)$üçün

$$\mathbf{\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0}$$

olarsa, onda deyirlər ki, f(x) funksiyası$x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Misal.$f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ funksiyasının hər bir $x=x_0 > 0$ nöqtəsində kəsilməz olduğunu göstərək.

Həlli. Bunun üçün $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\,|$qiymətləndirək:

$$\mathbf{0\leq |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\,| = \frac{|x-x_0\,|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}}$$

$\frac{1}{\sqrt{x_0}}$sabitolduğundan

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} = 0$$

olur. Onda

$$\lim_{x\to x_0}|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\,| = 0 \text{ və ya } \lim_{x\to x_0}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right) = 0$$

olur və buna görə də

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

alırıq.

Funksiya X aralığının hər bir nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda deyirlər ki, həmin funksiya X aralığında kəsilməzdir.

8.2. Nöqtədə kəsilməz funksiyanın əsas xassələri

Teorem 1. x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların cəmi (fərqi) həmin nöqtədə kəsilməzdir.

Teorem 2. x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların hasili həmin nöqtədə kəsilməzdir.

Teorem 3.Əgər məxrəcdəki funksiyanın x_0 nöqtəsindəki qiyməti sıfırdan fərqli olarsa , onda bu nöqtədə kəsilməz olan iki funksiyanın nisbəti həmin nöqtədə kəsilməzdir.

Bu teoremlər bilavasitə funksiyaların limitlərinin xassələri haqqında olan uyğun teoremlərdən alınır.

Misal 1. $f(x) = x^n$, $x\in R, n \in N$funksiyası bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda kəsilməzdir. Çünki $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}$ funksiyası n sayda kəsilməz funksiyanın hasilidir.

Misal 2. $f(x) = Cx^n$ (C-sabitdir) funksiayası $R =(-\infty, +\infty)$ çoxluğunda kəsilməzdir, çünki həm $u(x)=C$ sabir funksiyası və həm də $\psi(x) = x^n$ funksiyası həmin çoxluqda kəsilməzdir.

Misal 3. $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1} x+a_n$ çoxhədli funksiyası sonlu sayda kəsilməz (bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda) funksiyaların cəmindən ibarət olduğu üçün kəsilməzdir.

Misal 4. İki çoxhədli funksiyanın nisbəti olan

$$\mathbf{f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}}$$

kəsr rasional funksiya məxrəcin sıfra çevrildiyi nöqtələrdən başqa bütün nöqtələrdə kəsilməzdir.

8.3. Parçada kəsilməyən funksiyanın xassələri

Burada [a,b] parçasında kəsilməyən y=f(x) funksiyasının bir sıra əsas xassələri şərh olunur. Qeyd edək ki, f(x) funksiyasının parçanın a sol uc nöqtəsində kəsilməzliyi dedikdə, onun həmin nöqtədə sağdan kəsilməzliyi $(f(a+0) = f(a))$, b sağ uc nöqtəsində kəsilməzliyi dedikdə isə həmin nöqtədə soldan kəsilməzliyi $(f(b-0) = f(b))$ başa düşülür.

Teorem 1. (Veyerştrassın birinci teoremi). Sonlu $[a,\ b]$ parçasında kəsilməyən f(x) funksiyası həmin parçada məhduddur.

İsbatı. Əksinə fərz edək ki, f(x) funksiyası $[a,\ b]$ parçasında məhdud deyildir.Onda hər bir natural n ədədi üçün elə $x_n \in [a,b]$ nöqtəsi var ki,

$$|f(x_n)| > n \quad (n = 1,2,...) \qquad \textbf{(1)}$$

olur. Bu $\{x_n\}$ ardıcıllığı məhdud olduğundan ($a \le x_n \le b$), ondan bir $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsinə yığılan $\{x_{n_k}\}$ ardıcıllığı ayırmaq olar: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Şərtə görə f(x) funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməyən olduğundan x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir. Onda kəsilməzliyin tərifinə görə $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = f(x_0)$ Bu isə (1) bərabərsizliyinə ziddir. Deməli, f (x) funksiyası $[a,\ b]$ parçasında məhduddur.

Xassə 2. (Veyerştrassın ikinci teoremi). Sonlu $[a,\ b]$ parçasında kəsilməyən f(x) funksiyası bu parçanın heç olmasa bir α nöqtəsində özünün həmin parçadakı dəqiq aşağı sərhəddini, heç olmasa bir β nöqtəsində isə dəqiq yuxarı sərhəddini alır, yəni

$$f(\alpha) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = m_{0,} \qquad f(\beta) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = M_0 \qquad \textbf{(2)}$$

İsbatı. Tutaq ki, f(x) funksiyası $[a,\ b]$ parçasının heç bir nöqtəsində M_0 qiymətini almır. Onda x-in $[a,\ b]$-dəki bütün qiymətlərində $f(x)$ <M_0 olar.Yeni

$$\varphi(x) = \frac{1}{M_0 - f(x)}$$

funksiyası düzəldək. $\varphi(x)$ funksiyası $[a,\ b]$ parçasında kəsilməyən olduğundan 1 xassəyə görə məhduddur:

$$\varphi(x) \leq M_1 \ (M_1 > 0).$$

Buradan:

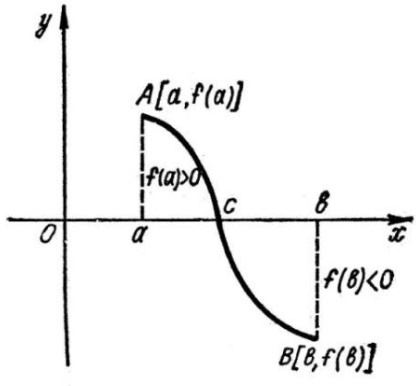
$$f(x) \leq M_0 - \frac{1}{M_1} \quad (a \leq x \leq b)$$

(bu isə M_0 ədədinin $[a,b]$ parçasında f(x) funksiyasının dəqiq yuxarı sərhədi olmadığını göstərir).Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil, yəni heç olmasa bir $\beta \in [a,b]$ nöqtəsində $f(\beta) = M_0$ olar.

Funksiyanın heç olmasa bir $\alpha \in [a,b]$ nöqtəsində dəqiq aşağı sərhəddini alması da eyni qayda ilə isbat olunur.

Xassə 3. $[a,\ b]$ parçasında kəsilməyən y=f(x) funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində müxtəlifişarəli qiymətlər alırsa, onda a və b nöqtələri arasında yerləşən ən azı bir c(a <c<b) nöqtəsi var ki, bu nöqtədə f(x) funksiyası sıfra çevrilir: f(c)=0.

Bu xassəni çox sadə həndəsi mənası var: absis oxunun müxtəlif tərəflərində yerləşən $A[a, f(a)]$ və $B[b, f(b)]$ nöqtələrini (f(a) >0, f(b) <0) və yaxud da (f(a) < 0, f(b) >0) birləşdirən və kəsilməz y=f(x) funksiyasının qrafiki olan əyri Ox oxunu heç olmasa bir c nöqtəsində kəsir.



Şəkil 1.

f(c) = 0 olduqda c nöqtəsinə f(x) funksiyasının sıfrı deyilir.

Xassə 4. $[a,\ b]$ parçasında kəsilməyən y=f(x) funksiyası həmin parçanın uc nöqtələrində bərabər olmayan A=f(a)≠B=f(b) qiymətlərini alırsa, onda həmin A və B ədədləri arasında yerləşən hər bir C ədədi üçün $[a,\ b]$ parçasında yerləşən ən azı bir ξ nöqtəsi var ki, f(ξ)=C olar.

8.4 . Tərs funksiyanın kəsilməzliyi

Verilmiş oblastda monoton olan y=f(x) funksiyasının tərs funksiyasının varlığı və funksiyanın qiymətlər çoxluğunda onun monoton olmasıəvvəldən məlumdur.

İndi tərs funksiyanın kəsilməzliyi haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem. $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməyən və artan (ya da azalan) y=f(x) funksiyasının tərs funksiyası olan $x=\varphi(y)$ funksiyası $[c,d]$ $(c=f(a),\quad d=f(b))$ parçasında kəsilməyəndir.

İsbatı.Tərs funksiyanın istənilən $y_0\in[c,d]$ nöqtəsində kəsilməz olduğunu isbat etmək üçün həmin nöqtəyə yığılan ixtiyari $\{y_n\}$ ardıcıllığını götürək:

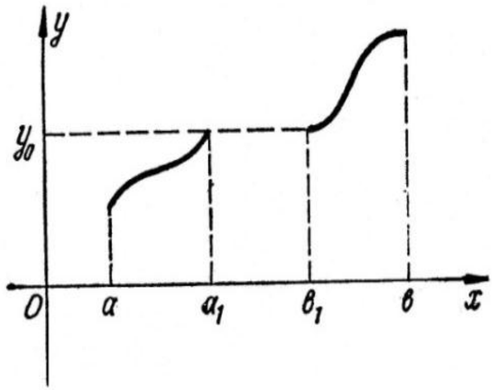
$y_n\to y_0\ (n\to\infty), y_n\in[c,d]\ (n=1,2,...)x_0=\varphi(y_0)$ və $x_n=\varphi(y_n)$ olarsa, onda $x_0=f(x_0)$ və $y_n=f(x_n)$ Kəsilməzliyin tərifinə görə $x=\varphi(y)$ funksiyasının y_0 nöqtəsində kəsilməz olduğunu yəqin etmək üçün istənilən $y_n\to y_0\ (n\to\infty)$ ardıcıllığıüçün həmişə $x_n=\varphi(y_n)\to\varphi(y_0)=x_0(n\to\infty)$ olduğunu göstərmək kifayətdir. Bunu isbat etmək üçün əksini fərz edək. Tutaq ki, elə $\{x_{n_k}\}$ardıcıllığı var ki, x_0 nöqtəsində deyil, başqa x* nöqtəsinə yığılır $(x^*\in[a,b],\ x^*\neq x_0)$, onda f(x) artan funksiya olduğundan $f(x^*)\neq f(x_0)$.

Şərtə görə bütün $f(x_{n_k})=y_{n_k}$ ardıcıllıqları $y_0=f(x_0)$ nöqtəsinə yığılır:

$$f(x_{n_k})=y_{n_k}\to y_0=f(x_0)\quad (k\to\infty).$$

O biri tərəfdən isə $x_{n_k}\to x^*\ (k\to\infty)$ olduğundan f(x) funksiyasının kəsilməzliyinə görə $f(x_{n_k})\to f(x^*)\ (k\to\infty)$ olmasıdır.Deməli, $\{f(x_{n_k})\}$ ardıcıllığı iki müxtəlif $f(x_0)$ və $f(x^*)$ limitlərinə yığılır. Bu isə ola bilməz. Alınan ziddiyyət teoremin doğru olduğunu göstərir.

Bu teoremdə funksiyanın təyin oblastı olaraq parça əvəzinə interval da götürmək olar.



Şəkil 1.

Lakin təyin oblastı parça və intervaldan fərqli oblast götürüldükdə teorem doğru olmaya bilər.

Doğrudan da, təyin oblastı iki $[a, a_1]$ və $[b_1, b]$ parçalarından ibarət olan və monoton artan $y = f(x)$ funksiyasının $x = \varphi(y)$ tərs funksiyası y_0 nöqtəsində kəsiləndir (şəkil 1).

IX FƏSİL. ELEMENTAR FUNKSİYALARIN KƏSİLMƏZLİYİ

9.1.1. Kəsilmə nöqtələri

Verilmlşf(x) funksiyasının təyin oblastına daxil olan $x_0$nöqtəsinə o zaman onun kəsilmə nöqtəsi deyilir ki, həmin nöqtədə

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərliyi ödənilməsin.Elementar funksiyaların belə kəsilmə nöqtəsi ola bilməz, çünki bütün elementar funksiyalar təyin oblastlarının hər bir nöqtəsində kəsilməyəndir.

Qeyd edək ki, f(x) funksiyasının təyin oblastına daxil olmayan, lakin həmin oblastın sərhəd nöqtəsi olan nöqtəni dəf(x) funksiyasının kəsilmə nöqtəsi hesab edəcəyik. Elementar funksiyaların kəsilmə nöqtələri isə elə bu tipli nöqtələr olur.

Limitin tərifinəəsasən (1) bərabərliyi f(x)funksiyasının x_0 nöqtəsindəki sol və sağ limitləri vasitəsilə yazılmış

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \qquad \textbf{(2)}$$

münasibətinə ekvivalentdir. Deməli, $x_0$nöqtəsi f(x) funksiyasının kəsilmə nöqtəsidirsə, onda (2) münasibətindəki bərabərliklərin heç olmasa biri pozulmalıdır.

9.1.2 Birinci və ikinci növ kəsilmə nöqtələri.

Tərif 1. Əgər x_0 nöqtəsi f(x) funksiyasının kəsilmə nöqtəsidirsə və bu nöqtədə funksiyanın sonlu $f(x_0-0)$ və $f(x_0+0)$ sol və sağ limitləri varsa, onda

$x_0$nöqtəsinəf(x)funksiyasının birinci növ kəsilmə nöqtəsi deyilir. f(x) funksiyasının x_0kəsilmə nöqtəsində

$$f(x_0-0) = f(x_0+0)$$

münasibəti ödənildikdə, $\mathbf{x_0}$nöqtəsinəf(x)-in aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsi deyilir.Bu halda funksiya $x_0$nöqtəsində təyin olunmuş olarsa, onun həmin nöqtədəki qiymətini dəyişərək

$$f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0) \qquad \textbf{(3)}$$

qəbul etsək, f(x)funksiyası$x_0$nöqtəsində kəsilməyən olar. Funksiya x_0 nöqtəsində təyin olunmamışsa, onda həmin nöqtədə funksiyanı (3) bərabərliyi ilə təyin edərək, nəticədə x_0 nöqtəsində kəsilməyən funksiya alarıq.

Funksiyanın x_0 kəsilmə nöqtəsində

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$$

münasibəti ödənildikdə, $x_0$nöqtəsinəf(x)-in sonlu sıçrayışlı kəsilmə nöqtəsi deyilir və

$$d = \left| f(x_0+0) - f(x_0-0) \right|$$

fərqi **f(x)** funksiyasının $\mathbf{x_0}$ nöqtəsindəki sıçrayışı adlanır.d ədədi, x_0 nöqtəsində f(x) funksiyasının necə dəyişdiyini xarakterizə edir.

Dediklərimizdən aydındır ki, funksiyasının birinci növ kəsilmə nöqtələri aradan qaldırıla bilən və sonlu sıçrayışlı kəsilmə nöqtələrindən ibarətdir.

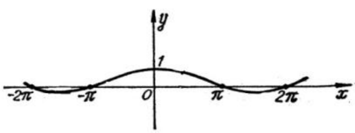
Tərif 2. Əgər f(x) funksiyasının x_0 kəsilmə nöqtəsində $f(x_0-0)$ (sol) və $f(x_0+0)$ (sağ) limitlərinin heç olmazsa biri yoxdursa ya da sonsuzluğa bərabərdirsə, onda $\mathbf{x_0}$ nöqtəsinə **f(x)** funksiyasının ikinci növ kəsilmə nöqtəsi deyilir.

Misal 1. $\mathbf{f(x) = signx}$ funksiyasıx=0 nöqtəsində kəsiləndir.x=0 nöqtəsi bu funksiyanın birinci növ (sonlu sıçrayışlı) kəsilmə nöqtəsidir. f(-0)=-1 və f(+0)=1olduğundan x=0 nöqtəsində f(x) funksiyasının sıçrayışı d=2 olar.

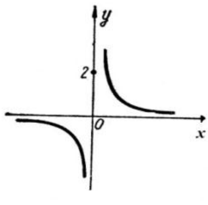
Misal 2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ funksiyası x=0 nöqtəsində kəsilir. x=0nöqtəsi bu funksiyanın birinci növ (aradan qaldırıla bilən) kəsilmə nöqtəsidir.

f(-0)=1=f(+0)olduğundan f(0)=1 qəbul etsək, funksiya x=0 nöqtəsində kəsilməyən olar (şəkil 1).

Misal 3. Ədəd oxunun hər bir nöqtəsi y=D(x) Dirixle funksiyanın ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir. İxtiyari $x_0 \in (-\infty,\ \infty)$ nöqtəsində D(x) funksiyasının nə sol $D(x_0-0)$, nə də sağ $D(x_0+0)$ limiti yoxdur.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Misal 4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ olduqda} \\ 2, & x = 0 \text{ olduqda} \end{cases}$

Funksiyasıx=0 nöqtəsində kəsiləndir. x=0 nöqtəsi funksiyanın ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir. Bu nöqtədə: f(0)=2, f(-0)=-∞ və f(+0)=∞(şəkil 2).

Misal 5. f(x)= $\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ funksiyası üçün x=0 ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir. Bu nöqtədə f(-0) və f(+0) limitlərinin heç biri yoxdur.

9.1.3. Monoton funksiyasıyanın kəsilmə nöqtələri

Fərz edək ki, y=f(x) funksiyası $[a,\ b]$ parçasında təyin olunmuş monoton (artan, azalmayan, azalan, artmayan) funksiyadır. Bu funksiya $[a,\ b]$ parçasında məhduddur. f(a) vəf(b) ədədləri (parçanın uc nöqtələrindəki qiymətləri) onun $[a,\ b]$ parçasında ən kiçik vəən böyük qiymətləridir.

Monoton funksiya təyin oblastının bütün nöqtələrində kəsilməyən olmaya da bilər. Lakin onun kəsilmə nöqtələrinin xarakteri haqqında müəyyən fikir söyləmək mümkündür.

Teorem 1. $[a,\ b]$ **parçasında monoton olan f(x) funksiyasının həmin parçada ancaq birinci növ kəsilmə nöqtəsi ola bilər.**

İsbatı.Ümumiliyi pozmadan teoremi azalmayan funksiya üçün isbat etmək kifayətdir. Tutaq ki, $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsi parçanın sol ucundan fərqli hər hansı nöqtədir. $[a,\ b]$parçasının x_0-dan solda yerləşən hissəsindəf(x)≤f(x_0) bərabərsizliyi ödənildiyindən həmin çoxluqda f(x) funksiyası yuxarıda məhduddur.Bu çoxluqda f(x) funksiyasının dəqiq yuxarı sərhəddi M_0 olsun.Onda dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $x_0' < x_0$ nöqtəsi var ki, $M_0 - \varepsilon <$ $f(x_0') \leq M_0$ bərabərsizliyi ödənilir. f(x) funksiyası azalmayan olduğundanx-in $x_0' < x < x_0$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində də həmin M< $f(x) \leq M_0$ bərabərsizliyi doğru olar. Buradan görünür ki, $M_0 =$ $f(x_0 - 0)$ və $M_0 = f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ (1) münasibəti doğrudur.

Eyni mühakimə ilə göstərmək olar ki, f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində sağ limiti də var və

$$f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \qquad \textbf{(2)}$$

münasibəti ödənilir. (1) və (2) bərabərsizliklərindən

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$$

(3)

Deməli, istənilən x_0 nöqtəsində ya $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (bu halda, f(x) funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir), ya da $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ olar, bu isə x_0 nöqtəsinin f(x)-in birinci növ kəsilmə nöqtəsi olduğunu göstərir.

Teorem 2. $[a,\ b]$ **parçasında ((a,b) intervalında) monoton artan (və ya azalan) f (x) funksiyasının qiymətləri** $[c,\ d]$ **parçasını (ya da (c,d) intervalını) əmələgətirir-**

sə, onda f(x) funksiyası $[a,\ b]$ parçasında ((a,b) intervalında) kəsilməyəndir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, f(x) funksiyası bir $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsində kəsilır. Əvvəlki teoremə görə bu ancaq birinci növ kəsilmə nöqtəsi ola bilər. Bu halda x_0 nöqtəsində ya $f(x_0-0) < f(x_0)$, ya da $f(x_0) < f(x_0+0)$ münasibəti ödənilməlidir. Tutaq ki, birinci bərabərsizlik ödənilir (ikinci ödənildikdə də eyni mühakimə aparılır). Onda $x<x_0$ olduqda $f(x) \le f(x_0-0)$ və $x>x_0$ olduqda $f(x) > f(x_0)$ bərabərsizliyi ödənildiyindən, f(x) funksiyası $f(x_0-0)$ ilə $f(x_0)$ arasında yerləşən $y_0 \in [c,d]$ qiymətini heç yerdə ala bilməz. Bu isə f(x) funksiyası qiymətlərinin $[c,d]$ parçasını təşkil etməsi şərtinə ziddir, yəni f(x)-in $[a,\ b]$-də heç bir kəsilmə nöqtəsi yoxdur.

9.2.Sadə elementar funksiyaların kəsilməzliyi

1) $\mathbf{y=a^x}$ **(a**$>0, a\neq 1$)üstlü funksiyası hər bir nöqtədə kəsilməzdir. Bunun isbatını vermirik.

2) $\mathbf{y=\log_a x,\ x\in R_+} = (\mathbf{0},\infty), \mathbf{a} > 0, a\neq 1,$**loqarifmik funksiyası** R- də təyin edilmiş və ciddi monoton (a> 1 olduqda monoton artan, $0 < a < 1$ olduqda isə monoton azalan) u(x)=a^xüstlü funksiyasına tərs funksiya olduğundan 2-nin 6-cı teoreminə görə R_+ -da kəsilməzdir.

3) Qüvvət funksiyasına baxaq:

$$\mathbf{y=x^a,\ \ x\in R_+\ \ ,\alpha\in R}.$$

Bu funksiyanı aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\mathbf{y=a^{a\log_a x}},\quad \mathbf{a}>1.$$

Həm $y=a^t$ və həm $d\partial t=\alpha \log_a x$ funksiyası kəsilməz olduğuna görə $\mathbf{y = a^{a \log_a x}}$ mürəkkəb funksiyası da, yəni baxdığımız $y=x^a$ funksiyası da kəsilməz olur.

4) y=sinx funksiyasının kəsilməz olduğunu isbat edək. Bunun üçün $|\sin x-\sin x_0|$ fərqini qiymətləndirək:

$$\mathbf{|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|} \quad \textbf{(1)}$$

Məlum teoremə görə

$$\mathbf{|\sin x| < |x|}, \quad \mathbf{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

bərabərsizliyi alınır.Onda (1) bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$\mathbf{0 \le |\sin x - \sin x_0|} < 2 \cdot \left|\mathbf{\frac{x - x_0}{2}}\right| = \mathbf{|x - x_0|}$$

$$\mathbf{lim}_{\mathbf{x \to x_0}} |x - x_0| = 0 \qquad \text{olduğundan}$$

$$\mathbf{\lim_{x \to x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0},$$

Yəni, $\mathbf{\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0}$ olur.

5) y=cos x funksiyası da hər bir $x \in R$ nöqtəsində kəsilməzdir. Onun kəsilməz olması $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ düsturundan və 2-nin 7-ci teoremindən alınır.

6) tg x və ctg x triqonometrik funksiyaları təyin oblastlarının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir. Bu funksiyaların kəsilməzliyi iki kəsilməz funksiyanın nisbətinin kəsilməzliyi haqqında olan teoremdən alınır.

7) 2- nin 6-cı teoremindən **arcsinx,** $\mathbf{x \in [-1, 1]}$, **arccos x,** $\mathbf{x \in [-1, 1]}$ **arctgx,** $\mathbf{x \in R}$ **, arcctgx,** $\mathbf{x \in R}$ funksiyalarının kəsilməzliyi alınır.

Misal 1. Limiti hesablayın:

$$\mathbf{\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}}.$$

Həlli. Bu misalda nisbətin limiti haqqında teoremi bilavasitə tətbiq etmək olmaz, çünki həm sürətin və həm də məxrəcin limiti sıfra bərəbərdir. $y=\sqrt{x+5}$ əvəzləməsi aparaq. Onda limitdə dəyişənin əvəz edilməsi düsturuna əsasən

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{y\to 3}\frac{y-3}{y^2-9}=\lim_{y\to 3}\frac{y-3}{(y-3)(y+3)}=\lim_{y\to 3}\frac{1}{y+3}=\frac{1}{6}$$

olur.

Misal 2. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to 4}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}+2^x\cos\pi x\right).$$

Həlli. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$, 2^x və $\cos\pi x$ funksiyaları x=4 nöqtəsində kəsilməz olduğu üçün

$$\lim_{x\to 4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$
$$=1,\quad \lim_{x\to 4}2^x=2^4$$
$$=16\quad \lim_{x\to 4}\cos\pi x=\cos 4\pi=1$$

olur. Onda cəmin və hasilin limiti haqqında teoremlərə əsasən

$$\lim_{x\to 4}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}+2^x\cos\pi x\right)=\lim_{x\to 4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}+\lim_{x\to 4}2^x\cdot\lim_{x\to 4}\cos\pi x=$$
$$=1+16\cdot 1=17$$

9.3.1. Funksiyaların müntəzəm kəsilməzliyi

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası X çoxluğunda təyin olunmuşdur. Funksiyanın X çoxluğunda kəsilməyən olması o deməkdir ki, f(x) funksiyası bu çoxluğun hər bir $x_0\in X$ nöqtəsində kəsilməyəndir, yəni verilmiş ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə qarşı elə $\delta>0$ var ki, x-in $|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Aydındır ki, bu tətifdə verilmiş ε-na görə seçilən $\delta>0$ ədədi təkcə ε-dan deyil, baxılan x_0 nöqtəsindən də asılıdır: $\delta=\delta(\varepsilon,\ x_0)$ ε ədədi verildikdə bir x_0 nöqtəsi üçün şeçilən $\delta=\delta(\varepsilon,\ x_0)$ ədədi başqa x_0' nöqtəsi üçün şeçilən $\delta'=\delta'(\varepsilon,\ x_0')$ ədədindən fərqli ola bilər. Bu zaman x_0 nöqtəsi üçün şeçilmiş $\varepsilon>0$ ədədi x_0' nöqtəsi üçün yaramaz.Ümumiyyətlə, verilmiş $\varepsilon>0$ ədədi sabit saxlanıldıqda x_0-ın dəyişməsi ilə seçilən $\delta=\delta(\varepsilon,\ x_0)$ ədədi də dəyişilir.

Burada iki hal mümkündür: ya eyni bir $\varepsilon>0$ ədədi və X çoxluğunun bütün nöqtələri üçün yarayan bir δ ədədi şeçmək mümkündür, yaxud da $\varepsilon>0$ ədədi verildikdə (bütün nöqtələr üçün eyni olan) X çoxluğunun bütün nöqtələri üçün yarayan bir δ ədədi şeçmək mümkün deyildir. Birinci halda f(x) funksiyasına X çoxluğunda müntəzəm kəsilməyən funksiya deyilir.

Tərif. y=f(x) funksiyasına X çoxluğunda o zaman müntəzəm kəsilməyən funksiya deyilir ki, verilmiş ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə qarşı elə $\delta>0$ ədədi (çoxluğun nöqtələrindən asılı olmayan) var ki, x -in $|x'-x''|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən ixtiyari x', x'' qiymətlərində $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Beləliklə, funksiyanın kəsilməzliyi onu nöqtədə xarakterizə etdiyi halda, müntəzəm kəsilməzliyi funksiyanı bütün X çoxluğuüzərində xarakterizə edir.

9.3.2. Kantor teoremi

Aydındır ki, f(x) funksiyası X çoxluğunda müntəzəm kəsilməyən olduqda həmin çoxluğun hər bir nöqtəsində də kəsilməyən olar, yəni X çoxluğunda kəsilməyən olar. Lakin bu təklifin tərsi doğru deyildir: X çoxluğunda kəsilməyən f(x) funksiyası həmin çoxluqda müntəzəm kəsilməyən olmaya da bilər.

Teorem (Kantor teoremi). Parçada kəsilməyən funksiya həmin parçada müntəzəm kəsilməyəndir.

Deməli, funksiyanın parçada kəsilməzliyi anlayışı ilə parçada müntəzəm kəsilməzliyi anlayışı eynidir. Lakin bu xassə interval və yarıminterval üçün doğru deyildir.

Məsələn, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyası (0,1) intervalında kəsilməyəndir, lakin həmin intervalda müntəzəm kəsilməyən deyildir (yoxlamalı).

X FƏSİL. TÖRƏMƏ.DİFERENSİAL.TÖRƏMƏNİN TƏTBİQLƏRİ.

10.1.Funksiyanın törəməsi

Tərif. Tutaq ki, f(x) funksiyası (a,b) intervalında tə-yin olunmuşdur və x_0 intervalın müəyyən bir nöqtəsidir. Əgər

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa, bu limit f(x) funksiyasının x_0**nöqtəsində törəməsi** adlanır.

Funksiyanın törəməsini

$$f'(x_0), y', \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{dy}{dx} \quad \text{və ya} \quad y_x'$$

kimi işarə edirlər.

Müəyyən bir nöqtədə törəməsi olan funksiya həmin nöqtədə **diferensiallanan funksiya** adlanır. (a,b) inter-valının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya isə bu intervalda **diferensiallanan funksiya** adlanır.

$\Delta x = x - x_0$ fərqi arqumentin artımı,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

fərqi isə funksiyanın x_0**nöqtəsində artımı** adlanır. Bunları nəzərə alaraq y=f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində törəmə-sini

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kimi də yaza bilərik.

x_0 nöqtəsi (a,b) intervalının ixtiyari nöqtəsi olduğundan onun əvəzinə, ümumiyyətlə x yazırlar. Onda y=f(x) funksiyasının x nöqtəsində törəməsi

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

düsturu şəklində yazılır.

Misal 1. f(x)=C, x∈ R (C- müəyyən bir sabit ədəddir) funksiyasının törəməsini tapmalı.

Həlli.

$$\mathbf{f'(x) = (C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.}$$

Deməli, sabitin törəməsi sıfra bərabərdir, yəni (C)´=0.

Misal 2. $f(x) = ax + b, x \in R$ funksiyasının törəməsini tapmalı.

$\boldsymbol{Həlli.}$ $$\boldsymbol{f'}\mathbf{(x) = (ax+b)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =}$$

$$\mathbf{= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a,}$$

(ax+b)´=a

Misal 3. $\mathbf{f(x) = x^2, x \in R}$ funksiyasının törəməsini tapmalı.

Həlli. $$\mathbf{f'(x) = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =}$$

$$\mathbf{= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x,} \ \mathbf{(x^2)' = 2x.}$$

10.2. Törəmənin fiziki və həndəsi mənası. Bucaq əmsalı

Tutaq ki, hər hansı cisim düzxətli dəyişənsürətli hərəkət edir. Bu cismin t zamanda getdiyi yol s(t), t+Δt zamanda getdiyi yol isə s(t+Δt) olarsa, onun Δt zamanda getdiyi yol $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$olar. Bu halda

$$\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) - \mathbf{s}(\mathbf{t})}{\Delta \mathbf{t}}$$

nisbəti cismin t anındakı t+Δt anına qədər olan müddətdə **orta sürəti** adlanır. Orta sürət cismin dəyişənsürətli hərəkətini tam xarakterizə edə bilmir. Ona görə də **ani sürət** anlayışı verilir. Δt müddəti nə qədər kiçik olsa, orta sürət də zamanın t anındakı sürətə bir o qədər yaxın olar. Odur ki, $\Delta t \to 0$-da orta sürətin

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta \mathbf{t} \to 0} \frac{\mathbf{s}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) - \mathbf{s}(\mathbf{t})}{\Delta \mathbf{t}}$$

limitinə cismin t anındakı **ani sürəti** deyilir. Törəmənin tərifinə görə

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{s}'(\mathbf{t})$$

olur. Deməli, zamanın t anındakı ani sürəti gedilən yolun zamana görə törəməsinə bərabərdir.

Dəyişənsürətli hərəkətdə sürət zamandan asılı müəyyən bir v(t) funksiyası olur. Bu halda

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{t})}{\Delta \mathbf{t}}$$

nisbətinə **orta təcil**,

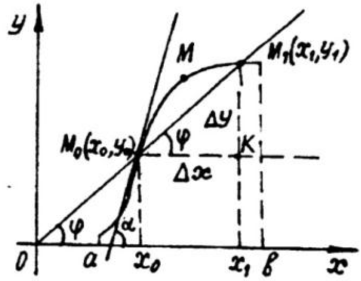
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta \mathbf{t} \to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{t})}{\Delta \mathbf{t}}$$

limitinə isə t **anındakı təcili** deyilir. Beləliklə, təcil sürətin zamana görə törəməsinə bərabərdir.

İndi də törəmənin həndəsi mənasını izah edək. Tutaq ki, (k) əyrisi (a,b) intervalında təyin edilmiş y=f(x) kəsilməz funksiyasının qrafikidir (şəkil 1). Bu əyri zərində $_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$ nöqtələri götürək və bu nöqtələrdən M_0 M_1 kəsənini keçirək.Onun bucaq əmsalı

$$\mathbf{tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

olur.



Şəkil 1.

Tutaq ki, $x \to x_0$. Onda f(x) funksiyası kəsilməz olduğundan $f(x) \to f(x_0)$,başqa sözlə M_0 nöqtəsi M_1 nöqtəsinə yaxınlaşır. Əgər f(x) funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda

$$\mathbf{tg\alpha = \lim_{x_1 \to x_0} tg\varphi = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)}$$

limiti var. Ona görə də M_0M_1 kəsənin M_0M limit vəziyyəti var və ona (k) əyrisinin M_0 nöqtəsində **toxunanı** deyirlər. Deməli f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi varsa, onda $M_0(x_0,f(x_0))$ nöqtəsində onun qrafikinə **bucaq əmsalı** $f'(x_0)$ olan toxunan var. Bu deyilənlərdən törəmənin həndəsi mənası çıxır: f(x) funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsində törəməsi $M_0(x_0,f(x_0))$ nöqtəsində onun qrafikinə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir.

10.3. Funksiyanın kəsilməzliyi ilə diferensiallanan olmasının əlaqəsi

Teorem. x nöqtəsində diferensillanan f(x) funksiyasıh əmin nöqtədə kəsilməzdir.

Teoremin şərtinə görə

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x)$$

sonlu limiti var. Bu halda məlumdur ki,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0.$$

Buradan,

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlikdə $\Delta x \to 0 -$ da limitə keçsək

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0}[f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x] = 0$$

olar. Bu isə funksiyanın x nöqtəsində kəsilməz olması deməkdir.

Qeyd edək ki, kəsilməzlik diferensiallanma üçün ancaq zəruri şərtdir. Başqa sözlə, funksiyanın müəyyən bir nöqtədə kəsilməz olmasdından həmin nöqtədə diferensiallanan olması çıxmır.

Misal.$f(x) = |x|$funksiyasınıntörəməsinitapın.

Həlli.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Bu funksiya hər bir nöqtədə kəsilməzdir və

$$\mathbf{f'(x)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{x} > 0, \\ \mathbf{-1x} < 0. \end{cases}$$

Bu funksiyanın x=0 nöqtəsində törəməsi yoxdur. Doğurdanda,

$$\lim_{\mathbf{x} \to -0} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \lim_{\mathbf{x} \to -0} \frac{\mathbf{-x}}{\mathbf{x}} = \lim_{\mathbf{x} \to -0} (\mathbf{-1}) = \mathbf{-1},$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to +0} \frac{\mathbf{f(x)-f(0)}}{\mathbf{x-0}} = \lim_{\mathbf{x} \to +0} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \lim_{\mathbf{x} \to +0} (\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Deməli,

$$\lim_{\mathbf{x} \to 0} \frac{\mathbf{f(x) - f(0)}}{\mathbf{x - 0}}$$

limiti yoxdur. Bu misal onu göstərir ki, müəyyən bir nöqtədə kəsilməz olan funksiya həmin nöqtədə diferensiallanan olmaya bilər.

10.4.1. Cəmin, hasilin və nisbətin törəməsi

Teorem 1. $x=x_0$ nöqtəsində difernsiallanan u(x) və v(x) funksiyalarının cəmi də həmin nöqtədə diferensiallanandır və

$$(\mathbf{u(x) + v(x)})'_{\mathbf{x=x_0}} = \mathbf{u'(x_0) + v'(x_0)}$$

u(x) və v(x) funksiyalarının cəmini f(x)=u(x)+v(x) ilə işarə edək. Törəmənin tərifinə görə $\mathbf{f'(x_0)} =$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{\mathbf{f(x)-f(x_0)}}{\mathbf{x-x_0}} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{\mathbf{(u(x)+v(x))-(u(x_0)+v(x_0))}}{\mathbf{x-x_0}} =$$

$$= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \left[\frac{\mathbf{u(x)-u(x_0)}}{\mathbf{x-x_0}} + \frac{\mathbf{v(x)-v(x_0)}}{\mathbf{x-x_0}}\right].$$

Buradan, cəmin limiti haqqında teoremə görə

$$\mathbf{f'(x_0)} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{\mathbf{u(x)-u(x_0)}}{\mathbf{x-x_0}} + \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \frac{\mathbf{v(x)-v(x_0)}}{\mathbf{x-x_0}} = \mathbf{u'(x_0)} + +\mathbf{v'(x_0)}.$$

və ya

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x})+\mathbf{v}(\mathbf{x}))'_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)+\mathbf{v}'(\mathbf{x}_0)$$

düsturunu alırıq.

Analoji qayda ilə isbat edilir ki, sonlu sayda diferensiallanan funksiyaların cəminin törəməsi onların törəmələrinin cəminə bərabərdir.

Teorem 2. $x=x_0$ nöqtəsində diferensiallanan u(x) və v(x) funksiyalarının hasili və həmin nöqtədə diferensiallalanandırvə

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}))'_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}'(\mathbf{x}_0).$$

u(x) və v(x) funksiyalarının hasilini f(x)=u(x)v(x) ilə işarə edək. Törəmənin tərifinə

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)=(\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}))'_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}=$$

$$=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left[\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}\right].$$

Cəmin və hasilin limiti haqqındakı teoremlərə görə buradan $(\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}))'_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}+$

$$+\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}=\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}'(\mathbf{x}_0)$$

münasibəti alınır.

Nəticə. u(x), v(x) funksiyaları diferensiallanandırsa λ, μ sabit ədədlərdirsə,

$$\big(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\mu}\mathbf{v}(\mathbf{x})\big)'=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}'(\mathbf{x})+\boldsymbol{\mu}\mathbf{v}'(\mathbf{x}).$$

Bu düstur yuxarıda isbat edilən iki teoremdən və sabitin törəməsinin sıfır olması faktından alınır.

Teorem 3. $x=x_0$ nöqtəsində diferensiallanan u(x) və v(x) funksiyalarının nisbəti $v(x_0)\neq 0$ olduqda həmin nöqtədə diferensiallanandır və

$$\left(\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})}{\mathbf{v}(\mathbf{x})}\right)'_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\frac{\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}'(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{v}^2(\mathbf{x}_0)}$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının nisbətini$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ilə işarə edək. Törəmənin tərifinə görə

$$f'(\mathbf{x_0}) = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{f(x) - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\mathbf{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}}{\mathbf{v(x)v(x_0)(x - x_0)}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v(x)v(x_0)}} \cdot \frac{\mathbf{u(x) - u(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}}\mathbf{v(x_0)} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v(x)v(x_0)}} \cdot \frac{\mathbf{v(x) - v(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} \cdot \mathbf{u(x_0)}\right]$$

Cəmin və hasilin limiti haqqındakı teoremlərə görə

$$f'(x_0) = \frac{v(x_0)}{v^2(x_0)} \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} - \frac{u(x_0)}{v^2(x_0)} \lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

və ya

$$\left(\frac{\mathbf{u(x)}}{\mathbf{v(x)}}\right)'_{x=x_0} = \frac{\mathbf{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}}{\mathbf{v^2(x_0)}}$$

düsturualınır.

Misal . Törəmələritapın:

a)$(x^2 - 5x + 9)' = (x^2)' + (-5x)' + (9)' = 2x - 5.$ b)$(2x^3 - x^2 + 3)' = (2x^3)' - (x^2)' + (3)' = 2(x^2 \cdot x)' - -2x = 2\big((x^2)'x + x^2 \cdot (x)'\big) - 2x = 2(2x^2 + x^2) - -2x = 6x^2 - 2x.$

c)$\left(\frac{x+6}{1-x}\right)' = \frac{(x+6)'(1-x)-(x+6)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x-(x+6)(-1)}{(1-x)^2} = = \frac{7}{(1-x)^2}.$

10.4.2.Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Tutaq ki, y=$\varphi(z)$və $z = \psi(x)$ funksiyaları verilmişdir. $y = \varphi[\psi(x)]$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. $z=\psi(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində,$y = \varphi(z)$ finksiyası isə $z_0 = \psi(x_0)$nöqtəsində diferensiallanandırsa, $y = \varphi[\psi(x)]$ mürəkkəb funksiyası da $x_0$nöqtəsində diferensiallanandır və

$$(\boldsymbol{\varphi}\,[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})])'_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0})\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{x_0}). \qquad (\mathbf{1})$$

İsbatı. Törəmənin tərifinə görə

$$\lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{z_0}} \frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z_0})}{\mathbf{z} - \mathbf{z_0}} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0}).$$

Buradan

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z_0})}{\mathbf{z} - \mathbf{z_0}} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0}) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}), \quad \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{z_0}} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$$

və ya

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z_0}) = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0})(\mathbf{z} - \mathbf{z_0}) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z_0}),$$

$$\boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\big) - \boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0})\big) = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0})\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0})\big) +$$
$$+\boldsymbol{\alpha}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\big) \cdot (\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0}))$$

bərabərliklərini alırıq. Axırıncı bərabərliyin hər tərəfini $(x - x_0) -$ a bölübx $\to x_0 -$ da limitə keçsək

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{\boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\big) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0}))}{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}} \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0})\big)}{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}}$$
$$+ + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x_0})}{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}} \boldsymbol{\alpha}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\big) \qquad (\mathbf{2})$$

düsturunu alırıq. Limitdə dəyişənin əvəz edilməsi düsturuna görə

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \boldsymbol{\alpha}\big(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\big) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{3})$$

olur. (2) və (3) münasibətlərindən

$$(\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})])'_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z_0})\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{x_0}) \qquad \mathbf{(4)}$$

bərabərliyi alınır.

(1) düsturunu aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{x}} = \mathbf{y}'_{\mathbf{z}} \,.\, \mathbf{z}'_{\mathbf{x}}.$$

Misal 1. $\mathbf{f(x) = (x^2 + 3x + 5)^2}$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli. Verilən funksiya $y=z^2$ və $z=x^2+3x+5$ funksiyalarından düzəldilmiş mürəkkəb funksiyadır. (4) düsturuna görə

$$\mathbf{f'(x) = y'_z \cdot z'_x = (z^2)'(x^2 + 3x + 5)' = 2z(2x + 3) =}$$
$$\mathbf{= 2(x^2 + 3x + 5)(2x + 3)}$$

Misal 2. $f(x) = \left(\frac{x^2-3}{1-x}\right)^3$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli. Verilən funksiya $y = z^3$ və $z = \frac{x^2-3}{1-x}$ funksiyalarından düzəldilmiş mürəkkəb funksiyadır. (4) düsturuna görə $\mathbf{y'_x = y'_z \cdot Z'_x = (z^3)' \cdot \left(\frac{x^2-3}{1-x}\right)' =}$

$$\mathbf{3z^2\,\frac{2x(1-x)+(x^2-3)}{(1-x)^2} = \frac{3(x^2-3)^2}{(1-x)^2}\cdot\ \cdot\frac{-x^2+2x-3}{(1-x)^2} =}$$
$$\mathbf{-\frac{3(x^2-3)^2(x^2-2x+3)}{(1-x)^4}.}$$

10.4.3.Tərs funksiyanın törəməsi.

Teorem. $y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sıfırdan fərqli törəməsi varsa, onda $x = \varphi(y)$ funksiyasının $y_0=f(x_0)$ nöqtəsində törəməsi var və

$$\boldsymbol{\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.} \qquad (1)$$

İsbatı. Törəmənin tərifinə görə

$$\boldsymbol{\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}}$$

Digər tərəfdən $\varphi(y) = x$ və $\varphi(y_0) = x_0$ olduğuna görə

$$\boldsymbol{\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}} \qquad (2)$$

olur. Məlumdur ki, kəsilməz funksiyaya tərs funksiya da kəsilməzdir. Ona görə də

$$\lim_{y \to y_0} \boldsymbol{\varphi(y) = \varphi(y_0)}.$$

Başqa sözlə, $y \to y_0$ da $x \to x_0$. Bunu nəzərə alaraq (2) bərabərliyindən

$$\boldsymbol{\varphi'(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}}$$

və ya

$$\boldsymbol{\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

düsturunu alırıq. (1) düsturunu

$$\boldsymbol{x'_y = \frac{1}{y'_x}} \qquad (3)$$

şəklində də yazmaq olar.

Misal. $\boldsymbol{y = \sqrt{x}, x > 0}$ funksiyasının törəməsini tapın.Verilən funksiya $x=y^2$ funksiyasına tərs funksiyadır. (3) düsturuna görə

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

10.5. Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi

Funksiyanı $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \ a\leq$ t≤ b kimi iki tənlik vasitəsilə də verməк olar.Bu halda deyirlər ki, funksiya parametrik şəkildə verilmişdir.

Tutaq ki, $x=\varphi(t)$ funksiyasına tərs funksiya var: t=g(x). Onda

$$y=\psi(g(x)) \tag{1}$$

mürəkkəb funksiyanı alarıq.

Misal 1. $y=(x-1)^2$ funksiyasını

$$x=t+1 \text{ və } y=t^2$$

parametrik şəkildə vermək olar.

(1) mürəkkəb funksiyanın törəməsinin tapılma qaydasını biz artıq bilirik, lakin parametrik şəkildə verilmiş funksiyanı heç də həmişə (1) mürəkkəb funksiyası şəklində göstərə bilmirik.

Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. $\varphi(t),\ \psi(t)$ funksiyaları diferensiallanandırsa və $\varphi'(t)\neq 0$ olarsa, $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ parametrik şəklində verilmiş funksiyanın törəməsi üçün

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ və ya } y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

düsturu doğrudur.

Teoremin şərtinə görə $\varphi'(t)\neq 0$. Ona görə $x=\varphi(t)$ ciddi monoton funksiyadır $x=\varphi(t)$ funksiyasına tərs funksiyanı t=g(x)ilə işarə edək. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi haqqındakı teoremə görə

$$y_x' = (\psi[g(x)])_x' = \psi'(t)g'(x) \tag{2}$$

olur.Digər tərəfdən tərs funksiyanın törəməsinin tapılması qaydasına görə

$$g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} \qquad \textbf{(3)}$$

bərabərliyi doğrudur.(2) və (3) münasibətlərindən

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ və ya } y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

düsturunu alırıq.

Misal 1. x=2t-4, $y=t^2+1$, $t\in R$ funksiyasının törəməsini tapın:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(t^2+1)'}{(2t-4)'} = \frac{2t}{2} = t.$$

x=2t-4 tənliyindən t-ni x-lə ifadə edib verilən funksi-yanın törəməsini

$$y_x' = \frac{x+4}{2}$$

kimi x-dən asılı şəkildə yaza bilərik.

Misal 2. $x=t^4+3t^3-t+5$, $y=t^2+t-1$, $t\in R$ funksiyasının törəməsini tapın:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(t^4+3t^3-t+5)'}{(t^2+t-1)'} = \frac{4t^3+9t^2-1}{2t+1}.$$

XI FƏSİL. FUNKSİYALARIN TÖRƏMƏLƏRİ

11.1. Əsas elementar funksiyaların törəməsi
11.1.1.Loqarifmik funksiyanın törəməsi

$y = \log_a x, \quad x \in R \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ funksiyasının törəməsini tapaq.

Arqumentə Δx artımı verək: $x+\Delta x$. Bu zaman loqarifmik funksiyasının artımı

$$\Delta y = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x$$

və ya

$$\Delta y = \log_a (1+\frac{\Delta x}{x})$$

olar.Bu bərabərliyin hər tərəfini $\Delta x -$ə bölüb

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a (1+\frac{\Delta x}{x})$$

düsturunu alırıq. $\frac{\Delta x}{x}$ $-$i $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ ilə əvəz, budüstur

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \textbf{(1)}$$

şəklini alar.(1) bərabərliyində $\Delta x \to 0$ şərtilə limitə keçsək və bu zaman $\alpha \to 0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \to 0} \log_\alpha (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

münasibətini alarıq. Loqarifmik funksiya kəsilməz funksiya olduğundan $y' = \frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\log_\alpha\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ **(2)**

olar. $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{a}} = e$ olduğuna görə (2) bərabərliyindən

$$y' = \frac{\log_a e}{x} \text{ və ya } (\log_a x)' = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad (\ln a = \log_e a)$$

düsturu alınır. Xüsusi halda a=e götürsək, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

olar.

Misal. y=ln(x^2+4x+11) funksiyasının törəməsini tapın:

Həlli.

$$y' = (\ln(x^2+4x+11))' = \frac{1}{x^2+4x+11}(x^2+4x+11)' = \frac{2x+4}{x^2+4x+11}$$

11.1.2. Qüvvət funksiyasının törəməsi

$y = x^a$ $, x\in R_+ \,(a\in R)$ funksiyasını $y = e^{\alpha\ln x}$, $x\in R$ kimi göstərmək olar. Bu funksiya $y = e^x$ və $z = \alpha\ln x$ funksiyalarından düzəldilmiş mürəkkəb funksiyadır. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi düsturuna görə

$$y' = y_z{}' z_x{}' = (e^x)'(\alpha\ln x)' = e^z\alpha\cdot\frac{1}{x} = e^{\alpha\ln x}\alpha\cdot\frac{1}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x},$$

və yaxud

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Misal. Aşağıdakıfunksiyaların törəmələrini tapın:

a) $y = x^2$, $y' = 2x^{2-1} = 2x$

b) $y = x^{14};\ y' = 14x^{14-1} = 14x^{13},$

v) $y = \sqrt[3]{x};\ y' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

q) $y = \sqrt[7]{x^2};\ y' = (x^{\frac{2}{7}})' = \frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-1} = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$

ğ) $y = x^{0,1};\ y' = (x^{0,1})' = 0,1x^{0,1-1} = 0,1x^{-0,9}$

d) $y = 3x^5 + x^3;\ y' = 3(x^5)' + (x^3)' = 15x^4 + 3x^2$

e) $y = x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}};\ y' = (x^4) + (x^{-\frac{1}{2}})' = 4x^3 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

11.1.3.Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Əvvəlcə f(x)=sinx funksiyasının törəməsini tapaq. Bunun üçün x-ə Δ x artımı verib, funksiyanın uyğun artımına baxaq;

$$\Delta f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

Bunun hər tərəfini Δ x-ə bölsək,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

bərabərliyini alarıq. Burada Δ x$\to$0-dalimitə keçsək

$$f(x) = (\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

münasibətini alarıq. Aydındır ki,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

Digər tərəfdən y =cosx funksiyasının kəsilməz olmasını nəzərə alsaq

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos x \qquad \textbf{(1)}$$

olar.Beləliklə, sinx funksiyasının törəməsi üçün

$$(\sin x)'=\cos x$$

düsturu doğrudur.

(1) düsturundan istifadə edərək cosx funksiyasının törəməsini tapa bilərik:

$$(\cos x)'=\left(\sin(\frac{\pi}{2}+x)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

və yaxud

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad \textbf{(2)}$$

(1) və (2) düsturlarının köməyi ilə tgx və ctgx funksiyalarının törəmələrini tapaq:

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

və ya

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ \ (ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Misal. Törəmələri hesablayın:

a) $(\sin 5x)'=\cos 5x\cdot(5x)'=5\cos 5x$

b) $(\cos(3x^2+x))' = -\sin(3x^2+x)(3x^2+x)' =$
$= -(6x+1)\sin(3x^2+x)$

v) $(\sin^2 2x)' = 3\sin^2 2x(\sin 2x)' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$
$= 6\sin^2 2x \cos 2x$

q) $(tg^5(3x+7))' = 5tg^4(3x+7)(tg(3x+7))' =$
$= 5tg^4(3x+7)\dfrac{1}{\cos^2(3x+7)} \cdot (3x+7)' = \dfrac{15tg^4(3x+7)}{\cos^2(3x+7)}$

11.1.4. Tərs triqonometrik funksiyaların törəməsi

1.y=arcsinx funksiyasının törəməsi.

Bu funksiya $x = \sin y,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ funksiyasına tərs funksiyadır. Tərs funksiyanın törəməsi düsturuna görə

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

və ya $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. y=arccosx funksiyasının törəməsi.

