Série d'exercices 3

Mars 2020

Convexity

Convex sets

Exercice 1 Hyperplans et demi-plans

- Quelle est la distance entre deux hyperplans paralleles $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}^T \boldsymbol{x} = b_1\}$ et $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}^T \boldsymbol{x} = b_2\}$?
- Montrer que l'ensemble des points qui sont plus proches de **a** que de **b** (au sens de la norme euclidienne) est un demi-plan (Description de Voronoi).

Exercice 2 polyèdres

Dites lesquels parmis les ensembles suivants sont des polyèdres. Le cas échéant, exprimer S sous la forme $S = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{b}, C\boldsymbol{x} = \mathbf{d}\}$.

- $S_1 = \left\{ y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 \,\middle|\, -1 \leqslant y_1, y_2 \leqslant 1\right\}$, où $\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$.
- $S_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x} \succeq 0, \mathbf{1}^T x = 1,\ \mathbf{a}^T \boldsymbol{x} = b_1,\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^2 = b_2\right\}$, où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
- $S_3 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x} \succeq 0,\ \boldsymbol{x}^T\mathbf{y} \leqslant 1, \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{y}\|_2 = 1\right\}$.
- $S_4 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x} \succeq 0,\ \boldsymbol{x}^T\mathbf{y} \leqslant 1, \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|y\|_1 = 1\right\}$.

Exercice 3

Examiner la convexité des ensembles suivants.

- $S_1 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha \leq \mathbf{a}^T \boldsymbol{x} \leq \beta\right\}$.
- $S_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i, i = 1, \ldots, n\right\}$ (Rectangle).
- $S_3 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{a}_1^T \boldsymbol{x} \leq b_1, \mathbf{a}_2^T \boldsymbol{x} \leq b_2\right\}$.
- $S_4 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq \|\boldsymbol{x} - \mathbf{y}\|, \forall\, \mathbf{y} \in S\right\}$, avec $S \subset \mathbb{R}^n$.
- $S_5 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{dist}\ (\boldsymbol{x}, S) \leq \text{dist}\ (\boldsymbol{x}, T)\right\}$, avec $S, T \subset \mathbb{R}^n$.

Exercice 4

Montrer que que si S_1 et S_2 sont deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^{m\times n}$, alors il en est de même pour leurs sommes partielles :

$$S = \left\{(x, y_1 + y_2) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\right\}.$$

Exercice 5

- On suppose que C et D sont deux parties differentes de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $A = \{(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \mathbf{a}^T x \leq b,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in C,\ \text{ et } \mathbf{a}^T x \geqslant b,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in D\}$. Montrer que A est un cone convexe.
- Donner un exemple de deux ensembles convexes fermés disjoints qui ne peuvent pas etre séparés strictement.
- Exprimer l'ensemble convexe fermé $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+ | x_1 x_2 \geqslant 1\}$ comme l'intersection de demi-plans.

Exercice 6 Fonction support

La fonction support d'un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est définie par

$$S_C(\mathbf{y}) = \sup \left\{ \mathbf{y}^T \boldsymbol{x} \;\middle|\; x \in C \right\}.$$

($S_C(y)$ peut prendre $+\infty$). On suppose que C et D sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$C = D \iff S_C = S_D.$$

Exercice 7

Soit K^* le cone dual d'un cone convexe K, i.e.,

$$K^* := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall\, \boldsymbol{x} \in K : \quad \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant 0 \right\}.$$

Montrer les relations suivantes.

- K^* est un cone convexe.
- $K_1 \subset K_2 \implies K_2^* \subset K_1^*$.
- K^* est fermé.

Convex functions

Exercice 8 Examples of convex functions

Pour chacune des fonctions suivantes, dites si elle est convexe, concave, quasiconvexe[2], ou quasiconcave:

$$f_1(x) = e^x - 1 \text{ on } \mathbb{R}, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \text{ on } \mathbb{R}^2_{++}, \quad f_3(\boldsymbol{x}) = 1/(x_1 x_2) \text{ on } \mathbb{R}^2_{++},$$

$$f_4(\boldsymbol{x}) = x_1/x_2 \text{ on } \mathbb{R}^2_{++}, \quad f_5(\boldsymbol{x}) = x_1^2/x_2 \text{ on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++},$$

$$f_6(\boldsymbol{x}) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \text{ on } \mathbb{R}^2_{++}, 0 \leq \alpha \leq 1, \quad f_7(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}, p > 1, p \neq 0.$$

[2] l'image inverse de chaque ensemble de la forme $(-\infty, a)$ est convexe, or; $\forall\, x, y \in Set \lambda \in [0,1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \max \left\{ f(x), f(y) \right\}$.

Exercice 9 **Norms and Dual Norms**
Show that The negative log-determinant function

$$f(X) = -\log(det(X))$$

is convex on $\mathbb{S}^n_{++}$.

Exercice 10 **Inégalité de Jensen**
Soit $f(x)$ une fonction convexe et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ des poids vérifiants $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$. Montrer que pour $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k) \geq \lambda_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + \lambda_k f(\boldsymbol{x}_k).$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, et $a, b \in \mathrm{dom}(()f)$, avec $a < b$.

- Montrer que: $\forall\, x \in [a, b] : \; f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$.
- Montrer que: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
- Supposons que f est différentiable. Montrer que

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

- Supposons que f est deux fois différentiable. Montrer que $f''(a) \geq 0$ et $f''(b) \geqslant 0$.

Exercice 12
Quand est-ce que l'épigraphe d'une fonction f est un demi-plan ? cône convexe ? polyèdre ?

Exercice 13
On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe avec $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, et majorée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est constante.

Convex optimization

Exercice 14
Montrer que $\boldsymbol{x}^* = (1, 1/2, -1)$ est optimal pour le problème

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3}{\text{minimize}} & f(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} + \mathbf{q}^T \boldsymbol{x} + r \\ \text{subject to} & -1 \leq x_i \leq 1,\; i = 1, 2, 3 \end{array}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -22 \\ -14.5 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad r = 1.$$