Série 1 : Méthode des différences finies

Exercice 1

On considère l'équation de la chaleur qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0,1], \\ v(0,x) = f(x), & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{E}$$

où ν est une constante positive.

1. Pour l'équation (E), déterminer un schéma de différences finies explicites sous forme d'un système linéaire

$$u^{n+1} = Au^n + b,$$

qui correspond aux conditions: Dirichlet, Neumann, et périodiques.

2. Montrer que le schéma explicite pour l'équation de la chaleur est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. De plus, si on choisit de garder constant le rapport $\nu\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/6$, alors ce schéma est précis à l'ordre 2 en temps et 4 en espace.

3. Etudier la stabilité du schéma implicite de l'équation de la chaleur.

Exercice 2

On considère les schémas à deux niveaux suivants :

Schéma de Richardson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Schéma de DuFort-Frankel

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{i-1}^n + u_i^{n+1} + u_i^{n-1} - u_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Schéma de Gear

$$\frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{i-1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \; .$$

Montrer que ces trois schémas sont consistants avec l'équation de la chaleur.

Exercice 3

Montrer que le θ-schéma est stable en norme L^2 inconditionnellement si $1/2 \leq \theta \leq 1$, et sous la condition CFL $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ si $0 \leq \theta < 1/2$

Exercice 4

En utilisant le critère de von Neumann:

1. Etudier la de stabilité du schéma:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2}\left[\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) + (1-\lambda)\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)\right]$$

2. Montrer que la condition de stabilité du schéma upwind:

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

appelée condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

Exercice 5

Soit un vecteur $p = (p^1, p^2)$ (p^k est une image discrète 2D). Si l'opérateur gradient est discrétisé par différences finies à droite, alors une discrétisation possible de la divergence est donnée par

$$(\mathrm{div} p)_{i,j} := \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1, & \text{if } 1 < i < N, \\ p_{i,j}^1, & \text{if } i = 1, \\ -p_{i-1,j}^1, & \text{if } i = N, \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2, & \text{if } 1 < i < N, \\ p_{i,j}^2, & \text{if } i = 1, \\ -p_{i,j-1}^2, & \text{if } i = N, \end{cases}$$

Vérifier la relation :

$$< -\mathrm{div} p, u > = < p, \nabla u > \; .$$