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ düsturunun köməyi ilə bu funksiyanın tötəməsi üçün

$$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

və yaxud $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ düsturunu alırıq.

3. y=arctgx funksiyasının törəməsi.

y=arctgx funksiyası $x = tgy,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ funksiyasına tərs funksiyadır. Tərs funksiyanın törəməsi düsturuna görə

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

və ya $$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4. y=arcctgxfunksiyasının törəməsi.

$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ düsturundan istifadə edib

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ düsturunu alırıq.

Misal. Törəmələri tapın.

a) $(\arcsin x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $$((\arccos\sqrt{x})^2)' = 2\arccos\sqrt{x} \cdot (\arccos\sqrt{x})' = 2\arccos\sqrt{x} \times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})'\right) = -\frac{2\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}},$$

v) $$(arctg(x^2+1))' = \frac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2},$$

q) $$(x \cdot arcctgx^3)' = (x)' arcctgx^3 + x(arcctgx^3)' = arcctgx^3 +$$
$$+x\left(-\frac{1}{1+(x^3)^2}\right) \cdot (x^3)' = arcctgx^3 - \frac{3x^3}{1+x^6}$$

11.1.5. Qeyri-aşkar funksiyanın törəməsi

Tutaq ki, y=y(x) qeyri-aşkar funksiyası

$$F(x,y)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

tənliyi vasitəsilə verilmişdir.Bu funksiyanın analitik ifadəsini aşkar şəkildə tapmadan onun müxtəlif tərtibli törəmələrini tapmaq bəzən mümkün olur. Bu məqsədlə (1) bərabərliyinin hər iki tərəfini x-ə görə diferensiallayırlar və y dəyişəni x-in funksiyası olduğunu nəzərə alırlar. Alınan bərabərliyi y' -ə nəzərən həll edərək y' törəməsini tapırlar. Bu prosesi davam etdirməklə funksiyanın iki, üç və s.tərtibli törəmələrini də tapmaq olar.

Bunu bir misal üzərində izah edək.

Misal 1.

$$ax^2 + by^2 = 2 \qquad \textbf{(2)}$$

tənliyi ilə təyin olunan y=y(x) funksiyasının bir və ikitərtibli törəməsini tapmalı.

(2) bərabərliyinin hər iki tərəfindən x-ə nəzərən törəmə alaq(yadda saxlayaq ki, y dəyişəni x-in funksiyasıdır):

$$2ax + 2by \cdot y' = 0,$$

$$y' = -\frac{ax}{by} \qquad \textbf{(3)}$$

$$y'' = -\frac{a}{b}\left(\frac{x}{y}\right)_x' = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$$

Burada y' -in əvəzinə (3) qiymətini yazsaq:

$$y'' = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y - x \cdot (-\frac{ax}{by})}{y^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{by^2 + ax^2}{by^3}$$

(2) bərabərliyinə görə $ax^2 + by^2 = 2$ olduğundan ikitərtibli törəmə üçün

$$y'' = -\frac{2a}{b^2} \cdot \frac{1}{y^3}$$

ifadəsini alarıq.

Misal 2.

$$y^2 = 5 + xe^y \qquad \textbf{(4)}$$

tənliyi ilə təyin olunan y=y(x) qeyri-aşkar funksiyasının törəməsini tapmalı.

(4) bərabərliyinin hər iki tərəfini x-ə nəzərən diferensiallayaq:

$$2yy' = e^y + xe^y y',$$

$$(2y - xe^y)y' = e^y,$$

$$y' = \frac{e^y}{2y - xe^y}$$

(4) bərabərliyinə görə $xe^y = y^2 - 5$ olduğundan:

$$y' = \frac{e^y}{2y - y^2 + 5}$$

11.2. Loqarifmik törəmə

Tutaq ki, u=f(x) funksiyası diferensiallanandır və baxılan nöqtədə sıfra çevrilmir. Onda mürəkkəb funksiyanın diferensiallanması qaydasına əsasən $y = \ln|f(x)|$ funksiyasının törəməsini hesablamaq olar :

$$\mathbf{y' = [\ln|f(x)|]' = (\ln|u|)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

və yaxud

$$\mathbf{[\ln|f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}}. \qquad \mathbf{(1)}$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki $\frac{f'(x)}{f(x)}$ kəsrinə f(x)**funksiyasının loqarifmik törəməsi** deyilir. Aydındır ki,funksiyanın loqarifmik törəməsi məlum olduqda (1) düsturu vasitəsilə özünün törəməsini tapmaq olar:

$$\mathbf{f'(x) = f(x) \cdot [\ln|f(x)|]'} \qquad \mathbf{(2)}$$

Funksiya törəməsinin bu yolla tapılmasına **loqarifmik diferensiallanma üsulu** deyilir.

Loqarifmik diferensiallanma üsulu ilə funksiyaların törəməsini hesabladıqda, sadə olmaq üçün gələcəkdə modul işarəsini yazmayacağıq.

11.3. Yüksək tərtibli törəmələr

Əgər y=f(x) funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandırsa, onda $f'(x)$ həmin intervalda təyin edilmiş bir funksiya olur: $g(x) = f^{`}(x)$ · g(x) funksiyası $x_0 \in (a,b)$ nöqtəsində diferensiallanandırsa, $g'(x)$ funksiyası f(x) funksiyasının $x_0$nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi adlanır və

$$f'(x_0), \quad y'', \quad \frac{d^2(f(x_0)}{dx^2} \text{ və ya } \frac{d^2y}{dx^2}$$

kimi işarə edilir.

Əgər f(x) funksiyasının(a,b) intervalının hər bir nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi varsa, tərifə görə

$$f''(x_0) = (f'(x_0))'$$

f(x) funksiyasının ikinci tərtib törəməsinin törəməsinə onun üçüncü tərtib törəməsi deyilir və

$$f'''(x_0),\ \ y''',\ \ \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$$ kimi işarə edilir.

Anoloji qayda ilə dördüncü tərtib törəmə təyin edilir. Ümumiyyətlə, y=f(x) funksiyasının (n-1)-ci tərtib törəməsinin törəməsi onun n-ci tərtib törəməsi adlanır.

Misal. $y = x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$ funksiyasının birinci, ikinci, üçüncü və dördüncü tərtib törəmələrini tapın:

$$y' = 4x^3 + 9x^2 - 2x + 5,$$

$$y'' = 12x^2 + 18x - 2$$

$$y''' = 24x + 18,$$

$$y^{(IV)} = 24$$

Bəzi çox işlənən yüksək tərtibli törəmələrin tapılması düsturları aşağıdakı kimi olar.

1) $(\mathbf{x^m})^{(\mathbf{n})} = \mathbf{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}}$,

2) $\mathbf{2)(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a}$, $(\mathbf{a} > 0)$,

3)$(\mathbf{\ln x})^{(\mathbf{n})} = (\mathbf{-1})^{\mathbf{n-1}} . \frac{\mathbf{(n-1)!}}{\mathbf{x^n}}$, $(\mathbf{x} > 0)$,

4) $(\mathbf{\sin x})^{(\mathbf{n})} = \mathbf{\sin}\left(\mathbf{x + n.\frac{\pi}{2}}\right)$,

5) $(\mathbf{\cos x})^{(\mathbf{n})} = \mathbf{\cos}\left(\mathbf{x + n\ .\frac{\pi}{2}}\right)$.

XII FƏSİL. DİFERENSİALIN TƏRİFİ. ROLL TEOREMİ

12.1.1. Diferensialın tərifi

Əgər $y = f(x)$ funksiyasının $\Delta y(x_0, \Delta x)$ artımını

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$$

şəklində göstərmək mümkündürsə, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində diferensiallana bilən (törəməsi olan) **funksiya** deyilir.Artımın birinci toplananı Δx - ə nəzərən xətti ifadədirvəona **artımın baş hissəsi** deyilir.

Tərif 1. Funksiya artımının baş hissəsinə x_0 nöqtəsində **funksiyanındiferensialı** deyilir və $dy(x_0, \Delta x)$ kimi işarə olunur.

Diferensialın ifadəsi

$$dy(x_0, \Delta x) = f'(x_0)dx$$

(1)

şəklindədir. Burada $\Delta x = dx$ və $f'(x_0) = A$ qəbul edilmişdir.

$f'(x_0) \neq 0$ olduqda $\Delta x \to 0$ şərtində funksiya artımı ilə onun diferensialı ekvivalent sonsuz kiçilən olur və onlar arasında

$$\Delta y \approx dy \ \ (|\Delta x| \leq 1)$$

təqribi bərabərliyini yazmaq olar.

Beləliklə, funksiyanın diferensialını tapmaq üçün aşağıdakı qaydaları göstərmək olar.

Qayda. Diferensiallanan funksiyanın diferensialı, bu funksiyanın törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir.

Diferensiallana bilən $y = f(x)$ funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsindəki $f(x_0 + \Delta x)$ qiymətini

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \ , \ f'(x_0) \neq 0 \qquad \textbf{(3)}$$

(3) təqribi bərabərliyi ilə hesablamaq olar. Bu düstur təqribi hesablama üçün əlverişlidir.

12.1.2.Diferensialın həndəsi və mexaniki mənası.Diferensialın invariantlığı

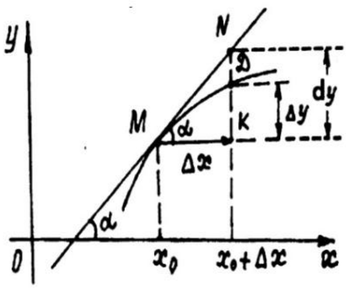
f(x) funksiyasının diferensialının həndəsi mənasını izah etmək üçün onun qrafikinə baxaq. Tutaq ki, bu funksiya $x_0$nöqtəsində diferensiallanandır. $M(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində qrafikə MN toxunanını çəkək. Düzbucaqlı MKN uçbucağından

$$|KN| = |MK| \cdot tg\alpha$$

$|MK| = \Delta x$ və $tg\alpha = f'(x_0)$ olduğunu nəzərə alsaq

$$|KN| = f'(x_0)\Delta x$$

olar. Başqa sözlə, $|KN| = df(x_0)$. Bu bərabərlikdən diferensialın həndəi mənası alınır:



Şəkil 1.

x_0 nöqtəsində diferensiallanan f(x) funksiyasının bu nöqtədə diferensialı onun qrafikinə $M(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində toxunanın toxunma nöqtəsinin absisi Δx artımı aldıqda ordinatının aldığı artımına bərabərdir.

Ümumiyyətlə, f(x) funksiyasının artımı onun diferensialına bərabər deyil ($|KD| \neq |KN|$).Lakin arqumentin artımı sıfra nə qədər yaxın olsa, funksiyanın artımı da bir qədər onun diferensialına yaxın olar. Başqa sözlə Δx-in sıfra yaxın qiymətlərində

$$\Delta f(x) \approx df(x_0)$$

Diferensialın mexaniki mənası

Tutaq ki,hər hansı cisim düz xətt boyunca hərəkət edir vədiferensiallanan s=s(t) funksiyası onun hərəkət qanunudur. Aydındır ki,cisim t anindan t+Δt anaına qədər olan müddətdə

$$\Delta s(t)=s(t+\Delta t)-s(t)$$

qədər yol gedər. Hərəkətin t anında surətinin v(t)=s\`(t) olması məlumdur. Deməli,əgər hərəkət edən cisim bütün Δt zaman fasiləsində surəti sabit olub t anındakı v(t)=s\`(t) surətinə bərabər olsa idi, onda cisim həmin müddətdə

$$ds(t)=s`(t)\cdot \Delta t \qquad \textbf{(1)}$$

qədər məsafə getmiş olardı.Bu, s(t) funksiyası diferensiallının mexaniki mənasını ifadə edir.Cisim dəyişən surətlə hərəkət etdikdə onun Δt zaman fasiləsində surəti dəyişir və bu müddətdə getdiyi Δs(t) məsafəsi (1) məsafəsinə bərabər olmur. Aydındır ki,Δt zaman fasiləsi çox kiçik olduqda

$$\Delta s(t) \approx s'(t) \cdot \Delta t$$

hesab etmək olar.

Diferensial şəklinin invariantlığı

Tutaq ki , $y = f(z)$ və $z = \varphi(x)$ funksiyaları verilmişdir. Bilirik ki, əgər $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları diferensiallanandırsa , onda bu funksiyalardan düzəldilmiş $y=f(\varphi(x))$ mürəkkəb funksiyası da diferensiallanandır və

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \quad \textbf{(1)}$$

$y=f(\varphi(x))$ mürəkkəb funksiyasının diferensialı $dy=y'_x d x$ olur. (1) düsturunu burada nəzərə alsaq

$$dy = y'_z \cdot z'_x d x$$

bərabərliyini alarıq. $z'_x d x = dz$ olduğuna görə bu bərabərlikdən

$$dy = y'_x d z$$

və ya

$$df(z) = f'(z) dz$$

düsturunu alarıq.

Beləliklə , biz gördük ki , sərbəst dəyişəni başqa bir dəyişənlə əvəz etdikdə funksiyanın diferensialı xarici görünüşünü (şəklini) dəyişmir. Bununla belə qeyd etməliyik ki, $f(x)$ funksiyasının diferensialının ifadəsində z dəyişəninin sərbəst və ya asılı dəyişən olmasının böyük fərqi vardır. Belə ki , z sərbəst dəyişəndirsə , $dz = \Delta z$olur. Diferensialın bu xassəsi onun şəklinin invariantlığı adlanır.

12.2.Diferensialların hesablama düsturları

Əsas elementar funksiyaların diferensiallarının hesablama düsturlarını yazmaq olar.

I. $d(u+v)dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

II. $d(u \cdot v)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$,

III. . $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$,

IV. $d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}du \ (\alpha \in Z)$,

V. $d(a^u) = e^u \ln a du \ (0 \prec a \neq 1)$,

VI. $d(e^u) = e^u du$,

VII. $d(\log_a u) = \frac{du}{u}\log_a e = \frac{du}{u \ln a}$,

VIII. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$,

IX. $d(\sin u) = \cos u du$,

X. d(cosu)=-sinudu.

XI. $d(tgu) = \frac{du}{\cos^2 u}$,

XII. $d(ctgu) = -\frac{du}{\sin^2 u}$,

XIII. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$,

XIV. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$,

XV. $d(arctgu) = \frac{du}{1+u^2}$,

XVI. $d(arcctgu) = -\frac{du}{1+u^2}$,

XVII. $d(shu) = chu \cdot du$,

XVIII. $d(chu) = shu \cdot du$,

XIX. $d(thu) = \dfrac{du}{ch^2 u}$,

XX. $d(cthu) = -\dfrac{du}{sh^2 u}$,

XXI. $d(\sqrt[n]{u}) = \dfrac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

12.3.Yüksək tərtibli diferensial

Yuxarıda birtərtibli diferensiala tərif verdik. İndi tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası x nöqtəsində iki dəfə diferensiallanan funksiyadır. Onda $y = f(x)$ funksiyasının birtərtibli diferensialının diferensialına bu funksiyanın ikitərtibli diferensialı deyilir və $d^2 y$ və ya $d^2 f$ kimi işarə olunur. Başqa sözlə

$$d^2 y = d(dy) = f''(x)dx^2$$

Oxşar qayda ilə üç və daha çoxtərtibli diferensialı təyin etmək olar:

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)dx^3$$

$$d^{n-1} y = d(d^{n-2} y) = f^{(n-1)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}^{\mathrm{n-1}}$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}^{\mathrm{n-1}}$$

12.4.Diferensial hesabının əsas teoremləri

Diferensial hesabının əsas teoremləri aşağıdakılardır:

Teorem 1 (Ferma). Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı aralıqda təyin olunmuşdur və bu aralığın daxili x_0 nöqtəsində özünün ən böyük və ya ən kiçik qiymətini alır. Əgər x_0 nöqtəsində $f'(x_0)$ törəməsi varsa, onda $f'(x_0)=0$ olur.

Teorem 2(Roll). **Rol teoremi: f(x)** funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, (a;b) intervalında diferensiallanandırsa və həmin parçanın uc nöqtələrində onun qiymətləri bərabərdirsə , (a;b) intervalına daxil olan elə bir c nöqtəsi var ki, f`(c)=0.

İsbatı:Məlumdur ki, $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan f(x) funksiyasının bu parçada aldığı qiymətlər arasında ən böyüyü və ən kiçiyi var. f(x) funksiyasının ən kiçik qiymətini m, ən böyük qiymətini isə M ilə işarə edək. Əgər m=M olarsa, onda f(x) funksiyası sabitdir , çünki $m \leq f(x) \leq M$. Bu halda istənilən $x \in (a;b)$ üçün f `(x)=0 . İndi tutaq ki, $m \neq M$. f(a)=f(b) olduğuna görə bu halda f(a), m və ya M ədədlərinin heç olmazsa birindən fərqli olacaq . Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $f(a) \neq m$. Onda elə $c \in (a;b)$ nöqtəsi var ki, f(c)=m. $[a,b]$ parçasına daxil olan istənilən x üçün $f(x)-f(c) \geq 0$ olduğuna görə x-in c-dən kiçik bütün qiymətlərində

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

x-in c-dən böyük bütün qiymətlərində isə

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

olur. f(x) funksiyasının c nöqtəsində törəməsinin olduğunu nəzərə alıb yuxarıdakı bərabərsizliklərdə limiti keçsək

$$f`(c)=\lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \,,$$

$$f`(c)=\lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

münasibətlərini alarıq. Bu münasibətlərdən alırıq ki,

$$f`(c)=0.$$

Teorem3 (Laqranj): f(x) funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və (a;b) intervalında diferensiallanandırsa, bu interval daxil olan elə c nöqtəsi var ki,

$$f(b)-f(a)= f`(c)(b-a) \qquad \textbf{(1)}$$

düsturu daxil olur.

$[a,b]$ parçasında təyin edilmiş

$$F(x)=f(x)-x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

köməkçi funksiyasına baxaq. Teoremin şərtinə görə f(x) funksiyası$[a,b]$ parçasında kəsilməz , (a,b) intervalında isə diferensiallanandır.Digər tərəfdən $x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ funksiyası bütün həqiqi oxda diferensiallanan olduğu üçün F(x) funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz , (a,b) intervalında parçasının uc nöqtələrində isə diferensiallannan olacaq. Bundan başqa bu funksiyanın $[a,b]$ parçasının uc nöqtələrindəki qiymətləri bərabərdir:

$$F(a)=F(b)=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}.$$

Deməli,f(x)funksiyası Roll teoreminin butun şərtlərini ödəyir. Odur ki, (a; b) intervalına daxil olan elə c nöqtəsi var ki,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

və ya

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

bərabərliyi doğru olur.

Laqranj teoreminin həndəsi mənasını izah edək. Görürük ki, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BD}{AD}$ Bu bərabərlikdən və (1) düsturundan

$$\frac{BD}{AD}=f'(c) \qquad \textbf{(2)}$$

Bərabərliyi alınır. $\frac{BD}{AD}$ nisbəti AB kəsəninin f(x) funksiyasının qrafikinə (c;f(c)) nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir. Başqa sözlə (2) bərabərliyi onu göstərir ki,AB kəsəni ilə MK toxunanı paraleldir.Buradan Laqranj teoreminin həndəsi mənası çıxır:(a;b) intervalına daxil olan elə c nöqtəsi var ki,f(x) funksiyasının qrafikinə (c;f(x)) nöqtəsində toxunan AB kəsəninə paralel olur.

Nəticə 1. Funksiyanın törəməsi muəyyən bir aralıqda sifra bərabərdirsə, bu aralıqda həmin funksiya sabitdir.

İsbatı:Tutaq ki, istənilən x∈(a;b) üçün f′(x)≠0.(a;b) intervalına daxil olan qeyd olunmuş bir x_0 nöqtəsi və bu nöqtədən fərqli x_1 nöqtəsi götürək.Laqranj teoreminə görə x_0 vəx_1 nöqtələri arasında elə ξ noqtəsi var ki,

$$f(x_1)-f(x_0)=f'(\xi)(x_1-x_0).$$

f′(ξ)=0 olduğuna görə

$$f(x_1)=f(x_0)$$

bərabərliyini alırıq.Bu o deməkdir ki, f(x) funksiyasının (a;b) intervalının istənilən nöqtəsindəki qiyməti $f(x_0)$-a bərabərdir.

Nəticə 2. İki funksiyanın törəmələri müəyyən bir aralıqda bərabərdirsə,bu funksiyalar həmin aralıqda bir-birindən ancaq sabit toplananla fərqlənə bilər.

İsbatı: Tutaq ki, istənilən x∈(a;b) üçün f′(x)=g′(x). Onda

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0.$$

Onda nəticə 1-ə görə istənilən x∈(a;b) üçün

$$f(x)-g(x)=c$$

bərabərliyi doğru olur.

Teorem 4 (Koşi). Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi\,(x)$ funksiyaları $[a, b]$ parçasında kəsilməyən və bu parçanın bütün daxili nöqtələrində sonlu törəməsi olan funksiyalardır. Həm də $\varphi'(x) \neq 0$, onda elə $\xi \in \left]a,b\right[$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ bərabərliyi ödənilir.

Nəticə : $f(x)$ funksiyası $\left]a,b\right[$ intervalında n sayda nöqtədə sıfra çevrilirsə və həmin intervalda bu funksiyanın $(n-1)$ tərtibli törəməsi varsa, onda $(n-1)$ tərtibli törəmə $\left]a,b\right[$ intervalının ən azı bir nöqtəsində sıfra bərabərdir.

Nəticə 1. Laqranj düsturunda $f(a) = f(b)$ olarsa, onda $f'(\xi) = 0$ olar. Başqa sözlə Roll teoremi Laqranj teoremin nəticəsidir.

Nəticə 2. Koşi teoremində $\varphi(x) = x$ olarsa, $\varphi'(x) = 1$ $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ olar və nəticədə $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ olur.Deməli, Laqranj teoremi Koşi teoreminin nəticəsidir.

XIII FƏSİL. QABARIQ VƏ ÇÖKÜK ƏYRİLƏR. LOPİTAL QAYDASI

13.1.Qeyri müəyyənliklərin açılışı.Lopital qaydası

Tutaq ki, f(x) və g(x) funksiyaları x=c nöqtəsinin müəyyən bir ətrafında (c nöqtəsi müstəsna ola bilər) təyin edilmiş funksiyalardır. Fərz edək ki, bu funksiyalar ya

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

və yaxud $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ **(2)**

şərtlərini ödəyir. Hər iki halda $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinin hesablanmasına nisbətin limiti haqqında olan teoremi tətbiq etmək olmaz.(1) şərtləri ((2) şərtləri) ödəndikdə $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbəti x=c nöqtəsində $\dfrac{0}{0}$ (şəklində $\dfrac{\infty}{\infty}$) şəklində qeyri-müəyyənlik adlanır. Qeyri-müəyyənliklərin açılışı üçün məzmunu aşağıdakı teoremdə ifadə edilən Lopital qaydasından istifadə edirlər.

Teorem. Tutaq ki, f(x) və g(x) x=c nöqtəsinin müəyyən bir ətrafinda (c nöqtəsi müstəsna ola bilər) diferensiallanan funksiyadir. Əgər bu funksiyalar $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0, \lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$

şərtlərini ödəyirsə və $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti varsa, onda

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ **bərabərliyi doğrudur.**

Bu teoremin isbatını ancaq $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlik üçün verəcəyik. Bundan başqa fərz edəcəyik ki, f(x), f′(x), g(x) və g′(x) funksiyaları x=c nöqtəsində kəsilməzdir və $g'(c)\neq 0$. Beləliklə, tutaq ki,

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=0,\quad \lim_{x\to c} g(x)=g(c)=0$$

şərtləri ödənilir. Onda $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}$

münasibəti doğrudur.Burada $x\to c$ yaxınlaşdıqda limitə keçək və

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c);\quad \lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(c)=0;$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \textbf{(3)}$$

bərabərliyini alarıq. Digər tərəfdən $f'(x)$ və $g'(x)$ funksiyaları x=c nöqtəsində kəsilməz olduğu üçün

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c} f'(x)}{\lim\limits_{x\to c} g'(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \textbf{(4)}$$

münasibəti doğru olur. (3) və (4) düsturlarından

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bərabərliyini alırıq.

Misal 1. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$$

Həlli. $\frac{e^x-1}{\sin x}$ nisbəti x=0 nöqtəsində $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir, çünki $\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$ və $\lim_{x\to 0}\sin x^x=0$

Bu qeyri-müəyyənliyi açmaq üçün Lopital qaydasından istifadə edək:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to 0}e^x}{\lim_{x\to 0}\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

Misal 2. Limiti hesablayın:

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\ln\cos \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$$

Həlli. $\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$ və $\lim_{x\to 0}x=0$ olduğu üçün $\frac{\ln\cos x}{x}$ nisbəti x=0 nöqtəsində $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Bu qeyri-müəyyənliyi Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1}=-\lim_{x\to 0}tgx=0$$

Misal 3. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin^2 x}{\ln x^2}$$

Həlli. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\sin^2 x=-\infty$ və $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$ olduğu üçün $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin^2 x}{\ln x^2}$ nisbəti x=0 nöqtəsində $\dfrac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Bu qeyri-müəyyənliyi Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin^2 x}{\ln x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin^2 x)'}{(\ln x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}}{\dfrac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}xctgx$$

$\lim\limits_{x\to 0}xctgx=\infty$ və $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ olduğu üçün $xctgx=\dfrac{ctgx}{x^{-1}}$ ifadəsi x= 0 nöqtəsində $\dfrac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Odur ki, Lopital qaydasını bir daha tətbiq etmək lazımdır:

$$\lim_{x\to 0}xctgx=\lim_{x\to 0}\frac{(ctgx)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=1$$

Beləliklə, Lopital qaydasını iki dəfə tətbiq etməklə

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin^2 x}{\ln x^2}=1$$

bərabərliyini alırıq.

Misal 4. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$$

Həlli. $x\sin\frac{1}{x}$ hasili x= ∞ nöqtəsində $0\cdot\infty$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Onu $xsin\frac{1}{x}=\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ şəklində çevirməklə $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənliyə gətirmək olar:

$$\lim_{x\to\infty} xsin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$$

Misal 5. Limiti hesablayn:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]$$

Həlli. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ ifadəsi x=0 nöqtəsində $\infty-\infty$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Onu

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

şəklində göstərməklə $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənliyə gəlirik. Bu qeyri-müəyyənliyi Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-\sin x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x-x\sin x)}=0$$

Misal 6. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

Həlli. $(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ ifadəsi x=0 nöqtəsində 1^{∞} şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Bu ifadəni

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}$$

şəklində göstərək. $f(t)=e^t$ funksiyası kəsilməz funksiya olduğu üçün

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}}$$

düsturu doğrudur. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ nisbəti x=0 nöqtəsində $\dfrac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlikdir, onu Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}}=e^0=1$$

Misal 7. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x}$$

Həlli. $x^{\sin x}$ ifadəsi $x\to+0$ -da 0^0 şəklində qeyri-müəyyənlikdir. Onu əvvəlcə çevirib , sonra Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/\sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}} = e^{-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot tgx} = e^{-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to+0} tgx} = e^0 = 1$$

Misal 8. Limiti hesablayın:

$$\lim_{x\to+\pi/2} (tgx)^{2x-\pi}$$

Həlli. $(tgx)^{2x-\pi}$ ifadəsi $x\to+\dfrac{\pi}{2}$ -da ∞^0 şəklində qeyri – müəyyənlikdir. Onu əvvəl çevirib, sonra Lopital qaydası ilə açaq:

$$\lim_{x\to+\pi/2} (tgx)^{2x-\pi} = \lim_{x\to+\pi/2} e^{(2x-\pi)\ln tgx} = e^{\lim\limits_{x\to+\pi/2}\frac{\ln tgx}{1/(2x-\pi)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\pi/2}\left[\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{(2x-\pi)^2}{2}\right]} = e^{-\lim\limits_{x\to+\pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}} = e^{-\lim\limits_{x\to+\pi/2}\frac{2(2x-\pi)}{2\cos 2x}} = e^0 = 1$$

13.2. Funksiyaların törəmə vasitəsi ilə tədqiqi və qrafiklərinin qurulması

Analitik şəkildə verilmiş funksiyaların bir sıra əhəmiyyətli xassələrini törəmələrin köməyi ilə araşdırmaq olur.

Onlardan: monotonluq intervalları, ekstremumlar, qabarıqlıq və çöküklük və b. göstərək.

Həmin xassələrlə əlaqədar olan teoremləri verək.

13.2.1. Funksiyaların sabitlik intervalları

Teorem. (a,b) intervalında diferensiallanan $f(x)$ **funksiyasının [a,b] parçasında sabit olması üçün** $\forall x \in (a,b)$ **üçün** $f'(x) = \boldsymbol{0}$ **olması zəruri və kafi şərtdir.**

İsbatı: 1) $f(x) = c = Const$ olsun. Onda $f'(x) = \boldsymbol{0}$ olması məlumdur.

2) İndi tutaq ki, $\forall x \in [a,b]$ üçün $f`(x)=0$

$x_0 \in [a,b]$ hər hansı bir nöqtə, x isə o aralığın cari nöqtəsi olsun. Onda Laqranj düsturuna görə

$f(x)-f(x_o)=f`(x)(x-x_0)=0$ $f`(x)=0$olmasından alınır ki, $f(x)=f(x_0)$ olur. Yəni $\forall x \in [a,b]$üçün $f(x)$funksiyasının x nöqtəsində sabit $f(x_0)$ ədədinə bərabər qiymət alır.

13.2.2. Funksiyanın monotonluq intervalları

Funksiyanın artdığı, azalmadığı, azaldığı və artmadığı bütün intervallar onun monotonluq intervalları adlanır.

Teorem 1. (Zəruri şərt). (a;b) intervalında diferensiallanan və artan (azalan) funksiyanın törəməsi həmin intervalda mənfi (müsbət) deyil.

İsbatı: Tutaq ki, f(x) funksiyası (a;b) intervalında artandır və x_0 bu intervalın hər hansı bir nöqtəsidir.Onda $x< x_0$ qiymətlərində $f(x)<f(x_0)$ olur.Ona görə də bütün $x\in(a;b),x\neq x_0$ qiymətlərində

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

bərabərliyi doğrudur. f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində differensiallanan olduğu nəzərə alaraq bu bərabərsizlikdə $x\to x_0$-da limitə keçsək

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

alarıq.Azalan funksiya üçün teorem analoji qayda ilə isbat edilir.

Teorem 2. (Kafi şərt) (a;b) intervalında törəməsi müsbət(mənfi) olan f(x) funksiyası həmin intervalda artandır.

İsbatı: Tutaq ki,x_1 vəx_2(a;b) intervalına daxil olan ixtiyari iki nöqtədir və $x_2>x_1$.Laqranj teoreminə görə elə $c\in(x_1,x_2)$ nöqtəsi var ki,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlikdən görünür ki, əgər (a;b) intervalında f\`(x) müsbətdirsə $x_2>x_1$ olduqda $f(x_2)>f(x_1)$ olur. Başqa sözlə, funksiya (a;b) intervalında artandır. Əgər (a;b) intervalında f\`(x) mənfidirsə,$x_2>x_1$ olduqda $x_2>x_1$ olduqda olur.Bu isə o deməkdir ki,funksiya (a;b) intervalında artan dır.

Qeyd. Teorem 2-də funksiyanın artan və ya azalan olması üçün onun üzərinə qoyulan şərt zəruri şərt deyil. Misal üçün $y=x^3$, $x\in R$ funksiyası üçün R=(-∞;∞)-da artandır, lakin onun törəməsi x=0 nöqtəsində sıfra bərabərdir.

Misal.f(x)= $2x^2 - \ln x$,x ∈ (0;+∞) funksiyasının monotonluq intervallarını tapın.

Həlli: Verilən funksiyanın törəməsini tapaq:

$$f`(x) = 4x - \frac{1}{x}.$$

Törəmə $x=\frac{1}{2}$ nöqtəsində sıfra çevrilir. $x=\frac{1}{2}$ nöqtəsi funksiyanin təyin oblastını iki aralığa bölür: $(0;\frac{1}{2})$ və $[\frac{1}{2};\infty)$.Bu aralıqların hər birinin daxilində f(x) öz işarəsini dəyişmir. $(0;\frac{1}{2})$ intervalında f `(x) <0, $(\frac{1}{2};\infty)$ intervalında isə f `(x)>0 olur (bunu hər intervala daxil olan bir nöqtədə törəmənin qiymətlərini hesablamaqla öyrənmək olar). Odur ki,baxdığımız funksiya $(0;\frac{1}{2})$ aralığında azalandır, $(\frac{1}{2};\infty)$ aralığında isə artandır.

Misal 1. $f(x)=e^{-x^2}$ olsun.

1) $f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$; 2) $f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}\geq 0$ olması üçün $x\leq 0$ olmalıdır, yəni $(-\infty,0)$ intervalında $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyası artan olur;

3) $f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}\leq 0$ olması üçün isə $x\geq 0$ olmalıdır, yəni $(0+\infty)$ intervalında funksiya azalandır.

Deyilənlərdən görünür ki, $x_0=0$ nöqtəsi $f(x)$-ın "dayanma" nöqtəsidir, yəni artma və azalma intervallarının sərhəddidir. Bu isə o deməkdir ki, $x_0 = 0$ nöqtəsində $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyası özünün ən böyük qiymətini alır.

$$f(\boldsymbol{0}) = e^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{1} = \underset{x\in R}{\mathrm{Max}}\, f(x) = \underset{x\in R}{\mathrm{Sup}}\, f(x)\ .$$

Misal 2. $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ funksiyasının monotonluq intervallarını tapın.

Həlli: 1) $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$

2) $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1$

$$x^2 \leq \frac{1}{2},\ |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

yəni $\left(-\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}, \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\right)$ intervalında $f(x)$ funksiyası artandır;

3) $f^{`}(x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) \leq 0 \ \Leftrightarrow 2x^2 \geq 1, |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

Yəni $f(x)$ funksiyası $(-\infty, -\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}})$ və $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ intervallarında azalandır.

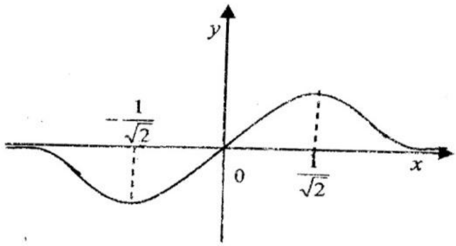
$f(-\frac{1}{\sqrt{2}},) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} < 0, \qquad f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \ \frac{1}{\sqrt{2}} e = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$

olur.(şəkil 1)

Bu isə o deməkdir ki,

$$\mathrm{Max}\ f(x) = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} \cdot e^{-\boldsymbol{1}/\boldsymbol{2}};$$

$$\mathrm{Min}\ f(x) = -\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} \cdot e^{-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}$$



Şəkil 1.

13.2.3.Funksiyanın ekstremumu

Fərz edək ki, y=f(x) , [a,b] parçasında təyin olunmuş funksiya, x_0 isə həmin parçanın hər hansı daxili nöqtəsidir.

Tərif. Əgər f(x)-in $x_0$nöqtəsinin hər hansı $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ ətrafında yerləşən bütün qiymət-lərində

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyilər ki, f(x) funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu var. $f(x_0)$ədədinə funksiyanın lokal maksimum qiyməti deyilir.

Anoloji olaraq, x-in x_0 nöqtəsinin hər hansı $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ ətrafında yerləşən bütün qiymətlər-ində

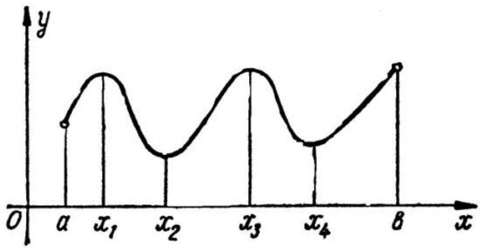
$$f(x) \geq f(x_0)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində lokal minimumu var. $f(x_0)$ ədədinə funksiyanın lokal minimum qiyməti deyilir.

Tərifdən aydındır ki, funksiyanın lokal minimumu və lokal maksimumu baxılan nöqtənin yaxın ətrafına nəzərən götürülür.Funksiyanın lokal maksimumuna və lokal minimumuna birlikdə funksiyanın lokal ekstremumu deyilir.

Funksiya ekstremumunu oblastın daxili nöqtələrində aldığından ona daxili ekstremum da deyilir. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasının a ucundakı $f(a)$ qiyməti həmin nöqtənin hər hansı sağ $(a, a+\delta)$ $(\delta>0)$ ətrafındakı bütün qiymətlərdən kiçik (böyük) olmazsa, yəni $f(a)\geq f(x)$, $x\in(a, a+\delta)$ olarsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyasının $x=a$ nöqtəsində sərhəd maksimumu (minimumu) var. Parçanın $x=b$ ucunda sərhəd maksimumu və sərhəd minimumu da eyni qayda ilə təyin olunur.

Funksiyanın sərhəd maksimumu və və sərhəd minimumu birlikdə funksiyanın sərhəd ektremumu adlanır.Lokal ekstremumun tərifindən aydındır ki, funksiyanın öz təyin oblastında lokal ekstremumu ola da bilər, olmaya da bilər.Funksiyanın təyin oblastında bir və ya bir neçə lokal minimumu və lokal maksimum ola bilər.Məsələn, $f(x)=x^3$ funksiyasının lokal ekstremumu yoxdur $f(x)=x^2$ funksiyasının isə $x=0$ nöqtəsində lokal minimumu vardır



Şəkil 2.

Qrafiki 2-ci şəkildə verilmiş funksiyanın x_1 və x_3 nöqtələrində lokal maksimumu, x_2 və x_4 nöqtələrində isə lokal minimumu vardır. Funksiyanın $x=a$ nöqtəsində sərhəd minimumu, $x=b$ nöqtəsində isə sərhəd maksimumu var.

Funksiyanın lokal ekstremumu hansı nöqtələrində ola bilər?

Teorem (Lokal ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt).

y=f(x) funksiyasının diferensiallanan olduğu $x_0$nöqtəsində lokal ekstremumu varsa, onun törəməsi həmin nöqtədə sıfra bərabərdir: f `(x_0)=0.

İsbatı: Tutaq ki, f(x) funksiyasının x_0 nöqtəsində ekstremumu var. Onda ixtiyari (kiçik) Δx artımı üçün :

$$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)\ ,\quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0.$$

Buradan

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0}{\Delta x}\le 0, \Delta x>0 \text{ olduqda,}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0}{\Delta x}\ge 0, \Delta x<0 \text{ olduqda}$$

Bu bərabərsizliklərdə Δx→0 şərtində limitə keçsək, eyni zamanda

$$f`(x_0)\le 0,\quad f`(x_0)\ge 0$$

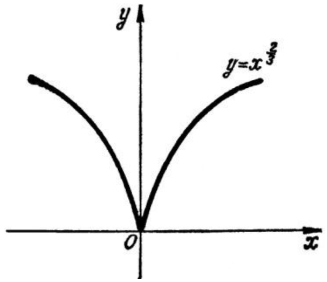
münasibətləri alınır, buradan da f `(x_0)=0.

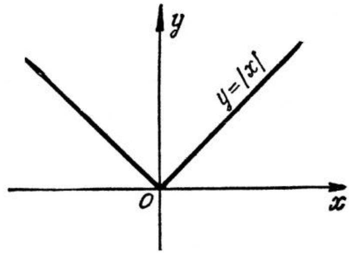
Deməli, diferensiallanan f(x) funksiyanın lokal ekstremumu, onun törəməsinin sıfra bərabər olduğu nöqtələrdə ola bilər.

Funksiyanın törəməsinin sıfra bərabər olduğu nöqtələrə bəzən həmin funksiyanın stasionar nöqtələri deyilir.

Funksiyanın lokal ekstremumu, törəməsi olmadığı (f `($x_0$)=∞ olan və f `(x_0)-in heç olmadığı) nöqtələrdə də ola bilər.

Məsələn, y=$x^{\frac{2}{3}}$ və y=|x| funksiyaların hər ikisinin x=0 nöqtəsində törəməsi yoxdur, lakin həmin x=0 nöqtəsində onların lokal minimumu var.(şəkil 1, 2)





Şəkil 1. **Şəkil 2.**

Kəsilməyən funksiya törəməsinin sıfra çevrildiyi və törəməsi olmadığı nöqtələrə həmin funksiyanın böhran nöqtələri deyilir. Buradan aydındır ki, funksiyanın böhran nöqtələri onun stasionar nöqtələri ilə törəməsinin olmadığı nöqtələrdən ibarətdir.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən funksiyanın lokal ekstremumunun varlığı üçün şərtin zəruriliyini aşağıdakı ümumi şəkildə söyləmək olar.

Şərtin zəruriliyi.

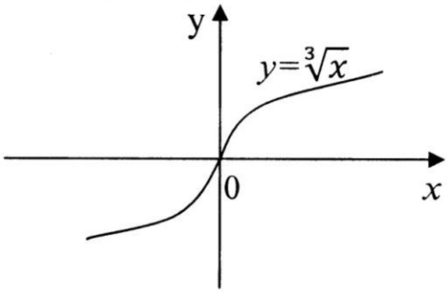
Funksiyanın lokal ekstremum qiymət aldığı hər bir nöqtə həmin funksiyanın böhran nöqtəsidir. Lakin hər bir böhran nöqtəsində funksiyanın lokal ekstremumu olduğunu düşünmək səhvdir. Böhran nöqtəsində funksiya lokal ekstremum qiymət almaya da bilər.

Məsələn, $x=0$ nöqtəsi $f(x)=x^3$ funksiyasının böhran nöqtəsidir, funksiyanın $f`(x)=3x^2$ törəməsi həmin nöqtədə sıfra bərabərdir.

Lakin funksiya həmin nöqtədə lokal ekstremum qiymət almır (şəkil 3). Eləcə də, $x=0$ nöqtəsi $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyasının böhran nöqtəsidir. Bu nöqtədə

$$f`(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

törəməsi sonsuzluğa bərabərdir. Verilmiş funksiya x=0 böhran nöqtəsində lokal ekstremum qiymət almır (3-cü şəkil).



Şəkil 3.

Verilmiş funksiyanın böhran nöqtəsində lokal ekstremumu olduğunu necə bilmək olar?

13.2.4. Ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər

Verilmiş funksiya özünün böhran nöqtəsində nə zaman lokal ekstremum qiymət alacağını təyin etmək üçün nöqtə ətrafında onun törəməsini tədqiq edirlər. Bu qayda ilə funksiyanın birtərtibli , ikitərtibli və s. törəmələrindən istifadə etməklə lokal ekstremum varlığı üçün müxtəlif kafi şərtlər verilir.

Teorem 1. Tutaq ki, y=f(x) funksiyası x_0 böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməyən və həmin ətrafda, x_0 nöqtəsi müstəsna olmaqla, diferensiallanan funksiyadır.

Əgər soldan sağa x_0 nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın f\`(x) törəməsi öz işarəsini dəyişirsə, onda hə-

min nöqtədə funksiyanın lokal ekstremumu var, soldan sağa x_0 nöqtəsindən keçdikdə funksiyanın törəməsi öz işarəsini dəyişmədikdə isə həmin nöqtədə funksiyanın lokal ekstremumu yoxdur.

Bu halda, funksiyanın $f^{`}(x)$ törəməsi $x_0$ nöqtəsindən solda müsbət, sağda mənfi olduqda həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var, funksiyanın törəməsi $x_0$ nöqtəsində solda mənfi ($f`(x)<0$), sağda müsbət ($f`(x)>0$) olduqda isə həmin nöqtədə funksiyanın lokal minimumu var.

İsbati: Əvvəlcə, fərz edək ki, funksiya törəməsi öz işarəsini x_0 nöqtəsində müsbətdən mənfiyə dəyişir, yəni

$x<x_0$ olduqda $f`(x)>0$ , $x>x_0$ olduqda isə $f`(x)<0$ olur. Onda x-in x_0 nöqtəsinin teoremdə göstərilən ətrafında yerləşən ixtiyari qiyməti üçün Laqranj teoreminə görə

$$f(x)-f(x_0)=f`(\xi)(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

olar.

Əgər $x<x_0$ olarsa, $x<\xi<x_0$ olduğundan $f`(\xi)>0$ və $x-x_0<0$. Bu halda (1) düsturunun sağ tərəfi mənfi ədəd olar, buna görə də həmin x nöqtələrində

$$f(x)-f(x_0)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

bərabərsizliyi ödənilər.

Əgər $x_0<x$ olarsa, $x-x_0>0$ və $x_0<\xi<x$ olduğundan $f'(\xi)<0$.

Bu halda (1) bərabərliyinin sağ tərəfi mənfi ədəd olar və yenə də (2) bərabərsizliyi ödənilər.

Deməli $x-\text{in}x_0$ nöqtəsinin göstərilən ətrafında yerləşən bütün qiymətlərində (2) bərabərsizliyi, yəni

$$f(x)<f(x_0)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu isə x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının lokal maksimumu olduğunu göstərir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, funksiyanın törəməsi x_0 nöqtəsində öz işarəsini mənfidən müsbətə dəyişdikdə $x - inx_0$ nöqtəsinin göstərilən ətrafında yerləşən bütün qiymətlərində

$$f(x) > f(x_0)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının lokal minimumu olması aydındır.

Əgər $f(x)$ funksiyasının törəməsi x_0 nöqtəsindən keçdikdə öz işarəsini dəyişmirsə onda $f'(\xi)$ kəmiyyəti həmin ətrafda eyni işarəli olar, $x - x_0$ fərqi isə soldan sağa x_0 nöqtəsindən keçdikdə öz işarəsini mənfidən müsbətə dəyişir. Buna görə də x_0 nöqtəsinin istənilən kiçik ətrafında həm$f(x) > f(x_0)$ və həm də$f(x) < f(x_0)$bərabərsizliyinin ödənildiyi nöqtələr olar. Bu isə x_0 nöqtəsində lokal ekstremumun olmadığını göstərir.

Teoremin həndəsi mənası belədir: soldan sağa hərəkət etdikdə funksiyanın artma intervalı qurtarıb azalma intervalı başlayırsa (və ya tərsinə), onda funksiyanın artma və azalma intervallarını ayıran x_0 nöqtəsi həmin funksiyanın lokal maksimum (minimum) nöqtəsidir. Bu təklifin tərsi doğru olmaya da bilər. Funksiyanın lokal ekstremum nöqtəsi onun monotonluq (artma və azalma) intervallarını ayırmaya da bilər. Məsələn,

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin^2\frac{1}{x} + 1\right), & x \neq 0 \\ 0 \qquad , & x = 0 \end{cases}$$

funksiyasının $x = 0$ nöqtəsində lokal minimumu var. Bu nöqtədə törəməsi sıfra bərabərdir:

$$f_0' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2\left(\sin\frac{1}{\Delta x}+1\right)}{\Delta x} = 0$$

Lakin $x = 0$ nöqtəsi $f_0(x)$ funksiyasının monoton-luq intervallarını ayırmır. Funksiyanın

$$f_0'(x) = 2x\left(\sin^2\frac{1}{x} + 1\right) - \sin\frac{2}{x}$$

törəməsi $x = 0$ nöqtəsinin hər iki tərəfində (əlbəttə, $x = 0$ nöqtəsinə çox yaxın olan nöqtələrdə) həm müsbət və həm də mənfi işarəli qiymətlər alır .

İsbat etdiyimiz teoremə əsasən verilmiş (a, b) intervalında kəsilməz törəməsi olan f(x) funksiyasının həmin intervaldakı lokal ekstremumlarını tapmaq üçün aşağıdakı praktiki qaydanı alırıq: həmin funksiyanın (a, b) intervalında yerləşən bütün böhran nöqtələrini taparaq

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < b$$

şəklində nömrələyirik.

Bu nöqtələrin təyin etdiyi

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \qquad \textbf{(3)}$$

İntervallarının hər birinin daxilində funksiyanın $f'(x)$ törəməsi var və bu törəmə (3) intervallarının hər birinin daxilində öz işarəsini saxlayır. Bu intervallarda törəmənin işarəsini təyin etməklə (törəmənin intervalda işarəsi intervalın bir daxili nöqtəsində törəmənin qiymətinin işarəsi ilə təyin olunur) $x_k (k = 1, 2 \dots, n)$ nöqtələrində funksiyanın lokal ekstremumunun varlığını teoremə əsasən yoxlamaq olar.

Misal 1. Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ funksiyasının lokal ekstremumunu tapmalı. Bu məqsədlə

$$f'(x) = 2x - 2x^3 = 2x(1 - x)(1 + x) \qquad \textbf{(4)}$$

törəməsinin sıfıra çevrildiyi nöqtələri tapaq:

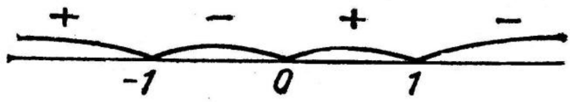
$$x_1 = -1\,, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1\,.$$

Aydındır ki, verilmiş funksiyanın böhran nöqtələri ancaq bu üç nöqtə olar, çünki funksiya törəməsinin sıfra çevrildiyi və törəmənin olmadığı başqa nöqtələr yoxdur. Bu nöqtələr vasitəsilə ədəd oxu

$$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,\infty) \qquad \textbf{(5)}$$

kimi intervallara ayrılır .

Funksiyanın törəməsinin bu intervallarda işarəsi göstərilmişdir (şəkil 1).



Şəkil 1.

Bir daha qeyd etmək lazımdır ki, (5) intervallarının hər birinin daxilində (4) törəməsi öz işarəsini saxlayır. Buradan aydındır ki, funksiyanın törəməsi $x_1 = -1$ nöqtəsində öz işarəsini müsbətdən mənfiyə, $x_2 = 0$ nöqtəsində öz işarəsini mənfidən müsbətə və $x_3 = 1$ nöqtəsində isə müsbətdən mənfiyə dəyişir.

Deməli teoremə görə verilmiş funksiyanın $x_1 = -1$ nöqtəsində lokal maksimumu $x_2 = 0$ nöqtəsində lokal minimumu və $x_3 = 1$ nöqtəsində isə lokal maksimumu var. Bu ekstremal qiymətlər

$$f(-1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}$$

ədədləridir.

13.3.Lokal ekstremumun yüksək tərtibli törəmə vasitəsilə araşdırılması

Funksiyanın lokal ekstremumunun varlığını ikitərtibli törəmə vasitəsilə təyin etmək bəzən daha əlverişli olur.

Teorem 2. Əgər $\mathbf{f(x)}$ funksiyasının stasionar $\mathbf{x_0}$ (yəni, $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ olan) nöqtəsində ikitərtibli $\mathbf{f''(x_0)}$ törəməsi varsa, onda $f''(x_0) < 0$ olduqda funksiyanın $\mathbf{x_0}$ nöqtəsində lokal maksimumu, $f''(x_0) > 0$ olduqda isə həmin nöqtədə lokal minimumu var.

İsbatı. İkitərtibli törəmənin tərifinə görə

$$\mathbf{f''(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

Olduğundan ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ var ki $x -$ in $0 < |x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$f''(x_0) - \varepsilon < \frac{f'(x)}{x-x_0} < f''(x_0) + \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

münasibəti ödənilir .

$f''(x_0) < 0$ olduqda müsbət ε ədədini elə seçmək (məsələn $\varepsilon = \frac{|f''(x_0)|}{2}$) olar ki $f''(x_0) + \varepsilon < 0$ bərabərsizliyi ödənilsin. Onda (1) bərabərsizliyinin sağ tərəfindən alarıq ki $x -$ in $0 < |x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} < 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$x < x_0$ olduqda $x - x_0 < 0$ və $x > x_0$ olduğundan (2) bərabərsizliyinin ödənilməsi üçün $x < x_0$ olduqda $f'(x) > 0$, $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) < 0$ olmalıdır.

Deməli funksiyanın $f'(x)$ törəməsi x_0 nöqtəsində öz işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişir yəni həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var.

$f''(x_0) > 0$ olduqda isə (6) münasibətinin sol bərabərsizliyinə əsasən göstərmək olar ki $x < x_0$ olduqda $f'(x) < 0$, $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) > 0$ olmalıdır yəni $f'(x)$ törəməsi öz işarəsini x_0 nöqtəsində mənfidən müsbətə dəyişir. Bu isə funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumunun olduğunu göstərir.

Misal 2. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 5$ funksiyasının lokal ekstremumunu tapmalı.

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$$

Olduğundan funksiyanın böhran nöqtələri $x_1 = 2$ və $x_2 = 3$ olar. Bu nöqtələrdə ikinci törəmənin qiymətini tapaq:

$$f''(x) = 12x - 30,$$
$$f''(2) = 12 \cdot 2 - 30 = -6 < 0$$
$$f''(3) = 12 \cdot 3 - 30 = 6 > 0$$

Olduğundan 2-ci teoremə görə funksiyanın $x_1 = 2$ nöqtəsində lokal maksimumu $x_2 = 3$ nöqtəsində isə lokal minimumu var .

Misal 3. $f(x) = x^4$ funksiyasının lokal ekstremumunu tapmalı.

$$f'(x) = 4x^3 = 0$$

bərabərliyini yeganə $x = 0$ nöqtəsi ödəyir. Bu nöqtədə funksiyanın ikinci törəməsi sıfra bərabərdir:

$$f''(x) = 12x^4, f''(0) = 12 \cdot 0 = 0.$$

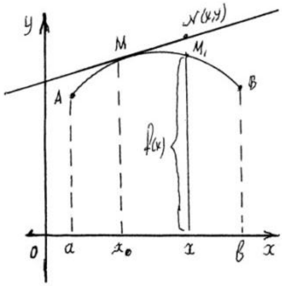
Ona görə də $x = 0$ nöqtəsində funksiyanın lokal ekstremumunun olmasını 2-ci teoremi tətbiq etməklə yoxlamaq olmaz.

Lakin $x < 0$ olduqda $f'(x) = 4x^3 < 0$ $x > 0$ olduqda $f'(x) > 0$ olması göstərir ki $f'(x)$ törəməsi $x = 0$ nöqtəsində işarəsini mənfidən müsbətə dəyişir. Onda 1-ci teoremə görə $x = 0$ nöqtəsində funksiyanın lokal minimumu var.

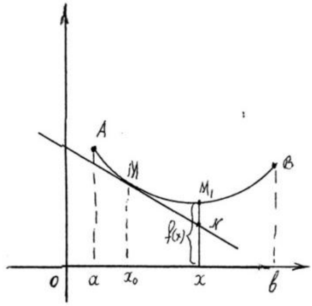
Misal 4. $f(x) = x\ln x\ (x > 0)$ funksiyasının $f'(x) = \ln x + 1$ törəməsi $x = e^{-1}$ nöqtəsində sıfra çevrilir.Bu nöqtədə $f''(x) = \frac{1}{x}$ törəməsi $f''(e^{-1}) = e > 0$ olduğundan 2-ci teoremə görə $x = e^{-1}$ böhran nöqtəsində funksiyanın lokal minumumu var.

13.4. Qabarıq və çökük əyrilər

Tərif 1. Hamar AB əyrisi hər bir M nöqtəsinə çəkilmiş toxunandan aşağıda (yuxarıda) yerləşərsə, onda AB əyrisinə qabarıq (çökük) əyri deyilir (şəkil 4 və 5).



Şəkil 4.



Şəkil 5.

Bəzi kitablarda qabarıq və çökük sözləri yerinə “qabarıqlığı yuxarıya” və “qabarıqlığı aşağıya” yönəlmiş əyrilər deyirlər. Biz “qabarıq” və “çökük” məvhumlarını işlədəcəyik. $M(x_0, y_0)$ əyrinin hər hansı bir nöqtəsi, $y=f(x)$ isə $(a\leq x\leq b)$ 0 əyrinin tənliyi olsun. Bu halda M_0 nöqtəsində əyriyə çəkilmiş toxunanın tənliyi

$Y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);\quad Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (1) olar. $N(x,y)$ toxunanın, $M_1(x,y)=M_1(x,f(x))$ isə AB əyrisinin x-ə uyğun nöqtələri olsun. Onda, qabarıq əyri üçün $y\leq Y$ (2) çökük əyri üçün isə $y\geq Y$ (3) olacağı aydındır. Ona görə də bir əyrinin qabarıq və ya çökük olacağını göstərmək üçün (2) və ya (3) bərabərsizliklərinin doğru olduğunu göstərmək kifayət olar.(1)-dən və əyrinin $y=f(x)$ tənliyindən yaza bilərik:

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Burada Laqranj düsturunu tətbiq etsək,

$$y-Y=f'(c_1)\cdot(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\left[f'(c_1)-f'(x_0)\right](x-x_0)$$

alarıq, c_1 isə x ilə x_0 arasında bir nöqtədir. YenidənLaqranj teoremini tətbiq etsək,

$$y-Y=f''(c_2)(c_1-x_0)(x-x_0) \qquad \textbf{(4)}$$

bərabərliyini almış olarıq burada c_2, c_1 ilə x_0 arasında bir nöqtədir.

Teorem 1. Əgər (a,b) aralığında$f''(x) < 0$ **isə, onda** $y=f(x)$ **əyrisi bu aralıqda qabarıq,** $f''(x) > 0$ **olduqda isə çökük olur.**

İsbatı. (4) bərabərliyində x_0,x,c_1,c_2 kimi dörd nöqtə vardır və onların iki formada düzülüşü mümkündür:

I) $x<x_0 \Rightarrow x<c_1<c_2<x_0$ və

II) $x > x_0 \Rightarrow x > c_1 > c_2 > x_0$.

Əvvəlcə:

I) hala baxaq. Bu halda $c_1 - x_0 < 0, x - x_0 < 0$ olduğundan $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$ olar.

$f''(x) < 0$ qəbul etsək, onda y-Y<0, y<Y olar.

Əgər $f''(x) < 0$ olmaqla

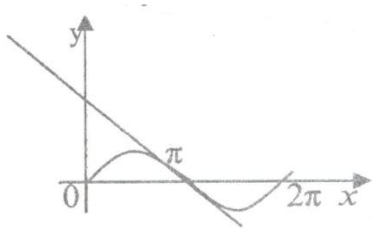
II) hala baxmış olsaydıq, onda da y<Y olduğunu görərdik. Beləliklə,$f''(x) < 0$ olduqda əyri (a,b) intervalında qabarıq olur.Əgər $f''(x) > 0$ olsa, o zaman yenə də (4) düsturundan asanlsqla görünür ki, I) və II) halların hər ikisində y>0, y>Y olur ki, bu da (a,b) aralığında y=f(x) əyrisinin çökük olması deməkdir.

Tərif 2. y=f(x) əyrisi üzərində olub, onun qabarıq hissəsini çökük hissəsindən ayıran $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinə əyrinin dönmə nöqtəsi deyilir.

Dönmə nöqtəsini tapmaq üçün aşağıdakı teoremdən istifadə etmək olar:

Teorem 2. Əgər y=f(x)-in (a,b) aralığında f ', f'' kəsilməz törəmələri varsa (burada x_0-müstəsna ola bilər!) və x_0-dan keçdikdə f ''(x) öz işarəsini dəyişirsə, onda $M_0(x_0, f(x_0))$ dönmə nöqtəsidir.

Əlavə olaraq x_0 nöqtəsində f'' varsa, onda $f''(x_0) = 0$ olmalıdır. Verilən təriflərdən görünür ki, dönmə nöqtəsində əyrinin toxunanı 0 əyrini kəsir və onun bir tərəfindən digər tərəfinə keçir. Məsələn, $x_0=\pi$ nöqtəsində y=sinx əyrisinə çəkilmiş toxunan y=π-x olar və bu düz xətt y=sinx əyrisini x=π, yəni



Şəkil 6.

(π,0) nöqtəsində kəsir. (π,0) nöqtəsindən solda əyri qabarıq, sağda isə çökükdür (şəkil 6).

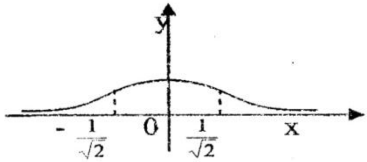
Solda əyri toxunanın altında, sağda isə üstündə qalır. Başqa bir misal olaraq $y = e^{-x^2}$ əyrisinə baxaq (şəkil 7). Bu əyri üçün:

$y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $y'' = 0$

olması üçün $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmalıdır.

$|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduqda $y'' > 0$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduqda isə $y'' < 0$ olur.

Bu isə o deməkdir ki, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ intervalında əyri qabarıqdır, $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ və $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ intervallarında isə çökükdür (şəkil 7).

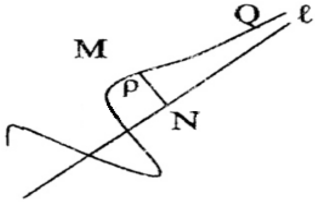


Şəkil 7.

yəni $y = e^{-x^2}$ əyrisinin $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ və $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ kimi iki dönmə nöqtəsi vardır.

Əyrinin asimptotları haqqında

1. Sonsuz uzaqlaşmış nöqtələri olan Q əyrisi və ℓ düz xətti verilmiş olsun (şəkil 8). M nöqtəsi Q əyrisi üzərində qalaraq M→∞ olduqda $\rho(Q,\ell) = (MN) = \rho$.



Şəkil 8.

məsafəsi ρ→0 olarsa, ℓ düz xəttinə Q əyrisinin asimptotu deyilir.

Şaquli və maili olmaqla iki növ asimptotlardan danışmaq olar.

1) Şaquli asimptot (əgər varsa!) ordinatoxuna paralel olan asimptotlara deyilir.

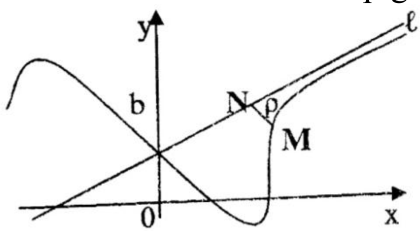
Deməli, əyrinin y=f(x) tənliyi verildikdə elə $x=x_0$ axtarılmalıdır ki, $x \to x_0$olduqda $y=f(x) \to \infty$ olsun. Bu zaman $x=x_0$ düz xətti y=f(x) əyrisinin şaqulu assimptotu olur.

2)Ordinat oxuna paralel olmayan asimptota isə maili asimptot deyilir.

Hər belə düz xətt y=kx+b kimi bir tənliklə ifadə oluna bilər. Burada da iki hal ola bilər:

a)k=0. yəni y=b olmaqla absis oxuna paralel olan asimptot alınır. Göründüyü kimi bu halda y sonsuzluğa yaxınlaşa bilməz, ancaq $y \to b$ ola bilər. Deməli $M(x,y) \to \infty$ olması ancaq $x \to \infty$ olduqda mümkün olar. Ona görə də $x \to \infty$ olduqda, $y \to b$ olarsa, y=b düz xətti y=f(x) əyrisinin absis oxuna paralel asimptotu olur.

b) $k \neq 0$. Bu halda asimptot koordinat oxlarının heç birinə paralel olmaz. Deməli, bu tipli asimptotun varlığını şərtləndirən düsturlara ehtiyac vardır. $M(x,y) \in \ell$ ixtiyari nöqtə olsun (şəkil 9). Bu nöqtəniny=kx+b düz xəttindən olan uzaqlığı



Şəkil 9.

$$\rho(M,\ell) = \frac{(kx - y + b)}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{(y - kx - b)}{\sqrt{1 + k^2}}$$

olur və $\rho \to 0$ olması $\lim\limits_{x\to\infty}(y - kx - b) = 0$ olması deməkdir. Buradan görünür ki,

$$K = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

olur. Əgər bu limit yoxdursa, onda əyrinin maili asimptotu yoxdur. Əgər (1) limiti varsa, onda

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] \qquad \textbf{(2)}$$

limitinə baxılır. Bu limit də yoxdursa, maili asimptot yoxdur. Əgər (2) limiti də varsa, onda k və b sabitləri (1) və(2), düsturları ilə hesablanır və maili asimptotun y=kx+b tənliyi yazılır.

2) Qeyd edək ki, bir əyrinin sonsuz sayda şaquli asimptotu ola bildiyi halda, ən çoxu iki maili asimptotu ola bilər: $x\to-\infty$ və $x\to+\infty$ hallarında

Məsələn, a) y=tgx əyrisinin sonsuz sayda şaquli asimptotu var: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ şəklində olan düz xətlərin hər biri belə asimptotdur.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ əyrisinin heç bir şaqulu asimptotu yoxdur. Lakin y=o onun maili asimptotudur.

v) $y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$ əyrisinin x=1 və x=2 kimi iki şaquli asimptotu var.

Bu əyri üçün

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-1)(x-2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)(x-2)} = 0$$

olduğundan, y=0·k+0=0 (absus oxu) onun maili asimptotudur.

3.Parametrik şəkildə. $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ şəklində verilmiş əyrilər üçün bu asimptotların olub-olmaması aşağıdakı kimi müəyyənləşdirilir:

a)əgər elə t_0 varsa ki, $t\to t_0$olduqda $x\to x_0$, $y\to\infty$ olsun, onda $x=x_0$ şaquli asimptot olur;

b)əgər elə t_0 varsa ki, $t\to t_0$olduqda $x\to\infty$, $y\to y_0$ olsun, onda $y=y_0$ absis oxuna paralel asimptot olur;

c)əgər elə t_0 varsa ki, $t\to t_0$ olduqda $x\to\infty$, $y\to\infty$ olmaqla, sonlu

$$k=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k_0,\; b=\lim_{t\to t_0}\left[\psi(t)-k_0\cdot\varphi(t)\right]$$

limitləri olsun, onda əyrinin $y=k_0\,x+b$ maili asimptotu var.

Misal 1. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{t-1} \\ y=\dfrac{t+2}{t+1} \end{cases}$ olsun.

a)$t\to 1-$da $x\to\infty,\ y\to\frac{3}{2}$ Deməli $y=\frac{3}{2}$ asimptotudur.

$b)t\to -1-da\ y\to\infty,\ x\to {}^1\!/\!_2$ olduğundan, $x={}^1\!/\!_2$ şaquli asimptotdur.

c) elə $t=t_0$ yoxdur ki, $t\to t_0$ olduqda eyni zamanda həm $x\to\infty$ həm də $y\to\infty$ olsun. Bu isə o deməkdir ki, maili asimptot ($y=kx+b,\ k\neq0$) yoxdur.

Misal 2. $x=\dfrac{2t}{t^2-1},\quad y=\dfrac{t^2}{t-1}$ parametrik tənliklərilə verilmiş əyri üçün

a) $t\to\infty$ olduqda $x\to0$, $y\to\infty$ olduğundan, $x=0$ şaquli asimptotdur;

b)t→-1 olduqda x→∞, $y\to-\frac{1}{2}$ olduğu üçün $y=-\frac{1}{2}$ absis oxuna paralel asimptotdur;

c)t→1 olduqda x→∞, y→∞ olur və buradan

$$k=\lim_{t\to1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to}\frac{t(t+1)}{2}=1,$$

$$b=\lim_{t\to1}(y-1\cdot x)=\lim_{t\to1}\left(\frac{t^2}{t-1}-\frac{2t}{t^2-1}\right)=\lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)-2t}{t^2-1}=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^3+t^2-2t}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to1}\frac{t^2+2t}{t+1}=\frac{3}{2};\ y=kx+b=x+\frac{3}{2}.$$

(maili asimptot).

13.5. Funksiyanın qrafikinin qurulması

Bütün deyilənləri yekunlaşdıraraq, funksiyanın araşdırılmasının aşağıdakı sxemini almış oluruq.

1.Verilmiş y=f(x) ifadəsinin varlıq oblastını, kəsilməzlik oblastını, kəsilmə nöqtələrini müəyyənləşdirmək;

2.Funksiyanın sabitlik oblastlarını tapmaq;

3.Funksiyanın monotonluq intervallarını tapmaq;

4.Funksiyanın lokal ekstremumlarını tapmaq;

5.Funksiyanın mütləq maksimum və mütləq minimumlarını tapmaq;

6.Funksiyanın qabarılıq, çöküklük intervallarını, habelə dönmə nöqtələrini tapmaq;

7.Funksiyanın asimptotlarını araşdırmaq və tapmaq;

8.Əldə edilənlərin hamısını Koordinat sisteminə köçürüb y=f(x) əyrisini tapmaq;

Qeyd. Qrafikin daha dəqiq olması üçün funksiyanın tək-cütlük, periodiklik kimi xassələrini, oxlarla kəsişmə nöqtələrini və bu kimi əlavə xassələrini də öyrənmək olar.

XIV FƏSİL. İBTİDAİ FUNKSİYA VƏ QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL

14.1.1.İbtidai funksiya və qeyri müəyyən inteqralın tərifi

Məlumdur ki, diferensial hesabının əsas məsələsi verilən funksiyanın törəməsinin və ya diferensialının tapılmasından ibarətdir. Praktikada tez-tez funksiyanın törəməsinin tapılmasına tərs olan məsələnin həlli lazım gəlir. Başqa sözlə biz tez-tez törəməsi verilən funksiyanın özünü tapmaq məsələsi ilə rastlaşırıq. Bu məsələ inteqral hesabının əsas məsələsi hesab olunur.

Tərif 1. Müəyyən bir aralıqda F(x) funksiyasının törəməsi f(x) funksiyasına bərabər olarsa, F(x) funksiyası həmin aralıqda f(x) funksiyasının **ibtidai funksiyası** adlanır,yəni

$$F`(x)=f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$F(x)= x^4$ funksiyası $f(x) = 4x^3$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır, çünki

$$F'(x)=4x^3=f(x), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

Aydındır ki, $F_1(x)=x^4+1$, $F_2(x)=x^4-3$ və ümumiyyətlə, $F_3(x)=x^4+C$ (C- ixtiyari sabitdir) şəklində olan funksiyaların hər biri $f(x) = 4x^3$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.

Bu misal onu göstərir ki, verilən funksiyanın ibtidai funksiyası varsa, belə funksiyalar sonsuz saydadır.

Teorem. Müəyyən bir aralıqda verilən funksiyanın iki müxtəlif ibtidai funksiyası həmin aralıqda bir-birindən sabit toplananla fərqlənir.

Tutaq ki,$F_1(x)$və $F_2(x)$ funksiyaları (a,b) aralığında f(x) funksiyasının ibtidai funksiyalarıdır.

$$F'_1(x)=f(x) \text{ və } F'_2(x)=f(x).$$

$F'_1(x)=F'_2(x)$ olduğuna görə $F_1(x)$ və $F_2(x)$ funksiyaları bir-birindən ancaq sabit toplananla fərqlənir.

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Tərif 2. f(x) funksiyasının bütün ibtidai funksiyalarının çoxluğuna onun **qeyri-müəyyən inteqralı deyilir** və bu $\int \mathbf{f(x)dx}$ kimi işarə edilir.

$\int \mathbf{f(x)dx}$ yazılışında f(x) funksiyası inteqralaltı funksiya, f(x)dx isə **inteqralaltı ifadə** adlanır.

Yuxarıda isbat edilən teoremdən çıxır ki, əgər F(x) funksiyası müəyyən bir aralıqda f(x) funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, onda bu funksiyanın bütün ibtidai funksiyaları çoxluğu

$$\mathbf{F(x)+C}, \quad \mathbf{C} \in (-\infty, +\infty)$$

düsturu ilə verilir. Bu o deməkdir ki,

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + C}.$$

Funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralının tapılması əməliyyatı **inteqrallama** adlanır.

Misal. $f(x) = x^2 + 5$ funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralını tapın.

Həlli.

$$\int (\mathbf{x^2 + 5})\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3 + 5x + C},$$

çünki

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3 + 5x + C}\right)' = \mathbf{x^2 + 5.}$$

14.1.2. Qeri-müəyyən inteqralın əsas xassələri

1. Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya bərabərdir:

$$\left(\int \mathbf{f(x)dx}\right)' = \mathbf{f(x)}.$$

Bu xassə bilavasitə qeyri-müəyyən inteqralın tərifindən alınır.

2.Funksiyanın törəməsinin inteqralı həmin funksiyanın özü ilə sabit toplananın cəminə bərabərdir:

$$\int \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}.$$

3.Sıfırdan fərqli sabit vuruğu inteqral işarəsi qarşısına çıxarmaq olar:

$$\int \mathbf{Af(x)dx} = \mathbf{A}\int \mathbf{f(x)dx}.$$

Tutaq ki, F(x) funksiyası f(x) funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.Onda (1) düsturuna görə

$$A\int f(x)dx = A(F(x) + C) = AF(x) + AC = AF(x) + C_1 \quad \mathbf{(1)}$$

Bu düsturda həm C və həm də C_1=AC ixtiyari sabitlərdir.Digər tərəfdən

$$\left(\mathbf{AF(x)}\right)' = \mathbf{AF'(x)} = \mathbf{Af(x)}$$

olduğu üçün

$$\int \mathbf{Af(x)dx} = \mathbf{AF(x)} + \mathbf{C_1} \qquad \mathbf{(2)}$$

(1) və (2) düsturlarından

$$\int \mathbf{Af(x)dx} = \mathbf{A}\int \mathbf{f(x)dx}$$

bərabərliyi alınır.

4. İki funksiyanın cəminin qeyri-müəyyən inteqralı onların qeyri-müəyyən inteqralının cəminə bərabərdir:

$$\int [\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}]\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x)dx} + \int \mathbf{g(x)dx}$$

Tutaq ki, F(x) və G(x) funksiyaları uyğun olaraq f(x) vəə g(x) funksiyalarının ibtidai funksiyalarıdır: F´(x)=f(x), G´(x)=g(x). Onda müəyyən inteqralın tərifinə

$$\int \mathbf{f(x)dx} + \int \mathbf{g(x)dx} = [\mathbf{F(x)} + \mathbf{C_1}] + [\mathbf{G(x)} + \mathbf{C_2}] =$$
$$[\mathbf{F(x)} + \mathbf{G(x)}] + (\mathbf{C_1} + \mathbf{C_2}) = \mathbf{F(x)} + \mathbf{G(x)} + \mathbf{C} \qquad \mathbf{(3)}$$

Bu düsturda C_1,C_2 və C ixtiyari sabitlərdir. Digər tərəfdən

$$[\mathbf{F(x)} + \mathbf{G(x)}]' = \mathbf{F'(x)} + \mathbf{G'(x)} = \mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}$$

olduğu üçün düsturuna görə

$$\int[\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}]\mathbf{dx} = [\mathbf{F(x)} + \mathbf{G(x)}] + \mathbf{C} \qquad (4)$$

olar. (3) və (4) düsturlarından

$$\int[\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}]\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x)dx} + \int \mathbf{g(x)dx}$$

düsturu alınır.

14.2.1. Əsas inteqrallar cədvəli

Qeyri müəyyən inteqralın tərifinə görə, əgər F(x) funksiyası f(x) funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, onda

$$\int \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{F(x)} + \mathbf{C} \quad \mathbf{(1)}$$

Misal. İnteqralı hesablayın:

$$\int \mathbf{x^5dx}.$$

Həlli. $\left(\frac{x^6}{6}\right)'=x^5$ olduğu üçün (1) düsturuna görə

$$\int \mathbf{x^5dx} = \frac{\mathbf{x^6}}{\mathbf{6}} + \mathbf{C}.$$

(1) düsturundan istifadə edərək aşağıdakı düsturların doğru olduğunu yoxlamaq olar:

1) $\int \mathbf{0dx} = \mathbf{C}$,

2) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ ($\alpha \neq -1$ və α sabit ədəddir).

3) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}} = \mathbf{ln|x|} + \mathbf{C}$, ($x \neq 0$ olduğu hər bir intervalda)

4) $\int \mathbf{a^x dx} = \frac{\mathbf{a^x}}{\mathbf{lna}} + \mathbf{C}, \quad (\mathbf{a} > 0,\ a \neq 1)$, a xüsusi halda a=e olarsa $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int \mathbf{\cos xdx} = \mathbf{\sin x} + \mathbf{C}$,

6) $\int \mathbf{\sin xdx} = -\mathbf{\cos x} + \mathbf{C}$,

7) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{cos^2x}} = \mathbf{tgx + C}$, (cosx-in sıfırdan fərqli olduğu tərkib intervalda)

8) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{sin^2}} = \mathbf{-ctgx + C}$,(sinx-in sıfırdan fərqli olduğu hər bir intervalda)

9) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}} = \mathbf{arcsinx + C = -\arccos x + C_1}$,

10) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1+x^2}} = \mathbf{arctgx + C = -arcctgx + C_1}$,

11) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1-x^2}} = \mathbf{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C}$,

12) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x^2+\alpha}}} = \mathbf{\ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C}$, $\quad \boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

13) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x^2 \pm a^2}}$=**ln**$\left|\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{x^2 \pm a^2}}\right|$**+c**

14.2.2. İnteqralın doğruluğunun yoxlanılması

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi bu düsturların hər birinin doğruluğunu bilavasitə diferensiallamaqla yoxlamaq olar.

Məsələn, 13-cü düsturun doğruluğunu yoxlayaq. Sağ tərəfin diferensialını hesablasaq,

$$d(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' dx}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$$

$$= \frac{dx}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

olar, yəni 13-ci düstur doğrudur.

Bu inteqrallar cədvəlindən istifadə edərək, bir çox elementar funksiyaların inteqralını hesablamaq olar.

İnteqralı, cədvəldən istifadə edərək hesablamağa bilavasitə inteqrallama deyilir.

XV FƏSİL. İNTEQRALLAMA ÜSULLARI. RASİONAL KƏSRLƏRİN İNTEQRALLANMASI

15.1. Əsas inteqrallama üsulları haqqında

Qeyri-müəyyən intqeralı hesablamaq üçün onu müəyyən üsullarla cədvəl intqerallarına gətirirlər. Bu üsulların ən çox tətbiq edilən bir neçəsi ilə tanış olaq.

Ən cox istifadə edilən üsullar aşağıdakılardır:

1. Dəyişənlərə ayırma üsulu.
2. Dəyişəni əvəzetmə üsulu.
3. Hissə - hissə ineqrallama üsulu.

I. Dəyişənlərə ayırma üsulu. Tutaq ki, f(x) funksiyasını elə $f_1(x)$ və$f_2(x)$ funksiyalarının cəmi şəklində göstərmək mümkündür ki,

$$\int \mathbf{f_1(x)dx} \ \text{və} \int \mathbf{f_2(x)dx}$$

İnteqralları cədvəlinteqrallarınınköməyiilə hesablanabilir. Onda

$$\int \mathbf{f(x)dx} = \int [\mathbf{f_1(x) + f_2(x)}]\mathbf{dx}$$

inteqralını məlum

$$\int [\mathbf{f_1(x) + f_2(x)}]\mathbf{dx} = \int \mathbf{f_1(x)dx} + \int \mathbf{f_2(x)dx}$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

Misal 1.

$$\int \left(\mathbf{x^2 + 3x + \frac{2}{x}}\right)\mathbf{dx} = \int \mathbf{x^2dx} + \int \mathbf{3xdx} + \int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{3x^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{2ln|x| + C}$$

Misal2.

$$\int \frac{\mathbf{x^3+1}}{\mathbf{x^2}}\mathbf{dx} = \int \mathbf{xdx} + \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2}} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{x^{-2+1}}}{\mathbf{-2+1}} + \mathbf{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\ .$$

Misal 3.

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int\frac{2dx}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{2x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1}+$$

$$+C=2\sqrt{x}++8\sqrt[4]{x}+C$$

Misal 4.

$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{1}{2}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2xd2x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C\ .$$

II. Dəyişəni əvəzetmə üsulu.

Tutaq ki,

$$\int \mathbf{f(x)dx}$$

inteqralını hesablamaq lazımdır. Bir çox hallarda elə $\varphi(x)$ funksiyası tapmaq mümkün olur ki, inteqralaltı ifadəni

$$\mathbf{f(x)dx=g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx}$$

şəkildə göstərmək,

$$\int \mathbf{g(t)dt}$$

inteqralını isə hesablamaq mümkün olur. Bu halda əgər

$$\int \mathbf{g(t)dt=G(t)+C}$$

olarsa, onda

$$\int \mathbf{f(x)dx}=\int \mathbf{g(\ \varphi(x)d\varphi(x)=G\big(\varphi(x)\big)+C}$$

düsturu doğru olar.

Misal 5. İnteqralı hesablayın:

$$\int\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1+\sqrt{x+1}}}.$$

Həlli. $\sqrt{x+1}=t$ *əvəzləməsi aparaq*. Buradan

$$\mathbf{x=t^2-1}\ \text{və}\ \mathbf{dx=2tdt}$$

alınır. Ona görə də

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = \int 2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{d(1+t)}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} -$$

$-2\ln(1+\sqrt{x+1}\,) + C$.

Misal 6. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x\sqrt{x+1}}}.$$

Həlli. $\sqrt{x+1} = t$ $qəbul\ edək$. Buradan

$$\mathbf{x = t^2 - 1 \text{ və } dx = 2tdt}$$

alınır. Onda

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = -2\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{-2}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right| + C$$

III. Hissə-hissə inteqrallama üsulu.

Tutaq ki$u = f(x)$ vəə $v = g(x)$ kəsilməz törəmələri olan funksiyalardır. Hasilin diferensialı düsturuna görə

d(uv)=udv+vdu.

Buradan

$$\int \mathbf{d(uv)} = \int \mathbf{udv} + \int \mathbf{vdu}$$

və ya

$$\int \mathbf{udv = uv} - \int \mathbf{vdu}$$

düsturu alınır. Bu düstur **hissə-hissə inteqrallama düsturu** adlanır.

Hissə-hissə inteqrallama düsturu o zaman tətbiq edilir ki, $\int vdu$ inteqralı verilmiş $\int udv$ inteqralına nisbətən asan hesablansın.

Misal 8. İnteqralı hesablayın:

$$\int \mathbf{x \sin x \, dx}$$

Həlli. u=x və dv=sin xdx=d(-cosx) götürək və hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\int \mathrm{xsinxdx} = \int \mathrm{xd(-cosx)} = -\mathrm{xcosx} - \int (-\mathrm{cosx})\mathrm{dx} =$$

$$= -\mathrm{xcosx} + \mathrm{sinx} + \mathrm{C}$$

Misal 9. İnteqralı hesablayın:

$$\int \mathbf{xe^{-x}dx}$$

Həlli. u=x və $d\nu = e^{-x}dx = d(-e^{-x})$ götürək və hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\int \mathrm{xe^{-x}dx} = \int \mathrm{xd(-e^{-x})} = -\mathrm{xe^{-x}} - \int (-\mathrm{e^{-x}})\mathrm{dx} =$$

$$= -\mathrm{xe^{-x}} - \int \mathrm{e^{-x}d(-x)} = -\mathrm{xe^{-x}} - \mathrm{e^{-x}} + \mathrm{C}.$$

Misal 10. İnteqralı hesablayın:

$$\int \mathbf{xtg^2xdx}.$$

Həlli. u=x sin x, dv=$\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$götürək və hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\int \mathrm{x\,tg^2xdx} = -\int \mathrm{xsinxd}\left(\frac{1}{\mathrm{cosx}}\right) = -\mathrm{xsinx}\frac{1}{\mathrm{cosx}} +$$

$$+\int \frac{1}{\mathrm{cosx}}(\mathrm{xsinx})\mathrm{dx} = -\mathrm{xtgx} + \int \frac{1}{\mathrm{cosx}}(\mathrm{sinx} + \mathrm{xcosx})\mathrm{dx}$$

$$= -\mathrm{xtgx} - \int \frac{\mathrm{dcosx}}{\mathrm{cosx}} + \int \mathrm{xdx} = -\mathrm{xtgx} - \ln|\mathrm{cosx}| -$$

$$\frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{C}.$$

15.2. Sadə rasional kəsrlərin inteqrallanması. Rasional kəsrlərin sadə kəsrlərə ayrılması

Tutaq ki, $P_m(x)$ və $Q_n(x)$ uyğun olaraq m və n dərəcəli çoxhədlilərdir. Aşağıdakı rasional funksiyaya baxaq:

$$\mathbf{R(x) = \frac{p_m(x)}{Q_n(x)}} \qquad \textbf{(1)}$$

Burada iki hal mümkündür:

1) $\mathbf{m < n}$, başqa sözlə rasional funksiya düzgün rasional kəsr şəklində verilmişdir;

2) $\mathbf{m \geq n}$**,** başqa sözlə rasional funksiya düzgün olmayan kəsr şəklində verilmişdir.

Düzgün olmayan rasional kəsrin surətini məxrəcinə bölməklə onu çoxhədli ilə düzgün rasional kəsrin cəmi şəklində göstərmək olar. Beləliklə, rasional funksiyaların inteqrallanması düzgün rasional kəsrlərin inteqrallanması məsələsinə gətirlir.

Misal 1. İntqeralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{adx}}{\mathbf{bx+c}}.$$

Həlli. $\int \frac{\mathbf{adx}}{\mathbf{bx+c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \int \frac{\mathbf{d(bx+c)}}{\mathbf{bx+c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \mathbf{ln|bx + c| + C}$.

Misal 2. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{x^3-5x+7}}{\mathbf{x-3}} \mathbf{dx}.$$

Həlli. x^3-5x+7 çoxhədlisini (x-3)-ə bölməklə inteqraltı funksiyanı

$$\frac{\mathbf{x^3-5x+7}}{\mathbf{x-3}} = \mathbf{x^2 + 3x + 4 + \frac{19}{x-3}}$$

şəklində göstərək. Onda

$$\int \frac{x^3-5x+7}{x-3}dx = \int \left(x^2+3x+4+\frac{19}{x-3}\right)dx =$$
$$= \int x^2dx + 3\int xdx + 4\int dx + 19\int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 19\ln|x-3| + C\ .$$

Misal 3. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2+a^2}}\,(\mathbf{a \neq 0}).$$

Həlli. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2+a^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\int \frac{\mathbf{d(x/a)}}{\mathbf{(x/a)^2+1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\,\mathbf{arctg}\,\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}} + \mathbf{C}.$

Misal 4. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2-a^2}}\,(\mathbf{a \neq 0}).$$

Həlli. İnteqralaltı funksiyanı

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-a^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x+a)(x-a)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2a}}\frac{\mathbf{(x+a)-(x-a)}}{\mathbf{(x+a)(x-a)}} =$$
$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2a}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-a}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+a}}\right)$$

şəklində göstərək. Onda

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] +$$
$$+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ .$$

Misal 5. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{x^2 \pm a^2}}.$$

Həlli. $\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{x^2 \pm a^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{d(x^2 \pm a^2)}}{\mathbf{x^2 \pm a^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{ln|x^2 \pm a^2| + C}$.

Misal 6. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2+6x-11}}.$$

Həlli: $\int \frac{dx}{x^2+6x-11} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-20} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2-(\sqrt{20})^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{20}} \ln\left|\frac{(x+3)-\sqrt{20}}{(x+3)+\sqrt{20}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{(x+3)-2\sqrt{5}}{(x+3)+2\sqrt{5}}\right| + C$$

Misal 7. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{2x^2-3x+4}}.$$

Həlli. $\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{2x^2-3x+4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{x^2-\frac{3}{2}x+2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{(x-\frac{3}{4})^2+2-\frac{9}{16}}}$.

$x - \frac{3}{4} = t$ əvəz edək. Onda

$$\int \frac{xdx}{2x^2-3x+4} = \frac{1}{2} \int \frac{\left(t+\frac{3}{4}\right)dt}{t^2+\frac{23}{16}} = \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^2+\frac{23}{16}} +$$

$$+\frac{3}{8} \int \frac{dt}{t^2+\frac{23}{16}} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(t^2+\frac{23}{16}\right)}{t^2+\frac{23}{16}} + \frac{3}{8} \int \frac{dt}{t^2+(\frac{\sqrt{23}}{4})^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(t^2+\frac{23}{16}\right) + \frac{3}{8}\frac{4}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4t}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right) + \frac{3}{2\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4x-\frac{3}{4}}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 2\right) + \frac{3}{2\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{4x-3}{\sqrt{23}}$$

6-cı və 7-ci misallarda tətbiq edilən qaydalardan istifadə edərək biz həmişə

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx \qquad (1)$$

şəklində olan qeyri-müəyyən inteqralı hesablaya bilərik.

Əgər cx^2+dx+e çoxhədlisinin iki müxtəlif kökü varsa, (1) inteqralını inteqralaltı funksiyanı sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərməklə hesablamaq daha əlverişli olur.

Misal 8. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{x-3}{x^2-3x-4}dx$$

Həlli. x^2-3x-4 çoxhədlisinin iki müxtəlif kökü var: $x_1=-1$ və $x_2=4$. Bu halda məlumdur ki, inteqralaltı funksiyanı

$$\frac{x-3}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x-x_1} - \frac{B}{x-x_2}$$

şəklində göstərmək olar. Burada A və B naməlum əmsallardır.

Onları

$$\frac{x-3}{x^2-3x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

və ya

$$(A+B)x-4A+B=x-3$$

eyniliyindən təyin edə bilərik:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4A+B=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{4}{5} \\ B=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Beləliklə, inteqralaltı funksiya

$$\frac{x-3}{x^2-3x-4} = \frac{4}{5(x+1)} + \frac{1}{5(x-4)}$$

şəklində göstərilə bilər. Onda

$$\int\frac{x-3}{x^2-3x-4}dx=\frac{4}{5}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{1}{5}\int\frac{d(x-4)}{x-4}=\frac{4}{5}\ln|x+1|+$$
$$+\frac{1}{5}\ln|x-4|+C.$$

15.3. İrrasional kəsrlərin inteqralı

İrrasional funksiyaları inteqrallamaq üçün elə əvəzləmə aparılır ki, həmin funksiya rasional funksiyaya çevrilir.

Misal 1. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x+3}}$.

Həlli. $\sqrt{x+3}=t$ əvəz edək. Buradan $x=t^2-3$ və $dx=2tdt$ düsturları alınır. Ona görə də

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x+3}}=\int\frac{2t(t^2-3)^2}{t}dt=2(t^4\,dt-6\int t^2dt+$$
$$+9\int dt=2\left(\frac{t^2}{5}-6\frac{t^3}{3}+9t\right)+C=\frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}}-$$
$$-4\,(x+3)^{\frac{3}{2}}++18(x+3)^{\frac{1}{2}}+C$$

Misal 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

Həlli: $\sqrt[4]{x}=t$ əvəz edək. Onda

$$x=t^4,\ \ \sqrt{x}=t^2\ \text{ və }\ dx=4t^3dt.$$

Ona görə

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t+t^2}=4\int\frac{t^2dt}{1+t}=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=$$
$$=4\int\frac{t^2-1}{t+1}dt+4\int\frac{dt}{t+1}=4\int\frac{dt}{t+1}=4\int tdt-4\int dt+$$
$$+4\int\frac{d(t+1)}{t+1}=4\cdot\frac{t^2}{2}-4t+4ln|t+1|+C=$$
$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C$$

Misal 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad a \neq 0.$

Həlli. Bu inteqralı hesablamaq üçün Eyler əvəzləməsi aparaq:

$$\sqrt{x^2+a} = t - x.$$

Buradan

$$a = t^2 - 2tx$$

bərabərliyi alınır. Bu bərabərliyin hər tərəfini diferensiallayaq:

$$0=2t\,dt-2x\,dt-2t\,dx$$

və ya

$$t\,dx=(t-x)dt$$

Bu bərabərlikdən

$$\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t} \text{ və ya } \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}$$

alınır. Beləliklə,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Buradan $t = \sqrt{x^2+a} + x$ olduğunu nəzərə alıb

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|\sqrt{x^2+a} + x\right| + C$$

cədvəl inteqralını alırıq.

Misal 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a > 0.$

Həlli. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Aşağıdakı inteqrala baxaq:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a \neq 0.$$

Bu inteqralın hesablanması a-nın işarəsindən asılı olaraq 3-cü və 4-cü misalda baxılan hallardan birinə gətirilir.

Misal 5. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x^2+5x+6}}}$.

Həlli.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+6}} = \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= ln\left|\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+x+\frac{5}{2}\right|+C =$$

$$= ln\left|\sqrt{x^2+5x+6}+x+\frac{5}{2}\right|+C.$$

1

15.4.Triqonometrik funksiyalar daxil olan ifadələrin inteqrallanması

1. Universal əvəzləmə. Tutaq ki,

$$\int \mathbf{R\ (\sin x, \cos x, tgx, ctgx, \sec x, cosecx)\ dx} \qquad (\mathbf{1})$$

şəklində inteqralın hesablanması tələb olunur. tg x, ctg x, sec x və cosec x funksiyaları hesab əməlləri vasitəsilə sinx və cos x ilə ifadə olunduğundan

$$\mathrm{tgx} = \frac{\sin x}{\cos x},\ \mathrm{ctgx} = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \mathrm{cosecx} = \frac{1}{\sin x}$$

(1)inteqralı həmişə

$$\int \mathbf{R(\sin x, \cos x)dx} \qquad (\mathbf{2})$$

şəklində inteqrala çevrilir. Buna görə də ancaq (2) inteqralının hesablanması ilə məşğul olaq. (2) inteqralında

$$\mathbf{tg}\,\frac{x}{2} = t \qquad (3)$$

əvəzləməsiniaparaq:

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} == \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Onda həmin inteqral t dəyişənindən asılı funksiyanın inteqralına çevrilir:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int R(t)dt.$$

Rasional funksiyanın inteqralı isə hesablana bilir.

Deməli, (2) şəklində hər bir inteqral (3) əvəzləməsi vasitəsilə rasional funksiyanın inteqralına gətirilir. Buna görə də (3) əvəzləməsinə **“universal triqonometrik əvəzləmə”** deyilir. Universal triqonometrik əvəzləmə bəzən çox mürəkkəb rasional funksiyanın inteqralına gətirir. Belə hallarda digər əvəzləmələrdən istifadə etmək daha faydalı olur.

Misal 1. $J_1 = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$inteqralını hesablamaq üçün (3) əvəzləməsindənistifadə edək. Onda

$$J_1=\int\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int dt=-\frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{2}t+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+C.$$

2.$\int\sin^m x\cos^n x dx$şəklində inteqrallar.

Burada m və n rasional ədədlər olduqda t=sinx və ya t=cosx əvəzləməsi vasitəsilə verilmiş inteqral binomal diferensialın inteqralına gətirilir. Doğrudan da, t=cosx əvəzləməsini götürsək, onda

$$\sin x=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}=(1-t^2)^{\frac{1}{2}},\ \ dt=-\sin x dx$$

$$dx=-(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

olur və verilmiş inteqral

$$\int\sin^m x\cos^n x dx=-\int t^n(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

şəklinə gətirilir ki, bu da binomal diferensialın inteqralıdır. m və n tam ədədlər olduqda verilmiş inteqral ya bilavasitə hesablanan inteqral, ya da rasional funksiyanın inteqralına gətirilir.

a) Tutaq ki, m=2k+1 (m istənilən tam ədədddir). Onda verilmiş inteqral t= cos x əvəzləməsi vasitəsilə rasional funksiyanın inteqralına gətirilir:

$$\int\sin^{2k+1}x\cdot\cos^n x dx\ =\ -\int\sin^{2k}x\cdot$$
$$\cos^n x d(\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x d(\cos x)=$$
$$=\ \int(1-t^2)^k t^n dt.$$

b) n=2k+1 (n istənilən tam ədəddir) olduqda t=sin x əvəzləməsi vasitəsilə verilmiş inteqral rasional funksiyanın inteqralına gətirilir.

c) m və n ədədlərinin hər ikisi $m = 2k > 0$ və $n = 2N > 0$ kimi müsbət cüt ədədlər olduqda

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x} \qquad (4)$$

düsturları vasitəsilə verilmiş inteqral

$$\int \mathbf{\sin^{2k} x \cos^{2N} x dx} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^{k} \left(\frac{1}{2} + + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^{N} dx$$

kimi yazılır. İnteqral altındakı ikihədliləri göstərilən dərəcədən qüvvətə yüksəltdikdən sonra cos 2x-in qüvvətlərinə nəzərən çoxhədli alınır. Təkdərəcəli hədlər b) halında göstərilən qayda ilə hesablanır. Cütdərəcəli hədlərin inteqralını isə (4) düsturlarını yenidən tətbiq etməklə kiçik dərəcəli qüvvətlərin inteqralına gətirirlər. Bu proses $\int \cos kx dx$ inteqralına gəlib çıxana qədər davam etdirilir. d) m və n ədədlərinin heç olmasa biri mənfi cüt ədəd olduqda t= tg x və yaxud t= ctg x əvəzləməsi vasitəsilə verilmiş inteqral ya bilavasitə hesablanan inteqrala, ya da rasional funksiyanın inteqralına gətirilir.

Misal 2.$\mathbf{J_2 = \int \cos^4 x dx}$ inteqralını hesablamaq üçün (4) düsturlarının ikincisindən istifadə edək :

$J_2 = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2\,x dx +$
$\frac{1}{4}\int \cos^2 2\,x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4\,x}{2} dx = \frac{1}{4}x +$

$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x +$
$\frac{1}{32}\sin 4x + C.$

3. Triqonometrik funksiyaların hasili daxil olan
$\int \sin\alpha\, x \sin\beta\, x\, dx, \int \sin\alpha\, x \cos\beta\, x\, dx, \int \cos\alpha\, x\cos\beta\, x\, dx$
inteqralları

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)\,x - \cos(\alpha+\beta)\,x],$$
$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)\,x + \sin(\alpha-\beta)\,x],$$
$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)\,x + \cos(\alpha-\beta)\,x].$$

düsturlarını tətbiq etdikdə bilavasitə hesablanır.

4. Triqonometrik funksiyalar daxil olan

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx \ \text{ və } \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx.$$

inteqrallarını hesablamaq üçün

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)' = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x),$$
$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x).$$

bərabərliklərindən inteqralaltı funksiyaları tapaq:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x)' + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cdot$$
$$\cdot\sin\beta x),$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cdot$$
$$\cdot\sin\beta x)' - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}(e^{\alpha x}\cos x).$$

Bu bərabərlikləri inteqrallasaq, alarıq:

$$\int \mathbf{e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} + C},$$

$$\int \mathbf{e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} + C}.$$

5. Hissə-hissə inteqrallama üsulu tətbiq etməklə

$$\int \mathbf{x^n\cos\alpha x dx}, \qquad \int \mathbf{x^n\sin\alpha x dx}, \qquad \int \mathbf{x^n e^{\alpha x}dx},$$

$$\int \mathbf{x^n arcsinxdx}, \int \mathbf{x^n arccosxdx}, \int \mathbf{x^n arctgxdx},$$

$$\int \mathbf{x^n arcctgxdx}.$$

inteqrallarını hesablamaq olar.

Misal 3. $\mathbf{J_2 = \int x^2 arctgxdx}$ inteqralını hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə hesablayaq:

$$\mathbf{u = arctgx}, \qquad \mathbf{dv = x^2dx, du = \frac{dx}{1+x^2}}, \qquad \mathbf{v = \frac{x^3}{3}}.$$

Onda

$$\mathbf{J_2 = \frac{x^3}{3}arctgx - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3}arctgx -}$$

$$\mathbf{-\frac{1}{3}\int\left(x - -\frac{x}{1+x^2}\right)dx =}$$

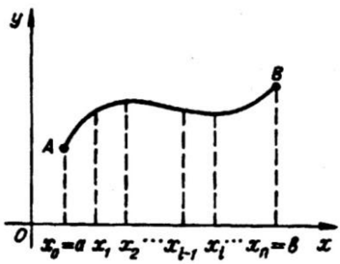
$$\mathbf{= \frac{x^3}{3}arctgx - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C}$$

XVI FƏSİL. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏRİFİ. MÜƏYYƏN İNTEQRALIN ƏSAS XASSƏLƏRİ. ORTA QİYMƏT TEOREMİ

16.1.1.İnteqral cəmi

Tutaq ki, f(x) [a,b] parçasında təyin edilmiş kəsilməz və mənfi qiymətlər almayan funksiyadır. Absis oxu, x=a və x=b düz xətlərinin parçaları və f(x) funksiyasının qrafiki ilə hüdudlanmış aABb müstəvi fiquru (şəkil 1) **əyirxətli trapesiya** adlanır. Bu əyrixətli trapesiyanın sahəsini tapaq. Bunun üçün [a,b] parçasını hər hansı qayda ilə n hissəyə bölək və bölgü nöqtələrini $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$ ilə işarə edək:

$$\mathbf{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.}$$



Şəkil 1.

f(x) funksiyasının $[x_{i-1}, x_i]$ parçasındakı ən kiçik və ən böyük qiymətlərini uyğun olaraq m_i və M_i ilə işarə edək. Beləliklə, aABb əyrixətli trapesiyası n sayda əyrixətli trapesiyaya bölünmüş olur. Aydındır ki, i-ci trapesiyanın sahəsi $m_i \Delta x_i (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$ hasilindən kiçik deyil, $M_i \Delta x_i$

hasilindən isə böyük deyil. Buna görə də aABb əyrixətli trapesiyasının sahəsi

$$s_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

cəmindəm kiçik deyil,

$$S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

cəmindən isə böyük deyil. Başqa sözlə

$$s_n \le S_{aABb} \le S_n$$

Bu bərabərsizlikdəkiS_n və S_n uyğun olaraq aABb əyrixətli trapesiyasına daxil olan və onu daxilinə alan pilləvari müstəvi fiqurların sahələridir. $\Delta x_1, x_2, \dots, \Delta x_n$ kəmiyyətlərinin ən böyüyü nə qədər kiçik olsa, başqa sözlə, biz [a,b] parçasını nə qədər kiçik hissələrə bölsək, s_n və S_n kəmiyyətləri də bir o qədər bir-birinə yaxın olar.

Tərif. Əgər

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} s_n = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} S_n$$

şərti ödənərsə, onda

$$S = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} S_n$$

kəmiyyəti **əyrixətli aABb trapesiyasının sahəsi** adlanır.

Əgər hər bir $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında hər hansı bir $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nöqtəsi götürsək, onda

$$m_i \le f(c_i) \le M_i, \ \ i = 1, 2 \dots, n$$

bərabərsizlikləri doğru olacaq. Bu bərabərsizliklərdən

$$s_n \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \le S_n \qquad (1)$$

bərabərsizliyi alınır.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

cəmi f(x) funksiyasının [a,b] parçasında **integral cəmi** adlanır. (1) bərabərsizliyində $\max\Delta x_i \to 0 -$ da limitə keçsək

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_{aABb} \qquad (2)$$

bərabərliyini alıraq.

16.1.2.Müəyyən inteqralın tərifi.Müəyyən inteqralların varlıq məsələsi

Tutaq ki, f(x) funksiyası [a,b] parçasında təyin edilmişdir. Təsəvvür edək ki, biz [a,b] parçasını əvvəl bir qayda ilə, sonra ikinci bir qayda ilə, daha sonra üçüncü bir qayda ilə və sair k-cı qayda ilə hissələrə bölməklə bu işi sonsuz olaraq davam etdiririk. [a,b] parçasını k-cı qayda ilə böldükdə alınan $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$,...,$[x_{n-1},x_n]$ parçalarının ən böyüyünün uzunluğu λ_k ilə işarə edək. Əgər $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ olarsa, onda [a,b] parçasının belə bölünmə ardıcıllığı **əsas bölünmə ardıcıllığı** adlanır.

Tərif. Əgər [a,b] parçasının hər bir əsas bölünmə ardıcıllığı üçün f(x) funksiyasının

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f(c_i)\Delta x_i}$$

inteqral cəmləri ardıcıllığı $c_i$nöqtələrinin seçilmə qaydasından asılı olmayaraq eyni bir I ədədinə yığılırsa, onda f(x) funksiyası [a,b] parçasında inteqrallanan funksiya, I ədədi isə bu funksiyanın həmin parçada müəyyən inteqralı adlanır.

f(x) funksiyasının [a,b] parçasında müəyyən inteqralı

$$\int_a^b f(x)dx$$

kimi işarə edilir. a və b ədədləri müəyyən inteqralın uyğun olaraq aşağı və yuxarı cərhədləri adlanır. Beləliklə, tərifə görə

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Bu düsturu bundan əvvəlki paraqrafdakı (2) düsturu ilə müqayisə etsək, görərik ki, mənfi qiymətlər almayan f(x) funksiyasının müəyyən inteqralı aABb əyrixətli trapesiyasının sahəsinə bərabərdir (müəyyən inteqralın həndəsi mənası).

Müəyyən inteqral inteqrallama dəyişəninin hansı hərflə işarə edilməsindən asılı deyil. Misal üçün

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\tau)d\tau.$$

İsbat etmək olar ki, əgər f(x) funksiyası [a,b] parçasında məhduddursa və bu parçada onun sonlu sayda kəsilmə nöqtələri varsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx$$

inteqralı var.

16.2.1.Kəsilməyən və monoton funksiyaların inteqrallanan olması

f(x) funksiyasının **[a,b]** parçasında inteqrallanan olması üçün onun həmin parçada məhdud olması zəruri şərtdir. Elə məhdud funksiyalar var ki, onlar inteqrallanan deyil. Buna misal olaraq **[0,1]** parçasında təyin edilmiş Dirixle funksiyasını göstərmək olar. Bu funksiya aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ rasional ədəd olduqda} \\ 0, & x \text{ irrasional ədəd olduqda} \end{cases}$$

[0,1] parçasının hər hansı bir əsas bölünmə ardıcıllığı üçün

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

inteqral cəmləri ardıcıllığını düzəldək. $c_1,c_2,\ldots$nöqtələri olaraq əvvəlcə rasional nöqtələr götürsək

$$\lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \lim_{\lambda_k\to 0} 1 = 1$$

olar. Əgər $c_1,c_2,\ldots$ nöqtələri olaraq ikinci dəfə irrasional nöqtələr götürsək

$$\lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n} 0 \quad \Delta x_i = \lim_{\lambda_k\to 0} 0 = 0$$

alırıq. Deməli, Dirixle funksiyasının inteqral cəmlərinin limiti $c_1,c_2,\ldots$ nöqtələrinin seçilmə qaydasından asılıdır. Bu isə o deməkdir ki, Dirixle funksiyası [0,1] parçasında inteqrallanan deyil.

16.2.2.Müəyyən inteqralın əsas xassələri

1. İstənilən sabit α ədədi üçün

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$$

doğrudur.

İsbatı: $f(x) = \alpha, \;\; x \in [a,b]$ funksiyasının inteqral cəmi

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \alpha(b-a)$$

olduğu üçün

$$\int_a^b \alpha \, dx = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_k \to 0} \alpha(b-a) = \alpha(b-a).$$

2. Əgər f(x) funksiyası [a,b] parçasında inteqrallanan, α isə hər hansı sabir ədəddirsə

$$\int_a^b f(x) \cdot \alpha dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

doğrudur, başqa sözlə sabit vuruğu inteqral işarəsi qarşısına çıxarmaq olar.

İsbatı: $\alpha\, f(x)$ funksiyasının [a,b] parçasında inteqral cəmi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f(c_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

olduğuna görə

$$\lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha f(c_i)\Delta x_i = \alpha \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

3. f(x) və g(x) funksiyaları [a,b] parçasında inteqrallanandırsa, onların cəmi də həmin parçada inteqrallanandır və bu zaman

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

doğrudur.

İsbatı : Müəyyən inteqralın tərifinə görə

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)+g(c_i)]\Delta x_i$$

Hər iki funksiya [a,b] parçasında interallanan olduğu üçün buradan alırıq:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Əgər f(x) və g(x) funksiyaları [a,b] parçasında inteqrallanandırsa və hər bir $x \in [a,b]$ üçün

$$f(x) \le g(x) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bərabərsizliyi ödənilir.

İsbatı : (1) bərabərsizliyindən

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i$$

bərabərsizliyi alınır. Burada $\lambda_k \to 0$-da limitə keçsək

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bərabərsizliyini alarıq.

5. Əgər f(x) [a,b] parçasında inteqrallanan funksiyadırsa və hər bir $x \in [a,b]$ üçün $m \le f(x) \le M$ (m və M sabit ədədlərdir) ikiqat bərabərsizliyi doğrudursa, onda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

İsbatı : Bu xassə bilavasitə 1-ci və 4-cü xassələrdən alınır.

6. Əgər f(x) funksiyası [a,b] parçasında inteqrallanandırsa və $a < c < b$ olarsa, onda [a,c] və [c,b] parçalarında da inteqrallanandır və tərsinə. Bu zaman aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b).$$

Bu xassənin isbatı aydındır.

Qeyd. $a \ge b$ olduqda $\int_a^b f(x)dx$ aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

16.2.3.Orta qiymət haqqında teorem

Teorem. f(x) funksiyası[a,b] parçasında kəsilməzdirsə, bu parçaya daxil olan elə c nöqtəsi var ki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a) \qquad (1)$$

bərabərliyi doğru olar.

İsbatı: a=b olduqda (1)-in doğruluğu aydındır. Tutaq ki, $a < b$.f(x) funksiyasının [a,b] parçasında ən kiçik bə ən böyük qiymətlərini uyğun olaraq m və M ilə işarə edək. Onda $m \le f(x) \le M$ bərabərsizliyindən

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

bərabərsizliyi alınır. Bu bərabərsizliyin hər tərəfini (b-a)-ya bölək:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

f(x) funksiyası [a,b] parçasında kəsilməz olduğu üçün bu parçaya daxil olan elə bir c nöqtəsi var ki,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

və ya

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

bərabərliyi doğru olur.

İndi fərz edək ki, $a > b$. Onda $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = -f(c)(a-b) = f(a)(b-a)$

16.3.1. Yuxarı sərhəddi dəyişən olan inteqrallar.

Yuxarı sərhəddi dəyişən müəyyən inteqral

Tutaq ki, **f(x)** funksiyası **[a,b]** parçasında kəsilməzdir. 16.2.2.-də deyildiyi kimi bu funksiya hər bir $[a, x]$ $(x \in [a, b])$ parçasında inteqrallanandır. Aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

Bu funksiya **yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən inteqral** adlanır.

Teorem .f(x) funksiyası [a,b] parçasında kəsilməzdirsə, F(x) funksiyası həmin parçada diferensiallanandır və

$$F'(x) = f(x)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Tutaq ki, x_0 [a,b] parçasına daxil olan hər hansı qeyd olunmuş bir nöqtədir. 16.2.2.-də verilən 6-cı xassəyə görə

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Aralıq qiymət haqqında teoremə görə buradan

$$F(x) - F(x_0) = f(c)(x - x_0)$$

bərabərliyi alınır

$$(c \in [x_0, x], x_0 < x \textit{ olduqda}, c \in [x, x_0], x < x_0 \text{ olduqda}).$$

F(x) funksiyası $x_0$nöqtəsində kəsilməz olduğu üçün buradan alırıq:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c) = \lim_{c \to x_0} f(c) = f(x_0)$$

Aydındır ki, F(x) funksıyası x_0=a nöqtəsində sağ, x_0=b nöqtəsində isə sol törəməyə malik olacaq:

$$F'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a),$$

$$F'(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

16.3.2.Nyuton-Leybnis düsturu

Teorem. f(x) funksiyası [a,b] parçasında kəsilməz, F(x) funksiyası isə f(x)-in ibtidai funksiyasıdırsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

düsturu doğrudur.

İsbatı : Yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən inteqral haqqında teoremə görə

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiyası f(x)-in ibtidai funksiyasıdır. Digər tərəfdən F(x) funksiyası da f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası olduğundan $\Phi(x)$ **və F(x)**funksiyaları bir-birindən ancaq sabit C toplananı ilə fərqlənə bilər: $\Phi(x) = F(x) + C$.

Bu düsturdan

$$\Phi(a) = F(a) + C, \Phi(b) = F(b) + C$$

bərabərlikləri alınır**.**

$$\Phi(a) = 0, \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

olduğu üçün C=**-**F(a) və

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(1) düsturu **Nyuton-Leybnis düsturu** adlanır. Sadəlik xatirinə bəzən F(b)-F(a) əvəzinə $\mathbf{F(x)}\Big|_{a}^{b}$ yazırlar. Onda (1) düsturu

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\ \Big|_a^b$$

şəklini alır.

Misal 1.

$$\int_0^1 xdx$$

Həlli. Nyuton-Leybnis düsturuna görə

$$\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Misal 2.

$$\int_0^3 x^3 dx$$

Həlli.

$$\int_0^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ \Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4}.$$

Misal 3.

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 1)dx$$

Həlli. Nyuton-Leybnis düsturuna görə

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - x\right)\ \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 - 2\right) -$$

$$-\left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - (-1)\right) = -3$$

16.4.Müəyyən inteqralların hesablanma üsulları.

Müəyyən inteqralın hissə-hissə inteqrallanması

Tutaq ki, u(x) və v(x) [a,b] parçasında kəsilməz diferensiallanan (kəsilməz törəməsi olan) funksiyalardır. Onda

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Düsturundan

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

alınır.

$$\int_a^b (uv)'dx = uv \Big|_a^b$$

olduğunu nəzərə alsaq, buradan

$$\int_a^b uv'dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

düsturunu alarıq. Bu düstur müəyyən inteqralda **hissə-hissə inteqrallama düsturu** adlanır.

Misal 1.

$$\int_0^\pi x\sin x\, dx.$$

Həlli. Bu inteqralı hissə-hissə inteqrallama düsturunun köməyi ilə hesablayaq. Bunun üçün u=x və dv=sinxdx=d(-cosx) götürək. Onda du=dx və v=-cosx olar. Ona görə də

$$\int_0^\pi x\sin x dx = x(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx = -\pi\cos\pi -$$

$$-0(-cos0)+\sin x\ \Big|_0^{\pi}=\pi+(\sin\pi-\sin0)=\pi$$

Misal 2.

$$\int_1^e x\ln x dx$$

inteqralının qiymətini hesablayaq.

Həlli. u=lnx və dv=xdx=d$\left(\frac{x^2}{2}\right)$ götürüb hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edək:

$$\int_1^e x\ln x\, dx=\int_1^e \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\ \Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}d\ln x=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\ \Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\ \Big|_1^e-\frac{1}{4}x^2\ \Big|_1^e=$$

$$=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi

Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz olunması qaydası aşağıdakı teoremə əsaslanır.

Teorem. Tutaq ki,

1)$a\leq x\leq b$ parçasında f(x) funksiyası təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır;

2) $x=\varphi(t)$ funksiyası $\alpha\leq t\leq\beta$ parçasında kəsilməz diferensiallanandır və

3) $[\alpha,\beta]$ parçasında $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b,$ $\varphi(\alpha)\leq\varphi(t)\leq\varphi(\beta)$ münasibətləri ödənilirsə, onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Bu, müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi düsturu adlanır.

İsbatı: Tutaq ki, F(x) funksiyası f(x)-in ibtidai funksiyasıdır. Onda $F(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası $\left(\varphi(t)\varphi`(t)\right)$ funksiyasının ibtidai funksiyası olur. Doğrudan da

$$\frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right) = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$$

Nyuton-Leybnis düsturuna görə

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right). \qquad (3)$$

Teoremin şərtinə görə $\varphi(\beta) = b$ və $\varphi(\alpha) = a$. Deməli, (2) və (3) düsturlarının sağ tərəfləri bərabərdir.

Ona görə də

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

(1) düsturu müəyyən inteqralda **dəyişənin əvəz edilməsi düsturu** adlanır. Onu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)d\varphi(t)$$

şəklində də yazmaq olar.

Misal 1.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$$

Həlli. $x^2=t$ əvəzləməsi aparaq. Onda $x = \sqrt{t}$ və $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt.$ Yeni inteqralın sərhədləri $t=x^2$ düsturunun köməyi ilə tapılır: bu düsturda x=0 götürüb, t=0 və $x=\sqrt{\pi}$ götürüb, $t=\pi$ alırıq. Onda

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{t}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t\ \Big|_0^{\pi} == -\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$$

Misal 2.

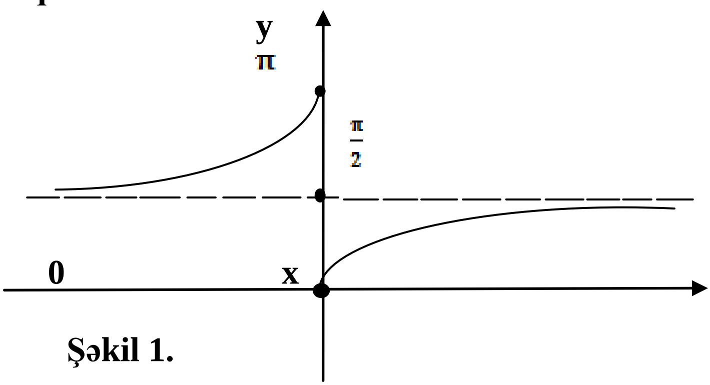
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}.$$

Həlli. $e^x = t$ ilə əvəz edək. Onda. Yeni inteqrallama sərhədlərini tapaq: olduqda t=1 və x=1 olduqda t=e olur. Onda

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)}dt = \int_1^e\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right]dt = \int_1^e\frac{dt}{t} -$$

$$-\int_1^e \frac{dt}{t+1} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\ \Big|_1^e = 1+\ln\frac{2}{e+1}.$$

Tək və cüt funksiyanın simmetrik parça üzrə inteqralı



Şəkil 1.

Tutaq ki, f(x) funksiyası simmetrik $[-a, a]$ parçasında təyin olunmuş cüt funksiyadır, yəni x-in $[-a, a]$ parçasındakı bütün qiymətlərində

$$f(-x) = f(x)$$

bərabərliyi ödənilir. Həmin funksiyanın $[-a, a]$ parçası üzrə götürülmüş inteqralını

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

kimi yazaq. Sağ tərəfdəki birinci inteqralda x=-t əvəzləməsini aparsaq

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt +$$

$$+\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

və ya

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \qquad (4)$$

münasibətini alarıq. Deməli, cüt funksiyanın simmetrik parça üzrə inteqralı, həmin funksiyanın parçanın yarısı üzrə inteqralının iki mislinə bərabərdir.

İndi fərz edək ki, $[-a, a]$ parçasında f(x) tək funksiyadır.

Onda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt +$$

$$+\int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt +$$

$$+\int_0^a f(x)dx = 0$$

və ya

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (5)$$

Misal 4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 2[\sin x]_0^{\pi} = 0.$$

Misal 5.

$$\int_{-a}^{a} x^{2n+1} dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Misal 6.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin x)^2 dx == \int_{-\pi}^{\pi} dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx =$$

$$= 2\pi + 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = 2\pi + 2\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= 2\pi + \pi - \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx = 3\pi - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} = 3\pi.$$

XVII FƏSİL.QEYRİ-MƏXSUSİ İNTEQRALLAR

17.1.1.Müəyyən inteqralın ümumiləşməsi

Verilmiş **f(x)** funksiyasının $[a,b]$ parçasında müəyyən inteqralı təyin edilərkən $[a,b]$ parçasının sonlu və f(x) funksiyasının məhdud olması tələb olunur. İnteqrallama parçası qeyri-məhdud olduqda onu sonlu sayda $[x_k, x_{k+1}]$ kimi sonlu hissələrə bölərək

$$J_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

inteqral cəmini düzəltmək mümkün deyildir. Əgər sonsuz parçanı sonlu sayda hissəyə bölsək, onda bu hissələrin heç olmasa birinin uzunluğu sonsuz olar. Bu halda (1) cəmi sonsuzluğa çevrilər və buna görə də həmin cəmin limiti sonlu ola bilməz. $[a,b]$ parçası sonlu olub, f(x) funksiyası həmin parçada qeyri-məhdud olduqda da düzəldilən (1) inteqral cəmi qeyri-məhdud olar. Bu halda da, (1) inteqral cəminin limiti sonlu ola bilməz. Başqa sözlə, f(x) funksiyasının sonlu $[a,b]$ parçasında müəyyən inteqralının varlığı üçün həmin parçada məhdud olması zəruri şərtdir.

Bununla belə, bir çox məsələlərdə müəyyən inteqralın sonsuz oblastlar və qeyri-məhdud funksiyalar üçün ümumiləşməsi tələb olunur. Belə ümumiləşmə isə bir çox hallarda mümkündür.

Müəyyən inteqralın sonsuz oblastlar və qeyri-məhdud funksiyalar üçün ümumiləşməsi olan inteqrallara **qeyri-məxsusi inteqrallar** deyilir. Qeyri-məxsusi inteqrallar iki növ olur: sonsuz sərhədli iteqrallar və qeyri-məhdud funksiyaların inteqralı.

17.1.2. Sonsuz sərhədli qeyri-məxsusi inteqrallar

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası $[a, +\infty)$ oblastında təyin olunmuş və istənilən sonlu $[a, N]$ $(N > a)$ parçasında inteqrallanan funksiyadır. Onda istənilən N üçün

$$\mathbf{J(N) = \int_a^N f(x)dx} \tag{1}$$

inteqralı sonludur və $N \to +\infty$ şərtində onun limitindən danışmaq olar.

Tərif. Əgər sonlu

$$\lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx \tag{2}$$

limiti varsa, onda həmin limitə f(x) funksiyasının $[a, +\infty)$ oblastında qeyri-məxsusi inteqralı deyilir və

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx \tag{3}$$

kimi işarə olunur. Bu halda, yəni (2) limiti sonlu olduqda f(x) funksiyasına $[a, +\infty)$ oblastında **qeyri-məxsusi mənada inteqrallanan (və ya inteqrallana bilən) funksiya** deyilir.

(2) limiti varsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

qeyri-məxsusi inteqralı yiğilan, əks halda, yəni (2) limiti olmadıqda isə həmin **qeyri-məxsusi inteqral dağılan** adlanır.

Misal.

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} \ (a > 0)$$

qeyri-məxsusi inteqralı $\lambda > 1$ olduqda yığılan, $\lambda \leq 1$ olduqda isə dağılandır. Doğrudan da, $\lambda > 1$ olduqda

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{N\to+\infty} \int_{a}^{N} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{N\to+\infty} \left[\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_{n}^{N}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda} \cdot \left(\frac{1}{N^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

və ya

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{a^{\lambda-1}}$$

olar. $\lambda \leq 1$olduqda isə qeyri-məxsusi inteqralın dağılan olması aşağıdakı münasibətlərdən aydındır:

$\lambda = 1$olduqda

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{a}^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to+\infty} [\ln N - \ln a] = +\infty,$$

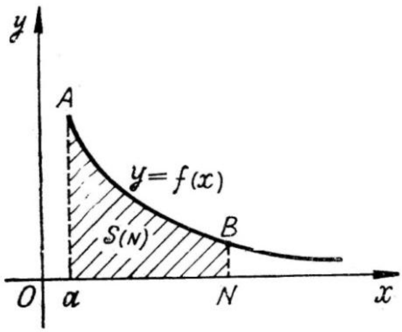
$\lambda < 1$olduqda

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^N \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1-\lambda}\left(N^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right) = +\infty.$$

$y = f(x) \geq 0(a \leq x < +\infty)$olduqda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

qeyri-məxsusi inteqralını həndəsi olaraq sonsuz uzun əyrixətli trapesiyanın $|(x,y)|a \leq x < \infty,\ 0 \leq y \leq f(x)$ sahəsi hesab etmək olar. (Şəkil 1.)



Şəkil 1.

Doğrudan da, a ABN əyrixətli trapesiyasının sahəsi

$$S(N) = \int_a^N f(x)dx \tag{4}$$

olar. $N \to +\infty$ şərtində (4) inteqralının limiti olsa, onda həmin limiti sonsuz uzun əyrixətli trapesiyanın sahəsi hesab etmək olar ki, bu da qeyri-məxsusi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)dx$$

inteqralı ilə ifadə olunur. $N \to +\infty$ şərtində (4) ifadəsinin limitinin olmaması həmin sonsuz uzun əyrixətli trapesiyanın sahəsinin sonsuz olduğunu, yəni sonlu sahənin olmadığını göstərir. Bu halda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

qeyri-məxsusi inteqralı dağılandır.

Qeyd edək ki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (5)$$

və istənilən $b > a$ üçün

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (6)$$

qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılan və ya dağılan olar. Doğrudan da,

$$\int_a^N f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^N f(x)\,dx.$$

və

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

inteqralı sonlu ədəd olduğundan (5) və (6) qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılan və ya dağılan olar.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ və } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

qeyri-məxsusi inteqralları da eyni qayda ilə təyin olunur:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{a} f(x)\,dx, \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (8)$$

Axırıncı

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

qeyri-məxsusi inteqralını

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^{b} f(x)\,dx + \lim_{N_2\to\infty}\int_{b}^{N_2} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx$$

kimi də təyin etmək olar.

Verilmiş f(x) funksiyasının (5), (7) və (8) qeyri-məxsusi inteqralları ilə bərabər onun mütləq qiymətinin

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx, \quad \int_{-\infty}^{a} |f(x)|\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$$

qeyri-məxsusi inteqrallarına da baxmaq olar.

(5) inteqralı və

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

qeyri-məxsusi inteqralları eyni zamanda yığılandırsa, onda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralına **mütləq yığılan qeyri-məxsusi inteqral** deyilir. Bu halda deyirlər ki, f(x) funksiyası $[a, +\infty)$ oblastında **mütləq inteqrallanandır.**

(5) inteqralı yığılan,

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

inteqralı dağılan olarsa, onda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralına **şərti yığılan qeyri-məxsusi inteqral** deyilir.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ və } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralının da mütləq və şərti yığılmasından danışmaq olar.

17.2.1. Sonsuz sərhədli qeyri-məxsusi inteqralların xassələri

Burada

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

qeyri-məxsusi inteqralının bir sıra xassələrindən danışılır. Həmin xassələr

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ və } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralları üçün də uyğun şəkildə doğrudur.

Xassə 1. $[a, +\infty)$ oblastında kəsilməyən f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası F(x) olarsa, onda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) \quad (1)$$

bərabərliyi (Nyuton-Leybnis düsturu) doğrudur. Burada

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) \quad (2)$$

qəbul olunur və (1) bərabərliyi aşağıdakı kimi başa düşülür: bərabərliyin hər iki tərəfinin eyni zamanda ya mənası var (sonludur) və bu halda bərabərlik doğrudur, ya da hər iki tərəfin mənası yoxdur.

Doğrudan da, tərifə görə

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{a}^{N} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} [F(N) - F(a)] =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$$

olar. $F(+\infty)$ ifadəsi sonlu ədəd olarsa,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralı yığılan olar və onu (1) düsturu ilə hesablamaq mümkündür. (2) limiti yoxdursa (və ya sonsuzluğa bərabərdirsə),

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralı dağılandır.

Xassə 2.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ və } \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

inteqralları yığılandırsa, onda istənilən həqiqi γ və μ ədəd-ləri üçün

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\, dx$$

inteqralı da yığılandır.

Doğrudan da, tərifə görə

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]\, dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N [\lambda f(x) + \mu\varphi(x)]dx =$$

$$= \lambda \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\, dx + \mu \lim_{N\to+\infty} \int_a^N \varphi(x)dx =$$

$$= \lambda \int_A^{+\infty} f(x)\, dx + \mu \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Aşağıdakı xassələri də eyni qayda ilə isbat etmək olar.

Xassə 3. $U = f(x)$ və $V = \varphi(x)$ funksiyalarının $[a,+\infty)$ oblastında kəsilməz törəmələri varsa və

$$\int_a^{+\infty} UdV, UV \Big|_a^{+\infty}, \qquad \int_a^{+\infty} VdU$$

ifadələrinin hər hansı ikisi sonludursa, onda

$$\int_a^{+\infty} UdV = UV \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} VdU. \qquad (3)$$

Düsturu doğrudur.

Xassə 4. Tutaqki, f(x) funksiyası $[a,+\infty)$ oblastında kəsilməyəndir, x= funksiyasının isə $[\alpha,\beta)$, $\alpha<\beta\leq+\infty$ yarım intervalında kəsilməz törəməsi vardır və

$$a=\varphi(\alpha)\leq\varphi(t)<\lim_{t\to\beta}\varphi(t)=+\infty$$

münasibəti ödənilir. Bu halda,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralı yığılandırsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (4)$$

düsturu doğrudur.

Bu xassələrdən istifadə etməklə bir çox qeyri-məxsusi inteqralları hesablamaq olar.

Misal .

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$J_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx - xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1,$$

$$J_2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2 = 2!,$$

$$J_3 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx = -x^3 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 6 = 3!$$

və ümumiyyətlə

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n!$$

17.2.2. Sonsuz sərhədli qeyri-məxsusi inteqralların yığılma əlamətləri

Bəzi məsələlərin tədqiqində çox zaman qeyri-məxsusi inteqralların qiymətini deyil, onların yığılan və ya dağılan olmasını bilmək lazım olur. f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası məlum olarsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

qeyri-məxsusi inteqralının yığılan olmasını əvvəlki paraqrafda göstərilən təkliflər vasitəsilə yoxlamaq olar. İnteqralaltı funksiyanın ibtidai funksiyası məlum olmadıqda isə qeyri-məxsusi inteqralların yığılma məsələsi çox zaman aşağıda göstərilən əlamətləri tətbiq etməklə öyrənilir.

Fərz edək ki, f(x) funksiyası $[a,+\infty)$ oblastında kəsilməyən və mənfi qiymətlər almayan funksiyadır. Onda

$$J(N) = \int_a^N f(x)\, dx$$

funksiyası $[a,+\infty)$ yarımintervalında monoton azalmayan olar. Buna görə də $N \to +\infty$ şərtində J(N) funksiyası monoton artaraq ya sonlu limitə, ya da sonsuzluğa yaxınlaşır. Məlumdur ki, monoton artan J(N) funksiyasının $N \to +\infty$ şərtində sonlu limitinin olması üçün onun məhdud, yəni

$$|J(N)| \leq M, \quad a \leq N < +\infty \qquad (1)$$

olması zəruri və kafi şərtdir .

Buradan qeyri-məxsusi inteqralların yığılması üçün aşağıdakı teorem aınır:

Teorem 1. F(x) funksiyası [a,+∞) yarımintervalında kəsilməyən və mənfi qiymətləralmayanfunksiya olduqda (1) münasibətinin ödənilməsi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

inteqralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

Qeyd edək ki, (1) şərti ödənilmədikdə

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^{N} f(x)\,dx = +\infty$$

olar.

Teorem 2: [a,+∞) yarımintervalında kəsilməyən f(x) və $\varphi(x)$ funksiyaları üçün

$$0 \le f(x) \le C\varphi(x) \qquad (2)$$

(C > 0 sabit ədəddir) bərabərsizliyi ödənilirsə, onda

$$J_1 = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

inteqralı yığılan olduqda

$$J_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

İnteqralı dayığılır, J_2inteqralı dağılan olduqda inteqralı da dağılır.

İsbatı. Fərz edək ki, J_1 inteqralı yığılır. Onda $\varphi(x) \ge 0\ (0 \le x < +\infty)$ olduğundan

$$J_1(N) = \int_a^N \varphi(x)\,dx$$

inteqralı artaraq $N \to +\infty$ şərtində sonlu limitə yaxınlaşır:

$$\int_a^N \varphi(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = J_1 \qquad (3)$$

Buradan və (2) bərabərsizliyindən

$$J_2(N) = \int_a^N f(x)\,dx \le C\int_a^N \varphi(x)dx \le CJ_1 \qquad (4)$$

alarıq. $J_2(N)$ inteqralı yuxarıdan məhdud olduğundan 1-ci teoremə görə J_2 inteqralı yığılır.

J_2 inteqralı dağılan olduqda (4) bərabərsizliyinə görə J_1 inteqralı da dağılır.

Teorem 3.[a,+∞) yarım intervalında kəsilməyən $\varphi(x)$ və f(x)≥0 funksiyaları üçün

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma \qquad (5)$$

limiti varsa, onda $0 < \gamma < +\infty$ olduqda

$$J_1 = \int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx \text{ və } J_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralları eyni zamanda ya yığılır, ya da dağılır.

İsbatı. Limitin tərifinə görə istənilən $0 < \varepsilon < \frac{\gamma}{2}$ ədədi üçün elə $N_0 > 0$ var ki, x-in bütün $x > N_0$ qiymətlərində

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \gamma\right| < \varepsilon$$

və ya

$$(\gamma-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (\gamma+\varepsilon)\varphi(x)\ (N_0 \le x < +\infty) \quad (6)$$
bərabərsizliyi ödənilir.

J_1 inteqralı yığılan olduqda
$$\int_N^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$
İnteqralı da yığılır. Onda (6) bərabərsizliyinə görə
$$\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$
inteqralı yığılır, buradan da, J_2 inteqralının yığılan olması aydındır.

İsbatın ardı eyni mühakimə ilə tamamlanır.

Nəticə. Tutaq ki, $[a,+\infty)$ yarımintervalında mənfi qiymətlər almayan f(x) funksiyası üçün
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\lambda} f(x) = \gamma$$
münasibəti ödənilir. Onda 1) $0 < \gamma < \infty$ *və* $\lambda \le 1$ olduqda
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad (7)$$
inteqralı dağılır, 2) $0 \le \gamma < \infty$ *və* $\lambda > 1$ olduqda isə (7) inteqralı yığılır.

Nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$$
inteqralının $\lambda > 1$ olduqda yığılan, $\lambda \le 1$ olduqda isə dağılan olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Xüsusi halda,
$$f(x) \approx \frac{1}{x^{\lambda}}$$

olarsa, onda $\lambda > 1$ olduqda (7) inteqralı yığılır, $\lambda \leq 1$ olduqda isə dağılır.

17.3. Koşi kriterisi və Abel əlaməti

Tutaq ki,

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

İnteqralı yığılır. Bu , o deməkdir ki,

$$F(N) = \int_a^N f(x)\,dx$$

funksiyasının $N \to +\infty$ şərtində sonlu J limiti var. Koşi kriterisinə görə bu, aşağıdakı şərtin ödənilməsinə ekvivalentdir:

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N_0 = N_0(\varepsilon)$ var ki, istənilən $N_1 > N_0$ və $N_2 > N_0$ üçün

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{N_2} f(x)dx - \int_a^{N_1} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Buradan f(x) funksiyasının $[a,+\infty)$ yarımintervalında inteqrallanan olması üçün aşağıdakı zəruri və kafi şərt alınır.

Teorem 1. (Koşi kriterisi).

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

inteqralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt: istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N_0 ədədinin olmasıdır ki, istənilən $N_1 > N_0$ və $N_2 > N_0$ üçün

$$\left| \int_{N1}^{N2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Fərz edək ki,

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

inteqralı yığılır. Onda Koşi kriterisinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N_0 var ki, istənilən $N_1 > N_0$ və $N_2 > N_0$ ədədləri üçün

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx \right| \le \left| \int_{N_1}^{N_2} |f(x)|dx \right|$$

bərabərsizliyinə əsasən,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx \right| < \varepsilon \quad (N_1 > N_0, N_2 > N_0$$

alınır ki, bu da

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralının yığılan olduğunu göstərir.

Beləliklə,aşağıdakı teoremi isbat etmiş olduq:

Teorem 2. Qeyri-məxsusi

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

inteqralı yığılırsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

inteqralı da yığılır.

Teorem 3. (Abel əlaməti). Tutaq ki, $\varphi(x)$ funksiyası $[a, +\infty)$ yarımintervalında diferensiallanandır, monoton azalır, $x \to +\infty$ şərtində isə sıfra yaxınlaşır və istənilən $N > a$ üçün

$$\left|\int_a^N f(x)dx\right| \le M_0 < +\infty \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda qeyri-məxsusi

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (3)$$

inteqralı yığılır.

İsbatı.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olduqda istənilən N_1 və N_2 ədədləri üçün

$$\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,\varphi(x)\,dx = [F(x)\,\varphi(x)]_{N_1}^{N_2} - \int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)dx \qquad (4)$$

düsturunu alarıq. $\varphi(x)$ funksiyası monoton azalan olduğundan $\varphi'(x) < 0$ olar.

İndi

$$\int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)dx$$

inteqralına orta qiymət teoremini tətbiq edək:

$$\int_{N_1}^{N_2} F(x)\varphi'(x)dx = F(\varepsilon)\int_{N_1}^{N_2} \varphi'(x)dx = F(\varepsilon)[\varphi(N_2) - \varphi(N_1)],$$

$[\varepsilon \in (N_1, N_2)]$.

Buradan (2) bərabərsizliyinə və (4) bərabərliyinə əsasən

$$\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)\varphi(x)\,dx\right| \le 2\ M_0[|\varphi(N_1)| + |\varphi(N_2)|]$$

münasibəti alınır. Şərtə görə $\varphi(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$ olduğundan

$$\lim_{\substack{N_1 \to +\infty \\ N_2 \to +\infty}} \int_{N_1}^{N_2} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

olar. Deməli, (3) inteqralı yığılır (Koşi kriterisinə görə).

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

inteqralının yığılması haqqında söylədiyimiz bu təkliflər uyğun olaraq

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ və } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralları üçün də doğrudur.

Misal 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx \text{ və} \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx$$

inteqralları olduqdamütləqyığılır.

Doğrudanda,

$$\left|\frac{\sin ax}{x^\lambda}\right| \le \frac{1}{x^\lambda} \text{ və } \left|\frac{\cos ax}{x^\lambda}\right| \le \frac{1}{x^\lambda} \quad (1 \le x < +\infty)$$

bərabərsizlikləri ödənildiyindən və

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \ (\lambda > 1)$$

inteqralı yığılanolduğunagörə

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin ax|}{x^\lambda} dx \text{ və } \int_1^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{x^\lambda} dx$$

inteqralları yığılandır.Onda yuxarıda isbat etdiyimiz teoremə görə

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx \text{ və} \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx \qquad (5)$$

inteqralları mütləq yığılan olur.

Misal 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

inteqralı şərtiyığılandır.

Bu inteqrala hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} +$$

$$+\int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Sağ tərəfdəki hədlərin ikisi də sonludur (inteqralın yığılan olması 1-ci misaldan aydındır), buna görə də sol tərəfdəki inteqral yığılandır.

İndi göstərək ki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

inteqralı dağılandır.

Bu məqsədlə

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bərabərsizliyindən istifadə edək. Onda istənilən $N > 0$ üçün

$$\int_1^{N} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{N} \frac{1}{2x} dx - \int_1^{N} \frac{\cos 2x}{2x} dx \qquad (6)$$

bərabərsizliyini yazmaq olar. Sağ tərəfdəki birinci inteqral $N \to +\infty$ şərtində sonsuzluğa yaxınlaşır, yəni

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$$

inteqralı dağılandır:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty$$

ikinci inteqral isə yığılandır. Deməli, $N \to +\infty$ şərtində (6) bərabərsizliyində limitə keçsək, sağ tərəf və buna görə də sol tərəf sonsuzluğa yaxınlaşır. Bu isə

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

inteqralının dağılan olduğunu göstərir:

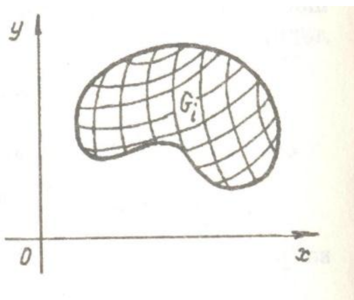
$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

17.3.1. Ikiqat inteqralın tərifi

Tutaq ki, ikidəyişənli $z=f(x,y)$funksiyası G oblastında təyin edilmişdir. G oblastını müəyyən əyrilər vasitəsilə kiçik G_1, $G_{,2}$......, G_n oblastlarına bölək (şəkil 1). Bu oblastların sahələrini uyğun olaraq S_1, S_2, ..., S_n ilə işarə edək. Hər bir G_i oblastında müəyyən bir (ξ_i, η_i) nöqtəsini düzəldək:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i)\, S_i$$

Bu cəmə $z=f(x,y)$funksiyasının G oblastında *inteqral cəmi* deyilir.



Şəkil 1.

Indi təsəvvür edək ki, G oblastını əvvəl bir qayda ilə, sonra ikinci bir qayda ilə, daha sonra üçüncü bir qayda ilə və sair k-çı qayda ilə kiçik oblastlara bölməklə bu işi sonsuz olaraq davam etdiririk. G oblastını k-çı qayda ilə böldükdə alınan oblastların diametlərinin ən böyüyünü λ_k ilə işarə edək. Əgər

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$$

olarsa, G oblastının hər bir əsas bölünmə ardıcıllığı üçün

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i)\, S_i$$

inteqral cəmləri ardıcıllığı (ξ_i, η_i) nöqtələrinin seçilmə qaydasından asılı olmayaraq eyni bir *I* ədədinə yığılarsa, onda *z=f(x,y)* funksiyası G oblastında inteqrallanan funksiya *I* ədədi isə bu funksiyanın həmin oblastda *ikiqat inteqralı* adlanır.

f(x,y) funksiyasının G oblastında ikiqat inteqralı

$$\iint_G f(x,y)dxdy \text{ vəə ya } \iint_G f(x,y)dS$$

kimi belə işarə edilir. Beləliklə, tərifə görə

$$\iint_G f(x,y)dxdy \ = \lim_{\lambda_{k\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i)\, S_i.$$

Əgər N nöqtəsinin istənilən ətrafında həm G oblastına daxil olan və həm də daxil olmayan nöqtələr varsa, həmin nöqtə G oblastının *sərhəd nöqtəsi* adlanır.

G oblastının bütün sərhəd nöqtələri çoxluğuna onun sərhədi deyilir.

G oblastı ilə onun sərhədinin birləşməsi qapalı oblast adlanır.

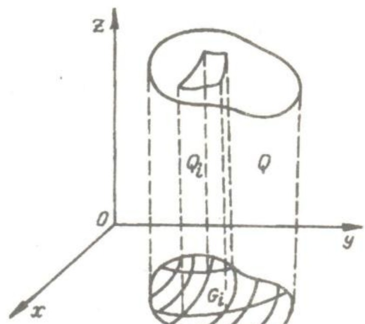
Aşağıdakı teorem doğrudur.

T e o r e m . *məhdud qapalı oblastda kəsilməz funksiya həmin oblastda inteqrallanandır.*

17.3.2. Ikiqat inteqralin həndəsi mənasi

Tutaq ki, məhdud qapalı G oblastında təyin edilmiş mənfi qiymətlər almayan kəsilməz $z=f(x,y)$funksiyası verilmişdir. Belə bir məsələyə baxaq: $OXYZ$düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində yuxarıdan tənliyi $z=f(x, y)$, $(x;y) \in G$ olan səthlə, yanlardan doğuranları OZ oxuna paralel olan silindrik səthlə və aşağıdan OXY müstəvisi üzərində yerləşən G fiquru ilə hüdudlanmış Q silindrik cisminin həcmini tapmaq tələb olunur (şəkil 1).

Bu məsələni həll etmək üçün G oblastını müəyyən əyrilər vasitəsilə kiçik G_1, G_2, ..., G_n oblastlarına bölək. Bu zaman baxdığımız Q silindrik cismi aşağı oturacaqları G_1, G_2, G_3.. ..., $G_n$müstəvi fiqurları olan Q_1, Q_2, ..., Q_n silindrik cisimlərinin birləşməsindən ibarət olur. Odur ki, Q cisminin $V(Q)$ həcmi Q_1, Q_2, ..., Q_n cisimlərinin $V(Q_1)$, $V(Q_2)$, ..., ,...$V(Q_n)$cəmlərinin cəminə bərabər olacaq:



Şəkil 1

$$V(Q) = \sum_{i=1}^{n} V(Q_i) \quad (1).$$

G_1, G_2, ...,G_n fiqurlarının sahələrini uyğun olaraq S_1, S_2, ..., S_n ilə işarə edək. Hər bir G_i oblastında müəyyən bir (ξ_i, η_i) nöqtəsi götürək. G_1, G_2,....,$G_n$oblastları çox kiçik olduqlarına görə hər bir Q_i silindrik cisminin həcmi təqribi olaraq oturacağının sahəsi S_i və hündürlüyü $f(\xi i, \eta i)$ olan silindrin həcminə bərabərdir.

$$V(Q_i) \approx f(\xi i, \eta i)S_i. \qquad (2)$$

(1) və (2) – dən alırıq:

$$V(Q) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i)S_i$$

Bu düturun sağ tərəfindəki cəm $z=f(x,y)$ funksiyasının G oblastında inteqral cəmidir. Aydındır ki, G_1, G_2, ...,$G_n$oblastları nə qədər kiçik olsa

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i)S_i$$

cəəmi dəə Q cismininin həcminə bir o qədər yaxın olar.

§ 1 – dəki teoremə görə $z=f(x, y)$funksiyasının G oblastında ikiqat inteqralı var. Odur ki, G oblastının hər bir əsas bölünmə ardıcıllığı üçün $(\xi i, \eta i)$ nöqtələrinin

seçilmə qaydasından asılı olmayaraq

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i)S_i$$

cəmləri ardıcıllığı yığılır və yuxarıda deyilənlərdən aydındır ki, onun limiti Q cisminin həcminə bərabərdir:

$$V(Q) = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) S_i = \iint_G f(x,y)dxdy.$$

Buradan ikiqat inteqralın həndəsi mənası alınır: məhdud qapalı G oblastında təyin edilmiş mənfi qiymətlər almayan *z=f(x,y)* kəsilməz funksiyasının ikiqat inteqralı

$$\iint_G f(x,y)dxdy.$$

yuxarıdan tənliyi *z=f(x,y)(x;y)* ∈ *G* olan səthlə, yanlardan doğuranları *OZ* oxuna paralel olan silindrik səthlə və aşağıdan *OXY* müstəvisi üzərində yerləşən G fiquru ilə hüdudlanmış silindrik cismin həcminə bərabərdir.

Qeyd edək ki, məhdud qapalı G oblastında təyin edilmiş müsbət qiymətlər almayan kəsilməz *z=f(x,y)* funksiyası verildikdə uyğun silindrik Q cisminin həcmi üçün

$$V(Q) = -\iint_G f(x,y)dxdy.$$

düturu doğru olur.

17.3.3. İkiqat inteqralin hesablanması

Tutaq ki, $[a;\ b]$ parçasında təyin edilmiş kəsilməz y= $\varphi(x)$ və y=ψ ψ(x) funksiyaları verilmişdir və

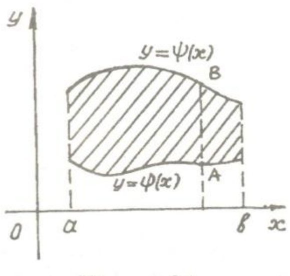
$$\varphi(x) \le \psi\psi(x), \qquad x \in [a;\ b].$$

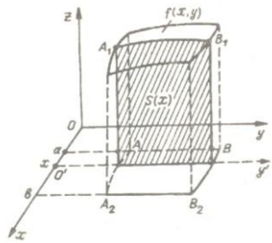
Fərz edək ki,

x=a, x=b, y= $\varphi(x)$ və y=ψ ψ(x)

xətləri ilə hüdudlanmış G oblastında təyin edilmiş kəsilməz$z=f(x,y)$ funksiyası verilmişdir (şəkil 1).

Əvvəlcə $f(x,y)$ –in G oblastında mənfi qiymətlər almayan funksiya olduğunu fərz edək. Bu halda bundan əvvəlki paraqrafda gördüyümüz kimi $\iint_G f(x,y)dxdy$ ikiqat inteqralı





Şəkil 1 **Şəkil 2**

yuxarıdan tənliyi $z=f(x,y)$olan səthlə və aşağıdan G oblastı ilə hüdudlanmış silindrik cismin həcminə bərabərdir.

Həmin silindrik cismin V həcmini tapmaq üçün əvvəl istifadə etdiyimiz kəsiklər üsulunu tətbiq edək. Silindrik cismi $x \in [a;\, b]$ nöqtəsində OX oxuna prependikulyar müstəvi ilə kəsdikdə alınan kəsiyin sahəsini $S(x)$-lə işarə edək (şəkil 2). Onda S(x) kəsiyinin həcmi

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

olar.

Burada görünür ki, *S(x)*, *Oy* oxuna paralel olan $O'y'$ oxunun $\varphi(x) \leq y \leq \psi\psi(x)$ parçası, *Oxy* müstəvisinə onun $A(x;\ \varphi(x))$vəə $B\ (x; \psi\psi(x))$ nöqtələrində perpendikulyar olan AA_1 və BB_1 düz xətlərinin parçaları və *z=f(x,y)* (*x*-i sabit hesab etdikdə *z=f(x,y)* -ə *y*-dən asılı birdəyişənli funksiya kimi baxa bilərik) funksiyanın A_1B_1 qrafiki ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun sahəsinə bərabərdir. Odur ki,

$$S(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (2)$$

İsbat etmək olar ki, *S(x)* funksiyası $[a;\ b]$ parçasında kəsilməzdir.

S(x) –in (2) ifadəsini (1) düsturunda yerinə yazıb

$$V = \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

və ya

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$

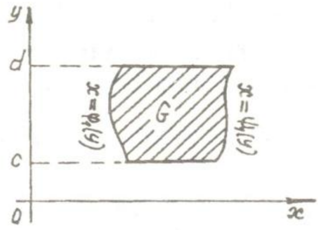
düsturunu alırıq. (3) düsturu ikiqat inteqralın hesablanması düsturudur.

Qeyd edək ki, (3) düsturu yalnız eyni işarəli qiymətlər alan funksiyalar üçün deyil, hər bir kəsilməz funksiya üçün doğrudur.

İndi tutaq ki, $[c; d]$ parçasında təyin edilmiş $x = \varphi_1(y)$ və $x = \psi\psi_1(y)$ funksiyaları verilmişdir və

$$\varphi_1(y) \leq \psi\psi_1(y), y \in [c;\ d].$$

Bu dəfə belə fərz edək ki, kəsilməz *z=f(x,y)* funksiyası y=c, y=d, x=$\varphi_1(y)$ və x= $\psi\psi_1(y)$ xətləri ilə hüdudlanmış G oblastında təyin edilmişdir (şəkil 3). Bu halda ikiqat inteqral



Şəkil 3

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)dy \qquad (\mathbf{4})$$

düsturu ilə hesablanır. Bu düstur (3) düsturuna analoji qayda ilə alınır.

Xüsusi halda əgər *f(x,y)* funksiyası

$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

düzbucaqlısında verilmişdirsə, onun ikiqat inteqralı

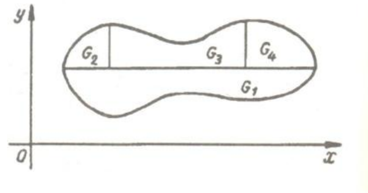
$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

və yaxud

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (5)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər $f(x,y)$ funksiyasının təyin oblastı G daha mürəkkəb formaya malikdirsə, onda həmin oblastın yuxarıda baxdığımız formalara malik olan $G_1, G_2, ...,G_n$ oblastlarına bölürlər (şəkil 4). Bu halda istədiyimiz $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$



Şəkil 4

inteqralı $f(x,y)$ funksiyasının $G_1, G_2, ...,G_n$ oblastları üzrə götürülmüş ikiqat inteqrallarının cəminə bərabər olur:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + . . . + \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy.$$

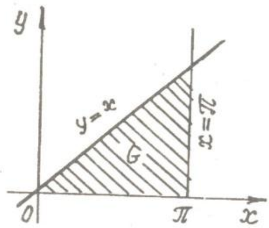
M i s a l 1. G: $0 \le x \le 2,\ 0 < y < 1$ düzbucaqlısı üzrə $z = xy + x^2 + y^2$ funksiyasının ikiqat inteqralını hesablayın.

Həlli.(5) düsturuna görə $\iint_G (xy + x^2 + y^2)dxdy =$
$= \int_0^1 dy \int_0^2 (xy + x^2 + y^2)\, dx = \int_0^1 \left[\left(y\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \right.\right.$
$\left.\left. + y^2x\right)\Big|_0^2\right] dy = \int_0^1 \left(2y^2 + 2y + \frac{8}{3}\right) dy = \left(\frac{2}{3}y^3 + \right.$
$\left. + y^2 + \frac{8}{3}\, y\right)\Big|_0^1 = 4\frac{1}{3}$

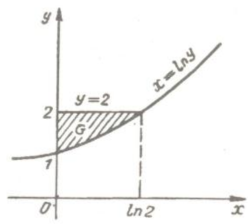
Misal 2. y=x, y=0 və x=π düz xətləri ilə hüdudlanan G oblastında (şəkil 5) $f(x,y) = sin\,x + cos\,x$ funksiyasının ikiqat intervalını hesablayın.

Həlli. Tələb olunan ikiqat intervalı (3) düsturu ilə hesablayaq:

$$\iint_G (sinx + cosy)dxdy == \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} (sinx + $$
$$+cosx)dy == \int_0^{\pi} [(ysinx+siny)|_0^x]dx = \int_0^{\pi} (x + $$
$$+1)sinxdx = -\int_0^{\pi} (x+1)dcosx = -(x+1)cosx|_0^{\pi} + $$
$$\int_0^{\pi} cosxdx = -[sinx - (x+1)cosx]|_0^{\pi} = -(\pi + 2)$$



Şəkil 5



Şəkil 6

M i s a l 3. *x=lny, x=0* və *y=2* xətləri ilə hüdudlanmış G oblastında (şəkil 6) $f(x,y) = e^x$funksiyasının ikiqat inteqralını hesablayın.

Həlli. Tələb olunan ikiqat inteqralı (4) düsturu ilə hesablayaq:

$\iint_G e^x dxdy = \int_1^2 dy \int_0^{lny} e^x dx = \int_1^2 e^x|_0^{lny} dy =$
$\int_1^2 (y-1)dy = \left(\frac{1}{2}y^2 - y\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$

Qeyd edək ki, bu misaldakı ikiqat inteqralı inteqrallama növbəsini dəyişib (3) düsturu ilə də hesablamaq olar:

$$\iint_G e^x\, dxdy = \int_0^{ln2} dx \int_{e^x}^{2} e^x\, dy = \int_0^{ln2} \left[(e^x - y)|_{e^x}^{0}\right] dx$$

$$= \int_0^{ln2} (2-e^x)e^x dx = \left(2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^{ln2} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

M i s a l 4. $x=0$, $y=\pi$ və $y=x$ xətləri ilə hüdudlanmış G oblastı $f(x,y)=\cos(x+y)$funksiyasının ikiqat inteqralını hesablayın.

Həlli. (3) düsturuna görə

$$\iint_G \cos(x+y)\, dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \cos(x+y)\, dy = =$$

$$= \int_0^{\pi} [\sin(x+y)|_x^{\pi}]\ \mathrm{dx} = \int_0^{\pi} [\sin(\pi+x) -$$

$$-sin2x]\, dx = -\int_0^{\pi} (sinx + sin2x)dx =$$

$$(cosx + \frac{1}{2}cos2x\Big|_0^{\pi} = -2$$

17.4.Qeyri-məhdud funksiyaların qeyri-məxsusi inteqralının xassələri və yığılma əlamətləri

Tutaq ki, f(x) funksiyası [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş və x=b nöqtəsi ətrafında qeyri-məhdud olan funksiyadır. Onda onun

$$\int_a^b f(x)dx$$

qeyri-məxsusi inteqralından danışmaq olar.

Qeyri-məxsusi inteqralların, müəyyən inteqralın məlum xassələrinə (xəttilik, dəyişəni əvəzetmə və s.) oxşar xassələri vardır. Burada onların ancaq bir neçəsini verək.

Xassə 1.[a,b) yarım intervalında kəsilməyən f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası F(x) olduqda

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a) \qquad (1)$$

$$\left(F(b-0) = \lim_{x\to b-0} F(x)\right)$$

bərabərliyi (Nyuton-Leybnis düsturu) doğrudur.

Bu halda (1) bərabərliyi aşağıdakı kimi başa düşülür: ya bərabərliyin hər iki tərəfi sonludur və (1) doğrudur, ya da bərabərliyin hər iki tərəfinin mənası yoxdur.

(1) bərabərliyini isbat etmək üçün $[a, b-\delta]$ parçası üçün

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = F(b-\delta) - F(a)$$

Nyuton-Leybnis düsturunu yazmaq, sonra da axırıncı bərabərlikdə $\delta \to +0$ şərtində limitə keçmək lazımdır.

Xassə 2. $U=f(x)$ və $V=\varphi(x)$ funksiyalarının $[a,b)$ yarımintervalında kəsilməz törəmələri varsa və

$$\int_a^b Udv,\ Uv\,\Big|_a^b\ ,\ \int_a^b Vdu$$

ifadələrinin hər hansı ikisi sonludursa,onda

$$\int_a^b UdV = UV\,\Big|_a^b - \int_a^b VdU \qquad (2)$$

düsturu doğrudur.

(2) bərabərliyi müəyyən inteqralın hissə-hissə inteqrallama düsturuna əsasən isbat olunur.

Misal .

$$J_n = \int_0^1 (\ln\ x)^n\,dx$$

inteqralını hesablamalı.

$$\lim_{x\to+0} x\ (\ln\ x)^n = 0$$

olduğundan (2) düsturuna əsasən alarıq:

$$J_n = \int_0^1 (\ln\ x)^n\ dx = x(\ln x)^n\ \Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx =$$

$$= -nJ_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Buradan,

$$J_0 = \int_0^1\ dx = 1 \text{ olduğuna görə}$$

$$J_n = -nJ_{n-1} = -n[-(n-1)J_{n-2}] =$$
$$(-1)^2 n(n--1)J_{n-2} = \cdots = (-1)^n n!$$

və ya

$$J_n=(-1)^n n!$$

alınır.

Qeyri-məxsusi inteqralın başqa xassələrini də eyni qayda ilə isbat etmək olar.

İndi inteqralın bir sıra yığılma əlamətlərini qeyd edək.

Tutaq ki, f(x) funksiyası [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş, mənfi qiymətlər almayan və istənilən $[a, b-\delta]$ $(0< \delta \le b-a)$ parçasında inteqrallanan funksiyadır. Onda

$$F(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \qquad (3)$$

funksiyası $\delta \to +0$ şərtində monoton artan olur. Buna görə də sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{\delta\to+0} F(\delta)$$

limiti həmişə var. Bu limitin sonlu olması üçün (3) inteqralının bütün $0 < \delta \le b-a$ ədədləri üçün məhdud olması zəruri və kafi şərtdir:

$$|F(\delta)| \le M \quad (0 < \delta \le b-a). \qquad (4)$$

Buradan aşağıdakı təklifi alarıq:

Teorem 1. F(x) funksiyası [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş və mənfi qiymətlər almayan funksiya olduqda (4) münasibətinin ödənilməsi

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Inteqralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

Deməli, (4) şərti ödənilmədikdə

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = \infty$$

olar.

Bu teoremdən istifadə edərək qeyri-məxsusi inteqralların yığılması üçün müqayisə əlamətini isbat etmək olar.

Teorem 2. [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş və istənilən $[a,\ b-\delta]$ $(0<\delta<b-a)$ parçasında inteqrallanan f(x) və $\varphi(x)$ funksiyaları üçün

$$0 \le f(x) \le \varphi(x) \tag{5}$$

bərabərsizliyi ödənilirsə, onda

$$J_1 = \int_a^b \varphi(x)dx$$

inteqralı yığılan olduqda

$$J_2 = \int_a^b f(x)\, dx$$

inteqralı da yığılır. J_2 inteqralı dağılan olduqda inteqralı da dağılır.

İsbatı. Tutaqki, inteqralı yığılır. Onda 1-ci teoremə görə

$$\int_a^{b-\delta} \varphi(x)\, dx \le M \quad (0<\delta\le b-a) \tag{6}$$

olar. Buradan, (5) bərabərsizliyinə əsasən,

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\, dx \le \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\, dx \le M \quad (0<\delta\le b-a)$$

alınır ki, bu da J_2 inteqralının yığılan olduğunu göstərir.

J_2 inteqralı dağılan olduqda

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\, dx = +\infty$$

olar. Bu halda (5) bərabərsizliyinə görə

$$\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \le \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx.$$

olduğundan

$$+\infty = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx \le \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{b} \varphi(x)dx = +\infty$$

Teorem 3. [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş, mənfi qiymətlər almayan və istənilən $[a,\ b-\delta]$ parçasında inteqrallanan f(x) və $\varphi(x) > 0$ funksiyaları üçün

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \gamma (0 < \gamma < \infty) \tag{7}$$

limiti varsa, onda J_1 və J_2 inteqralları eyni zamanda ya yığılır, ya da dağılır.

İsbatı. Limitin tərifinə görə istənilən $0 < \varepsilon < \gamma$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ var ki, x-in $b-\delta < x < b$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$\gamma - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \gamma + \varepsilon$$

və ya

$$(\gamma-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (\gamma+\varepsilon)\varphi(x) \tag{8}$$
$$(b-\delta < x < b)$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

$$J_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

inteqralı yığılan olduqda

$$\int_{b-\delta}^{b} \varphi(x)\,dx$$

inteqralı da yığılır. Onda 2-ci teoremə və (8) bərabərsizliklərinin sağ tərəfinə görə

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

inteqralı da yığılır. Buradan J_2 inteqralının yığılması aydındır.

$$J_2 = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

inteqralı yığılan olduqda

$$\int_{b-\delta}^{b} f(x)\,dx$$

inteqralı və (8) bərabərsizliyinə görə

$$\int_{b-\delta}^{b} (\gamma - \varepsilon)\varphi(x)\,dx = (\gamma - \varepsilon) \int_{b-\delta}^{b} \varphi(x)dx$$

inteqralı yığılan olar. Buradan inteqralın yığılan olması aydındır.

Nəticə. Tutaq ki, [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş və mənfi qiymətlər almayan f(x) funksiyası üçün

$$\lim_{x \to b-0} (b - x)^{\mu} f(x) = \gamma \qquad (9)$$

ödənilir. Onda 1) 0< $\gamma < +\infty$ və $\mu < 1$ olduqda

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (10)$$

inteqralı yığılır, 2) $0 < \gamma < +\infty$ *və* $\mu \geq 1$ olduqda isə (10) inteqralı dağılır.

Nəticənin doğruluğuna inanmaq üçün

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu} \qquad (11)$$

inteqralının $\mu < 1$ olduqda yığılan, $\mu \geq 1$ olduqda isə dağılan olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Xüsusi halda, $x \to b - 0$ şərtində

$$f(x) \approx \frac{1}{(b-x)^\mu}$$

olarsa, onda $\mu < 1$ olduqda (10) inteqralı yığılar, $\mu \geq 1$ olduqda isə dağılar.

Burada isbat olunan təkliflər uyğun şəkildə başqa qeyri-məxsusi inteqrallar (inteqralaltı funksiya a nöqtəsi və ya başqa daxili $c(a < c < b)$ nöqtəsi ətrafında qeyri-məhdud olduqda) üçün də doğrudur.

Misal 1.

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1-x^2}$$

inteqralı dağılır.

Doğrudan da,

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

olduğundan 3-cü teoremin nəticəsinə görə inteqral dağılır.

Misal 2.

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

inteqralı yığılır.

Doğrudan da,

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan nəticəyə görə inteqral yığılır.

17.5.Koşi kriterisi və inteqralın mütləq yığılma əlaməti

Fərz edək ki, f(x) funksiyası [a,b) yarımintervalında təyin olunmuş və istənilən [a,b′) (a≤b′<b) parçasında inteqrallanan funksiyadır. Onda istənilən a≤x<b üçün

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

inteqralı sonlu olar. Aydındır ki, $x\to b-0$ şərtində F(x) funksiyasının sonlu limitinin varlığı

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

qeyri-məxsusi inteqralının yığılmasına ekvivalentdir.

Koşi kriterisinə görə isə F(x) funksiyasının $x\to b-0$ şərtində sonlu limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt belədir: istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ var ki, x-in $b-\delta<x'<b, b-\delta<x''<b$ bərabərsizliklərini ödəyən ixtiyari x´ və x´´ qiymətlərində

$$|F(x'')-F(x')|<\varepsilon \qquad (3)$$

münasibəti ödənilir. Burada

$$F(x'') - F(x') = \int_a^{x''} f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$$

olduğunu nəzərə alsaq, (3) bərabərsizliyini

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon \qquad (4)$$

kimi yaza bilərik.

Buradan (2) inteqralının varlığı üçün aşağıdakı teorem alınır.

Teorem 1. (Koşi kriterisi). (2) inteqralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərtbelədir: istənilən $\varepsilon < 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon)$ ədədinin olmasıdır ki, x-in b-δ<x′<b və b-δ<x″<b bərabərsizliklərini ödəyən ixtiyari x´ və x´´ qiymətlərində

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

münasibəti ödənilsin.

İndi (2) inteqralının mütləq yığılması haqqında teoremi isbat edək.

Teorem 2. Qeyri-məxsusi

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

inteqralı yığılırsa, onda(2) inteqralı da yığılır.

Doğrudan da,

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

inteqralı yığılan olduğundan Koşi kriterisinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta_\varepsilon$ var ki, $b-\delta < b' < b$ və $-\delta < b'' < b$ bərabərsizliklərini ödəyən istənilən b' və b'' ədədləri üçün

$$\left| \int_{b'}^{b''} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon$$

ödənilir. Onda

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| \le \left| \int_{b'}^{b''} |f(x)|\, dx \right|$$

olduğundan göstərilən ixtiyari b´ və b´´ ədədləri üçün

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buradan, Koşi Kriterisinə görə, (2) inteqralının yığılması aydındır.

Qeyd edək ki, (2) inteqralı yığıldıqda

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

inteqralı dağılan da ola bilər. Bu halda (2) inteqralına **şərti yığılan inteqral** deyilir.

Misal.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

inteqralı yığılır.

Doğrudan da, $0 \le x < 1$ *olduqda*

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Sağ tərəfdəki funksiyanın

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

inteqralı yığılan olduğundan,

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| dx$$

inteqralı da yığılandır.Onda, indi isbat etdiyimiz 2-ci teo-remə görə

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

inteqralı yığılır.

XVIII FƏSİL.ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN DİFERENSİAL VƏİNTEQRAL HESABI

18.1.Əsas anlayışlar.Çoxdəyişənli funksiyanın tərifi

İndiyə qədər ancaq bir dəyişəndən (bir arqumentdən) asılı funksiyaları nəzərdən keçirmişik.

Amma praktikada tez-tez çoxdəyişənli funksiyalar ilə rastlaşırıq. Məsələn, OM qanununda, yəni

$$I = \frac{E}{R}$$

(I -cərəyan şiddəti, E -elektrik hərəkət qüvvəsi, R -isə müqavimətdir) düsturunda cərəyan şiddəti funksiya kimi iki E və R arqumentindən asılıdır. Bunun kimi də düzbucaqlı paralellpipedin həcmi $V = x \cdot y \cdot z$ üç dəyişəndən asılı olaraq dəyişir və s.

Tərif 1. Hər bir cüt x və y dəyişəninin mümkün qiymətlərinə, z dəyişəninin ancaq bir qiymətini qarşı qoyan qayda (və ya qanun) verilmişdirsə, onda z -ə x və y dəyişənlərinin ikidəyişənli funksiyası deyilir və aşağıdakı işarələrdən biri ilə yazılır:

$$z = f(x, y),\ z = \varphi(x, y),\ z = F(x, y),\ z = z(x, y) \text{ və s.}$$

Burada z asılı dəyişən və ya funksiya, x , y isə sərbəst dəyişən və ya arqument adlanır. $x = a$ və $y = b$ olduqda $z = f(x, y)$ funksiyasının xüsusi qiyməti $f(a, b)$ şəklində yazılır. x və y dəyişənlərinin nizamlanmış cütü $M(x, y)$ nöqtəsi, bu nöqtənin funksiyası isə $z = f(M)$ kimi yazılır. İkidəyişənli funksiya həndəsi olaraq fəzada müəyyən bir səthi ifadə edir.

Tərif 2.x,y,zdəyişənlərinin hər bir nizamlanmış üçlüyünün qiymətinə, u **dəyişəninin yeganə qiymətini qarşı qoyan qayda (və ya qanun) verilmişdirsə, ondau dəyişəninə x,y,zdəyişənlərinin üçdəyişənli funksiyası deyilir və** $u = f(x, y, z)$ **,** $u = F(x, y, z)$ **,** $u = \varphi(x, y, z)$ və s. kimi işarə olunur. Burada u -asılı dəyişən və ya funksiya x, y, z isə sərbəst dəyişən və ya arqument adlanır.

Oxşar qayda ilə $x_1, x_2, ..., x_n$ arqumentlərindən asılı n -dəyişənli funksiyaya tərif verilir və

$w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $w = F(x_1, x_2, ..., x_n)$,

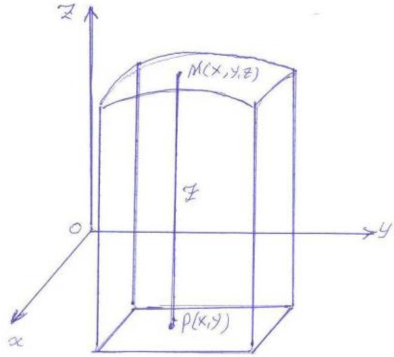
$w = w(x_1, x_2, ..., x_n)$ və s. kimi işarə olunur.

$x_1, x_2, ..., x_n$ arqumentlərinin M nöqtəsinin koordinatları qəbul etsək, n -dəyişənli funksiyanı nöqtənin funksiyası, yəni $w = f(M)$ kimi yazmaq olar.

Bir dəyişənli funksiya kimi çoxdəyişənli funksiyalar da analitik üsulla, cədvəl şəklində, qrafik üsulla, proqram vasitəsilə və s. şəklində verilə bilər.

Tərif 3. Verilmiş funksiyanın analitik ifadəsinin mənalı olduğu və funksiyanın sonlu həqiqi qiymətlər olduğu nöqtələr çoxluğuna həmin funksiyanın təyin oblastı deyilir.

Tutaq ki, x, y, z düzbucaqlı Dekart koordinat sistemi verilmişdir. $Z = f(x, y)$ ikidəyişənli funksiyanın təyin olunduğu oblastın hər hansı $P(x, y)$ nöqtəsini götürək və z -in uyğun qiymətini hesablayaq. $P(x, y)$ nöqtəsindən uzunluğu $|Z|$ olan perpendikulyar qalldıraq (z -in işarəsindən asılı olaraq bu və ya digər tərəfə). Nəticədə fəzada $M(x, y, z)$ nöqtəsi alınır. $P(x, y)$ nöqtəsi və ona uyğun olaraq $M(x,y,z)$ nöqtəsi də yerini dəyişərək hər hansı səth cızır.



Şəkil 1.

Həmin səth, verilən $Z = f(x,y)$ ikidəyişənli funksiyanı həndəsi təsvir edir, yəni bu funksiyanın **"qrafiki"dir (şəkil 1**).

Tərif 4. Mərkəzi $P(x,y)$ **nöqtəsində və radiusu** r **olan dairənin daxili nöqtələrinə** P **nöqtəsinin** r **radiuslu ətrafı (qısa olaraq** r**-ətrafı) deyilir.**

Tərif 5. P **nöqtəsinin** r**-ətrafında** P **nöqtəsinin özü olmadıqda (** P**-nöqtəsi çıxarılıb atıldıqda və ya deşilib çıxarıldıqda) bu ətrafa** P **nöqtəsinin** r **yaxınlığı deyilir.**

Bu təriflərdən çıxır ki, P nöqtəsinin r-ətrafına P-nin özü daxil olduğu halda, P nöqtəsinin r yaxınlığına P-nin özü daxil deyil. Başqa sözlə, P nöqtəsinin r ətrafı bu nöqtədən $d<r$ məsafədə olan nöqtələr çoxluğudur $(0 \le d < r)$, P nöqtəsinin r-yaxınlığı $0<d<r$ şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğudur.

Tərif 6. Qeyd olunmuş $M(a_1, a_2, ..., a_n)$ **nöqtəsindən məsafəsi** r**-i aşmayan** $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ **nöqtələr çoxluğuna**

n -ölçülü kürə (M -kürənin mərkəzi, r -isə onun radiusudur) deyilir.

Aydındır ki, belə kürənin nöqtələri

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2} \le r \qquad (1)$$

və yaxud da

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2 \le r^2 \qquad (2)$$

şərtini ödəyir.

(1) və (2) şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğuna n -ölçülü qapalı kürə deyilir. Belə ki, belə kürənin daxili nöqtələri

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2 < r^2 \qquad (3)$$

bərabərsizliyi, onun sərhəddi isə

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2 = r^2 \qquad (4)$$

tənliyi ilə təyin olunan $(n-1)$ ölçülü sfera adlanır (kürə ilə əhatə olunmuş “səth”).(3) bərabərsizliyi açıq kürə təyin edir. Xüsusi halda $n=2$ olduqda

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2 \qquad (5)$$

münasibəti alınır ki, ona oxy müstəvisində qapalı dairə (yəni onu əhatə edən çevrənin nöqtələri bura daxildir) adlanır. Bu dairənin çevrəsinin tənliyi

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \qquad (6)$$

şəklindədir (şəkil 1). Açıq dairəni (bu çoxluğa çevrənin nöqtələri daxil deyildir)

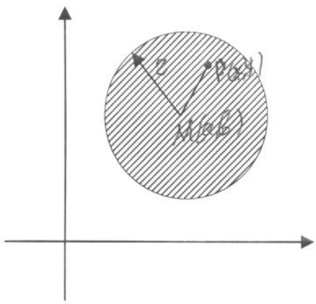
$$(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2 \qquad (7)$$

bərabərsizliyi ifadə edir (şəkil 2.)

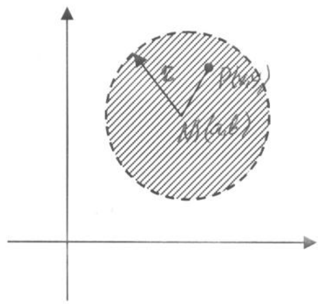
$n=3$ olduqd (6) və (7) münasibətlərini

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2&=r^2\\(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2&<r^2\end{aligned}\tag{8}$$

şəklində yazmaq olar.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Tərif 7. Müstəvisinin aşağıdakı iki şərti ödəyən G nöqtələr çoxluğuna oblast deyilir.

a) hər bir M nöqtəsi özünün hər hansı ətrafı ilə G çoxluğuna daxildir (belə nöqtələr daxili nöqtələr adlanır).

b) G - yə daxil olan hər hansı M_1 və M_2 nöqtələrini ona daxil olan kəsilməz əyri ilə birləşdirmək mümkün olsun.

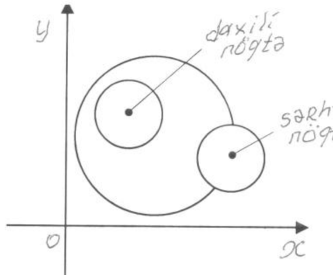
Qapalı və ya açıq G oblastının cüt-cüt götürülmüş nöqtələri arasındakı məsafənin dəqiq yuxarı sərhəddi bu oblastın diametri adlanır.

Tərif 8. M nöqtəsi özünün hər hansı ətrafı ilə birlikdə çoxluğa daxil olarsa, belə nöqtəyə daxili nöqtə deyilir (şəkil 2).

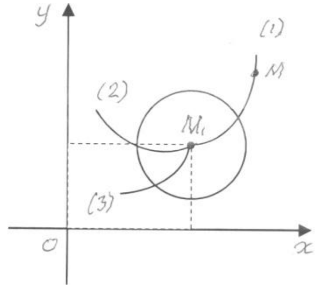
Tərif 9. M nöqtəsinin istənilən ətrafında çoxluğa həm daxil olan və həm də daxil olmayan nöqtələr olarsa,

onda bu nöqtəyə çoxluğun (oblastın) sərhəd nöqtəsi deyilir (şəkil 2).

Oblastın (çoxluğun) bütün sərhəd nöqtələri onun sərhəddi adlanır



Şəkil 2.



Şəkil 3.

18.2.1.Çoxdəyişənli funksiyanın limiti

Tərif 1. İxtiyari $\varepsilon > 0$ görə elə $\delta(\varepsilon)$ göstərmək mümkündürsə ki, M_1 nöqtəsinin δ -yaxınlığındakı bütün M nöqtələri üçün $f(M)$ funksiyasının qiymətləri a ədədinin ε -ətrafına daxil olsun, onda a -ədədinə $U = f(m)$ funksiyasının $M \to M_1$ şərtində limiti deyilir və aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$a = \lim_{M \to M_1} f(M) \text{ və ya } a = \lim_{\begin{cases} x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to a_n \end{cases}} f(x_1, x_2, \dots x_n) \quad (1)$$

Burada

$$|f(M) - a| < \varepsilon \ , \ \ 0 < d(M, M_1) < \delta(\varepsilon)$$

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \ , \ \ M_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$d(M,M_1)=\sqrt{(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2}$$

Bu tərifə əsasən a limiti M nöqtəsinin M_1 nöqtəsinə hansı üsulla yaxınlaşmasından asılı deyil.

Bunu ikidəyişənli $Z=f(x,y)$ funksiyası üçün həndəsi olaraq təsvir etmək olar (şəkil 3.).Burada $M(x,y)$ nöqtəsinin $M_1(a,b)$ nöqtəsinə üç müxtəlif üsul ilə yaxınlaşması göstərilmişdir.

18.2.2.Təkrar limit

Əvvəlki paraqrafda funksiya limitinə$X \to X^{(0)}$şərtində, yəni $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ nöqtəsinin bütün $x=x_i(i=1,2,...,n)$ koordinatları $X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ nöqtəsinin uyğun $x_i^{(0)}$ (i =1, 2, … n)koordinatlarına eyni zamanda yaxınlaşdıqda $(x_i \to x_i^{(0)}(i=1,2,...,n)$ tərif verilmişdir. Buna görə də həmin limitə bəzən n-qat limit (n=2 olduqda ikiqat, n=3 oluqada üçqat və s) deyilir.

Çoxdəyişənli funksiayaların, $x_1$arqumentləri növbə ilə uyğun $x_1^{(0)}$ədədlərinə yaxınlaşdıqda da limitindən danışmaq olar. Belə alınan

$$\lim_{x_1 \to x_1^{(0)}} \lim_{x_2 \to x_2^{(0)}} \cdots \lim_{x_n \to x_n^{(0)}} f(x_1,x_{2,...}x_n)$$

limitinə f funksiyasın təəkrar limiti deyilir. (1) ifadəsində limitlərin yerini dəyişməklə müxtəlif təkrar limitlər almaq olar .

İkidəyişənli funksiyaların iki dənə təkrar limitivardır:

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y), \quad \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y) \qquad (2)$$

İkidəyişənli funksiyanın ikiqat və təkrar limitləri-nin varlığı və bərabərliyi haqqında müxtəlif vəziyyət-lər ola bilər .

Misal.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \text{ olduqda}, \\ 0 & x = y = o \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

(3)

funksiyasının (0, 0) nöqtəsində limiti (ikiqat limiti) yoxdur, lakin nöqtədə təkrar limitləri var:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 0$$

18.2.3.Çoxdəyişənli funksiyanın kəsilməzliyi

Tərif 1. $U = f(M)$ **funksiyası üçün aşağıdakı üç şərt ödənildikdə** M_0 **nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir:**

a) $U = f(M)$ funksiyası M_0 nöqtəsində təyin olunmuşdur;

b) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ limiti vardır;

c) Funksiyanın limit qiyməti onun M_0 nöqtəsin-dəki xüsusi qiymətinə bərabərdir, yəni

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \qquad (1)$$

Əgər M_0 nöqtəsində yuxarıdakı üç şərtdən biri pozularsa, onda funksiya həmin nöqtədə kəsilən funksiya adlanır.

Tərif 2. Oblastın hər bir nöqtəsində kəsilməyən funksiyaya həmin oblastda kəsilməyən funksiya deyilir.

Tərif 3. Tutaq ki, $U = f(M)$ **funksiyası** E **çoxluğunda təyin olunmuşdur və** $\forall\varepsilon > 0$ **ədədi üçün** $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$$0 < \rho\,(M, M_0) < \delta$$

E **çoxluğunun bərabərsizliyini ödəyən bütün** $M \in E$ **nöqtələrində**

$$\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon \tag{2}$$

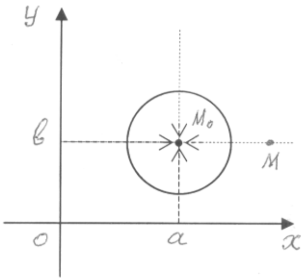
bərabərsizliyi ödənilir. Onda $U = f(M)$ funksiyasına $M_0 \in E$ nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir.

Xüsusi halda, tutaq ki, $Z = f(x,y) = f(M)$ ikidəyişənli funksiyası $M_0(a,b)$ nöqtəsində kəsilməyəndir. Bu o deməkdir ki, M nöqtəsi M_0 nöqtəsinə ixtiyari qayda ilə yaxınlaşa bilər, məsələn, bu yaxınlaşma koordinat oxlarına paralel olan düz xətlər boyunca ola bilər Aydındır ki, bu halda (1) bərabərliyi ödəniləcəkdir.Belə ki, birinci halda

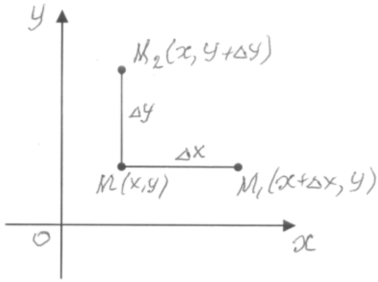
$$Z = f(x,y) = F(x) \text{ və } \lim_{x\to a} F(x) = f(a,b) = F(a)\ ;$$

ikinci halda isə

$$Z = f(x,y) = \phi(y) \text{ və } \lim_{y\to b} \phi(y) = f(a,b) = \phi(b)$$



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Göründüyü kimi $F(x)$ və $\phi(y)$ funksiyaları birdəyişənli funksiya kimi hər biri ayrılıqda kəsilməyəndir, yəni z funksiyası hər bir arqumentə nəzərən ayrılıqda kəsilməyəndir. Lakin asanlıqla göstərmək olar ki, tərs təklif həmişə doğru olmaya da bilər.Kəsilməz funksiyalar üçün aşağıdakıları söyləmək olar.

1) Verilmiş nöqtədə kəsİlməyən sonlu sayda funksiyaların cəbri cəmi,hasili bu nöqtədə kəsilməyən iki funksiya nisbəti də həmin nöqtədə kəsilməyəndir.

2) Mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi. Tutaq ki, $x_1, x_2,...x_n$ sərbəst dəyişənlərinin $U_1 = \varphi_1(x_1, x_2...x_n)$, $U_2 = \varphi_2(x_1, x_2,...x_n),...,U_m = \varphi_m(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaları hər hansı $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)}$ nöqtəsində kəsilməyən funksiyalardır və tutaq ki, $V = f(u_1, u_2,..., u_m) = F(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyası m -dənə aralıq $u_1, u_2,...u_m$ arqumentlərindən asılıdır, yəni $Q_0[u_1(M_0), u_2(M_0),...u_m(M_0)]$ nöqtəsində kəsilməyən mürəkkəb funksiyadır.Onda belə təyin olunmuş $V = f[\varphi_1(x_1, x_2,...x_n), \varphi_2(...),...\varphi_m(...)]$ mürəkkəb funksiyası M_0 nöqtəsində kəsilməyəndir.

3) Tutaq ki, $U = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(M)$ funksiyası sonlu diametri olan G oblastında kəsilməyən funksiyadır, onda

a) funksiya G oblastında məhduddur;

b) G oblastında funksiyanın aldığı ədədi qiymətlər çoxluğunun dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhədləri vardır, həm də bu ədədləri funksiya heç olmazsa oblastın bir nöqtəsində alır. Bu qiymətlər (dəqiq aşağı və dəqiq yuxarı sərhəd qiymətləri) uyğun olaraq funksiyanın G oblastında ən kiçik və ən böyük qiyməti adlanır. Bu qiymətlərin fərqi isə funksiyanın həmin oblastda rəqsi adlanır.

c) hər hansı $\varepsilon > 0$ üçün G oblastının sonlu sayda elə kiçik oblastlara bölmək olar ki, funksiyanın rəqsi hər bir xüsusi oblastda ε-dan kiçik olar;

ç) hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədi tapmaq olar ki, istənilən iki $M_1, M_2 \in G$ nöqtələri arasındakı məsafə $\delta(\varepsilon)$-dan kiçik olduqda, $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ olar (funksiyanın G oblastında müntəzəm kəsilməzliyi).

d) G oblastının onun hər hansı nöqtəsinə qədər sıxdıqda funksiyanın rəqsi sıfıra yaxınlaşır.

Tərif 3.Əgər $U = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası M_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında təyin olunub, bu nöqtənin özündə kəsiləndirsə, onda M_0 nöqtəsinə funksiyanın kəsilmə nöqtəsi deyilir. $f(M)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrinin yerləşdiyi xəttə bu funksiyanın kəsilmə xətti deyilir.

18.3.Çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəməsi.

Əvvəlcə ikidəyişənli $Z = f(x, y)$ funksiyasının xüsusi törəmələrinə baxaq. Bu funksiyanın xüsusi artımları uyğun olaraq

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (1)$$

$$\Delta_y Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (2)$$

şəklində, tam artımı isə

$$\Delta Z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

şəklində təyin olunur.

Funksiyanın $\Delta_x Z$ və $\Delta_y Z$ xüsusi artımlarından düzəldilmiş $\frac{\Delta_x Z}{\Delta x}$ və $\frac{\Delta_y Z}{\Delta y}$ nisbətləri uyğun olaraq, bu funksiyanın x arqumentinə nəzərən MM_1 düz xətt parçası, y arqumentinə nəzərən isə MM_2 düz xətt parçası üzrə onun dəyişməsinin orta sürətini təyin edir.

Tərif 1.İkidəyişənli $Z = f(x, y)$ funksiyasının xüsusi artımının uyğun arqument artımına olan nisbətinin, arqument artımı sıfra yaxınlaşdıqda limiti varsa, bu limitə funksiyanın həmin arqumentə nəzərən birtərtibli xüsusi törəməsi deyilir və aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

(4)

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Xüsusi törəmənin göstərilən $f_x'(x,y)$ və $f_y'(x,y)$ işarələrindən başqa $Z_x', \frac{\partial Z}{\partial x}$ və ya uyğun olaraq $Z_y', \frac{\partial Z}{\partial y}$ işarələrindən də istifadə olunur.

Oxşar qayda ilə üç və daha çox dəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələrinə tərif vermək olar:

a) $U = f(x,y,z)$ - üç dəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x'(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y'(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_z'(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} \quad (5)$$

b) n - dəyişənli $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasının xüsusi törəmələri:

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}'(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ... x_n)}{\Delta x_k} \quad (6)$$

Burada (4), (5) və (6) törəmələri funksiyanın birtərtibli xüsusi törəmələri adlanır.

Qeyd edək ki, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələrini taparkən adi törəmə alma qaydalarından və diferensiallama düsturlarından istifadə olunur (burada x_k -ya nəzərən törəmə aldıqda x_k -dan başqa o biri arqumentlər sabit hesab olunur).

Tərif 4. Əgər $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **funksiyası üçün,** $t \neq 0$ **olmaqla**

$$f(tx_1, tx_2, ...tx_n) = t^m f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

münasibəti ödənirsə, onda bu funksiyaya m**-ölçülü (və ya** m **dərəcəli) bircins funksiya deyilir.**

Teorem 1.(Eyler). Tutaqki, $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **funksiyası** m **ölçülü bircins funksiya olmaqla hər bir dəyişənə nəzərən xüsusi törəməyə malikdir**. Onda aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \\ + ... + x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = mf(x_1, x_2, .., x_n) \qquad (7)$$

18.4.1.Funksiyanın nöqtədə diferensiallanan olması

Verilmiş $\sigma \subset E_2$ oblastın da təyin olunmuş ikidəyişənli f funksiyasına baxaq.

Fərz edək ki, (x, y) bu oblastın hər hansı nöqtəsidir və x, y dəyişənləri uyğun olaraq elə Δx və Δy artımları alır ki, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nöqtəsi yenə də həmin oblasta daxil olur. Onda $W = f(x, y)$ funksiyası

$$\mathbf{\Delta W = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y} \qquad \mathbf{(1)}$$

artımını alır.

(1) ifadəsinə f funksiyasının (x, y) nöqtəsində artımı (və ya tam artımı) deyilir.

Tərif 1. f funksiyasının (x, y) nöqtəsində artımını

$$\mathbf{\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y} \qquad \mathbf{(2)}$$

şəklində göstərmək mümkün olduqda, ona həmin nöqtədə diferensiallanan (və ya diferensiallana bilən) funksiya deyilir. A burada $A = A(x, y)$və $B = B(x, y)$arqumentlərin Δx və əΔy artımlarından asılı olmayan kəmiyyətlər, $\alpha = \alpha(\Delta x\,, \Delta y\,)$ vəə $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ isəə $(\Delta x - 0,\ \Delta y - 0)$ şərtində sonsuz kiçilən funksiyalardır:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\,\Delta x; \Delta y) = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\,\Delta x; \Delta y) = 0$$

Tərif 2. σ oblastının istənilən nöqtəsində diferensiallanan funksiyaya həmin oblas da diferensiallanan funksiya deyilir.

İkidəyişənli funksiyanın diferensiallanan olması haqqında yuxarıda verilmiş təriflər uyğun şəkildə n- dəyişənli $(n \geq 2)$ fynksiyalar üçün də doğrudur . n-dəyişənli f funksiyasının $X = (x_{1,} x_2 \dots, x_n)$ nöqtəsində diferensiallanma şərti

$\Delta W = A_1(X)\Delta x_1 + A_2(X)\Delta x_2 + \cdots + A_n(X)\Delta x_n + \varepsilon p(4)$
kimi yazılır; burada $p = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\Delta x_k)^2}$ və $\lim\limits_{p \to 0} \varepsilon = 0$.

18.4.2.Çoxdəyişənli funksiyanın diferensiallanan olması üçün zəruri şərtlər.

Teorem 1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nöqtəsində diferensiallanan f funksiyası həmin nöqtədə kəsilməyəndir.

İsbatı. $W = f(\,x\,, y)$ funksiyası $(\,x\,, y)$ nöqtəsində diferensiallanan olduğundan həmin nöqtədə onun artımı

$$\boldsymbol{\Delta W = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \alpha \to 0\,,\ \beta \to 0} \quad \textbf{(1)}$$

şəklində göstərilə bilir.

Buradan

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta W = 0$$

alınır ki, bu da funksiyanın (x, y) nöqtəsində kəsilməz olduğunu göstərir .

Nəticə 1. Funksiya kəsildiyi nöqtədə diferensial-lanan ola bilməz .

Teorem 2. Verilmiş $(x, y) \in \sigma$ nöqtəsində diferen-siallanan f funksiyasının həmin nöqtədə sonlu $f_x(xy)$və $f_y(xy)$ xüsusi törəmələri var.

İsbatı. $W = f(x, y)$ funksiyası (x, y) nöqtəsində diferensiallanan olduğundan bu nöqtədə onun artımı üçün (1) göstərilişi doğrudur Həmin bərabərlikdə $\Delta x \neq 0$ və $\Delta y = 0$ hesab etsək

$$\Delta_x W = A\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad \alpha \to 0 \; (\Delta x \to 0)$$

olar. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini Δx artımına bö-lərək $\Delta x \to 0$ şərtində limitə keçək:

$$\frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A + \alpha, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x W}{\Delta x} = A .$$

Deməli ,(x, y) nöqtəsində $W'_x = f'_x(x, y)$ xüsusi törəməsi var və $A = f'_x(x, y)$ bərabərliyi doğrudur.

Eyni qayda ilə (x, y) nöqtəsində $f'_y(x, y)$ xüsusi tö-rəməsinin varlığı və $B = f'_x(x, y)$ bərabərliyinin doğruluğu isbat olunur.

Nəticə 2.Verilmiş (x,y)nöqtəsində diferensiallanan f funksiyasının həmin nöqtədə artımı.

$$\Delta W = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon p, \varepsilon \to 0(p \to o)(2)$$

şəklində göstərilə bilər.

Nəticə 3.f funksiyası $f'_x(x, y)$ və $f'_y(x, y)$ xüsusi törəmələrinin heç olmasa birinin olmadığı nöqtədə diferensiallanan deyildir.

18.4.3. Çoxdəyişənli funksiyanın yüksək tərtibli xüsusi törəmələri.

Əvvəlcə σ oblastında təyin olunmuş ikidəyişənli W=f(x,y) funksiyasının yüksəktərtribli xüsusi törəmələrini təyin edək.

Aydındır ki,ikidəyişənli W=f(x,y) funksiyasının $f_x(x,y)$ və $f_y(x,y)$ xüsusi törəmələri də x və y dəyişənlərinin funksiyalarıdır.Buna görə onların da xüsusi törəmələrindəndanımaq olar.

f(x,y) funksiyasının birtərtibli $f_x'(x.y)$ və $f_y'(x,y)$ xüsusi törəmələrinin x, y arqumentinə nəzərən törəmələrinə f funksiyasının ikitərtibli xüsusi törəmələri deyilir və

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}= f``_{xx}(x,y)$ (ardıcıl olaraq iki dəfə x-ə nəzərən törəmə alınır)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} =f``_{xy}(x,y)$ (əvvəlcə x-ə nəzərən sonra isə y-ə nəzərən törəmə alınır)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}= f``_{yx}(x,y)$ (əvvəlcə y-ə nəzərən, sonra isə x-ə nəzərən törəmə alınır)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =f``_{yy}(x,y)$ (ardıcıl olaraq y-ə nəzərən iki dəfə törəmə alınır) kimi işarə olunur.

Funksiyanın ikitərtibli xüsusi törəmələrinin x və y arqumentlərinə nəzərən törəmələrinə onun üçtərtibli xüsusi törəmələri deyilir və

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y},\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x},\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}, \dots ,$

kimi işarə olunur.Funksiyanın (**m-1**) tərtibli xüsusi törəməsinin törəməsi onun **m** tərtibli xüsusi törəməsi olar. Verilmiş funksiyanın əvvəlcə k dəfə ardıcıl olaraq x-ə nəzərən,sonra isə **(m-k)** dəfə **y-ə** nəzərən törəməsi hesablandıqda onun **m** tərtibli xüsusi törəməsi alınar.

Eyni qayda ilə n dəyişənli $W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının birtərtibli $\frac{\partial f}{dx_k}$, ikitərtibli $\frac{\partial^2 f}{dx_k dx_i}$,üçtərtibli $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial_j}$(k, i, j=1, 2, . . . ,n) və s. xüsusi törəmələrindən danışmaq olar.

Verilmiş funksiyanın müxtəlif arqumentlərinə nəzərən alınmış yüksəktərtibli törəmələrinə onun qarışıq xüsusi törəmələri deyilir. İkidəyişənli **f(x, y)** funksiyasının iki ədəd ikitərtibli $\frac{\partial^2 f}{dy_k \partial y}$ və $\frac{\partial^2 f}{dy_k \partial x}$qarışıq xüsusi törəmələri var.

Misal. $W = x^2e^{xy}$ funksiyasının ikitərtibli xüsusi törəmələrini hesablamalı.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2xe^{xy} + yx^2e^{xy} \text{ və } \frac{\partial W}{\partial y} = x^3e^{xy}$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2e^{xy} + 4yxe^{xy} + y^2x^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 3x^2e^{xy} + yx^3e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = 3x^2e^{xy} + yx^3e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^4e^{xy} \text{ olar.}$$

Buradan görünür ki, $W = x^2e^{xy}$ funksiyasının ikitərtibli qarışıq xüsusitörəmələri bərabərdir:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = 3x^2e^{xy} + yx^3e^{xy}.$$

Bununla əlaqədar olaraq belə bir sual qarşıya çıxır: çoxdəyişənli funksiyanın müxtəlif arqumentlərə nəzərən diferensiallanmasının nəticəsi diferensiallanmanın növbəsindən asılıdırmı ? Bu suala aşağıdakı teoremlə cavab vermək olar.

Teorem (Şvars). (x_0, y_0) nöqtəsinin müəyyən ətrafında $W = f(x, y)$ funksiyasının ikitərtibli qarışıq xüsusi törəmələri $f''_{xy}(x, y)$ və $f''_{yx}(x, y)$ varsa və (x_0, y_0) nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda həmin nöqtədə onlar bir-birinə bərabərdir.

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \qquad \textbf{(1)}$$

İsbatı. Arqumentlərə elə Δx və ə Δyartımları verək ki, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nöqtəsi (x_0, y_0) nöqtəsinin teoremdə göstərilən ətrafına daxil olsun . Bu halda

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - \\ -f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0) \qquad \textbf{(2)}$$

ifadəsini $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$ funksiyası vasitəsilə

$$A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) \qquad \textbf{(3)}$$

kimi yazmaq olar . (3) fərqinə Laqranjın sonlu artım haqqındakı teoremini tətbiq etsək

$$A = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta_x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1 \text{ və ya}$$

$$A = [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)]\Delta x \qquad \textbf{(4)}$$

bərabərliyini alırıq. (4) fərqinə isə y dəyişəninə nəzərən Laqranj teoremini tətbiq etmək olar .

$$A = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, \ y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y, \\ 0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1 \qquad \textbf{(5)}$$

(2) ifadəsi üzərində apardığımız əməliyyatı əvvəlcə y, sonra isə x dəyişəninə nəzərən aparsaq onda,

$$A = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y, \\ 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1 \qquad \textbf{(6)}$$

(5) və (6) bərabərliklərinə əsasən

f''_{xy} ($(x_0+\ \theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{xy}\ (x_0+\ \theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y$ alınar. Bu bərabərlikdə $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ şərtində limitə keçsək və ikitərtibli qarışıq xüsusi törəmələrin (x_0 , y_0) nöqtəsində kəsilməz olduğunu nəzərə alsaq

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

alınar.

Nəticə 1. f(x,y) funksiyasının ikitərtibli qarışıq xüsusi törəmələri σ oblastında kəsilməyəndirsəonda həmin oblastda

$$\mathbf{f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)}$$

(7)

olar, yəni müxtəlif arqumentlərə nəzərən ardıcıl diferensiallanmanın nəticəsi diferensiallanmanın növbəsindən asılı deyildir .

Nəticə 2. f(x,y) funksiyasının σ oblastında n tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri varsa və həmin oblastda kəsilməyəndirsə onda onun m tərtibli (m≤ n) qarışıq xüsusi törəmələrinin qiyməti müxtəlif arqumentlərə nəzərən ardıcıl diferensiallamanın növbəsindən asılı deyildir .

$$\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial y^{m-k} \partial x^k}$$

Belə təkliflər istənilən sayda dəyişənin funksiyası üçündə doğrudur.

XIX FƏSİL. ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN LOKAL EKSTREMUMU. İKİDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN LOKAL EKSTREMUMUNUN TAPILMASI

19.1.Çoxdəyişənli funksiyanın lokal ekstremum nöqtələri

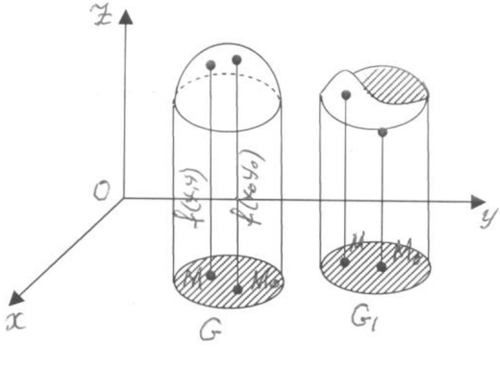
Fərz edək ki, f(x y) ikidəyişənli funksiyadır.

$M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi isə funksiyanın təyin oblastında qeyd olunmuş nöqtədir.

Tərif 1.Əgər $M_0(x_0, y_0)$ **nöqtəsinin hər hansı ətrafında**

$$f(x,y) \le f(x_0, y_0) \qquad \textbf{(1)}$$

şərti ödənilərsə, onda $M_0(x_0, y_0)$ **nöqtəsinə** $Z = f(x,y)$ **funksiyasının maksimum nöqtəsi, bu funksiyanın həmin nöqtədə aldığı** $f(x_0, y_0)$ **qiymətinə isə onun maksimum qiyməti deyilir və** $Max f(x,y)$ **kimi yazılır.**



Şəkil 1.

Tərif 2. Əgər $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \textbf{(2)}$$

şərti ödənilirsə, onda $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinə $Z = f(x, y)$ funksiyasının minimum nöqtəsi, bu funksiyanın həmin nöqtədə aldığı $f(x_0, y_0)$ qiymətinə isə onun minimum qiyməti deyilir və $M\inf(x, y)$ kimi yazılır. (Şəkil 1)

Funksiyanın maksimum və minimum qiymətləri birlikdə, onun ekstremum qiymətləri adlanır.

19.2. Lokal ekstremumun varlığı üçün zəruri və kafi şərt

Teorem 1. (Lokal ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt). Əgər $Z = f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində ekstremumu varsa, onda həmin nöqtədə funksiyanın ya birtərtibli xüsusi törəmələrinin hər ikisi sıfra bərabərdir, yəni

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \ , \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

yaxud da bu xüsusi törəmələrdən heç olmazsa biri (hər ikisi də ola bilər) yoxdur.

(3) münasibətini ödəyən nöqtələrə, $Z = f(x, y)$ funksiyasının stasionar nöqtələri deyilir. Funksiyanın stasionar və xüsusi törəmələrinin olmadığı (və ya sonsuzluğa bərabər olduğu) nöqtələrə birlikdə bu funksiyanın böhran və ya kritik nöqtələri deyilir.

Teorem 2. (Lokal ekstremum varlığı üçün kafi şərt). Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0)$ kritik nöqtəsi ətrafında $Z = f(x, y)$

funksiyasının ikitərtibli (ikinci tərtib daxil olmaq şərti ilə) kəsilməz xüsusi törəmələri vardır.

Aşağıdakı ifadəyə baxaq:

$$D(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2 \qquad (4)$$

Bu halda :

1) $D(x_0, y_0) > 0$ olduqda $Z = f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində ekstremumu vardır, həm də $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ olduqda həmin nöqtədə maksimum, $f''_{yy}(x_0; y_0) > 0$ olduqda isə minimum vardır;

2) $D(x_0, y_0) < 0$ olduqda $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində Z=f(x,y) funksiyasının ekstremumu yoxdur;

3) $D(x_0, y_0) = 0$ olduqda isə Z=f(x,y) funksiyasının ekstremumunun olma məsələsi açıq qalır (yəni ekstremum ola da bilər, olmaya da bilər).

Oxşar qayda ilə (3) və (4) şərtini iki və daha çox dəyişənli funksiyalar üçün də söyləmək olar. Məsələn, bunu üçdəyişənli $U = u(x, y, z)$ funksiyası üçün göstərək. Bu məqsədlə aşağıdakı kimi işarələmələr qəbul edək:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{m_0} = a_{11}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{m_0} = a_{22},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{m_0} = a_{33}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{m_0} = a_{12} = a_{21},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{m_0} = a_{13} = a_{31}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right|_{m_0} = a_{23} = a_{32},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - böhrannöqtəsində

$$a_{11} > 0, \ \delta > 0, \ \Delta > 0 \qquad (5)$$

olduqda bu nöqtədə funksiyanın minimumu,

2) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - böhran nöqtəsində

$$a_{11} < 0, \ \delta > 0, \ \Delta < 0$$

olduqda isə bu nöqtədə funksiyanın maksimumu vardır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, əgər $Z = f(x, y)$ qapalı G oblastında təyin olunmuş və kəsilməyən funksiyadırsa, onda bu funksiya həmin oblastda özünün ən kiçik və ən böyük qiymətini alır. Bundan əlavə həmin şərtlər daxilində funksiya özünün ən böyük (ən kiçik) qiymətini ya stasionar nöqtələrdə, yaxud da oblastın sərhəd nöqtələrində alır.

Beləliklə, $Z = f(x, y)$ funksiyasının G oblastında ən böyük və ən kiçik qiymətini tapmaq üçün:

a) böhran nöqtələrini (oblasta daxil olan) tapıb, həmin nöqtələrdə funksiyanın qiymətini tapmaq;

b) bundan sonra funksiyanın sərhəd nöqtələrindəki ən böyük və ən kiçik qiymətini tapmaq (bu birdəyişənli funksiyada olduğu kimi tapılır).

c) tapılmış bütün qiymətlərdən ən böyüyü və ən kiçiyini seçmək lazımdır.

XX FƏSİL. ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSIYANIN QLOBAL EKSTREMUMU. ŞƏRTİ EKSTREMUM

20.1. Çoxdəyişənli funksiyanin qlobal ekstremumu

Fərz edək ki, $z = f(x, y)$ funksiyası qapalı məhdud σ oblastında təyin olunmuş kəsilməyən funksiyadır.Onda kəsilməyən funksiyasının xassəsinə görə onun həmin oblastda sonlu dəqiq aşağı sərhədi və sonlu dəqiq yuxarı sərhədi var və bu sərhədlərin hər birini həmin qapalı oblastın heç olmasa bir nöqtəsində alır.

Bu halda f funksiyasının dəqiq aşağı sərhədi onun σoblastında ən kiçik qiyməti , dəqiq yuxarı sərhədi isə σ oblastında onun ən böyük qiyməti olar. f funksiyasının σ oblastında ən böyük qiyməti onun həmin oblastda maksimumu (və ya maksimal qiyməti), ən kiçik qiyməti isə həmin oblastda **minimumu (və ya minimal qiyməti**) adlanır.

Funksiyanın qapalı σ oblastında maksimumuna və minimumuna birlikdə onun qlobal ekstremumu deyilir. Funksiyanın lokal ekstremumu nöqtələrin yaxın ətrafına aid olduğu halda, onun qlobal ekstremumu bütün oblata aiddir, yəni qlobal ekstremum bütün oblasta nəzərən götürülür.

Funksiya σ oblastındakı maksimal qiymətini ya oblastın daxili nöqtəsində, ya da oblastın sərhəd nöqtəsində (oblastın konturu üzərində) alır. Əgər funksiya σ oblastındakı maksimal qiymətini oblastın bir daxili nöqtəsində alırsa, onda həmin nöqtə onun **lokal maksimum** nöqtəsi olar.

Funksiya σ oblastındakı minimal qiymətini də ya oblastın sərhəd nöqtəsində, ya da lokal minimum nöqtəsi olan daxili nöqtədə alır.

Beləliklə, funksiyanın qapalı məhdud σ oblastında qlobal ekstremumunu tapmaq üçün aşağıdakı qayda alınır: funksiyanın σ oblastındakı bütün böhran nöqtələri tapılır, funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri və oblastın sərhədi üzərindəki ən böyük və ən kiçik qiyməti hesablanır. Bu qiymətlərin ən kiçiyi funksiyanın σ oblastında minimumu, ən böyüyü isə funksiyanın σ oblastında maksimumudur.

Misal .

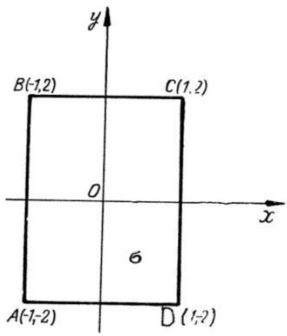
$z = x^2 + y^2$ funksiyanın $\sigma = \begin{pmatrix} -1 \le x \le 1 \\ -2 \le y \le 2 \end{pmatrix}$

düzbucaqlısında qlobal ekstremumunu tapmalı.

Funksiaynın σ oblastının daxilində yerləşən yeganə böhran nöqtəsi vardır: 0 (0,0).Bu nöqtədə funksiya lokal minimum qiymət alır:

$$z_{\min} = 0.$$

Funksiyanın AB, BC, CD və DA parçaları üzərində (şəkil 1) ən kiçik qiyməti uyğun olaraq 1,16, 1 və 16-dır.



Şəkil 1.

Funksiyanın AB, BC, CD və DA parçaları üzərində ən böyük qiyməti isə 17-dir.

Deməli, σ oblastının ABCD konturu üzərində funksiyanın ən kiçik qiyməti 1 və ən böyük qiyməti isə 17-dir. Buradan aydındır ki , verilmiş funksiyanın AB , BC, CD və DA parçaları üzərində ən kiçik σ düzbucaqlısında minimumu 0,maksimumu isə 17 ədədinə bərabərdir:

$$z_{\min} = 0, \qquad z_{\max} = 17.$$

20.2.Şərti ekstremum. Laqranjın qeyri-müəyyən vuruqlar üsulu

Şərti ekstremum.

Çoxdəyişənli funksiyaların ekstremumunu taparkən, sərbəst dəyişənlərin (arqumentlərin) üzərinə heç bir şərt qoyulmursa, funksiyanın belə ekstremumu onun şərtsiz ekstremumu adlanır. Lakin praktikada tez-tez elə məsələlərlə rastlaşırıq ki, funksiyanın ekstremumlarını araşdırarkən həmin sərbəst dəyişənlərin üzərinə müəyyən şərtlər qoymaq lazım gəlir.

Tutaq ki, hər hansı oblastda n - dəyişənli $W = f(x, y, z, ..., u, v)$ funksiyası və bu dəyişənlərlə əlaqəli m dənə $(m < n)$

$$F_1(x, y, z, ..., u, v) = 0, F_2(x, y, z, ..., u, v) = 0,$$
$$..., F_m(x, y, z, ..., u, v) = 0$$

tənlik verilmişdir. Bu tənliklər əlaqə tənlikləri adlanır.

Tərif1.Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0, z_0, ..., u_0, v_0)$ **və onun hər hansı ətrafı olan** $M(x, y, z, ..., u, v)$ **nöqtəsinin koordinatları**

əlaqə tənliklərini ödəyir. Əgər bütün $M(x,y,z,...,u,v)$ nöqtələri üçün

$$f(x,y,z,...,u,v)\le f(x_0,y_0,z_0,...,u_0,v_0)$$

vəya

$$f(x,y,z,...,u,v)\ge f(x_0,y_0,z_0,...,u_0,v_0))$$

Bərabərsizliyi ödənilirsə, onda $W=f(x,y,z,...,u,v)$ funksiyasının $M_0(x_0,y_0,z_0,...,u_0,v_0)$ nöqtəsində şərti maksimumu (şərti minimumu) vardırdeyilir.

Şərti ekstremumun tapılması adi Laqranj funksiyasının ekstremumunun tapılmasına gətirilir. Bunun üçün aşağıdakı kimi Loqranj funksiyası tərtib edilir.

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

burada $\lambda_k\left(k=1,\bar{m}\right)$ Laqranj vuruğu adlanır.

Şərti ekstremum üçün zəruri şərt $m+n$ sayda

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}=0\left(i=1,\bar{n}\right)$$

$$\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)=0 \qquad (\mathrm{k}=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

tənliklər ilə ifadə olunur ki, buradan da

$$x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$$

dəyişənləri tapıla bilər.

Burada $x_1,x_2,...,x_n$ şərti ekstremum ola biləcək nöqtənin koordinatlarıdır.

Şərti ekstremum üçün kafi şərt Laqranj funksiyasının ikitərtibli

$$d^2L\left(\overset{\circ}{x}_1,\overset{\circ}{x}_2,...,\overset{\circ}{x}_n,\overset{\circ}{\lambda}_1,\overset{\circ}{\lambda}_2,...,\overset{\circ}{\lambda}_m,dx_1,dx_2,...,dx_n\right)$$

diferensialının işarəsinin öyrənilməsi ilə bağlıdır.Alınan hər bir $\left(\overset{\circ}{x_1}, \overset{\circ}{x_2}, ..., \overset{\circ}{x_n}, \overset{\circ}{\lambda_1}, \overset{\circ}{\lambda_2}, ..., \overset{\circ}{\lambda_m}\right)$ qiymətlər sistemi

$$dx_1^{\ 2} + dx_2^{\ 2} + ... + dx_n^{\ 2} \neq 0 \text{ olmaqla}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k\left(\overset{\circ}{x_1}, \overset{\circ}{x_2}, ..., \overset{\circ}{x_n}\right)}{\partial x_j} dx_j = 0 \left(k = 1, \overline{m}\right) \qquad (2)$$

tənliyini ödəyir. Əgər $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ - in bütün mümkün qiymətinin hamısı eyni zamanda sıfır deyilsə, onda

$$d^2L\left(\overset{\circ}{x_1}, \overset{\circ}{x_2}, ..., \overset{\circ}{x_n}, \overset{\circ}{\lambda_1}, \overset{\circ}{\lambda_2}, ..., \overset{\circ}{\lambda_m}, dx_1, dx_2, ..., dx_n\right) < 0$$

bərabərsizliyi ödənildikdə həmin nöqtədə funksiyanın minimumu vardır.

Xüsusi halda $n = 2$ olarsa, $Z = f(x, y)$ funksiyasının əlaqə tənliyi $\varphi(x, y) = 0$, Laqranj funksiyası

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

şəklində olar.

Bu hal üçün (1) sistemi üç tənlikdən ibarət olur:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \ \varphi(x, y) = 0 \qquad (3)$$

Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0), \lambda_0$ - bu sistemin istənilən həlli və aşağıdakı üç tərtibli determinant üçün

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

1) $\Delta < 0$ şərti ödənərsə, $Z = f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində şərti maksimumu;

2) $\Delta > 0$ şərti ödənildikdə isə, onun həmin nöqtədə şərti minimumu vardır.

Xüsusi törəmələrin həndəsi tətbiqləri.

1.Tənliyi $x=\varphi_1(t), y = \varphi_2(t), z = \varphi_3(t)$ kimi verilmiş xəttə, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində $(x_0=\varphi_1(t_o), y_o = \varphi_2(t_0), z_0 = \varphi_3(t_o)$ çəkilmiş toxunanın tənliyi

$$\frac{x-x_0}{\varphi_1'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\varphi_2'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\varphi_3'(t_0)} \tag{1}$$

şəklindədir. Burada $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i'^2 \neq 0$ olmalıdır.

2. Tənliyi $x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$ olan xəttə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində çəkilən normal müstəvinin tənliyi

$$\varphi_1'(t_0)(x-x_0) + \varphi_2'(t_0)(y-y_0) + \varphi_3'(t_0)(z-z_0) = 0 \tag{2}$$

kimidir.

3) Toxunma nöqtəsində toxunan müstəviyə perpendkulyar səthin norması adlanır.

Tutaq ki, səth

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu səth üzərində $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi götürək. Onda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyi aşağıdakı kimi

$$\begin{aligned} &F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + \\ &+ F_z'(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

olar.

Həmin nöqtədə səthin normalın tənliyi isə

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)} \qquad (5)$$

şəklində olur.

4) M_0 nöqtəsində səthə toxunan müstəvinin və normalın tənliyi.

Səth özünün $Z=f(x,y)$ aşkar tənliyi ilə verilmişdirsə, onda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində tozunan müstəvinin tənliyi

$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (6)$$

şəklində, normalın tənliyi isə

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (7)$$

şəklində olur.

5) Səviyyə xətti .

$Z=f(x,y)$ funksiyasının eyni bir C ($C=const$) qiymət aldığı müstəvi nöqtələrinin həndəsi yerinə səviyyə xətti deyilir, yəni

$$f(x,y)=C, \quad C=const \qquad (8)$$

20.3. Ən kiçik kvadratlar üsulu

Təbiətşunaslıqda, xüsusən də kimyada, fizikada və s. elmlərdə aparılan təcrübə və müşahidələrin nəticələri empirik düsturların (təcrübədən alınan) köməyi ilə öyrənilir. Bu tip düsturların alınması üçün tətbiq edilən "ən kiçik kvadratlar" üsulu ən yaxşı üsullardan biridir.

Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakı kimidir. Ən kiçik kvadratlar üsulu alınan belə düsturların ən yaxşı üsullarından biridir.

Fərz edək ki, iki x və y kəmiyyətləri arasında asılılıq yaratmaq tələb olunur. Tutaq ki, n sayda təcrübə aparılmış, x və y-in aldığı qiymətlər arasındakı asılılıq cədvəl şəklində alınmışdır.

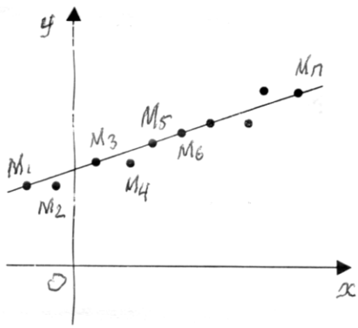
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

x_i və y_i - yə $\left(i = \overline{1,n}\right)$ müstəvi üzərində düzbucaqlı dekart koordinat sistemində götürülmüş

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$$

nöqtələrin koordinatları kimi baxacağıq.

Fərz edək ki, bu nöqtələr hər hansı düz xətt üzərində və ya ona çox yaxın yerləşmişdir (şəkil 1).



Şəkil 1.

Odur ki, təbii olaraq y və x arasındakı asılılığa xətti asılılıq kimi baxmaq olar, yəni y-ə x-in

$$y = ax + b \qquad (1)$$

şəklində xətti funksiyası kimi baxmaq olar. Burada a və b tapılması lazım olan hər hansı sabitlərdir (parametrlərdir). Aydındır ki, (1) ifadəsini

$$ax + b - y = 0 \qquad (2)$$

kimi yazmaq olar. Beləliklə, (2) bərabərliyində x_i və y_i -nin $\left(i = \overline{1,n}\right)$ cədvəl qiymətlərini nəzərə alsaq, aşağıdakı bərabərlikləri alarıq:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1 \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Aydındır ki, təcrübə nəticəsində alınan $y_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ qiymətləri ilə axtarılan (1) funksiyasının $x_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ nöqtələrindəki aldığı qiymətlər üst-üstə düşmür. Odur ki, həmin qiymətlərin meyli (kiçik xəta) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ilə işarə edilmişdir. **Belə tələb qoyulur:** a və b əmsallarını elə seçmək lazımdır ki, bu xətalar (meyllər) imkan daxilində mütləq qiymətcə kiçik olsun. Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsasən a və b əmsallarını elə seçək ki, bu xətaların kvadratları cəmi mümkün qədər kiçik olsun, yəni

$$U = \varepsilon_1^{\ 2} + \varepsilon_2^{\ 2} + \dots + \varepsilon_n^{\ 2} \qquad (4)$$

ən kiçik olsun. (3) bərabərliklərini (4) bərabərliyində nəzərə alsaq, yazarıq:

$$U=(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+...+(ax_n+b-y_n)^2 \qquad (5)$$

Qoyulmuş tələbə görə U dəyişəni iki a və b dəyişənlərinin funksiyası olur.

Deməli, qoyulan məsələnin həlli (5) bərabərliyi ilə təyin olunan $U(a,b)$ funksiyasının minimum qiymət aldığı nöqtələrin tapılmasına gətirilir. Bunun üçün

$$\frac{\partial u}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial b}=0 \qquad (6)$$

şərtlərinin ödənilməsi zəruridir. $U(a,b)$ funksiyasının a və b -yə nəzərən xüsusi törəmələrini tapıb sıfra bərabər etsək

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \qquad (7)$$

alarıq. Bu sistem üçün $\Delta=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\ 2} & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & n \end{vmatrix}\neq 0$

olması aydındır. Deməli, sistemin yeganə həlli var və sistemin həlli

$$a=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad b=\frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (8)$$

kimi tapılır. Burada Δ_1 və Δ_2

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i & n \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\ 2} & \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{vmatrix}$$

şəklindədir.

Qeyd etmək lazımdır ki, naməlum funksiya təkcə $y=ax+b$ xətti funksiya şəklində deyil,

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \alpha x^{\beta}, \quad y = a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x, \ldots$$

və s. şəklində də ola bilər. Məsələn, naməlum funksiya kvadratın funksiya olduqda empirik düsturdan parametrlərin ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin olunmasına baxaq.

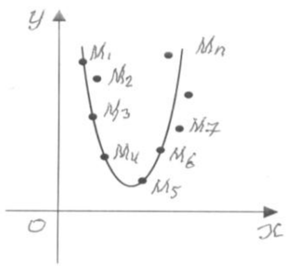
Tutaq ki, x və y arasında təcrübə nəticəsində alınan asılılıq aşağıdakı cədvəl şəklində verilmişdir:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Fərz edək ki, $(x_i, y_i)(i = \overline{1,n})$ cütlərinə müstəvi üzərində (Dekart koordinatlarda) $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ nöqtələri uyğundur. Bundan əlavə fərz edək ki, bu nöqtələr

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabolası üzərində və ya onun yaxın ətrafında yerləşmişlər (şəkil 2). Burada a, b, c əmsalları tapılması lazım gələn parametrlərdir



Şəkil 2.

Yuxarıda olduğu kimi x və y dəyişənlərinin cədvəldəki qiymətlərini yazıb, a,b,c parametrlərini tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=n1}^{n} y_i x_i^2 \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (9) sisteminin yeganə həlli vardır. Bu sistemdən a,b,c - ni tapıb, (8) bərabərliyində yerinə yazaraq, təcrübənin empirik düsturunu taparıq.

Nümunəvi misallar həlli

1.Aşğıdakı funksiyanın təyin oblastın tapın.

$$Z=\arcsin\frac{y-1}{x}$$

Həlli: Funksiyanın mənası olması üçün

$$-1 \le \frac{y-1}{x} \le 1$$

olmalıdır. Buradan da yazmaq olar:

1) $1-x \le y \le 1+x$ olur, $x>0$ olduqda;

2) $1+x \le y \le 1-x$ olur, $x<0$ olduqda(şəkil 1)

2.Funksiyanın təyin oblastını tapın:

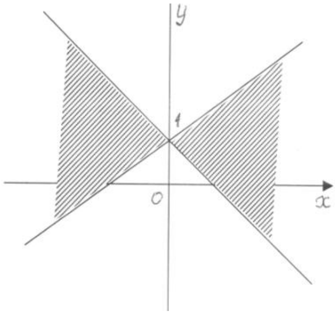
$$Z=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

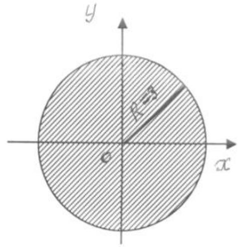
Həlli:

Kvadrat kökün mənası olması üçün

$$9-x^2-y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 9$$

olmalıdır. Bu mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu $R=3$ olan çevrə və onun dairə hissəsindən ibarətdir (şəkil 2).





Şəkil1. **Şəkil 2.**

3.Aşağıda funksiya üçün $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(2,1)$, $f(1,2)$ hesablayın.

$$f(x,y)=\frac{x+y-2}{x^2+2y^2+5}$$

Həlli: Verilən funksiyanın xüsusi qiymətlərini tapaq:

$$\mathrm{f}(0,0)=\frac{0+0-2}{0^2+2\cdot 0^2+5}=-\frac{2}{5};$$

$$\mathrm{f}(1,1)=\frac{1+1-2}{1^2+2\cdot 1^2+5}=\frac{0}{8}=0;$$

$$\mathrm{f}(2,1)=\frac{2+1-2}{2^2+2\cdot 1^2+5}=\frac{1}{11};$$

$$f(1,2)=\frac{1+2-2}{1^2+2\cdot 2^2+5}=\frac{1}{14}.$$

4.Verilmiş $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ -funksiyasının $x\to 0,\ y\to 0$ - şərtində limiti varmı?

Həlli: Tutaq ki, $M(x,y)$ nöqtəsi $M_0(0,0)$ nöqtəsinə yaxınlaşır. x və y-in dəyişməsini $y=kx$ düz xətti boyunca götürək:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-k^4x^4}{x^4+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^4}{1+k^4}=\frac{1-k^4}{1+x^4}$$

Göründüyü kimi k-nın seçilməsindən asılı olaraq limitin nəticəsi müxtəlif ədədlər olacaqdır. Odur ki, verilmiş funksiyanın $x\to 0,\ \ y\to 0$ şərtində limiti yoxdur.

5. Limiti hesablayın.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{x+y}$$

Həlli:Əvvəlcə aşağıdakı limitlərə baxaq:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1;$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1.$$

Aydındır ki, $n\to\infty$ şərtində

$$\{x_n,y_n\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right\},\quad \{x_n^{'},y_n^{'}\}=\left\{\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right\}$$

ardıcıllıqları $M_0(0,0)$ nöqtəsinə yığılır. Lakin funksiyanın uyğun qiymətlər ardıcıllığımüxtəlif limitlərə yığılır:

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{0\} \to 0, \quad \{f(x_n', y_n')\} = \left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}\right\} \to \frac{1}{3}$$

Bu o deməkdir ki, $n \to \infty$ şərtində $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ limitiyoxdur.

6. Limiti hesablayın.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$$

Həlli: Aydındır ki, $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x}$ funksiyası $M_0(0,2)$ nöqtəsində təyin olunmamışdır. $y \neq 0$ olmaqla bu funksiyanı y-ə vuraq və həm də bölək:

$$\frac{\sin xy}{x} = \frac{y \sin xy}{xy} = y \cdot \frac{\sin xy}{xy}$$

İndi limitə keçək:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin xy}{xy} = 1\right).$$

7. Verilmiş

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

funksiyası üçün $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ limiti varmı?

Həlli :Əvvəlcə təkrar limitləri hesablayaq:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x, y)\right) = \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}\right) = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0.$$

Deməli, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$ olur.

İndi ikiqat limitin olubolmadığını aydınlaşdıraq. Bu məqsədlə $\{x_n, y_n\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right\}$, $\{x_n', y_n'\}=\left\{\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right\}$ - ardıcıllıqlarına baxaq. Bu ardıcıllıqlar $n\to\infty$ - şərtində $M_0(0,0)$ nöqtəsinə yığıldığı halda, funksiyanın uyğun qiymətlər ardıcıllığı müxtəlif limit qiymətləri alır:

$$f(x_n, y_n)=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}\to 1,\quad f\left(x_n', y_n'=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}\to 0\right)\qquad (n\to\infty)$$

Deməli, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ limiti yoxdur.

8.Verilmiş funksiyalar üçün

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} f(x,y)\right) \text{və} \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} f(x,y)\right)$$

limitlərini hesablayın.

a) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; b) $f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{3x+y}$

Həlli :

a) $x\neq 0$, $y\neq 0$ olduqda yazarıq:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x^2}{y^2}+y^2}\right)=0;$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^4}{x^2}}\right)=1;$$

b) Verilmiş funksiya hər bir qeyd olunmuş x-ə nəzərən y-in və hər bir qeyd olunmuş y-ə nəzərən isə x-in kəsilməz funksiyasıdır.

9.İkiqat limitin hesablayın:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

Həlli: Aydındır ki,

$$(x-y)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq xy$$

Odur ki, $x\neq 0, y\neq 0$ olmaqla yazarıq:

$$0\leq\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leq\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leq\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}$$

Buradan da çıxır ki,

$$0\leq\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leq\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0$$

Beləliklə, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$ olur.

XXI FƏSİL. DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR . TƏRİF VƏ ANLAYIŞLAR. KOŞİ MƏSƏLƏSİ

21.1.1.Tərif və ümumi anlayışlar

Naməlum funksiyanın törəməsi verildikdə onu inteqrallama vasitəsilə tapmaq olar. Bir çox hallarda isə funksiyanın törəməsi deyil, axtarılan y funksiyası, x arqumenti və y funksiyasının x-ə nəzərən $y', y'', \dots \dots y^{(n)}$ törəmələri arasında müəyyən asıllılıq verilir. Bu asıllılıqdan həmin naməlum funksiyanı tapmaq tələb olunur. Belə məsələlərlə diferensial tənliklər nəzəriyyəsində məşğul olurlar.

Tərif. İxtiyari x dəyişəni, onun y=y(x) funksiyası və bu funksiyanın həmin x dəyişəninə nəzərən $\mathbf{y', y'', \dots \dots y^{(n)}}$ törəmələri daxil olan tənliyə adi diferensial tənlik deyilir.

İki və ya çox sayda dəyişəndən asılı olan funksiya və bu funksiyanın həmin dəyişənlərə nəzərən xüsusi törəmələri daxil olan tənliyə isə **xüsusi törəməli diferensial tənlik** deyilir.

Diferensial tənliyə daxil olan ən yüksəktərtibli törəmənin tərtibinə həmin diferensial tənliyin tərtibi deyilir. n tərtibli adi diferensial tənlik ümumi şəkildə

$$\mathbf{F\,(x, y, y', y'', \dots \dots, y^{(n)}) = 0} \qquad (\mathbf{1})$$

kimi yazılır. Məslən,

$$\mathbf{y' + 4xy + 3 = 0}$$

və

$$\mathbf{3y'' + 2y' + xy + 5 = 0}$$

tənlikləri uyğun olaraq birtərtibli və ikitərtibli adi diferensial tənliklərdir.

(1) diferensial tənliyinix-in E çoxluğundakı bütün qiymətlərində ödəyən hər bir $y = \varphi(x)$ funksiyasına hə-min tənliyin E çoxluğunda həlli deyilir. Bu, o deməkdir ki, $y = \varphi(x)$ funksiyasını və onun $\varphi'(x)$, $\varphi''(x), \dots \varphi^{(n)}(x)$ törəmələrini (1) tənliyində yerinə yazdıqda həmin tənlik E çoxluğunda x-ə nəzərən eyniliyə çevrilir:

$$\mathbf{F}\left[\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}''(\mathbf{x}), \dots \dots, \boldsymbol{\varphi}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})\right] \equiv \mathbf{0}.$$

Verilmiş diferensial tənliyi ödəyən funksiya qeyri-aşkar və parametrik şəkildə də verilə bilər. Bu halda həmin funksiyaya bəzən **diferensial tənliyin inteqralı** deyilir.

Biz gələcəkdə diferensial tənliyin həlli və inteqralı istilahlarının ikisini də (heç bir fərq qoymadan) işlədəcəyik.

Məsələn, $y = e^{x}$ vəə $y = e^{-x}$ funksiyalarının hər biri bütün ədəd oxunda

$$\mathbf{y^n - y = 0} \qquad \textbf{(2)}$$

Diferensial tənliyinin həllidir:

$$(\mathbf{e^x})'' - \mathbf{e^x} \equiv \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{e^{-x}})'' - \mathbf{e^{-x}} \equiv \mathbf{0}.$$

Ümumiyyətlə, C_1 və C_2 sabitlərinin istənilən qiymətlərində

$$\mathbf{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$$

funksiyası bütün ədəd oxunda (2) tənliyinin həllidir:

$$(\mathbf{C_1 e^x + C_2 e^{-x}})'' - (\mathbf{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}) \equiv \mathbf{0}.$$

Buradan aydındır ki, verilmiş diferensial təniliyin bir neçə və hətta sonsuz sayda həlli ola bilər.

Verilmiş diferensial tənliyin bütün həllərini tapmaq və onların xassələrini öyrənmək diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas məsələsidir. Diferensial tənliklərin həlli çox zaman funksiyaların inteqrallanması vasitəsilə tapılır. Buna görə də diferensial tənliyin həllərinin tapılması əməlinə çox zaman **diferensial tənliyin inteqrallanması** deyilir.

Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin böyük elmi və praktik əhəmiyyəti vardır. Fizika, mexanika və s. bu kimi müxtəlif elm sahələrinin və texnikanın bir çox mühüm məsələlərinin həlli diferensial tənliklərə gətirilir.

Bunu iki misal üzərində izah edək.

Misal 1. Kütləsi m olan maddi nöqtə müəyyən yüksəklikdən ağırlıq qüvvəsinin təsiri ilə sərbəst düşür. Havanın müqavimətini nəzərə almadan nöqtənin hərəkət qanununu tapmalı.

Həlli. Hərəkət edən nöqtəyə təsir edən F qüvvəsi onun hərəkətinin a təcili vasitəsilə

$$\mathbf{F = ma} \qquad \mathbf{(3)}$$

kimi tapılır (Nyutonun ikinci qanunu). Nöqtəyə ancaq ağırlıq qüvvəsi təsir etdiyindən $F = P = mg$ olar. Hərəkət edən cismin təcili isə gedilən məsafənin zamana görə ikitərtibli törəməsi

$$\mathbf{a = \frac{d^2S(t)}{dt^2} = S''(t).}$$

olduğundan (3) bərabərliyini

$$\mathbf{m \cdot S''(t) = mg}$$

və ya

$$\mathbf{S''(t) = g} \qquad \mathbf{(4)}$$

kimi yazmaq olar.

(4) bərabərliyi axtarılan $S(t)$ funksiyasına nəzərən ikitərtibli diferensial tənlikdir. Yoxlamaq olar ki, bu tənliyin həlli

$$\mathbf{S(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2} \qquad \mathbf{(5)}$$

funksiyasıdır. Hərəkət edən nöqtənin başlanğıc sürəti $S'(0) = V_0$ və başlanğıc məsafəsi $S(0) = S_0$ məlum olduqda (5) funksiyasına daxil olan ixtiyari C_1 və C_2 sabitlərini tapmaq olar:

$$\mathbf{C_1 = V_0 \text{və} C_2 = S_0}$$

Bu halda maddi nöqtənin hərəkət qanunu aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mathbf{S(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0 t + S_0}.$$

21.1.2. Birtərtibli diferensial tənlikər və onların həndəsi mənası

Birtərtibli diferensial tənlik ümumi şəkildə

$$\mathbf{F(x, y, y') = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

kimi yazılır. Bu tənliyi axtarılan funksiyanın y′ törəməsinə nəzərən həll etmək mümkün olduqda

$$\mathbf{y' = f(x, y)} \qquad \textbf{(2)}$$

şəklində **törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənlik** alınır.

Törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyi, həmişə

$$\mathbf{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0} \qquad \textbf{(3)}$$

diferensial şəklində yazmaq olar. Doğrudanda, (2) tənliyini

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad f(x, y)dx - dy = 0}$$

kimi yazmaq olar. Burada M(x,y)=f(x,y) və N(x,y)=-1 qəbul etməklə (3) şəklində diferensial tənlik alınır.

Tərsinə, (3) şəklində diferensial tənliyi $N(x, y) \neq 0$ olduqda

$$\mathbf{y}' = -\frac{\mathbf{M(x,y)}}{\mathbf{N(x,y)}} \qquad \mathbf{(4)}$$

$\mathbf{M(x,y) \neq 0}$ olduqda isə

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dy}} = -\frac{\mathbf{N(x,y)}}{\mathbf{M(x,y)}} \qquad \mathbf{(5)}$$

şəklində yazmaq olar.

Beləliklə, $N(x,y) \neq 0$ olduqda (2) və (3) tənlikləri eynigüclü olar. Ümumi halda isə (3) tənliyi iki tənliklə: (4) və (5) tənlikləri ilə eynigüclüdür.

Birtərtibli diferensial tənliyin (3) diferensial şəklinin üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, orada x və y dəyişənləri eyni hüquqludur, onların hər birini arqument və ya funksiya hesab etmək olar.

Məlumdur ki, diferensial tənliyin həlli $y = \varphi(x)$ aşkar şəkildən başqa qeyri-aşkar və parametrik şəkillərdə də verilə bilər.

Əgər

$$\boldsymbol{\phi}\mathbf{(x,y) = 0} \qquad \mathbf{(6)}$$

tənliyi vasitəsilə təyin olunan qeyri-aşkar y=y(x) funksiyası (1) tənliyini ödəyirsə, yəni x-in müəyyən E çoxluğundakı bütün qiymətlərində $F[x,y(x),y'(x)] = 0$ eyniliyi ödənilirsə, onda deyilər ki, (2) tənliyinin həlli (6) tənliyi vasitəsilə qeyri-aşkar şəkildə verilmişdir.

(1) tənliyi həllinin

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}), \qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{t})$$

parametrik şəkildə verilməsi o deməkdir ki, t-nin müəyyən (α,β) intervalındakı bütün qiymətlərində

$$\mathbf{F}\left[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{t}), \frac{\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{t})}{\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{t})}\right] = \mathbf{0}$$

eyniliyi ödənilir.

21.2. İnteqral əyrisi. İzoklin əyriləri

İndi

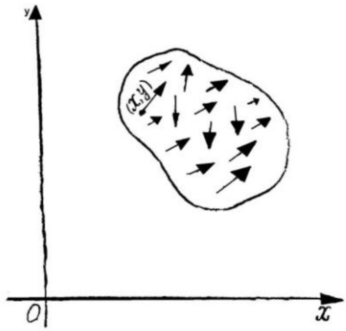
$$y` = f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

tənliyinin həndəsi mənasını izah edək. Bu məqsədlə fərz edək ki, x və y müstəvi nöqtəsinin koordinatları və $y = \varphi(x)$funksiyası (1) tənliyinin həllidir. $y = \varphi(x)$funksiyasının qrafiki müstəvi üzərində bir əyri olar. Bu əyriyə (və həm də (1) tənliyinin inteqralının qrafikinə) (1) tənliyinin **inteqral əyrisi** deyilir.

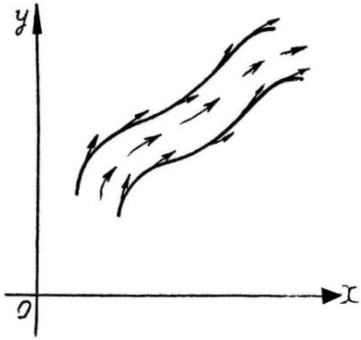
Aydındır ki, inteqral əyrisi kəsilməyəndir və onun hər bir nöqtəsində toxunanı var.

Fərz edək ki, (1) tənliyinin sağ tərəfindəki $f(x,y)$ funksiyası hər hansı σ oblastında təyin olunmuşdur və onun bütün nöqtələrində sonlu qiymətlər alır. Əgər $(x,y) \in \sigma$ nöqtəsi (1) tənliyinin inteqral əyrisi üzərində yerləşirsə, onda həmin nöqtədə inteqral əyrisinə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı y' və ya (1) bərabərliyinə görə $f(x,y)$ olar: $\mathrm{tg}\alpha = f(x,y)$. Buradan inteqral əyrisinə (x,y) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın absis oxundan meyl bucağı tapılır: $\alpha = \mathrm{arc\,tg} f(x,y)$.

İndi hər bir $(x,y) \in \sigma$ nöqtəsindən absis oxu ilə $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\, f(x,y)$ bucağı əmələ gətirən ox işarəsi çəkək. Beləliklə, (1) tənliyinin sağ tərəfi vasitəsilə σ oblastında



Şəkil 1.



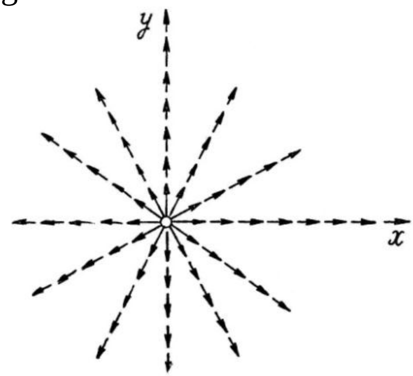
Şəkil 2.

istiqamətlər meydanı təyin olunur (şəkil 1.). (1) tənliyi göstərir ki, inteqral əyrisinin hər bir nöqtəsində toxunanın istiqaməti uyğun nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşür. İnteqral əyriləri bütün başqa əyrilərdən elə bu xassə ilə fərqlənir. Deməli, diferensial tənliyi həll etmək, həndəsi olaraq elə əyri tapmaq deməkdir ki, bu əyrinin istənilən nöqtəsində toxunanının istiqaməti uyğun nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşsün (şəkil 2.). Belə əyrilər çox olur. Onlar müəyyən əyrilər ailəsini (inteqral əyriləri ailəsini) təşkil edir. Bu ailədən müəyyən əyri ayırmaq üçün həmin əyrinin keçdiyi bir (x_0, y_0) nöqtəsi verilməlidir.

Misal 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (x \neq 0). \qquad (2)$$

Bu tənlik vasitəsilə təyin olunan istiqamətlər meydanı 3-cü şəkildə göstərilir.



Şəkil 3.

Aydındır ki, koordinat başlanğıcından çıxan vəistənilən (x,y) nöqtəsindən keçən hər bir düz xəttin istiqaməti həmin nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Bu göstərir ki, y=Cx düz xətləri (2) diferensial tənliyinin inteqral əyriləridir.

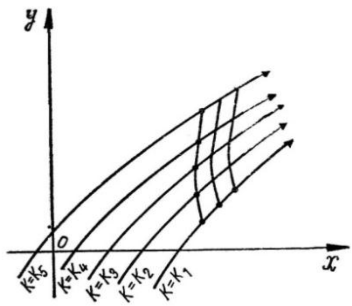
Verilmiş diferensial tənliyin inteqral əyrilərinin necə yerləşdiyini təsəvvür etmək və həm də inteqral əyrilərini təqribi qurmaq üçün izoklinlər (bərabər meyilli xətlər) üsulundan istifadə etmək olar.

İnteqral əyrilərinin eyniistiqamətli nöqtələri çoxluğuna **istiqamətlər meydanının izoklini** deyilir. (2) tənliyinin inteqral əyrisinin istiqamətini (yəni, toxunanın bucaq əmsalını) y´=k ilə təyin etsək, onda belə isitqaməti olan nöqtələr

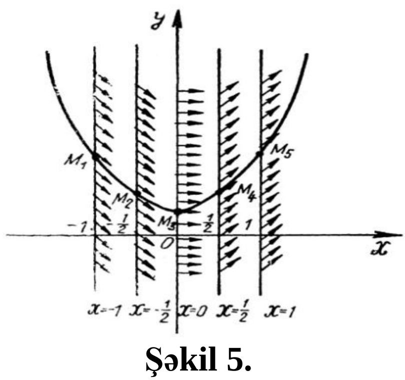
$$\mathbf{f(x, y) = k} \qquad (3)$$

şərtini ödəyən nöqtələr olar. Deməli, (3) tənliyi istiqamətlər meydanının y´=k istiqamətinə uyğun olan izoklinin tənliyidir. Burada k-ya müxtəlif qiymətlər verdikdə müxtəlif izoklinlər, yəni (1) tənliyi üçün **izoklinlər ailəsi** alınır.

Tutaq ki, k-nın bir-birinə çox yaxın $k_1, k_2, \dots \dots, k_n$ qiymətlərinə uyğun izoklinlər qurulmuşdur (şəkil 4).



Şəkil 4.



Şəkil 5.

$K \equiv k_1$ - ə uyğun olan izoklin üzərində bir neçə nöqtə götürək, bu nöqtələrdən bucaq əmsalları k_1 olan və $k = k_2$

izoklininə qədər uzadılmış düz xətt parçaları çəkək. Sonra isə bu düz xətt parçalarının $k = k_2$ izoklinini kəsdiyi nöqtələrdən bucaq əmsalları k_2 olan və $k = k_3$ izoklinini kəsənə qədər uzadılmış yeni düz xətt parçaları çəkilir.

Beləliklə, bu proses nəticəsində qurulmuş düz xətt parçaları verilmiş diferensial tənliyin inteqral əyrisini təqribi ifadə edən (və ona çox yaxın olan) sınıq xətti təşkil edir. Aydındır ki,($k_{i+1} - k_{1_i} = 1,2,3,\ldots\ldots, n-1$) fərqləri çox kiçik olduqda qurulan düz xətt parçaları çox qısa olar və onların əmələ gətirdiyi sınıq xətt tənliyin inteqral əyrisinə daha yaxın olur.

Misal 2.

$$\mathbf{y' = 2x} \qquad \mathbf{(4)}$$

Diferensial tənliyin izoklinlər ailəsinin tənliyi $2x = k$ və ya $x = \frac{k}{2}$ olar. Burada k-ya k=0, k=1, k=2,... vəs. kimi qiymətlər verdikdə tənlikləri

$$\mathbf{x = 0}, \qquad \mathbf{x = {}^{1}\!/_{2}}, \qquad \mathbf{x = -{}^{1}\!/_{2}}, \qquad \mathbf{x = 1}, \ldots$$

olan izoklinlər alınır. Bu izoklinlər ordinat oxuna paralel olan düz xətdir (şəkil 5.) Oy oxundan ibarət olan x=0 izoklininin bütün nöqtələrində meydanın istiqaməti absis oxuna paraleldir $y' = 0 = \mathrm{tg}\alpha, \alpha = 0$). $x = \frac{1}{2}$ izoklininin bütün nöqtələrində meydanın istiqaməti absis oxu ilə $\alpha = 45°$ bucaq əmələ gətirir $(y' = \mathrm{tg}\alpha = 1, \alpha = 45°)$.

$x = \frac{1}{2}$ izoklininin bütün nöqtələrində meydanın istiqaməti absis oxu ilə $\alpha = -45°(y' = \mathrm{tg}\alpha = -1, \alpha = -45°)$ bucaq əmələ gətirir və s.

Yuxarıda dediyimiz qayda ilə qurulmuş M_1 M_2 M_3 M_4 M_5... sınıq xətti (4) tənliyinin inteqral əyrisini təqribi ifadə edir. Bu sınıq xətt $y = x^2 + C$ parabolasına çox yaxındır. (4) tənliyinin həlli isə $y = x^2 + C$ funksiyalarıdır. Burada C parametrinə müxtəlif qiymətlər verməklə alınan parabolalar (4) tənliyinin inteqral əyriləri olar.

21.3.1. Koşi məsələsi və birtərtibli diferensial tənliklərin ümumi həlli

Birtərtibli diferensial tənliklərin həndəsi izahı və indiyə kimi həll olunmuş misallar göstərir ki, diferensial tənliklərin, ümumiyyətlə, çox və hətta sonsuz sayda həlli vardır. Bu həllərin qrafikləri verilmiş diferensial tənliyin inteqral əyriləri ailəsini təşkil edir.

Törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli

$$\mathbf{y' = f(x, y)} \tag{1}$$

diferensial tənliyi üçün belə bir məsələ qoyulur: bu tənliyin göstərilən həlləri içərisindən eləsini tapmalı ki, arqumentin $x = x_0$ qiymətində verilmiş $y = y_0$ qiymətini alsın. Bunu belə yazırlar:

$$\mathbf{y_{x=x_0} = y_0} \tag{2}$$

Verilmiş x_0 ədədinə arqumentin başlanğıc qiyməti, y_0 ədədinə isə axtarılan funksiyanın başlanğıc qiyməti deyilir. Ümumiyyətlə, x_0, y_0 ədədləri həllin başlanğıc qiymətləri və ya başlanğıc şərtləri adlanır.

Həllin x_0, y_0 başlanğıc qiymətlərinin verilməsi həndəsi olaraq müstəvi üzərində bir (x_0, y_0) nöqtəsinin və ya (x_0, y_0) başlanğıc nöqtəsinin verilməsi deməkdir.

(1) tənliyinin $y = \varphi(x)$ həlli (2) şərtini və ya $\varphi(x_0) = y_0$ bərabərliyini ödədildə deyirlər ki, həmin həll verilmiş x_0, y_0 başlanğıc şərtlərini (və ya başlanğıc qiymətlərini) ödəyir.

Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri (1) tənliyinin verilmiş x_0, y_0 başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin axtarılmasıdır. Buna (1) tənliyi üçün Koşi məsələsi deyilir.

21.3.2.Birtərtibli diferensial tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem

Fərz edək ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli

$$y^{`}=f(x,y) \qquad (1)$$

diferensial tənliyin

$$y_{x=x_0} = y_0 \qquad (2)$$

(2) başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Məsələnin həlli ilə əlaqədar aşağıdakı teorem vardır.

Koşi teoremi (birtərtibli diferensial tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi): f(x,y) funksiyası (Oxy) müstəvisinin σ oblastında kəsilməyəndirsə və bu oblastda kəsilməyən $\mathbf{f_y^{``}(x, y)}$ xüsusi törəməsi varsa, onda həmin oblastın hər bir $\mathbf{(x_0, y_0) \in \sigma}$nöqtəsi üçün (1) tənliyinin (2) başlanğıc şərtini ödəyən yeganə $\mathbf{y = \varphi(x)}$ həlli var.

Bu, həndəsi olaraq o deməkdir ki, teoremin şərtləri ödənildikdə σ oblastın hər bir (x_0, y_0) nöqtəsindən (1) tənliyinin yeganə inteqral əyrisi keçir.

Teoremin isbatının əsas ideyası aşağıdakı kimidir.

(1) diferensial tənliyinin (2) başlanğıc şərtini ödəyən həllinin axarılması

$$\mathbf{y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt} \qquad \textbf{(3)}$$

tənliyinin həllinə ekvivalentdir. Axtarılan y funksiyası inteqral işarəsi altında olduğu üçün (3) tənliyinə **inteqral tənlik** deyilir.

(1) diferensial tənliyinin (3) inteqral tənliyi ilə eynigüclü olması asanlıqla isbat olunur. (1) tənliyinin (2) başlanğıc şərtini ödəyən hər bir həlli (3) inteqral tənliyinin həllidir. (3) inteqral tənliyinin hər bir həlli isə (1) tənliyini və (2) başlanğıc şərtini ödəyir.

y dəyişəninin t-dən asılılığı məlum olmadığı üçün (3) tənliyinin sağ tərəfindəki inteqralı hesablamaq mümkün deyildir. Buna görə də bilavasitə inteqrallanma vasitəsilə (3) bərabərliyindən həmin tənliyin həllini tapmaq olmaz.

(3) tənliyinin təqribi və dəqiq həllini ardıcıl yaxınlaşma üsulu vasitəsilə aşağıdakı kimi tapmaq olar:

Əvvəlcə $y = y_0$ ədədi (3) tənliyinin sıfırıncı yaxınlaşması hesab olunur. Sonra isə

$$\mathbf{y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt}$$

bərabərliyi vasitəsilə tənliyin birinci yaxınlaşması tapılır. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqral altında t-nin məlum funksiyası (y_0həqiqi ədəd olub t-dən asılı deyildir) yazıldığından həmin inteqralı hesablamaq mümkündür. Tənliyin ikinci yaxınlaşması

$$\mathbf{y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)dt}$$

bərabərliyi vasitəsilə və nəhayət, n-ci yaxınlaşması

$$\mathbf{y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})dt} \qquad \mathbf{(4)}$$

bərabərliyi vasitəsilə tapılır.

Teoremin şərtləri ödənildikdə, belə qurulan $\{y_n\}(y_n = y_n(x))$ ardıcıllığı müəyyən $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)(\delta > 0)$ intervalında müntəzəm yığılandır. Ardıcıllığın

$$\mathbf{y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)}$$

limiti (3) inteqraltənliyininyeganə həllidir. Onda həmin funksiya (1) tənliyinində (2) başlanğıc şərtini ödəyən yeganə həlli olar.

Qeyd edək ki, $y_n(x)$ funksiyalarının hər birini (1) tənliyinin təqribi həlli hesab etmək olar.

Koşi teoremindən aydındırki, (1) tənliyinin sonsuz sayda həlli var. Doğrudanda, teoremin şərtləri ödənildikdə hər bir $(x_0, y_0) \in \sigma$ nöqtəsi üçün (1) tənliyinin $\varphi(x_0) = y_0$ Başlanğıc şərtini ödəyən yeganə $y = \varphi(x)$həlli var. İndi həmin oblastın başqa bir(x_0, y_1)nöqtəsini$(y_1 \neq y_0)$götürək. Teoremə görə (1) tənliyinin $\varphi_1(x_0)$=y_1 başlanğıc şərtini ödəyən $y = \varphi_1(x)$ə həlli də var. Bu həll əvvəlki, $y = \varphi(x)$ həllindən fərqlidir (çünki bir x=x_0 nöqtəsində $y = \varphi(x)$ funksiyası iki müxtəlif y_0 və y_1 qiymətlərini ala bilməz). Yeni (x_0, y_2) başlanğıc şərti $(y_2 \neq y_0, y_2 \neq y_1)$ başqa bir $y = \varphi_2(x)$ həllini təyin edər (şəkil 6.) və s.

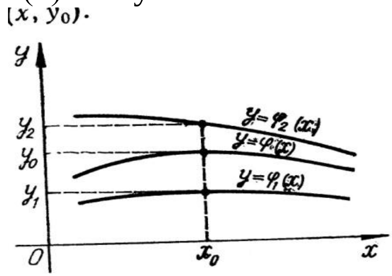
Beləliklə, x_0, y_0 başlanğıc qiymətlərinin birincisini, yəni x_0-ı, sabit hesab edərək, ikincisini, yəni y_0-ı müəyyən intervalda dəyişdirsək, onda y_0-ın hər bir qiymətinə

(1) tənliyinin bir həlli uyğun olar. Aydındır ki, bu həllər çoxluğu y_0-dan asılıdır: $y = \varphi(x, y_0)$.

Burada y_0 ədədi C (parametric ilə əvəzedildikdə (1) tənliyinin

$$\mathbf{y = \varphi(x, C)} \qquad (5)$$

həlli alınır. Buna (1) tənliyinin **ümumi həlli** deyilir.



Şəkil 6.

Tərif. (1) diferensial tənliyinin ixtiyari C parametrindən asılı olan $y = \varphi(x, C)$ həllinə o zaman həmin tənliyin ümumi həlli deyilir ki, həmin həlldən C parametrinə müəyyən C_0 qiyməti verməklə istənilən $y_{x=x_0} = y_0$başlanğıc şərti ödəyən $y = \varphi(x, C_0)$ həllini almaq mümkün olsun. Burada $(x_0,\ y_0)$ nöqtəsi (1) tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremi şərtlərinin ödənildiyi σoblastına daxildir.

(1) diferensial tənliyinin ümumi həlli

$$\mathbf{F(x, y, C) = 0} \qquad (6)$$

tənliyi vasitəsilə qeyri-aşkar şəkildə də verilə bilər. Bu halda, (6) bərabərliyinə (1) diferensial **tənliyininümumi inteqralı** deyilir.

(1) diferensial tənliyinin ümumi həlli

$$\mathbf{x = \varphi(t, C)}, \qquad \mathbf{y = \psi(t, C)}$$

parametrik şəkildə də verilə bilər.

(1) diferensial tənliyinin (5) ümumi həllindən C parametrinə müəyyən $C=C_0$ qiyməti verməklə alınan $y=\varphi(x,C_0)$ funksiyasına həmin **tənliyin xüsusi həlli** deyilir. $F(x,y,C_0)=0$ münasibəti isə **diferensial tənliyin xüsusi inteqralı** adlanır.

Həndəsi olaraq ümumi həll (və ya ümumi inteqral) bir ixtiyari sabitdən (və ya bir parametrdən) asılı olan inteqral əyriləri ailəsindən ibarətdir. Xüsusi həll (və ya xüsusi inteqral) isə müstəvinin verilmiş $(x_0,\ y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyridir.

Diferensial tənliyin (2) başlanğıc şərtini ödəyən (xüsusi) həllini və ya $(x_0,\ y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaq üçün (5) ümumi həllində $x=x_0$ və $y=y_0$ götürərək, alınan

$$\mathbf{y_0=\boldsymbol{\varphi}(x_0,C)(F(x_0,y_0,C)=0)} \qquad (\mathbf{7})$$

bərabərliyini C-yə nəzərən həll etmək lazımdır. Buradan tapılan $C=C_0$ ədədini (5) bərabərliyində (və ya (6) bərabərliyində) C əvəzinə yazmaqla (2) başlanğıc şərtini ödəyən

$$\mathbf{y=\boldsymbol{\varphi}(x,C_0)}$$

həlli (və ya $F(x,\ y,C_0)=0$ inteqralı) alınır.

Tutaq ki, (1) diferensial tənliyinin sağ tərəfi y-dən asılı deyildir, yəni həmin tənlik

$$\mathbf{y'=f(x)} \qquad (\mathbf{8})$$

şəklindədir və f(x) funksiyası hər hansı (a,b) intervalında kəsilməyəndir. Onda inteqral hesabından məlumdur ki, axtarılan y funksiyası aşağıdakı kimi tapılır:

$$\mathbf{y=\int f(x)dx+C} \qquad (\mathbf{9})$$

Bir C parametrindən asılı olan (9) bərabərliyi (8) tənliyinin ümumi həllini (və ya inteqralını) təyin edir. Ola bilər ki, (9) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqral hesablanır və nəticəsi elementar funksiyalarla ifadə olunur. Ola da bilər ki, həmin inteqralı elementar funksiyalarla ifadə etmək mümkün deyildir.

Bu halların hər ikisində (8) tənliyi həll olunmuş hesab olunur.

Ümumiyyətlə, verilmiş diferensial tənliyin həllinin tapılması bir və ya bir neçə qeyri-müəyyən inteqralın hesablanmasına gətirildikdə həmin diferensial tənlik həll olunmuş hesab olunur. Bu halda, bəzən deyirlər ki, verilmiş diferensial tənlik kvadratura ilə həll olunur.

Misal.

$$\mathbf{y' = y} \qquad (\mathbf{10})$$

Tənliyin sağ tərəfindəki $f(x, y) = y$ funksiyası üçün bütün (Oxy) müstəvisində Koşi teoreminin şərtləri ödənilir. Buna görə də müstəvinin istənilən (x_0, y_0) nöqtəsindən verilmiş tənliyin yeganə inteqeral əyrisi keçir.

Tənliyin ümumi həlli bir parametrdən asılı

$$\mathbf{y = Ce^x} \qquad (\mathbf{11})$$

funksiyasıdır. Doğrudan da, (11) funksiyası ixtiyari C üçün (10) tənliyini ödəyir:

$$(\mathbf{Ce^x})' = \mathbf{Ce^x}, \qquad \mathbf{Ce^x \equiv Ce^x}.$$

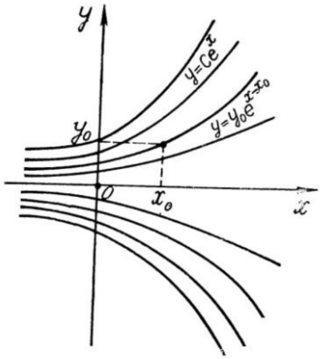
Verilmiş ixtiyari (x_0, y_0) başlanğıc qiymətləri üçün isə C parametrinin elə C_0 qiymətini tapmaq olar ki,

$$\mathbf{y = C_0 e^x}.$$

həlli

$$\mathbf{y_{x=x_0} = y_0}$$

başlanğıc şərtini ödəsin



Şəkil 7.

Bu məqsədlə C-nin C_0 qiymətini

$$\mathbf{y_0 = Ce^{x_0}}$$

bərabərliyindən tapmaq lazımdır: $\mathbf{C = C_0 = y_0 e^{-x_0}}$.

Alınan

$$\mathbf{y = y_0 e^{-x_0} \cdot e^x \text{ və ya } y = y_0 e^{x - x_0}}$$

həlli (2) başlanğıc şərtini ödəyir.

C parametrinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun inteqral əyriləri 7-ci şəkildə göstərilmişdir. $y = y_0 e^{-x_0} \cdot e^x$ həllinin qrafiki (x_0, y_0) nöqtəsindən keçir.

XXII FƏSİL. DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ HƏLL ÜSULLARI

22.1.1.Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

1. Tutaq ki, M(x) və N (y) funksiyaları uyğun olaraq (a,b) və (l,d) intervalında kəsilməyəndir. Bu halda

$$\mathbf{M(x)dx + N(y)dy = 0} \qquad (\mathbf{1})$$

tənliyinə **dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik** deyirlər. (1) tənliyində dx-in əmsalı ancaq x-dən, dy-in əmsalı ancaq y-dən asılıdır.

Fərz edək ki, y(x) funksiyası (1) tənliyinin həllidir. Onda həmin funksiya (a,b) intervalında (1) tənliyini eyniliyə çevirir:

$$\mathbf{M(x)dx + Ny(x)dy(x) = 0} \qquad (\mathbf{2})$$

Bu eyniliyi inteqralladıqda

$$\int \mathbf{M(x)dx} + \int \mathbf{N(y)dy = C} \qquad (\mathbf{3})$$

münasibəti alınır; burada C ixtiyari sabitdir.

Deməli, (1) tənliyinin hər bir həlli (3) tənliyini də ödəyir. Tərsinə, əgər y(x) funksiyası (3) tənliyini ödəyirsə, onda həmin eyniliyi diferensialladıqda (2) münasibəti alınır. Bu da həmin funksiyanın (1) tənliyini ödədiyini göstərir.

Buradan aydındır ki, (3) tənliyi (və ya bərabərliyi) (1) tənliyinin bütün həllərini təyin edir. Buna görə də (3) münasibəti (1) tənliyinin ümumi inteqralı olar. Ola bilər ki, (3) bərabərliyində iştirak edən inteqralların biri və ya hər ikisi elementar funksiyalarla ifadə oluna bilmir. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, bu halda da (1) diferensial tənliyi həll olunmuş hesab olunur və (3) bərabərliyi onun ümumi inteqralını (həllini) təyin edir. $\mathrm{N(y)} \neq 0$olduqda (3) bərabərliyindən (1) tənliyinin y həlli x-in qeyri-aşkar funksiyası kimi təyin oluna bilər.

(1) tənliyinin ümumi inteqralını müəyyən inteqral vasitəsilə

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{M(x)dx} + \int_{y_0}^{y} \mathbf{N(y)dy = C} \qquad (4)$$

şəklində yazmaq olar. Buradan (1) tənliyinin $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{M(x)dx} + \int_{y_0}^{y} \mathbf{N(y)dy = 0}$$

kimi tapılır.

Misal 1. $\mathbf{e^x dx + ydy = 0}$ tənliyini həll etməli.

Burada $M(x) = e^x$ və $N(y) = y$ funksiyalarının hər ikisi $(-\infty, \infty)$ intervalında kəsilməzdir. Buna görə də həmin tənliyin ümumihəlli (3) bərabərliyindən

$$\int \mathbf{e^x dx} + \int \mathbf{ydy = C} \text{ və ya } \mathbf{e^x + \frac{y^2}{2} = C}$$

şəklində tapılır.

2.Fərz edək ki, $M_i(x)$ və $N_i(y)$ $(i = 1{,}2)$ funksiyaları uyğun olaraq (a,b) və (l,d) intervalında kəsilməyəndir. Bu halda

$$\mathbf{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0} \qquad (5)$$

tənliyinə **dəyişənlərinə ayrılan tənlik** deyilir. (5) tənliyi dəyişənlərinə ayrılmış tənliyə gətirilir. Bu məqsədlə həmin tənliyin hər iki tərəfini $N_1(y)\ M_2(x) \neq 0$ hasilinə bölmək lazımdır:

$$\mathbf{\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0}$$

Dəyişənlərinə ayrılmış bu tənliyin ümumi inteqralı

$$\int \frac{\mathbf{M_1(x)}}{\mathbf{M_2(x)}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{N_2(y)}}{\mathbf{N_1(y)}}\mathbf{dy} = \mathbf{C} \qquad (\mathbf{6})$$

olar. (5) tənliyinin (6) ümumi inteqralından alına bilməyən başqa həlləri də ola bilər. Belə həllər $N_1(y)M_2(x) = 0$ bərabərlyinin ödənildiyi nöqtələr içərisində olar.

Tutaq ki, $y = y_1$ ədədi $N_1(y) = 0$tənliyinin həllidir: $N_1(y_1) = 0$ $(l < y_1 < d)$. $dy_1 = 0$ və $N_1(y_1) = 0$ olmasından aydındır ki, $y = y_1$funksiyası (5) tənliyinin həllidir.

$M_2(x_1) = 0$ $(a < x_1 < b)$ bərabərliyi ödənildikdə isə $x = x_1$ funksiyası (5) tənliyinin həlli olar.

Misal 2. $\mathbf{xydx + (1 + x^2)dy = 0}$ tənliyini həll etməli.

Bu tənliyin hər iki tərəfini $y(1 + x^2) \neq 0$ hasilinə böldükdə dəyişənlərinə ayrılmış

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1 + x^2}}\mathbf{dx} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

tənliyi alınır. Bunun ümumi inteqralı

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln(1 + x^2) + ln|y| = ln\,C}, \quad \mathbf{C} > 0$$

(burada C sabiti ln C ilə işarə olunur),

$$\mathbf{\sqrt{1 + x^2}|y| = C}$$

olar.

Misal 3. $\mathbf{e^y sinxdx + xdy = 0}$ tənliyinin ümumi inteqralı aşağıdakı kimitapılar:

$$\frac{\mathbf{sinx}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} + \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{e^y}} = \mathbf{0},$$

$$\int \frac{\mathbf{sinx}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{e^y}} = \mathbf{C},$$

$$\int \frac{\mathbf{sinx}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} - \mathbf{e^{-y}} = \mathbf{C}.$$

22.1.2. Bircinsli diferensial tənliklər

Bircinsli tənliklərə gətirilən bir neçə halı nəzərdən keçirək . Əvvəlcə bircinsli funksiya haqqında məlumat verək.

1. Tutaq ki, müəyyən σ oblastında təyin olunmuş ikidəyişənli $f(x,y)$ funksiyası verilmişdir. İstənilən $(x,y) \in \sigma$ nöqtəsi və $(tx,ty) \in \sigma$ şərtini ödəyən hər bir t ədədi üçün

$$\mathbf{f(tx,ty) = t^{\alpha}\, f(x,y)} \qquad (\mathbf{1})$$

eyniliyi ödənildikdə f(x,y) funksiyasına σ oblastında α dərəcəli **bircinsli funksiya** deyilir. Məsələn,

$$\mathbf{f_1(x,y) = xy + x^2}, \qquad \mathbf{f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}},$$

$$\mathbf{f_3(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}}.$$

funksiyaları uyğun olaraq 2, -1 və 0 dərəcəli bircinsli funksiyalardır:

$$f_1(tx,ty) = tx \cdot ty + (tx)^2 = t^2(xy + x^2) = t^2 f_1(x,y),$$

$$f_2(tx,ty) = \frac{1}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = \frac{1}{t\sqrt{x^2+y^2}} = t^{-1} f_2(x,y),$$

$$f_3(tx,ty) = \frac{tx+ty}{\sqrt{tx \cdot ty}} = \frac{t(x+y)}{t\sqrt{xy}} = t^0 f_3(x,y).$$

2. f (x,y) funksiyası x və y dəyişənlərinə nəzərən sıfır dərəcəli bircinsli funksiya olduqda

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad (2)$$

tənliyinə bircinsli diferensial tənlik deyilir.

Bu tənliyi həll etmək üçün f (x,y) funksiyasının sıfır dərəcəli bircinsli funksiya olmasını, yəni həmin funksiyanın

$$\mathbf{f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)} \qquad (3)$$

bərabərliyini ödəməsini nəzərə alaq. (3) bərabərliyində $t = \frac{1}{x}$qəbul etsək,

$$\mathbf{f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)}$$

olar. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ ifadəsi $\frac{y}{x}$ nisbətinin müəyyən funksiyasıdır. Həmin funksiyanı $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ilə işarə etdikdə, (2) tənliyi

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (4)$$

şəklində yazılır. (2) və (4) tənliklərinin ekvivalent olması üçün $x \neq 0$ hesab etmək lazımdır.

(4) tənliyi $\frac{y}{x} = z$ əvəzləməsi vasitəsilə dəyişənlərinə ayrılan tənliyə gətirilir.

Doğrudan da,

$$\mathbf{y = xz, \qquad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}}$$

olar və (4) tənliyi

$$\mathbf{z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z), \qquad x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z}$$

kimi yazılar. Buradan

$$\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}, \quad \varphi(z)-z\neq 0,$$

$$\ln C+\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\ln x, \qquad x=Ce^{\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}}$$

alınır. $\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\psi(z)$ qəbul etsək, (4) tənliyinin ümumi inteqralı

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{5}$$

şəklində yazılar.

Qeyd. Xüsusi halda, $\varphi(z)=z$ olduqda (4) tənliyi dəyişənlərinə ayrılan $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ tənliyinə çevrilir.Bu tənliyin ümumi həlli y=Cx $(x\neq 0)$funksiyasıdır.Əgər $\varphi(z)-z\neq$ $\neq 0$ ödənilirsə, lakin müəyyən $z=z_1$ qiymətində $\varphi(z_1)-z_1=0$ bərabərliyi doğrudursa, onda $z=z_1$ funksiyası $xdz=[\varphi(z)-z]\,dx$ tənliyinin həlli olar. Buna (4) tənliyinin $y=z_1x$ həlli uyğundur. Həmin həlli, bəzən (5) ümumi inteqralından (həllindən) almaq mümkün olmur.

Misal 1. Bircinsli $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ tənliyini həll etməli. $\frac{y}{x}=z$ və ya $y=xz$ əvəzləməsini aparsaq, $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ olar. Onda

$$z+x\frac{dz}{dx}=z+z^2, \qquad x\frac{dz}{dx}=z^2$$

(dəyişənlərinə ayrılan tənlik),

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z^2}, \qquad \ln x=\ln C-\frac{1}{z}, \qquad x=Ce^{-\frac{1}{z}},$$

$$x=Ce^{-\frac{x}{y}}$$

olar. Sonuncu ifadə verilmiş tənliyinümumi inteqralıdır.

3. M (x,y) və N (x,y) funksiyaları eyni dərəcəli bircinsili funksiyalar olduqda

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad (6)$$

tənliyi də bircinsli tənlik adlanır. Bu tənliyi (2) bircinsli tənlik şəklinə gətirmək olur:

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = -\frac{\mathbf{M(x,y)}}{\mathbf{N(x,y)}} = \mathbf{f(x,y)}, \qquad (\mathbf{N(x,y) \neq 0}).$$

Qeyd edək ki, bircinsli (6) tənliyini (2) şəklinə gətirmədən də həll etmək olar. Bu məqsədlə y=xz (dy=xdz+zdx) əvəzləməsindən istifadə etmək lazımdır.

Misal 2. Bircinsli $\mathbf{(x + y)dx - (y - x)dy = 0}$ tənliyini həll etməli.

y=xz əvəzləməsini aparsaq, dy=xdz + zdx olar. Onda verilmiş tənlik

$$\mathbf{(x + xz)dx - (xz - x)(xdz + zdx) = 0}$$

və ya

$$\mathbf{(1 + 2z - z^2)dx + x(1 - z)dz = 0}$$

şəklində yazılar. Buradan tənliyin ümumi inteqralı alınır:

$$\frac{\mathbf{1 - z}}{\mathbf{1 + 2z - z^2}}\mathbf{dz} + \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln|1 + 2z - z^2| + ln|x| = lnC},$$

$$\mathbf{(1 + 2z - z^2)x^2 = C^2}, \qquad \mathbf{x^2 + 2yx - y^2 = C^2}.$$

4. f müəyyən kəsilməyən funksiya olduqda

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{ax + by + c}}{\mathbf{a_1x + b_1y + c_1}}\right) \qquad (7)$$

şəklində tənliklər bircinsli tənliyə gətirilir. $c=c_1=0$ olduqda (7) tənliyinin bircinsli olması aydındır. Buna görə də c və

c_1 ədədlərinin heç olmasa birinin sıfırdan fərqli olduğu hala baxaq.

Tutaq ki, $ab_1 - a_1 b \neq 0$. Bu halda (7) tənliyində

$$\mathbf{x = \xi + \alpha, \qquad by = \eta + \beta}$$

əvəzləməsini aparmaq lazımdır:

$$\frac{\mathbf{d\eta}}{\mathbf{d\xi}} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}}{\mathbf{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}}\right) \qquad (\mathbf{8})$$

Əgər α və β ədədlərini

$$\begin{cases} \mathbf{a\alpha + b\beta + c = 0,} \\ \mathbf{a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0} \end{cases}$$

sisteminin həlli kimi təyin etsək, onda (8) tənliyi bircinsli

$$\frac{\mathbf{d\eta}}{\mathbf{d\xi}} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{a\xi + b\eta}}{\mathbf{a_1\xi + b_1\eta}}\right)$$

tənliyinə çevrilər.

$ab_1 - a_1 b = 0$ olduqda isə $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ münasibətindən$a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b$ alınır. Bu qiymətləri (7) tənliyində yerinə yazsaq və z=ax+by əvəzləməsini aparsaq, onda (7) tənliyi dəyişənlərinə ayrılan tənliyə çevrilər.

22.2. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər

Axtarılan funksiya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə birtərtibli xətti diferensial tənlik deyilir. Birtərtibli xətti diferensial tənliyi

$$\mathbf{y' + p(x)y = f(x)} \qquad \mathbf{(1)}$$

şəklində yazmaq olar.$f(x) \equiv 0$ olduqda alınan

$$\mathbf{y' + p(x)y = 0} \qquad (\mathbf{2})$$

tənliyinə (1) tənliyinə uyğun olan **xətti bircinsli tənlik** deyilir. $f(x) \neq 0$olduqda (1) tənliyi **xətti bircinsli olmayan diferensial tənlik** adlanır.

Fərz edək ki, p(x) və f(x) funksiyaları müəyyən (a,b) intervalında kəsilməzdir. (1) tənliyini aşağıdakı kimi yazaq.

$$\mathbf{y' = -p(x)y + f(x).}$$

Aydındır ki, bu halda $f(x, y) = -p(x)y + f(x)$ funksiyası $\sigma = (a < x < b, -\infty < y < \infty)$ oblastında kəsilməzdir və həmin oblastda kəsilməyən $f_y^{`}(x, y) = -p(x)$ xüsusi törəməsi var. Buna görə də diferensial tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi teoreminə görə (1) tənliyinin istənilən x_0, y_0 (($x_0, y_0) \in \sigma$) başlanğıc şərtini ödəyən yeganə həlli var:

$\mathbf{y' + p(x)y = 0}$ **tənliyinin həlli.** Bu tənlik dəyişənlərinə ayrılır.

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.}$$

Axırıncı tənliyi inteqrallasaq,

$$\mathbf{\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|}$$

$$\mathbf{y = Ce^{-\int p(x)dx}} \qquad (3)$$

alarıq. Bu (2) tənliyinin ümumi həllidir.

$\mathbf{y` + p(x) = f(x)}$ **tənliyinin həlli.** Bu tənliyi müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Burada həmin tənlik sabitin variasiyası üsulu ilə həll edilir.

(1) tənliyinə uyğun olan (2) xətti bircinsli tənliyinin (3) ümumi həllindəki ixtiyari C sabitini x-dən asılı elə C=C(x) funksiyası hesab edək ki, alınan

$$\mathbf{y = C(x)e^{-\int p(x)dx}} \qquad (4)$$

funksiyası (1) tənliyinin həlli olsun. Onda

$$\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right]' + p(x)\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right] = f(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} +$$

$$+C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Buradan naməlum C(x) funksiyası tapılır:

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Bu qiyməti (4) bərabərliyində yerinə yazdıqda (1) tənlitinin ümumi həlli alınır:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \qquad (5)$$

Aydındır ki, (1) tənliyinin (5) ümumi həlli inteqrallama (kvadratura) vasitəsilə tapılır və iki toplananın cəmindən ibarətdir: birinci toplanan (2) bircinsli tənliyinin ümumi həlli

$$Ce^{-\int p(x)dx}$$

ikinci toplanan isə (1) tənliyinin bir xüsusi həlli

$$e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

(bu xüsusi həll (5) ümumi həllindən C=0 olduqda alınır)

Misal. $y' + \frac{y}{x} = x^2$ xətti tənliyini həll etməli.

Bu tənliyə uyğun olan bircinsli

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

tənliyinin ümumi həlli

$$y = \frac{C}{x}$$

olar. İndi elə C(x) funksiyası tapaq ki,

$$y = \frac{C(x)}{x} \qquad (6)$$

funksiyası verilmiş tənliyin həlli olsun. Bu məqsədlə (6) funksiyasını verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2,$$

$$C'(x) = x^3$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + C_1.$$

Buradan aydındır ki, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y = \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x}.$$

olar.

22.3.1. Bernulli tənliyi

Tutaq ki, p(x) və f(x) hər hansı (a,b) intervalında kəsilməyən funksiyalar və m istənilən həqiqi ədəddir. Bu halda

$$y' + p(x)y = f(x)y^m \qquad (1)$$

şəklində tənliyə **Bernulli tənliyi** deyilir. m=0 və m=1 olduqda (1) tənliyi uyğun olaraq xətti və dəyişənlərinə ayrılan tənliyə çevrilir.

Bernulli tənliyi $m \neq 1$ olduqda əvəzləmə vasitəsilə xətti tənliyə gətirilir. Buna inanmaq üçün (1) tənliyinin hər iki tərəfini $y^m (y \neq 0)$ifadəsinə bölək və alınan

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = f(x)$$

tənliyində $y^{1-m} = z$ əvəzləməsini aparaq. Onda

$$(1-m)y^{-m} \cdot y = z, \qquad y^{-m} \cdot y' = \frac{z'}{1-m}$$

və z dəyişəninə nəzərən

$$z' + (1-m)p(x)z = f(x)(1-m) \qquad (2)$$

xətti tənliyi alınır. Bu xətti tənliyin ümumi həlli

$$\mathbf{z = e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[C + \int(1-m)f(x)e^{\int(1-m)p(x)dx}dx\right]}$$

olar. Buradan $y = z^{\frac{1}{1-m}}$ olduğundan (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı şəkildə alınır: $\mathbf{y = \left\{e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[C + \int(1-m)f(x)e^{\int(1-m)p(x)dxdx}\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}}$ **(3)**

Aydındır ki, y=0 funksiyası $m > 0$ olduqda Bernulli tənliyinin həllidir. Bu həll $m > 1$ olduqda (3) ümumi həllindən $C = \infty(C \to \infty)$ götürməklə alınır,$0 < m < 1$ olduqda isə bu həll ümumi həldən C sabitinin heç bir qiymətində alınmır.

Misal.$\mathbf{y' + xy = xy^3}$ $(\mathbf{m = 3})$ tənliyini həll etməli.

Tənliyin hər iki tərəfini y^3 funksiyasına bölərək, $y^{-2} =$ zəvəzləməsini apardıqda

$$\mathbf{\frac{z'}{-2} + xz = x, \qquad z' - 2xz = -2x}$$

xətti tənliyi alınır. Bu tənliyin ümumi həlli

$$\mathbf{z = Ce^{x^2} + 1}$$

funksiyasıdır. Buradan verilmiş tənliyin

$$\mathbf{y^{-2} = Ce^{x^2} + 1}$$

ümumi həlli alınır.

22.3.2. Tam diferensiallı tənliklər

Aşağıdakı hallara baxaq.

1. Tutaq ki, M (x,y) və N (x,y) funksiyaları birrabitəli σ oblastında təyin olunmuş kəsilməyən funksiyalardır. Diferensial şəklində yazılmış

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad (\mathbf{1})$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı ikidəyişənli U (x,y) funksiyasının tam diferensialı olarsa, yəni

$$\mathbf{dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy} \qquad \mathbf{(2)}$$

ödənilirsə, onda həmin tənliyə σ oblastında **tam diferensiallı tənlik** deyilir.

(1) tənliyi tam diferensiallı tənlik olduqda onu

$$\mathbf{dU(x,y) = 0}$$

şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini inteqrallamaqla (1) tənliyinin ümumi inteqralı tapılır:

$$\mathbf{U(x,y) = C}.$$

Misal 1. $\mathbf{\left(2x + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy = 0}$ tənliyinin sol tərəfi $\mathrm{U\,(x,y) = x^2 + ylnx}$ tərəfi funksiyanın tam diferensialıdır. Yəni

$$\mathbf{dU(x,y) = \left(2x + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy}.$$

Buna görə də verilmiş tənliyin ümumi inteqralı

$$\mathbf{x^2 + y \ln x = C}$$

olar.

Buradan aydındır ki, tam diferensiallı tənliklər kvadratura ilə çox asan həll olunur. Ona görə də verilmiş diferensial tənliyin tam diferensiallı olmasını bilməyin böyük əhəmiyyəti vardır. Bunu necə bilmək olar?

2. **Teorem. Tutaq ki, M (x,y) və N (x,y)funksiyaları birrabitəli σ oblastında təyin olumuşdur, kəsilməyəndir və kəsilməyən $\mathbf{\frac{\partial M\,(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial N\,(x,y)}{\partial x}}$ xüsusi törəmələri var. Bu halda (1) tənliyinin σ oblastında tam diferensiallı tənlik olması üçün həmin oblastın bütün nöqtələrində**

$$\mathbf{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}} \qquad \mathbf{(3)}$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtdir.

Şərtin zəruriliyi. Tutaq ki, (1) tənliyi tam diferensiallanandır və (2) bərabərliyi ödənilir. Onda σ oblastının bütün nöqtələrində

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

olar. Buradan

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

eynilikləri alınır. Bu bərabərliklərin birincisini y-ə nəzərən, ikincisini isə x-ə nəzərən diferensialladıqda

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

münasibətləri, buradan isə ikitərtibli qarışıq törəmələrin bərabərliyi haqqında Şvars teoreminə əsasən (3) bərabərliyi alınır.

Şərtin kafiliyi. Tutaq ki, σ oblastının bütün nöqtələrində (3) bərabərliyi ödənilir. Onda elə U(x,y) funksiyası tapmaq olar ki,

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\qquad (4)$$

bərabərlikləri σ oblastında ödənilsin. Bu funksiyanı tapmaq üçün σ oblastının istənilən (x_0, y_0) nöqtəsini götürək və (4) bərabərliklərinin birincisindən U (x,y) funksiyasını tapaq:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)\qquad (5)$$

(5) bərabərliyində inteqrallama x-ə nəzərən aparıldığı üçün ixtiyari C sabiti əvəzinə diferensiallanan ixtiyari

$\varphi(y)$ funksiyası götürülmüşdür. Indi bu $\varphi(y)$ funksiyasını elə seçək ki, (5) bərabəliyi ilə təyin olunan U(x,y) funksiyası (4) bərabərliklərinin ikincisini də ödəsin. Onda

$$\frac{\mathbf{U(x,y)}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{N(x,y)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \int_{x_0}^{x} \mathbf{M(x,y)dx} + \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{y})$$

olar. Burada

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \int_{x_0}^{x} \mathbf{M(x,y)dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \mathbf{M(x,y)}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{dx}$$

bərabərliyini və (3) şərtinə görə

$$\frac{\partial \mathbf{M\ (x,y)}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{N(x,y)}}{\partial \mathbf{x}}$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$\mathbf{N(x,y)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \mathbf{N(x,y)}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{dx} + \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{y})$$

və ya

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{y}) = \mathbf{N(x_0,y)}$$

münasibəti alınır. Sonuncu bərabərlikdən axtarılan $\varphi(y)$ funksiyası tapılır:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) = \int_{y_0}^{y} \mathbf{N(x_0,y)dy} + \mathbf{C}$$

(C ixtiyari sabitdir). $\varphi(y)$ funksiyasının bu qiymətini (5) bərabərliyində yerinə yazsaq, tələb olunan U(x,y) funksiyasını alarıq:

$$\mathbf{U(x,y)} = \int_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{M(x,y)dx}$$

$$+ \int_{\mathbf{y_0}}^{\mathbf{y}} \mathbf{N(x_0,y)dy + C} \qquad (6)$$

Aydındır ki, (6) bərabərliyi ilə təyin olunan U(x,y) funksiyası (4) bərabərlikərinin ikisini də ödəyir, yəni (1) tənliyi tam diferensiallı tənlikdir.

Beləliklə, şərtin kafiliyi isbat olunarkən, həm də axtarılan U (x,y) funksiyasının tapılma qaydası (yəni (6) düsturu) göstərildi. Aparılan mühakimədən aydındır ki, tam diferensiallı tənliyin ümumi inteqralı

$$\int_{x_o}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x_o\,,y)dy = C \quad (7)$$

olar.

Misal 2. $\mathbf{(3x^2 + y)dx + (x + 4y^3)dy = 0}$ tənliyini həll etməli. Bu tənlik üçün

$$\mathbf{M(x,y) = 3x^2 + y \text{ və } N(x,y) = x + 4y^3}$$

olduğundan bütün (Oxy) müstəvisində teoremin

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

şərti ödənilir. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Bu tənliyin ümumi inteqralı (7) düsturu ilə tapılır:

$$\int_{0}^{x} (3x^2 + y)dx + \int_{0}^{y} 4y^3 dy = C, \qquad (x_0 = y_0 = 0),$$

$$x^3 + yx + y^4 = C.$$

3. (1) tənliyi tam diferensiallı olmadıqda onu bəzən tam diferensiallı tənliyə gətirmək mümkün olur. Bu məq-

sədlə (1) tənliyinin hər iki tərəfini elə $\mu = \mu(x, y)$ funksiyasına vururlar ki, alınan

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \qquad (8)$$

tənliyi tam diferensiallı olsun. Belə $\mu(x, y)$ funksiyasına (1) tənliyinin **inteqrallayıcı vuruğu** deyilir.

Verilmiş tənliyin inteqrallayıcı vuruğunu necə tapırlar?

$\mu(x, y)$ funksiyası (1) tənliyinin inteqrallayıcı vuruğu olması üçün (8) tənliyi tam diferensiallı olmalıdır. Bunun üçün isə

$$\frac{\partial(\mu, M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu, N)}{\partial x}$$

və ya

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (9)$$

şərti ödənilməlidir. (9) tənliyinə axtarılan $\mu(x, y)$ funksiyasının xüsusi törəmələri daxildir.

Deməli, (1) tənliyinin $\mu(x, y)$ inteqrallıyıcı vurğunu tapmaq üçün (9) xüsusi törəməli diferensial tənliyini həll etmək lazımdır. Bu məsələ, ümumi halda, (1) tənliyini inteqrallamaq məsələsindən çətindir.

Bir sıra xüsusi hallarda inteqrallayıcı vuruğu tapmaq mümkün olur. Burada $\mu = (x, y)$ funksiyasının x,y dəyişənlərinin ancaq birindən asılı olduqda bu halda tapılma qaydası verilir.

$\mu = \mu(x)$. Bu halda (9) tənliyi

$$N\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

və ya

$$\frac{\mathbf{d\mu(x)}}{\boldsymbol{\mu}\mathbf{(x)}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}}{\mathbf{N}}\mathbf{dx}$$

şəklində yazılır. Buradan inteqrallayıcı vuruq tapılır:

$$\mathbf{ln\mu(x)} = \int \frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}}{\mathbf{N}}\mathbf{dx + C}$$

və ya

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{(x)} = \mathbf{e}^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mathbf{dx}}, \mathbf{(C = 0)} \qquad \mathbf{(10)}$$

Aydındır ki, bu halda $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ nisbəti y-dən asılı deyildir.

$\mu = \mu(y)$. Bu halda (9) tənliyi

$$\mathbf{M}\frac{\partial \boldsymbol{\mu}\mathbf{(y)}}{\partial \mathbf{y}} = -\boldsymbol{\mu}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

və ya

$$\frac{\mathbf{d\mu(y)}}{\boldsymbol{\mu}\mathbf{(y)}} = -\frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}}{\mathbf{M}}\mathbf{dy}$$

şəklində yazılar. Buradan $\mu(y)$ inteqrallayıcı vuruğu tapılır:

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{(y)} = \mathbf{e}^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}\mathbf{dy}} \qquad \mathbf{(11)}$$

Bu halda $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ nisbəti x-dən asılı olmur.

Misal 3. $\mathbf{3(1 + y^2)dx + 2xydy = 0}$ tənliyini həll etməli.

Burada $M(x, y) = 3(1 + y^2)$ və $N(x, y) = 2xy$ olduğundan

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}-\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{6y}-\mathbf{2y}=\mathbf{4y}$$

olar və aydındır ki,

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}-\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}}}{\mathbf{N}}=\frac{\mathbf{4y}}{\mathbf{2xy}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}}$$

nisbəti y-dən asılı deyildir. Deməli, verilmiş tənliyin inteqrallayıcı vuruğu ancaq x-dən asılıdır: $\mu = \mu(x)$. Onda (10) düsturuna əsasən inteqrallayıcı vuruğu tapmaq olar:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\int \frac{2}{x}dx}=\mathbf{e}^{\mathbf{2lnx}}=\mathbf{e}^{\mathbf{lnx^2}}=\mathbf{x^2}.$$

tənliyin hər iki tərəfini tapdığımız $\mu = x^2$ funksiyasına vurduqda tam diferensiallı tənlik alınır:

$$\mathbf{3x^2(1+y^2)dx+2x^3ydy=0}.$$

Bu tənliyin ümumi inteqralı (7) düsturu ilə tapılır:

$$\int_{0}^{x} \mathbf{3x^2\,(1+y^2)dx}+\int_{0}^{y}\mathbf{0\cdot dy}=\mathbf{C(x_0=y_0=0)},$$

$$\mathbf{x^3(1+y^2)=C}.$$

22.3.3.Ikitərtibli diferensial tənliklər

Yüksək tərtib törəməyə nəzərən həll edilmiş ikitərtibli diferensial tənliyin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$y''=f(x,y,y)\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

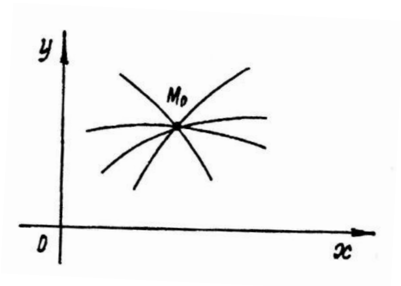
Bu tənliyin y= φ (x,C_1,C_2) ümumi həllində iki sərbəst sabit iştirak edir. Həndəsi olaraq ümumi həll iki parametrdən asılı inteqral əyriləri ailəsini təsvir edir. Ümumiyyətlə, Oxy müstəvisinin hər bir $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsindən inteqral əyriləri dəstəsi keçir (şəkil 1). Ona görə də bu inteqral əyriləri ailəsindən konkret bir əyrini seçmək üçün onun keçdiyi nöqtə ilə yanaşı həmin nöqtədən keçdiyi istiqamət də göstərilməlidir. Bu o deməkdir ki, (1) tənliyinin konkret bir həllini ümumi həldən

$$y(x_0) = y_0 \text{ və } y'(x_0) = y_1 \qquad \textbf{(2)}$$

başlanğıc şərtləri daxilində almaq olar. Başqa sözlə,

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0, \\ \varphi_x'(x_0, C_1, C_2) = y_1 \end{cases}$$

tənliklər sistemini C_1 və C_2 –yə nəzərən həll edib, verilən tənliyin bir xüsusi həllini tapa bilərik.



Şəkil 1

(1) tənliyinin (2) başlanğıc şərtlərini ödəyən y=y(x) həllinin tapılması məsələsi həmin tənlik üçün Koşi məsələsi adlanır.

22.3.4. Ikitərtibli diferensial tənliklərin inteqrallanan bəzi növləri.

Ümumi halda ikitərtibli diferensial tənliyin dəqiq həllini tapmaq mümkün deyil. Bu paraqrafda biz inteqral-lana bilən müəyyən tənliklərə baxacağıq.

I.Tutaq ki,

$$y'' = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

şəklində tənlik verilmişdir. Bu tənliyi inteqrallasaq alarıq:

$$y' = \int f(x)dx = F_1(x) + C_1 . \qquad \textbf{(2)}$$

Burada $F_1(x)$ funksiyası f(x)-in hər hansı bir ibtidai funksiyası, C_1 isə ixtiyari sabitdir. Tutaq ki, $F_2(x)$ funksiyası da öz növbəsində $F_1(x)$-in müəyyən bir ibtidai funksiyasıdır. Onda (2) bərabərliyini inteqrallayıb (1) tənliyinin aşağıdakı şəkildə ümumi həllini taparıq:

$$y = F_2(x) + C_1 x + C_2 .$$

II.Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$y'' = f(y). \qquad \textbf{(3)}$$

Onu həll etmək üçün

$$y' = p$$

əvəzləməsi aparaq. Burada p-yə y-dən asılı bir funksiya kimi baxsaq,alarıq:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Bu halda (3) tənliyi

$$p\frac{dp}{dy} = f(y)$$

şəklinə düşər. Onu dəyişənlərinə ayıraq: pdp=f(y)dy. Bu tənliyi inteqrallayıb

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)dy$$

və ya

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy}$$

alırıq. Burada $p = \dfrac{dy}{dx}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy}$$

tənliyinə gələrik. Bu tənliyi də dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}} = \pm x \qquad \textbf{(4)}$$

alarıq. Burada qeyri-aşkar şəkildə iki sərbəst sabit iştirak edir. (4) düsturunu yadda saxlamaq əvəzinə (3) tənliyinin yuxarıda verilən həll üsulunu öyrənmək daha məqsədə uyğundur.

III. İndi də

$$y'' = f(y') \qquad \textbf{(5)}$$

şəklində olan tənliyə baxaq. Onu həll etmək üçün $y' = p$ əvəzləməsi aparaq. Bu halda $y'' = \frac{dp}{dx}$ olduğundan verilən tənlik

$$\frac{dp}{dx} = f(p)$$

şəklinə düşər. Onu dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x$$

tənliyi alınar. Bu tənlikdən $p=\dfrac{dy}{dx}$ - i tapıb təkrar inteqrallama ilə (5) tənliyinin ümumi həllini tapa bilərik.

Misal 1. Tənliyin ümumi həllini tapın:

$$y''=x-\cos x.$$

Həlli. Verilən tənliyi inteqrallayıb

$$y'=\frac{x^2}{2}-\sin x+C_1$$

tənliyini alırıq. Onu yenidən inteqrallayaraq verilən tənliyin ümumi həllini alarıq:

$$y=\frac{x^3}{6}+\cos x+C_1x+C_2.$$

Misal 2. Tənliyin ümumi həllini tapın: $y''=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

Həlli. Verilən tənliyi həll etmək üçün $y'=p$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p.$$

Bunu tənlikdə yerinə yazsaq

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

tənliyini alarıq. Onu dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaraq:

$$pdp=\frac{dy}{4\sqrt{y}},\ \frac{p^2}{2}=\frac{1}{4}(2\sqrt{y}+2C_1)\,.$$

Buradan

$$p=\pm\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$$

və ya

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$$

tənliyinə gəlirik. Bu tənliyi də öz növbəsində dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaq:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\pm\left(x+C_2\right).$$

Sol tərəfdəki inteqralı hesablamaq üçün $\sqrt{y}+C_1=t$ əvəzləməsi aparaq. Bu halda $y=(t-C_1)^2$, $dy=2(t-C_1)dt$ və

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = \int \frac{2(t-C_1)}{\sqrt{t}}dt = 2\int \sqrt{t}dt - 2C_1\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} - 4C_1 t^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{t}(t-3C_1) = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{y}+C_1}(\sqrt{y}-2C_1)$$

Beləliklə,

$$x = \pm\frac{4}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1} - C_2.$$

Misal 3. tənliyin ümumi həllini tapın:

$$(y'')^2 = y'.$$

Həlli. $y' = p$ əvəzləməsi aparaq. Onda verilən tənlik $\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = p$ və ya

$$\frac{dp}{dx} = \pm\sqrt{p}$$

şəklinə gələr. Onu dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq

$$\int \frac{dp}{\sqrt{p}} = \pm\int dx, \ 2\sqrt{p} = \pm(x+C_1)$$

və ya $$p = \frac{(x+C_1)^2}{4}$$

bərabərliyini alarıq. $p = \frac{dy}{dx}$ olduğuna görə buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + C_1)^2}{4}$$

tənliyi alınır. Bu tənliyi də dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$y = \frac{1}{4}\int (x + C_1)^2\, dx,$$

$$y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$$

22.4.1. Riyazi fizikanın əsas tənlikləri (Dalğa, Furye, Laplas) İlkin anlayışlar.

Aşağıdakı ikitərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər (ikidəyişənli funksiyalar üçün) riyazi fizikanın əsas tənlikləri adlanır.

I. Dalğa tənliyi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Aşağıdakı proseslərin öyrənilməsi (1) tənliyinin tədqiqinə gətirir: telin eninə rəqsi, çubuğun uzununa rəqsi, simdə elektrik rəqsləri, valın burulma rəqsləri, qazların rəqsləri və s. Bu tənlik, **hiperbolik tip** tənliklərin ən sadəsidir.

II. İstilikkeçirmə tənliyi (yaxud Furye tənliyi)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(2)}$$

Aşağıdakı proseslərin öyrənilməsi (2) tənliyinin tədqiqinə gətirilir. Istiliyin yayılması, məsaməli mühitdə maye və qazların süzülməsi (məsələn, neftin və qazın yeraltı qumsallıqdan süzülməsi), ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri və s. Bu tənlik **parabolik tip** tənliklərin ən sadəsidir.

III. Laplas tənliyi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Aşağıdakı məsələlərin öyrənilməsi (3) tənliyinin tədqiqinə gətirir: elektrik və maqnit sahələri haqqında məsələlər qərarlaşmış (stasionar) istilik halı haqqında məsələ hidrodinamika, diffuziya məsələləri və s. Bu tənlik **elliptik tip** tənliklərin ən sadəsidir.

(1), (2) və (3) tənliklərində axtarılan **u** (funksiyası) iki dəyişəndən asılıdır. Funksiya çoxdəyişənli olduqda da uyğun tənliklərə baxılır.Belə ki, üç ixtiyari dəyişən üçün dalğa tənliyi, istilikkeçirmə tənliyi və Laplas tənliyi uyğun olaraq, aşağıdakı şəkilləri alır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad \mathbf{(1')}$$

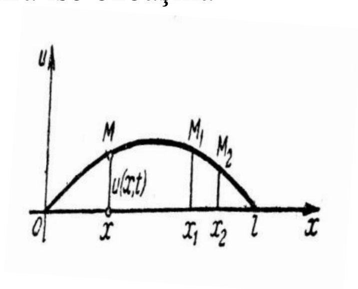
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad \mathbf{(2')}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad \mathbf{(3')}$$

22.4.2. Simin rəqs tənliyinin çıxarılışı.Sərhəd və başlanğıc şərtləri.Məftildə elektrik rəqsi tənliyinin çıxarılışı.

Riyazi fizikada sim dedikdə çevik elastiki tel düşünülür. Istənilən anda simdə yaranan gərginlik onun (bir əyri kimi) toxunanı istiqamətdə olur.

Tutaq ki, uzunluğu l olan sim başlanğıc anda Ox oxu istiqamətdə 0-dan l-dək yönəlmişdir. Fərz edək ki, simin ucları $x=0$ və $x=l$ nöqtələrində bərkidilmişdir. Simi başlanğıc vəziyyətindən çıxardıb, sonra isə özbaşına buraxsaq, yaxud teli inhiraf etdirmədən başlanğıc anda onun nöqtələrinə müəyyən sürət versək və yaxud simi inhiraf etdirməklə bərabər başlanğıc anda onun nöqtələrinə müəyyən sürət versək,



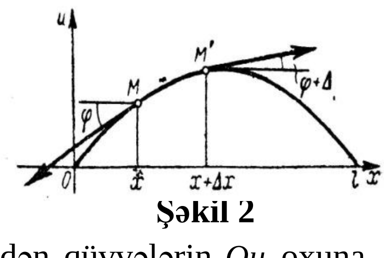
Şəkil 1.

onda simin nöqtələri müəyyən şəkildə hərəkət edər.

Bu halda deyirlər ki, sim rəqs etməyə başlayır. Burada məsələ, simin istənilən anda şəklini və onun hər bir nöqtəsinin zamandan asılı olan hərəkət qanununu təyin etməkdən ibarətdir.

Simin nöqtələrinin başlanğıc vəziyyətdən kiçik inhirafına baxacağıq. Buna görə simin nöqtələrinin *Ox* oxuna perpendikulyar istiqamətdə və bir müstəvi üzərində hərəkət etdiyini qəbul edəcəyik. Bu şərt daxilində simin rəqs prosesi bir *u(x,t)* funksiyası vasitəsi ilə təsvir edilir. Bu funksiya *t* anında telin absisi *x* olan nöqtəsinin yerdəyişməsinin qiymətini göstərir **(Şəkil 1).**

Biz *(x,u)* müstəvisində simin kiçik inhirafına baxdığımız üçün fərz edəcəyik ki, simin $\cup\ M_1M_2$ ünsürünün uzunluğu onun *Ox* oxu üzərinə proyeksiyasına bərabərdir, yəni $\cup\ M_1M_2 = x_2 - x_1$ .Bundan başqa fərz edəcəyik ki, dartılma simin bütün nöqtələrində eynidir, onu *T* ilə işarə edək. MM' ünsürünə **(şəkil 2)** baxaq. Bu ünsürün uclarına simə toxunan istiqamətdə *T* qüvvələri təsir edir. Tutaq ki, toxunanlar *Ox* oxu ilə φ və $\varphi + \Delta\varphi$ bucaqları əmələ gətirir.



Şəkil 2

Onda MM' ünsürünə təsir edən qüvvələrin *Ou* oxuna proyeksiyası $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$ ifadəsinə bərabər olar.

φ bucağı kiçik olduğundan $tg\varphi \approx \sin\varphi$ qəbul etmək olar və biz

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi) - Ttg\varphi =$$

$$= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx$$

$$\approx T\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\Delta x,$$

$$0< \theta<1$$

alarıq (orta mötərizə daxilində olan ifadələrə Laqranj teoremi tətbiq edilmişdir).

Hərəkətin tənliyini almaq üçün, ünsürə tətbiq edilən, xarici qüvvələri ətalət qüvvəsinə bərabər etmək lazımdır. Tutaq ki, ρ simin xətti sıxlığıdır. Onda simin ünsürünün kütləsi $\rho\Delta x$ olar. Ünsürün təcili $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ kəmiyyətinə bərabərdir. Dalamber prinsipinə əsasən

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

alarıq. Δx - ə ixtisar edib və $\frac{T}{\rho} = a^2$ qəbul etsək, hərəkətin tənliyini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

şəklində alarıq. Bu isə **dalğa tənliyi** və ya simin rəqs tənliyidir. Simin hərəkət tənliyini tam təyin etmək üçün təkcə (1) tənliyi kifayət deyildir. Məchul funksiya $u(x,t)$ əlavə olaraq **sərhəd şərtlərini və başlanğıc şərtlərini** ödəməlidir. Sərhəd şərtləri simin uclarının ($x=0$ və $x=l$) necə hərəkət etməsini, başlanğıc şərtləri isə başlanğıc anda ($t=0$) simin vəziyyətini göstərir.

Tutaq ki, məsələn, bizim fərz etdiyimiz kimi, simin ucları ($x=0$ və $x=l$) tərpənməzdir. Onda ixtiyari t üçün

$$u(0,t)=0 \qquad \mathbf{(2')}$$

$$u(l,t)=o \qquad \mathbf{(2'')}$$

şərtləri ödənməlidir. Bu bərabərsizliklər bizim məsələ üçün **sərhəd şərtləridir.**

Başlanğıc anda (t=0) sim, bizim ona verdiyimiz müəyyən formaya malikdir. Tutaq ki, bu forma f(x) funksiyası vasitəsilə təyin edilir. Beləliklə,

$$u(x,0)=u\big|_{t=0}=f(x) \qquad \mathbf{(3')}$$

olmalıdır. Bundan başqa, başlanğıc anda simin hər bir nöqtəsində $\varphi(x)$ funksiyası ilə təyin edilən sürət də verilməlidir. Beləliklə,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad \mathbf{(3'')}$$

olmalıdır. (3') və (3'') şərtləri **başlanğıc şərtləridir.**

Qeyd .Xüsusi halda, *f(x)=0* və $\varphi(x)=0$ ola bilər. *f(x)=0* və $\varphi(x)=0$ olarsa, sim sükunətdə olacaqdır, deməli, *u(x, t)=0*.

Yuxarıda qeyd etdik ki, məftildə elektrik rəqsi məsələsi də (1) tənliyinə gətirilir. Bunu isbat edək. Tutaq ki, məftildə elektrik cərəyanı *i(x, t)* və gərginlik $v(x,t)$ ilə xarakterizə olunur; i və v funksiyaları məftil üzərində götürülmüş nöqtənin x koordinatından və t zamanından asılıdır. Məftilin Δx ünsüründə gərginliyin düşməsi $v(x,t)-v(x+\Delta x,t)\approx -\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x$ olur. Bu kəmiyyət $iR\Delta x$ hasilinə bərabər olan omik gərginlik və $\dfrac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ hasilinə bərabər olan induktiv gərginliyin cəminə bərabərdir. Beləliklə,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x\,, \qquad \textbf{(4)}$$

Burada R və L – məftilin vahid uzunluğuna düşən müqavimət və öz-özünə induksiya əmsalıdır. Cərəyan, v-nin artmasının əks istiqamətində axdığı üçün işarə mənfi götürülmüşdür. Δx -ə ixtisar edərək

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

alırıq.

Digər tərəfdən, Δt zaman fasiləsində Δx ünsüründən çıxan və ona daxil olan cərəyanlar fərqi

$$i(x,t) - (x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x \Delta t$$

ifadəsinə bərabərdir. Bu fərq ünsürün $C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ yükü ilə yüklənməsinə və məftilin yan səthindən itkiyə sərf olunur. Çünki məftilin izolyatoru ideal izolyator deyil, bu itki $Av\Delta x\Delta t$ kəmiyyətinə bərabərdir (burada A itki əmsalıdır). Cərəyanlar fərqini bu göstərilən kəmiyyətlərin cəminə bərabər edib və $\Delta x\Delta t$ hasilinə ixtisar ersək,

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

tənliyini alarıq. (5) və (6) tənliklərinə **teleqraf tənlikləri** demək qəbul olunmuşdur.

(5) və (6) tənlikləri sistemindən elə bir tənlik almaq olar ki, bura yalnız *i(x, t)* funksiyası daxil olar və elə bir digər tənlik almaq olar ki, ona ikinci məchul funksiya olan $v(x,t)$ daxil olar. (6) tənliyinin hər tərəfini x -ə nəzərən diferensiallayaq; (5) tənliyinin hədlərini isə t -ə nəzərən diferensiallayıb C -ə vuraq.Alınan bərabərlikləri tərəf–tərəfə çıxaq:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0\,.$$

(5) tənliyindən $\frac{\partial v}{\partial x}$ -in ifadəsini bu tənlikdə yerinə yazsaq,

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

və ya

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi \qquad \textbf{(7)}$$

alarıq. $v(x,t)$ -ni tapmaq üçün də oxşar qayda ilə tənlik alınır:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv\,. \qquad \textbf{(8)}$$

Izolyatordan itkini və müqaviməti nəzərə almamaq mümkün olarsa (A=0 və R=0 olarsa), (7) və (8) tənlikləri dalğa tənliklərinə çevrilər:

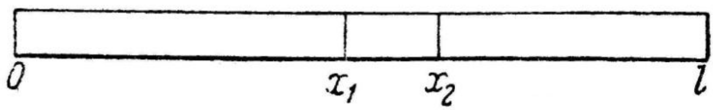
$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

burada $a^2 = \frac{1}{CL}$ qəbul edilmişdir. Fiziki şərtlərdən istifadə etməklə məsələnin sərhəd və başlanğıc şərtlərini göstərmək olur.

22.4.3. Çubuqda istiliyin yayılma tənliyi. I sərhəd məsələsi.

Uzunluğu l olan bircinsli çubuğa baxaq. Fərz edəcəyik ki, çubuğun eninə kəsiyinin ixtiyari nöqtəsində temperatur eynidir və onun yan səthindən istilik nüfuz edə bilməz. Çubuqda istiliyin yayılma prosesini öyrənək.

Ox oxunu elə götürək ki, çubuğun bir ucu x=0 nöqtəsi ilə, digər ucu isə $x=l$ nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün (şəkil 1). Tutaq ki, $u(x, t)$ funksiyası çubuğun x absisli kəsiyinin t anındakı temperaturunu göstərir.



Şəkil 1

Təcrübi üsulla müəyyən edilmişdir ki, istiliyin yayılma sürəti, yəni zaman vahidində absisi x olan kəsikdən keçən istiliyin miqdarı

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}S \qquad \textbf{(1)}$$

düsturu ilə təyin edilir.; burada S –baxılan çubuq kəsiyinin sahəsi, k isə istilikkeçirmə əmsalıdır.

Absisləri x_1 və x_2 olan kəsiklərin arasında qalan çubuq ünsürünə baxaq. Absisi x_1 olan kəsikdən Δt zamanında keçən istiliyin miqdarı aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S\Delta t\,. \qquad \textbf{(2)}$$

x_2 absisli kəsikdən keçən istilik miqdarı

$$\Delta Q_2 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\Delta t \qquad \textbf{(3)}$$

olur. Δt zamanında çubuq ünsürü daxilində qalıq istilik miqdarı, yəni $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\Delta t\right] \approx$$

$$\approx \; k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \qquad \textbf{(4)}$$

(burada $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}$ fərqinə Laqranj düsturunu tətbiq etdik). Δt zaman fasiləsində əmələ gəlmiş bu istilik artımı çubuq ünsürü temperaturunun Δu qədər yüksəlməsinə sərf edilmişdir.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\Delta u$$

yaxud

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \;\approx\; c\rho\Delta xS\,\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,, \qquad \textbf{(5)}$$

burada c –çubuq maddəsinin istilik tutumu, ρ – çubuq maddəsinin sıxlığıdır ($\rho\Delta xS$ çubuq ünsürünün kütləsidir).

Eyni istilik miqdarı olan $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ fərqinin (4) və (5) ifadələrinin bir-birinə bərabər götürsək,

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta xS\Delta t = c\rho\Delta xS\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

yaxud

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

alarıq, burada $\frac{k}{c\rho} = a^2$ qəbul edib, son nəticə olaraq

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(6)}$$

alırıq. Bu isə bircinsli çubuqda **istiliyin yayılma tənliyidir (istilikkeçirmə tənliyidir).**

(6) tənliyi həllinin tamamilə təyin olunması üçün *u(x, t)* funksiyası məsələnin fiziki şərtlərinə uyğun olan hüdud şərtlərini ödəməlidir. (6) tənliyinin həlli üçün verilən şərt-

lər müxtəlif ola bilər. **Birinci sərhəd məsələsi** adlanan məsələyə uyğun şərtlər aşağıdakılardır:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le L, \qquad \textbf{(7)}$$

$$u(0,t)=\psi_1(t), \quad 0\le t\le T \qquad \textbf{(8)}$$

$$u(l,t)=\psi_2(t), \quad 0\le t\le T \qquad \textbf{(9)}$$

(7) şərtinin **(başlanğıc şərtin)** fiziki mənası ondan ibarətdir ki, *t=0* olduqda çubuğun müxtəlif kəsiklərində temperatur verilmiş $\varphi(x)$-ə bərabərdir. (8) və (9) şərtləri **(sərhəd şərtləri)** o deməkdir ki, çubuğun *x=0* və *x=l* uclarında temperatur uyğun olaraq $\psi_1(t)$ və $\psi_2(t)$-ə bərabərdir.

Isbat edilir ki, (6) tənliyinin $0\le x\le 1$, $0\le t\le T$ oblastında (7), (8), (9) şərtlərini ödəyən yeganə həlli vardır.

XXIII FƏSİL. ƏDƏDİ SIRALAR

23.1.1. Ədədi sıra haqqında anlayış

Tutaq ki,

$$\mathbf{a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots}$$

sonsuz ədədi ardıcıllığı verilmişdir. Bu ardıcıllığın hədlərindən düzəldilmiş

$$\mathbf{a_1 + a_2 + . \ldots + a_n + . \ldots} \qquad (1)$$

və ya

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n} \qquad (2)$$

Ifadəsi **ədədi sıra** adlanır. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ədədləri sıranın hədləri, a_1 ədədi sıranın birinci həddi, a_2 ədədi ikinci həddi,a_n isə n-ci həddi adlanır.

(1) sırasının hədlərindən aşağıdakı kimi cəmlər düzəldək:

$$\mathbf{S_1 = a_1}$$
$$\mathbf{S_2 = a_1 + a_2}$$
$$\mathbf{S_3 = a_1 + a_2 + a_3}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + . \ldots + a_n.}$$

Bu cəmlərə ədədi sıranın **xüsusi cəmləri** deyilir.

$$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + . \ldots + a_n} \qquad (3)$$

cəmi (1) sırasının n-ci xüsusi cəmi adlanır. (1) sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığını düzəldək:

$$\mathbf{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots} \qquad (4)$$

Tərif. (1) sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{S_n = S}$$

limiti varsa, onda bu sıraya **yığılan sıra**, S-ə isə həmin sıranın **cəmi** deyilir.

S ədəddinin (1) sırasının cəmi olması faktı belə yazılır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \qquad (5)$$

Əgər sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı dağılırsa, onda belə sıra **dağılan sıra** adlanır.

Misal 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını tədqiq edək.

Həlli. q=1 olduqda verilən sıra dağılır. Belə ki, bu sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığı

$$S_n = n, \qquad n \in N$$

dağılan ardıcıllıqdır. q=-1 olduqda isə

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$$

olduğuna görə $\{s_n\}$ ardıcıllığı və deməli, verilən sıra dağılır.

$q \neq 1$ olduqda verilən sıranın ilk n həddinin cəmi

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

1) Əgər $|q| < 1$ olarsa, $q^n \to 0, n \to \infty$-da, onda

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^n\right) = \frac{1}{1-q}.$$

Deməli, $|q| < 1$ olduqda

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

sırası yığılır.

2) $|q| > 1$olduqda $q^n \to \infty, n \to \infty$-da. Onda S_n xüsusi cəmi sonlu limitə malik deyil, yəni

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

sırası dağılır.

23.1.2. Yığılan ədədi sıralar və onların sadə xassələri

Yığılan ədədi sıraların aşağıdakı xassələri vardır:

1°. (1) sırası yığılandırsa, istənilən C ədədi üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} Ca_k$$

sırası da yığılandır və

$$\sum_{k=1}^{\infty} Ca_k = C\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \qquad (6)$$

İsbatı. (1) sıarsının xüsusi cəmi S_n $-$dirsə, onda

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k = CS_n$$

olar və buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (CS_n) = C\lim_{n\to\infty} S_n = CS$$

alınır.Yəni (1) düsturu doğrudur.

2°.Yəni (6) doğrudur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{və} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sıraları yığılandırsa, onda bu sıraların cəmi və fərqi də yığılan sıradır, və

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \qquad (7)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. $\sum a_n$ və $\sum b_n$ sıralarının xüsusi cəmlərini uyğun olaraq A_n və B_n onların cəmlərini isə A və B ilə işarə edək.

(7) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıranın xüsusi cəminin $\sigma_n = A_n + B_n$ sonlu limiti var və bu limit

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B$$

ədədinə bərabərdir. Yəni (7) sırası yığılandır.

3°. Yığılan (1) sırasının hədlərini, düzülüş sırasını pozmadan, istənilən şəkildə qruplaşdırdıqda alınan sıra da yığılandır və onun cəmi verilmiş (1) sırasının cəminə bərabərdir.

Verilmiş (1) sırasının birinci n sayda həddini atdıqdan sonra alınan

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \qquad (9)$$

sırasına (1) sırasının **n-ci qalıq sırası** və ya **n-ci qalığı** deyilir.

(9) sırasının cəmini r_n ilə işarə edək:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots \qquad (10)$$

Onda alınır ki,

$$S - S_n = r_n \qquad (11)$$

Deməli, (1) sırasının s ədədinə yığılan olması üçün

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$$

münasibəti ödənilməlidir.

4. (1) və (9) sıraları eynui zamanda ya yığılandır, ya da dağılandır.

İsbatı. (1) və (9) sıralarının xüsusi cəmlərini uyğun olaraq S_n və ə σ_m ilə işarə edək:

$$\boldsymbol{\sigma_m = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}}.$$

Onda

$$\boldsymbol{S_{n+m} - S_n = \sigma_m \text{ və ya } S_{n+m} = S_n + \sigma_m} \qquad \boldsymbol{(12)}$$

bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, (1) sırası yığılandır. Onda

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} S_m = S}$$

limiti və buna görə də

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S}$$

limiti sonlu olar. Buna görə (12) bərabərliyindən

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m} - S_n) = S - S_n}$$

münasibəti alınır. Bu da (9) sırasının yığılan və cəminin $S - S_n$ olduğunu ifadə edir.

Fərz edək ki, (9) sırası yığılandır:

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \sigma_m = r_n}.$$

Onda (12) bərabərliyindən

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = \lim_{m\to\infty}(S_n + \sigma_m) = S_n + r_n}$$

alınır ki, bu da (1) sırasının yığılan olduğunu göstərir.

Deməli, (1) və (9) sıralarının hər ikisi eyni zamanda ya yığılır, ya da dağılır.

Beləliklə, belə bir nəticə alırıq.

Nəticə. Verilmiş sıraya sonlu sayda hədd əlavə etmək və ya sonlu sayda həddini atmaq, həmin sıranın yığılan və ya dağılan olmasına təsir etmir.

5º. Yığılan sıranın ümumi həddinin limiti sıfra bərabərdir:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0} \qquad \boldsymbol{(13)}$$

İsbatı. $a_n = S_n - S_{n-1}$ olduğundan və (1) sırasının yığılan olmasından

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

alırıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, sıranın ümumi həddinin limitinin sıfra bərabər olması sıranın yığılan olması üçün zəruri şərtdir, kafi şərt deyildir. Məsələn, **harmonik sıra** adlanan

$$\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + . \ldots \frac{1}{n} + . \ldots} \qquad (\mathbf{14})$$

sırasının ümumi həddinin limiti sıfra bərabərdir.

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

lakin bu sıra dağılandır.

İsbatı. Doğrudan da istənilən $n \geq 1$ ədədi üçün

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0}.$$

Bu bərabərlik, aşağıdakı bərabərsizliklə

$$\mathbf{S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + . \ldots + \frac{1}{2n}} > n \cdot \mathbf{\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}}$$

ziddiyyət təşkil edir. Odur ki, harmonik sıra dağılan sıradır.

23.2.1. Müsbət hədli sıraların yığılma əlamətləri

Hədləri müsbət ədədlərdən ibarət olan sıraya baxaq:

$$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + . \ldots + a_n + . \ldots} \qquad (\mathbf{1})$$

Teorem 1. (1) sırasının yığılan olması üçün bu sıranın xüsusi cəmlər ardıcıllığının məhdud olması zəruri və kafi şərtdir.

Zərurilik. Tutaq ki, müsbət hədli (1) sırası yığılandır:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Yığılan ardıcıllıq isə məhduddur.

Onda

$$S_N \le M\ (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad (2)$$

münasibətinialırıq.

Kafilik. (1) sırasının hədləri müsbət olduğundan ($a_{n+1} \ge 0, n \in N$)

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \ge S_n.$$

Deməli, verilmiş sıranın xüsusi cəmləri ardıcıllığı azalmayan ardıcıllıqdır. Monoton artan və yuxarıdan məhdud ardıcıllıq yığılandır. Buradan (1) sırasının yığılan olması alınır.

Misal 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sırasının yığılan və dağılan olmasını araşdırın.

Həlli. Tutaq ki, $\alpha > 1$. Onda istənilən $k \ge 2$ üçün

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{n-1}^{n} dx < 1 + \sum_{n=2}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \int_{1}^{k} \frac{dx}{x^2} = 1 + \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{k} < 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Deməli, $\alpha > 1$ olduqda müsbət hədli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur. Onda teorem 1-ə görə həmin sıra yığılır.

İndi tutaq ki, $\alpha \leq 1$. Onda

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{n}^{n+1} dx > \sum_{n=1}^{k} \int_{n}^{n-1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_{1}^{k+1} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Buradan alırıq ki,

$$\begin{cases} \ln(k+1), \alpha = 1 \text{ olduqda}, \\ S_k > \frac{(k+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \; olduqda. \end{cases}$$

Onda $\alpha \leq 1$olduqda,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = +\infty$$

başqa sözlə, bu halda sıra dağılır.

Teorem 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ vəə } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sıralarının müəyyən bir N nömrəsindən başlayaraq bütün hədləri üçün

$$0 \leq a_n \leq b_n, \;\; n \geq N+1 \qquad (3)$$

bərabərsizlikləri ödənərsə,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sırasının yığılmasından

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırasının yığılması,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırasının dağılmasından isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b_n}$$

sırasının dağılması alınır.

İsbatı: Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b_n} = \mathbf{B}.$$

Bu halda (3) bərabərsizliklərindən istənilən $k \geq N$ üçün

$$\sum_{n=N}^{k} \mathbf{a_n} \leq \sum_{n=N}^{k} \mathbf{b_n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mathbf{b_n} = \mathbf{B}$$

bərabərsizlikləri alınır. Bu o deməkdir ki, mənfi olmayan

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırasının xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddur. Onda teorem 1-ə görə

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırası yığılır. Buradan isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırasının yığılması alınır(xassə 4º).

Əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırası dağılırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sırası yığıla bilməz, çünki onun yığılmasından

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırasının da yığılması alınardı.

Misal 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{2^n}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli. İstənilən $n \in N$ üçün

$$c < \frac{|\sin n|}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

bərabərsizlikləri doğrudur. Digər tərəfdən

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

sırası yığılan sıradır . Onda xassə 4-ə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{2^n}$$
sırası da yığılan sıradır.

Misal 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$
sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli. Bütün $n \geq 3$ qiymətləri üçün

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$
bərabərsizlikləri ödənir. Bundan başqa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$
sırası dağılır . Bu halda yığılan (dağılan) ədədi sıralar və onların xassələrinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$
sırası da dağılır.

23.2.2. Dalamber və Koşi əlamətləri.Müqayisə əlaməti

Lemma 1. Müsbət hədli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
sırasının bütün hədləri üçün

$$\frac{\mathbf{a_{n+1}}}{\mathbf{a_n}} \leq \mathbf{q} < 1, n \in \mathrm{N} \qquad (\mathbf{1})$$

bərabərsizliklərini ödəyən q ədədi varsa, həmin sıra yığılır. n-in bütün qiymətləri üçün

$$\frac{\mathbf{a_{n+1}}}{\mathbf{a_n}} \geq \mathbf{1}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbf{N} \qquad (\mathbf{2})$$

bərabərsizlikləri ödənərsə, bu sıra dağılır.

İsbatı:(1) bərabərsizliklərindən

$$\mathbf{a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 q^n}$$

bərabərsizlikləri alınır. Buradan isə

$$\mathbf{a_n \leq a_1 q^{n-1}}, \qquad \mathbf{n \in N}$$

bərabərsizlikləri alınır. $0 < q < 1$ olduğu üçün

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{a_1 q^{n-1}} = \frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{q^n}$$

sırası yığılır. Onda, müsbət hədli sıraların yığılması(dağılması) haqqında teoremə görə

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırası da yığılır.

Tutaq ki, (2) bərabərsizlikləri ödənir. Onda

$$\mathbf{a_{n+1} \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots > a_1}$$

Deməli, hər bir $n \in \mathrm{N}$ üçün $a_n \geq a_1 > 0$. Buradan alırıq ki, sıranın hədləri ardıcıllığı sıfra yaxınlaşmır, başqa sözlə, sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmir, yəni sıra dağılır.

Teorem 1 (Dalamber əlaməti). Tutaq ki, müsbət hədli sıranın hədləri üçün

$$\lim_{\mathbf{n \to \infty}} \frac{\mathbf{a_{n+1}}}{\mathbf{a_n}} = \mathbf{q} \qquad (\mathbf{3})$$

şərti ödənilir. Bu halda $q < 1$ olduqda sıra yığılır, $q > 1$ olduqda isə sıra dağılır.

İsbatı : Limitin tərifinə görə istənilən müsbət ε ədədi verildikdə $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ ardıcıllığının müəyyən N nömrəsindən sonra gələn bütün hədləri üçün

$$\mathbf{q-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}}<q+\varepsilon$$

bərabərsizlikləri doğrudur. $q < 1$ olduqda müsbət ε ədədini elə seçək ki, $q + \varepsilon < 1$ olsun. Onda lemma 1-ə görə

$$\sum_{\mathbf{n=N+1}}^{\infty}\mathbf{a_n}$$

sırası yığılır. Bu sıranın yığılmasından öz növbəsində

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\mathbf{a_n}$$

sırasının yığılması çıxır.

$q > 1$ olduqda həmin ikiqat bərabərsizlikdə $\varepsilon - u$ elə seçək ki, $q - \varepsilon > 1$ olsun. Onda

$$\frac{\mathbf{a_{n+1}}}{\mathbf{a_n}}>1, \qquad n>N$$

bərabərsizlikləri doğru olur. Bu halda lemma 1-ə görə

$$\sum_{\mathbf{n=N+1}}^{\infty}\mathbf{a_n}$$

sırası dağılır. Bu sıranın dağılmasından alarıq ki,

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\mathbf{a_n}$$

sırası da dağılır.

Qeyd. Əgər

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Limiti yoxdursa və ya vahidə bərabərdirsə, bu halda Dalamber əlaməti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

müsbət hədli sırasının yığılan və ya dağılan olması sualına cavab vermir.

Misal 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^2}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Dalamber əlamətinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

sırası yığılır.

Misal 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}==2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=2>1.$$

Dalamber əlamətinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

sırası dağılır.

Lemma 2. Müsbət hədli sıranın müəyyən bir N nömrəsindən başlayaraq bütün hədləri üçün

$$\sqrt[n]{a_n}\le q<1 \qquad (5)$$

bərabərsizliklərini ödəyən q ədədi varsa, həmin sıra dağılır.

Əgər

$$\sqrt[n]{a}\ge 1, \qquad n\ge N$$

bərabərsizlikləri ödənirsə, onda (1) sırası dağılır.

İsbatı:Əgər bütün $n\ge N$ qiymətləri üçün $\sqrt[n]{a}\le q<1$ bərabərsizlikləri ödənirsə, onda

$$a_n\le q^n, \qquad n\ge N.$$

$0\le q<1$ olduğu üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$$

sırası yığılır.

Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

sırası da dağılır.

İndi fərz edək ki, bütün $n\ge N$ qiymətləri üçün $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$. Onda bütün $n\ge N$ qiymətləri üçün $a_n\ge$

1 bərabərsizlikləri doğrudur. Bu halda sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmədiyindən

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırası dağılır.

Teorem 2 (Koşi əlaməti).Tutaq ki, müsbət hədli (1) sırasının hədləri üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

şərti ödənilir. Bu halda $q < 1$ olduqda sıra yığılır, $q > 1$ olduqda isə sıra dağılır.

İsbatı: Limitin tərifinə görə istənilən müsbət ε ədədi verildikdə $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ ardıcıllığının müəyyən bir $N = N(\varepsilon)$ nömrəsindən sonra gələn bütün hədləri üçün

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \tag{7}$$

şərti ödənilir.

$q < 1$ olduqda müsbət ε ədədini elə seçək ki, $q + \varepsilon < 1$ olsun. Onda lemma 2-yə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırası yığılır.

$q > 1$ olduqda (1) ikiqat bərabərsizliyində müsbət ε ədədini elə seçək ki, $q - \varepsilon > 1$ olsun. Bu halda lemma 2-yə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırası dağılır.

Misal 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Koşi əlamətinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

sırası dağılır.

Misal 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1.$$

Koşi əlamətinə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

sırası dağılır.

Qeyd.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

limitinin olmadığı və ya vahidə bərabər olduğu halda Koşi əlaməti (1) sırasının yığılan və ya dağılan olması haqqında suala cavab vermir.

23.3.1.İşarəsini növbə ilə dəyişən sıralar

Müsbəthədli sıraların yığılması haqqında isbat etdiyimiz təkliflər və yığılma əlamətləri bütün hədləri müsbət olmayan ədədlər olan

$$U_1+U_2+.....+U_n+......... \qquad (1)$$

sırasının ($U_n \leq 0$, n=1,2,....) yığılmasını tədqiq etmək üçün də tətbiq olunur. Hədləri müxtəlif işarəli həqiqi ədədlər olan sıraların yığılmasına isə həmin yığılma əlamətlərini bilavasitə tətbiq etmək olmaz. Belə sıraların yığılması müxtəlif üsullarla tədqiq olunur.

Hədləri müxtəlif işarəli ədədlər olan sıraların ən sadə növü işarəsini növbə ilə dəyişən sıralardır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n \quad (u_n>0 \ \ n=1,2,.....\ ) \qquad (2)$$

şəklində olan sıraya işarəsini növbə ilə dəyişən sıra deyilir. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıranın hədləri növbə ilə müsbət və mənfi ədədlərdir.Belə sıralar haqqında aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem (Leybnis). İşarəsini növbə ilə dəyişən (2) sırası üçün

$$U_n \geq U_{n+1}>0 \qquad (n=1,2,...) \ (3)$$

və

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \qquad (4)$$

şərtləri ödənildikdə həmin sıra yığılandır.

İsbatı. (2) sırasının cüt indeksli xüsusi cəmlərini

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}U_k = (U_1 - U_2) +$$
$$+(U_3 - U_4)+, \dots , +(U_{2n-1} - U_{2n})$$

kimi yazaq. U_k-U_{k+1} (k=1,2,...) fərqləri (3) şərtinə görə mənfi olmayan ədədlərdir. Buna görə də

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (U_{2n+1} - U_{2n+2}) \geq S_{2n}$$

olar, yəni (2) sırasının cüt indeksli xüsusi cəmlərinin $\{S_{2n}\}$ ardıcıllığı monoton artandır. Bundan başqa

$$S_{2n} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2n-2} - U_{2n-1}) - U_{2n}$$

bərabərliyi (U_k - $U_{k+1} \geq 0$, $U_{2n} > 0$) göstərir ki, $S_{2n} < U_1$ (n=1,2,....) bərabərsizliyi doğrudur.

Deməli, $\{S_{2n}\}$monoton artan (azalmayan) və yuxarıdan məhdud ardıcıllıqdır. Belə ardıcıllığın isə sonlu limiti var :

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \qquad (5)$$

$S_{2n+1} = S_{2n} + U_{2n+1}$ bərabərliyindən və (4) şərtinə görə $\lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = 0$ olmasından aydındır ki, (2) sırasının tək indeksli xüsusi cəmləri ardıcıllığı da həmin S ədədinə yığılır:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \qquad (6)$$

(5) və (6) bərabərlikləri (2) sırasının xüsusi cəmlərinin $\{S_n\}$ardıcıllığının yığılan olduğunu göstərir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Teoremin isbatından aydındır ki, (2) sırasının cüt indeksli xüsusi cəmləri ardıcıllığı azalmayan, tək indeksli

$S_{2n+1}=U_1-(U_2-U_3)-...-(U_{2n}-U_{2n+1})=S_{2n-1}-(U_{2n}-U_{2n+1})$ xüsusi cəmləri ardıcıllığı isə artmayandır. Onda (5) və (6) bərabərliklərinə əsasən istənilən n üçün

$$S_{2n}\le S\le S_{2n-1} \tag{7}$$

olar. Buradan

$$0\le S_{2n-1}-S\le S_{2n-1}-S_{2n}=U_{2n}$$

və

$$0\le S-S_{2n}\le S_{2n+1}-S_{2n}=U_{2n+1}$$

bərabərsizlikləri alınır. Deməli, istənilən n üçün

$$|S_n-S|\le U_{n+1} \tag{8}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Nəticə. İşarəsini növbə ilə dəyişən (2) sırasının qalığı üçün

$$|R_n|=|S-S_n|\le U_{n+1} \tag{9}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Misal. İşarəsini növbə ilə dəyişən

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-,....,+(-1)^{m-1}\frac{1}{n}+,......., \tag{10}$$

sırası üçün teoremin şərtləri, yəni

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

münasibətləri ödənildiyindən həmin sıra yığılandır.

23.3.2. Mütləq və şərti yığılan sıralar. Leybnis əlaməti

Tərif 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

sırası yığılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırası **mütləq yığılan sıra** adlanır.

Teorem 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{a_n}|$$

sırası yığılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$$

sırası da yığılır.

İsbatı :Hədləri

$$\mathbf{p_n} = \frac{|\mathbf{a_n}| + \mathbf{a_n}}{2} \quad \mathbf{v\text{əə}} \quad \mathbf{q_n} = \frac{|\mathbf{a_n}| - \mathbf{a_n}}{2}$$

şəklində olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p_n} \quad \mathbf{v\text{əə}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{q_n}$$

sıralarına baxaq. Bu sıraların bütün hədləri üçün

$$\mathbf{0} \le \mathbf{p_n} \le |\mathbf{a_n}| \; \mathbf{v\text{ə}} \; \text{ə}\mathbf{0} \le \mathbf{q_n} \le |\mathbf{a_n}|$$

bərabərsizlikləri doğrudur

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{a_n}|$$

Sırasının yığılmasından və bubərabərsizliklərdən

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p_n} \;\; \mathbf{v\text{ə}} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{q_n}$$

sıralarının yığılması alınır. Digər tərəfdən, $a_n = p_n - q_n$ olduğu üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sırası yığılır.

Bu teorem göstərir ki, sıranın mütləq yığılmasından onun adi yığılması alınır.

Teorem 2 (Leybnis əlaməti).Hədləri müsbət ədədlər olan və monoton azalan $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti sıfra bərabərdirsə,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad (1)$$

sırası yığılır.

İsbatı:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

sırasının cüt nömrəli xüsusi cəmləri üçün

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$$

bərabərliyi doğrudur. $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0, n = 1,2, \ldots$ olduğu üçün buradan alırıq ki, $s_{2k}\,,\ k \in N$ ardıcıllığı monoton azalmayan ardıcıllıqdır. Digər tərəfdən istənilən $k \in N$ üçün

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - \\ -a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1 \qquad (2)$$

olduğuna görə $s_{2k}, k \in N$ ardıcıllığı məhdud ardıcıllıqdır. Odur ki, bu ardıcıllığın limiti var. Tutaq ki,

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S. \qquad (3)$$

Bundan başqa, sıranın tək nömrəli xüsusi cəmləri ardıcıllığının da limiti S-ə bərabərdir. Doğrudan da

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} - a_{2k})$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_{2k} - \lim_{k\to\infty} a_{2k} = S - 0 = S$$

Deməli,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

sırasının xüsusi cəmləriardıcıllığının sonlu limiti var, başqa sözlə, bu sıra yığılır.

Tərif 2. Yığılan sıra mütləq yığlmırsa, belə sıra **şərti yığılan sıra** adlanır.

Misal.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a}$$

sırasının yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın.

Həlli. $\alpha > 0$ olduqda $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}$ ardıcıllığı monoton azalır və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a} = 0.$$

Onda Leybnis əlamətinə görə verilən sıra yığılır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^a}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$$

sırası isə $\alpha > 1$ olduqda yığılır, $\alpha \leq 1$ olduqda isə dağılır. Beləliklə,

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}^{\mathbf{a}}}$$

sırası $\alpha > 1$ olduqda mütləq yığılır, $0 < \alpha < 1$ olduqda isə şərti yığılır.

23.4.1. Qüvvət sıraları

Tutaq ki, $a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ ədədləri verilmişdir. Aşağıdakı sıraya baxaq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots +$$

$$+a_n(x-a)^n + \cdots \qquad (1)$$

Bu sıra x dəyişəninin hər bir qeyd olunmuş qiymətində müəyyən bir ədədi sıradır. (1) şəklində olan sıra **qüvvət sırası** adlanır. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ədədləri qüvvət sırasının əmsalları adlanır.

Əgər (1) sırası x dəyişəninin müəyyən bir x_0 qiymətində yığılırsa, onda deyirlər ki, verilən qüvvət sırası $x=x_0$ nöqtəsində yığılır. Qüvvət sırasının yığıldığı bütün nöqtələr çoxluğu onun **yığılma oblastı** adlanır.

Biz əsasən

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{a_n x^n} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1 x} + \mathbf{a_2 x^2} + \dots + \mathbf{a_n x^n} + \dots \qquad (\mathbf{2})$$

şəklində olan qüvvət sıralarına baxacağıq, çünki (1) sırası x-a=x´ əvəzləməsi ilə (2) şəklinə gətirilir.

Hər bir qüvvət sırası ən azı bir nöqtədə yığılır.Doğrudan da (2) sırası x=0 nöqtəsində yığılır.

Teorem 1 (Abel teoremi).Əgər (2) qüvvət sırası $x=x_0 (x_0 \neq 0)$nöqtəsində yığılırsa, onda həmin sıra x-in

$$|x| < |x_0|$$

şərtini ödəyən bütün qiymətlərində mütləq yığılır. həmçinin əgər (2) sırası x_0 nöqtəsində dağılırsa, onda həmin sıra x-in

$$|x| > |x_0|$$

şərtini ödəyən bütün qiymətlərində dağılır.

İsbatı : Tutaq ki,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

ədədi sırası yığılır. Bu halda

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

olduğuna görə $\{a_n x_0^n\}$ ardıcıllığı məhduddur. Tutaq ki, $|a_n x_0^n| \leq M, n \in N$. Onda x-in bütün

$$|x| < |x_0|$$

qiymətlərində

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leq Mq^n,$$

(burada $q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$).

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$$

sırası yığılır. Onda, müsbət hədli sıraların yığılması haqqındakı teoremə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

sırası da yığılır.

İndi tutaq ki,

$$\sum \mathbf{a_n x_0^n}$$

sırası dağılır. Bu halda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x^n}$$

qüvvət sırası x-in

$$|\mathbf{x}| > |\mathbf{x_0}|$$

şərtini ödəyən hər bir qiymətində dağılır. Doğrudan da, əgər

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x_0^n}$$

sırası dağılırsa, onda x-in

$$|\mathbf{x}| > |\mathbf{x_0}|$$

şərtini ödəyən heç bir qiymətində

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x^n}$$

sırası yığıla bilməz, çünki əks halda onun yığılmasından yuxarıda isbat etdiyimizə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x_0^n}$$

sırasının yığılması alınardı.

Teorem 1-ə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x^n}$$

qüvvət sırası üçün aşağıdakı üç hal mümkündür:

1) sıra ancaq x=0 nöqtəsində yığılır;

2) sıra bütün həqiqi oxda yığılır;

3) elə bir $R > 0$ ədədi var ki, sıra x-in (-R;R) intervalına daxil olan hər bir nöqtəsində yığılır, x-in $|x| > R$ şərtini ödəyən hər bir qiymətində dağılır.

Tərif 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırası x-in $|x| < R \ (R > 0)$ şərtini ödəyən istənilən qiymətində yığılır və x-in $|x| > R$ şərtini ödəyən istənilən qiymətində dağılırsa, R ədədi həmin sıranın **yığılma radiusu** adlanır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırası ancaq x=0 nöqtəsində yığılırsa, yığılma radiusunu R=0, bütün həqiqi oxda yığılırsa, yığılma radiusunu $R = +\infty$ hesab edəcəyik.

Teorem 2.

$$\left\{\frac{|a_n|}{a_{n+1}}\right\}$$

ardıcıllığının sonlu və ya sonsuz limiti varsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırasının yığılma radiusu üçün

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

düsturu doğrudur.

İsbatı : Tutaq ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=A.$$

Əvvəlcə A-nın sonlu ədəd olduğu hala baxaq:

$0 \le A < +\infty$. $A = 0$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{a_n}=+\infty.$$

Bu halda x-in hər bir $x \neq 0$qiymətində

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=+\infty$$

bərabərliyi doğrudur. Onda Dalamber əlamətinə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

sırası dağılır. Deməli, A=0 olduqda R=0

$0 < A < +\infty$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|}{A}.$$

Dalamber əlamətinə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

sırası $|x| < A$ və ya $\frac{|x|}{A} < 1$ olduqda mütləq yığılır, $|x| > A$ olduqda isə dağılır. Deməli, R=A.

$A = +\infty$ olduqda x-in sıfırdan fərqli hər bir qiymətində

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=0$$

düsturu doğrudur. Buradan alırıq ki, sıra x-in bütün qiymətlərində mütləq yığılır, başqa sözlə, $R = +\infty$.

Teorem 3. $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ **ardıcıllığının sonlu və ya sonsuz limiti varsa,**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırasının yığılma radiusu üçün

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

düsturu doğrudur.

Misal 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli. Bu misalda

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

olduğundan

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{2}{n+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1.$$

Misal 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli.$a_n = (n+1)(n+2)$olduğundan

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1.$$

Misal 3.

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}(\mathbf{n+1})^{\mathbf{n}}\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$$

sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli. $a_n = (n+1)^n$ olduğundan

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{1}}{\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty}\sqrt[\mathbf{n}]{|\mathbf{a_n}|}} = \frac{\mathbf{1}}{\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty}\sqrt[\mathbf{n}]{(\mathbf{n+1})^{\mathbf{n}}}} = \frac{\mathbf{1}}{\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty}(\mathbf{n+1})} = \mathbf{0}.$$

Qüvvət sıralarının diferensiallanması və inteqrallanması.

Tutaq ki,

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{a_n x^n}$$

qüvvət sırasının yığılma radiusu $R > 0$. Onda bu sıranın cəmi aşağıdakı (1) düsturu ilə ifadə olunan

$$\mathbf{f(x)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{a_n x^n} \qquad (\mathbf{1})$$

və təyin oblastı (-R; R) intervalı olan funksiyadır. İsbat etmək olar ki, f(x) funksiyasının (-R;R) intervalında istənilən tərtibdən kəsilməz törəməsi var və

$$\mathbf{f'(x)} = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\mathbf{n a_n x^{n-1}},$$

$$\mathbf{f''(x)} = \sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty}\mathbf{n(n-1)a_n x^{n-2}},$$

$$\mathbf{f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Başqa sözlə, bu o deməkdir ki, qüvvət sırasının istənilən tərtibdən hədbəhəd diferensiallamaq olar.

Həmçinin isbat etmək olar ki, qüvvət sırasını hədbəhəd inteqrallamq olar:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a_n x^n}\right) \mathbf{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \mathbf{a_n x^n dx},$$

burada $-R < a < b < R$.

23.4.2. Funksiyaların qüvvət sırasına ayrılması. Teylor sıraları anlayışı.

Tərif 1. Tutaq ki,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C_n (x-a)^n} \qquad \mathbf{(1)}$$

qüvvət sırası (a-R, a+R) intervalında yığılır və onun cəmi f(x) funksiyasına bərabərdir, yəni x-in (a-R, a+R) intervalındakı bütün qiymətlərində

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C_n (x-a)^n} \qquad \mathbf{(2)}$$

bərabərliyi doğrudur. Onda, deyirlər ki, f(x) funksiyası (a-R, a+R) intervalında (1) qüvvət sırasına ayrılır.

Teorem 1. f(x) funksiyası (a-R , a+R) intervalında qüvvət sırasına ayrılırsa, onda onun həmin interval daxilində istənilən tərtibli kəsilməz törəməsi var.

Doğrudan da, f(x) funksiyası (a-R, a+R) intervalında (1) qüvvət sırasına ayrılırsa, onda (a-R, a+R) intervalı (1) qüvvət sırasının yığılma intervalı daxilində yerləşər. Qüvvət sırasının cəmini özünün yığılma intervalı daxilində istənilən tərtibdən hədbəhəd diferensiallamaq mümkündür. Bu halda (1) sırasının istənilən tərtibdən hədbəhəd diferensiallanmasından alınan sıraların $f^{(k)}(x)$ cəmləri yığılma intervalı daxilində və buna görə də, xüsusi halda, (a-R, a+R) intervalında kəsilməyən funksiyalar olar.

Deməli, f(x) funksiyası (a-R, a+R) intervalında qüvvət sırasına ayrılırsa, yəni x-in (a-R, a+R) intervalındakı bütün qiymətlərində

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

bərabərliyi doğrudursa, onda bu sıranı istənilən tərtibdən hədbəhəd diferensiallamaq olar və x-in həmin intervaldakı bütün qiymətlərində

$$\mathbf{f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)C_n(x-a)^{n-k}}$$

$$\mathbf{(k = 1, 2, \dots)} \qquad \mathbf{(3)}$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu bərabərliklərdə x=a hesab etsək

$$\mathbf{f(a) = C_0, f^{(k)}(a) = k!\ C_k, \quad k = 1, 2, \dots}$$

olar.Buradan

$$\mathbf{C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ \ (k = 0, 1, 2, \dots; 0! = 1)} \qquad \mathbf{(4)}$$

alarıq. Bu qiymətləri (2) bərabərliyində yerinə yazdıqda

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{a})}{\mathbf{n}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{n}} \qquad (5)$$

və ya

$$\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{a})}{\mathbf{1}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{f}''(\mathbf{a})}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{2}} + \ \dots$$
$$+ \frac{\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{a})}{\mathbf{n}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{n}} + \ \dots$$

Tərif 2. Tutaq ki, f(x) funksiyası a nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur və həmin nöqtədə istənilən tərtibdən törəməsi var. Onda

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{a})}{\mathbf{n}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{n}} \qquad (6)$$

qüvvət sırasına f(x) funksiyasının a nöqtəsində **Teylor sırası**, (4) ədədlərinə isə **Teylor əmsalları** deyilir.

Xüsusi halda, a=0 olduqda Teylor sırası

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{0})}{\mathbf{n}!}\mathbf{x}^{\mathbf{n}} \qquad (7)$$

şəklində yazılar. Buna f(x) funksiyasının **Makloren sırası** deyilir.

Beləliklə, yuxarıda aparılan mühakiməyə və isbat edilən (5) bərabərliyinə əsasən aşağıdakı təklif alınır:

Teorem 2. f(x) funksiyası a nöqtəsində müəyyən ətrafında (2) qüvvət sırasına ayrılırsa, onda bu sıra həmin funksiyanın Teylor sırasıdır.

Deməli, **x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş f(x) funksiyasının (x-a) fərqinin qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayrılma məsələsi, elə həmin**

funksiyanın (6) Teylor sırasına ayrılması məsələsinin eynidir.

Nəticə 1.x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında yığılan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C_n(x-a)^n} \qquad (8)$$

qüvvət sırasının cəmi eyniliklə sıfıra bərabərdirsə, onda onun bütün əmsalları sıfra bərabərdir:

$C_n = 0 \ (n = 0,1,2,\dots).$

Doğrudan da, a nöqtəsinin müəyyən ətrafında (8) sırasının cəmi $f(x) = 0$ olduğundan (4) düsturuna əsasən

$$\mathbf{C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0 \ \ (n = 0,1,2,\dots)}$$

olar.

Nəticə 2.(Qüvvət sırasına ayrılışın yeganəliyi).

x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında eyni bir f(x) funksiyasına yığılan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C_n(x-a)^n} \ \text{və} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{d_n(x-a)^n}$$

qüvvət sıraları bir-birinin eynidir, yəni onların uyğun əmsalları bərabərdir:

$$\mathbf{C_n = d_n, \qquad n = 0,1,2,\dots} \qquad (9)$$

Başqa sözlə, f(x) funksiyası x-a fərqinin qüvvətlərinə görə yeganə qüvvət sırasına ayrıla bilər.

Doğrudan da, (4) düsturuna görə

$$\mathbf{C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}} \ \text{və} \ \mathbf{d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$$

olduğundan (9) bərabərlikləri doğrudur.

Tərif 3. x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında qüvvət və ya Teylar sırasına ayrılan bilən f(x) funksiyasına həmin nöqtədə **analitik funksiya** deyilir.

Buradan və yuxarıda isbat etdiyimiz 1-ci teoremdən aydındır ki, x=a nöqtəsində analitik olan funksiyanın həmin nöqtənin müəyyən ətrafında istənilən tərtibli törəməsi var. Bu təklifin tərsi doğru olmaya da bilər: verilmiş x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında istənilən tərtibli törəməsi olan funksiyalar vardır ki, onlar x=a nöqtəsində analitik deyildir, yəni həmin nöqtənin ətrafında Teylor (qüvvət) sırasına ayrılmır. Məsələn,

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{e^{-\frac{1}{x^2}}}, & \mathbf{x \neq 0olduqda} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x = 0olduqda} \end{cases} \qquad \mathbf{(10)}$$

funksiyasının bütün ədəd oxunda, xüsusi halda x=0 nöqtəsinin hər bir ətrafında istənilən tərtibli törəməsi var. Doğrudan da, $x \neq 0$ nöqtələrində

$$\mathbf{f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}, \qquad \mathbf{f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}}, \ldots,$$

x=0 nöqtəsində isə

$$\mathbf{f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0},$$

$$\mathbf{f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^3} e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0}, \ldots$$

alınır, yəni funksiyanın x=0 nöqtəsində bütün törəmələri sıfra bərabərdir:

$$\mathbf{f(0) = f'(0) = f''(0) = . \ldots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \cdots = 0}$$

Həmin funksiya üçün x-0=x qüvvətlərinə görə yazılmış (6) Teylor sırasını düzəldək:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots \qquad (11)$$

Bu sıra bütün ədəd oxunda yığılır və onun cəmi eyniliklə sıfra bərabərdir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n \equiv 0.$$

Deməli, (10) funksiyasının (11) Teylor sırasının eyniliklə sıfra bərabər olan cəmi həmin funksiyanın özünə bərabər deyildir (ancaq x=0 nöqtəsində bərabərdir). Bu göstəriri ki, (10) funksiyası x=0 nöqtəsinin heç bir ətrafında qüvvət sırasına (Teylor sırasına) ayrılmır, yəni analitik deyildir.

Funksiyaların Teylor sırasına ayrıla bilməsi şərtləri.

Tutaq ki, f(x) funksiyası x=a nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur və həmin nöqtədə istənilən tərtibdən törəməsi var. Onda f(x) funksiyası üçün x=a nöqtəsində

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (1)$$

Teylor sırasını yazmaq olar. (1) sırasının yığılan və ya dağılan olması, yığılan olduqda isə onun cəminin f(x) funksiyasına bərabər olması haqqında əvvəlcədən heç nə demək olmaz. Buna görə də (1) sırasının f(x) funksiyasının Teylor sırası olmasını

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (2)$$

kimi yazırlar (~uyğunluq işarəsidir).

Xüsusi halda, (1) sırası f(x) funksiyasına yığılan olduqda (2) münasibətində (uyğunluq) işarəsi əvəzinə =(bərabərlik) işarəsi yazılır. Bu halda, deyirlər ki, f(x) funklsiyası Teylor (və ya qüvvət) sırasına ayrılır .

Belə bir sual qarşıya çıxır: f(x) funksiyasının Teylor sırası nə zaman onun özünə yığılır? Bu məsələni tədqiq etmək üçün f(x) funksiyasının (x-a) fərqinin qüvvətlərinə görə yazılmış Teylor düsturuna baxaq:

$$\mathbf{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x).} \qquad (3)$$

Burada

$$\mathbf{S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \qquad (4)$$

çoxhədlisi f(x) funksiyasının **n-dərəcəli Teylor çoxhədlisi**, $R_n(x)$ isə Teylor düsturunun **qalıq həddi** adlanır. (4) cəmi eyni zamanda (1) Teylor sırasının n-ci xüsusi cəmidir. (3) düsturunu

$$\mathbf{f(x) = S_n(x) + R_n(x)} \qquad (5)$$

və ya

$$\mathbf{f(x) - S_n(x) = R_n(x)}$$

kimi yazdıqda aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 1. F(x) funksiyasının (a-R, a+R) **intervalında (1) Teylor sırasına ayrılması üçün həmin intervalda onun istənilən tərtibli törəməsinin olması və (3) Teylor düsturu qalıq həddinin x-in (a-R, a+R) intervalındakı bütün qiymətlərində**

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0} \qquad (6)$$

bərabərliyini ödəməsi zəruri və kafi şərtdir.

Bu teoremin şərtlərini yoxlamaq bəzən çətin olur. Belə hallarda funksiyanın qüvvət sırasına ayrılmasını aşağıdakı kafi şərtə əsasən müəyyən etmək olar.

Teorem 2. Tutaq ki, f(x) funksiyasının (a-R, a+R) intervalında istənilən tərtibli törəməsi var və bu törəmələrin hamısı həmin intervalda müntəzəm məhduddur, yəni x-in (a-R, a+R) intervalındakı bütün qiymətlərində

$$\left|\mathbf{f^{(k)}(x)}\right| \le \mathbf{M} \quad (\mathbf{k = 0, 1, 2, \dots}, \qquad (7)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda f(x) funksiyası həmin intervaldaTeylor sırasına ayrılır:

$$\mathbf{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} \qquad (8)$$

İsbatı. (8) bərabərliyinin doğruluğuna inanmaq üçün x-in (a-R, a+R) intervalında yerləşən bütün qiymətlərində (6) münasibətinin ödənildiyini göstərmək kifayətdir.

(3) Teylor düsturunun qalıq həddini Laqranj şəklində götürək:

$$\mathbf{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (a, x)},$$

(7) bərabərsizliyinə görə

$$\mathbf{|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \le}$$

$$\mathbf{\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}} \qquad (9)$$

olar. Hər bir qeyd olunmuş x üçün

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0}$$

bərabərliyinin doğruluğu isbat olunmuşdur. Onda (9) bərabərsizliyinə əsasən hər bir $x \in (a-R, a+R)$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ olar.}$$

Teorem isbat olundu.

23.4.3.Elementar funksiyaların Teylor sırasına ayrılması

Əvvəlki paraqrafda isbat edilmiş teoremləri tətbiq edərək bir sıra elementar funksiyaları Teylor sırasına ayırmaq olar.

I. $\mathbf{f(x) = e^x}$. Bu funksiya üçün

$$f(x) = f'(x) = f''(x) =. \dots = f^{(n)}(x) =. \dots = e^x$$

olduğundan x-in (-R, R) intervalında yerləşən bütün qiymətlərində

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = |e^x| < e^R \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

bərabərsizliyi ödənilər. Deməli, e^x funksiyası üçün 2-ci teoremin şərtləri ödənilir, yəni həmin funksiya istənilən sonlu intervalda (buna görə də ədəd oxunda) Teylor sırasına (a=0) ayrılır. $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$olduğundan e^xfunksiyasının Teylor ayrılışı

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} +. \dots + \frac{x^n}{n!} +. \dots \qquad (1)$$

şəklində olar.

II. $\mathbf{f(x) = sinx}$.Bufunksiya üçün

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} -. \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x).$$

Teylor düsturunun və x-in bütün qiymətlərində

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

bərabərliyinin doğruluğu aydındır. Deməli, sin x funksiyası bütün ədəd oxunda

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (2)$$

Teylor sırasına ayrılır.

III. $\mathbf{f(x) = \cos x}$ funksiyası üçün

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - . \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

kimi Teylor düsturu və x-in bütün qiymətlərində

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

bərabərliyinin doğruluğu əvvəldən məlumdur. Buradan həmin funksiya üçün

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (3)$$

ayrılışı alınır.

24.4.1. Kompleks sira

Tutaq ki, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ kompleks ədədlərdir, yəni

$$a_k = b_k + ic_k, k = 1,2,3,...,$$

burada $b_1, b_2, ...$ və $c_1, c_2, ...$ ədədləri həqiqi ədədlərdir. Aşağıdakı kompleks ədədi sıraya baxaq:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad \textbf{(1)}$$

Fərz edək ki, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ədədi sıraları yığılır və

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C.$$

$B + iC$ kompleks ədədinə (1) sırasının *cəmi* deyilir.

Teorem. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sırası yığılarsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası da yığılır.

İsbatı. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_n^2 + c_n^2}$ ədədi sırasının yığılmasından və

$$|b_n| \leq \sqrt{b_n^2 + c_n^2}, \ |c_n| \leq \sqrt{b_n^2 + c_n^2}$$

bərabərsizliklərindən $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sıralarının yığılması çıxır. Bu halda aydındır ki, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sıraları da yığılır. Bu isə tərifə görə o deməkdir ki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır.

İndi də kompleks qüvvət sırasına baxaq:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad \textbf{(2)}$$

$a_n = b_n + ic_n, (n = 0,1,2,...,), z = x + iy$. İsbat etdiyimiz teoremə görə $\sum |a_n||z^n|$ sırasının yığılmasından (2) sırasının yığılması çıxır.

24.4.2. Eyler düsturu

Bilirik ki, e^x funksiyası üçün

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ayrılışı doğrudur. Onda təbii olaraq e^x kompleks dəyişənli funksiyası

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

düsturu ilə təyin edilməlidir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ qüvvət sırası z-in hər bir qiymətində yığıldığından bundan əvvəlki paraqrafda isbat etdiyimiz teoremə görə $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sırsası da z-in hər bir qiymətində yığılır.

Xüsusi halda $z = ix$ olduqda

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Digər tərəfdən

$$i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = i(-1)^k$$

olduğunu nəzərə alsaq (1) düsturu

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \textbf{(1)}$$

şəklini alar. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki sıraların cəmi uyğun olaraq cos x-ə və sin x- ə bərabərdir. Odur ki,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \qquad \textbf{(2)}$$

Burada x əvəzinə -x götürsək

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \qquad \textbf{(3)}$$

düsturunu alarıq. (2) və (3) düsturları Eyler düsturları adlanır. Bu düsturlardan öz növbəsində

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \textbf{(4)}$$

düsturları alınır.

$z = x + iy$ olduqda

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

düsturunun doğru olduğunu göstərmək olar. Ona görə də

$$e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y). \qquad \textbf{(5)}$$

$z = x + iy$ kompleks ədədi

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

triqonometrik şəklində göstərilmişsə, (2) düsturuna görə onu

$$z = re^{i\varphi} \qquad \textbf{(6)}$$

kimi göstərmək olar. Burada

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{ və } \ \varphi = Argz\,. \qquad \textbf{(7).}$$

24.4.3.Furye sırası

Tutaq ki, 2π periodlu $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad \textbf{(1)}$$

şəklində triqonometrik sıraya ayrılır. Burada $a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...$ müəyyən ədədlər olub, **triqonometrik sıranın əmsalları** adlanır.

Fərz edək ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sırasının $[-\pi;\pi]$ parçasında hədbəhəd inteqrallamaq olar. $a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...$ əmsalları ilə f(x) funksiyası arasında əlaqə düsturlarını tapaq. (1) bərabərliyinin hər tərəfini $-\pi$ -dən π-yə kimi inteqrallayaq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx \right).$$

Burada

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0 \, , \; n = 1,2,...$$

olduğunu nəzərə alsaq, a_0 əmsalı üçün

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

düsturunu alırıq.

Indi (1) bərabərliyinin hər tərəfini $\cos kx$ -ə $(k \in N)$ vurub $-\pi$ -dən π -yə kimi inteqrallayaq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx +$$

$$+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx) \qquad (3)$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqralları

$$\cos nx\cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos(n-k)x + \cos(n+k)x\right],$$

$$\sin nx\cos kx = \frac{1}{2}\left[\sin(n+k)x + \sin(n-k)x\right]$$

düsturlarının köməyi ilə hesablayaq. $n \neq k$ olduqda

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n-k)x + \cos(n+k)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} + \frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+k)x + \sin(n-k)x\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+k)x}{n+k} - \frac{\cos(n-k)x}{n-k}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Bunları (3) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx f(x)dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kxdx$$

düsturunu alarıq. Digər tərəfdən

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2kxdx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2kx)dx = \pi$$

olduğundan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx = a_k \pi$$

və ya

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx, k = 1,2,.... \qquad \textbf{(4)}$$

Analoji qayda ilə göstərmək olar ki, $b_1, b_2, ...,$ əmsalları üçün

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kxdx, k = 1,2,... \qquad \textbf{(5)}$$

düsturları doğrudur.

Tərif 1. Əmsalları (2), (4) və (5) düsturları ilə hesablanan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \textbf{(6)}$$

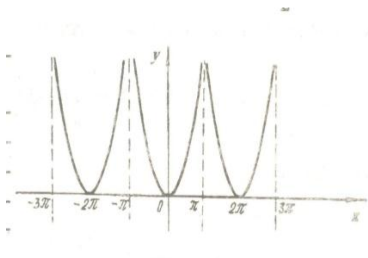
triqonometrik sırası f(x) funksiyasının **Furye sırası** adlanır.

Tərif 2. $(a;b)$ aralığında f(x) funksiyasının törəməsinin yalnız sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsi varsa, f(x) funksiyası həmin aralıqda **hissə-hissə diferensial (hissə-hissə hamar)** funksiya adlanır.

Teorem. Bütün həqiqi oxda təyin edilmiş, $[-\pi;\pi]$ aralığında hissə-hissə diferensiallanan 2π periodlu f(x) funksiyasının Furye sırası həmin funksiyanın kəsilməz olduğu hər bir x nöqtəsində f(x) -ə, funksiyanın kəsilən olduğu hər bir x nöqtəsində isə $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ -ə yığılır.

Bu teoremin isbatını vermirik.

Misal 1. $[-\pi;\pi]$ aralığında $f(x)=x^2$ düsturu ilə verilən 2π periodlu f(x) funksiyasının Furye sırasını tapın (şəkil 1).



Şəkil 1

Həlli. (2), (4) və (5) düsturları ilə verilən funksiyanın Furye əmsallarını tapaq:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 d\sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[x^2 \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx dx \right] = \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} xd\cos nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \right] = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[x^2 \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} xd\sin nx = \frac{2}{\pi n^2}\left[x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx \right] = 0.$$

Verilən funksiya hissə-hissə diferensiallanan və hər bir nöqtədə kəsilməz olduğundan

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

(6) sırasının f(x) funksiyasının Furye sırası olması

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kimi yazılır.

24.4.4.Tək və cüt funksiyalarin Furye sırası.

Lemma 1. $[-l;l]$ parçasında inteqrallanan f(x) funksiyası cütdürs, onun inteqralı üçün

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx \qquad \textbf{(1)}$$

təkdirsə

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

doğrudur.

İsbatı. $\int_{-l}^{l} f(x)dx$ inteqralını aşağıdakı kimi göstərək:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(x)dx. \qquad \textbf{(3)}$$

$\int_{-l}^{0} f(x)dx$ inteqralında x=-t əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-t)dt.$$

Ona görə də

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(-x)dx. \qquad \mathbf{(4)}$$

Bu bərabərlikdən alırıq ki, əgər f(x) funksiyası $[-l;l]$ parşasında cütdürsə (1) düsturu, təkdirsə (2) düsturu doğrudur.

2π periodlu f(x) funksiyası cütdürsə,f(x) cosnx cüt, f(x) sin nx isə təkdir. Onda yuxarıda isbat edilən lemmaya görə

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, n = 0,1,2,.... \quad \mathbf{(5)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0, n = 1,2,3,... \qquad \mathbf{(6)}$$

Odur ki, cüt funksiyanın Furye sırası ancaq kosinuslar olan hədlərin cəmindən ibatərdir:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \, . \qquad \textbf{(7)}$$

$a_n (n = 0,1,2,...)$ əmsalları (5) düsturu ilə hesablanır. 2π periodlu f(x) funksiyası təkdirsə f(x)cosnx tək, f(x)sinnx isə cütdür. Ona görə də

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n \in N.$$

Deməli, tək funksiyanın Furye sırası ancaq sinuslar olan hədlərin cəmindən ibarətdir.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad \textbf{(8)}$$

$b_n \quad (n \in N)$ əmsalları (6) düsturu ilə hesablanır.

ƏDƏBİYYAT

1. А.Кудрявцев, Б.П. Даминович- Краткий курс высшей математики.Москва «Наука»1989г.
2. П.Ф.Фильчаков.Справочник по высшей математики «Наукова Думка»Киев 1974г.
3. У.В.Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И.Соркин, Н.Г. Федин. Математика в понятиях, определениях и терминах.I часть Москва «Просвещение» 1978г.
4. M. Nəsibov. Mütləq qiymət və onun tədbiqi. “Marif” Nəşriyyatı-1981 il.
5. Q.M.Namazov.Funksiyalar və Qrafiklər.“Bakı Biznes Universiteti Nəşriyyatı” Baki- 2011 il
6. C. Nurəddinoğlu. Ali riyyaziyyat kursu üzrə məsələ və misallar. I hissə. Çaşıoğlu. Bakı -2000
7. R. Məmmədov. Ali riyaziyyat kursu I hissə “Maarif”- 1978 il
8. R.Məmmədov. Ali riyaziyyat kursu II hissə.“Maarif”-1981 il
9. R.Məmmədov.Ali riyaziyyat kursu III hissə.“Maarif”-1984 il
10. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər. III hissə. Bakı-1998
11. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər I hissə.Baki-2004
12. Y.Ş.Səlimov, M.M.Səbzəliyev. Ali riyaziyyatdan məsələlər II hissə.Baki-2005
13. U.U.O. Qaydukov. Mütləq qiymət . “Maarif”-1970
14. Ə.Şahbazov. Ehtimal nəzəriyyəsi və Riyazi statistika.“Maarif”-1973
15. О.С.Ивашев-Мусатов. Начало математического анализа.Москва «Наука» 1988 г.
16. Ə.S. Səfərov, C. N. Suleymanov. Birdəyişənli funksiyalarin diferisial hesabı.Baki -1986

17. С.В. Фрохов. Курс высшей математики. Москва «Высшая школа»-1973
18. N.S.Piskunov.Differinsial və inteqral hesabı I hissə."Maarif"-1966
19. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В.П. Иваницкая. Аналитическая ГеометрияПросвещения -1970
20. N.S. Əfəndiyev. Ədəbi və funksional sıraların əsasları. Baki- Azərnəşir1959
21. M.Ə.Əzimov, F.N.Səlimov, Ş.F.Məmmədov Diferensial Tənliklər.
22. Н.М.Гюнтер и Р.О.Кузмин. Сборник задач повысшей математики II часть.Москва- 1959
23. Г. И. Кручкович, Г.М.Мордасова, В.А.Подольский, Б.С. Римский-Корсоков, Х.Р. СулеймАнова, М. А. Чегис. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Издательство « Высшая школа» Москва- 1970
24. B.P. Demidoviç. Riyazi Analizdən Məsələ və Misallar. Tərcümə edənlər.Əliyev A.R. Bakı-2004
25. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления I том. Физматгиз. Москва1962
26. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального иинтегрального исчисления. II том.Физматгиз. Москва1962
27. У.В.Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И.Соркин, Н.Г. Федин. Математика в понятиях, определениях и терминах.II часть Москва «Просвещение» 1982г.

MÜNDƏRİCAT

NAMAZOV QABİL MƏHƏMMƏD OĞLU

ALİ RİYAZİYYAT

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti. Bakı, 2012, səh.464

Redaktor: f.r.e.d., prof. H.İ.Aslanov
Texniki redaktor: T.B.Məmmədov
Kompüter tərtibatçısı: Ş.N.Abdullayeva
Kompüter operatorları: M.Ə.Sadıqov, A.Y.Babayeva

Yığılmaga verilmişdir: 11.10.2012
Çapa imzalanıb:14.12.2012
Kağız formatı: 60x80
Həcmi: 29 ç.v.
Tiraj:500

«Bakı Biznes Universiteti nəşriyyatı»
Bakı, H.Zərdabi küç. 88[a]