

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Sprawozdanie nr 1

Sprawozdanie odnośnie programu napisanego w celu wyznaczeniu temperatur w węzłach dla danego modelu z wykorzystaniem metod poznanych na tym przedmiocie. W sprawozdaniu zawarte jest rozwiązanie zadania 5.1 z prętem, zadania 5.2 w programie EXCEL z wykorzystaniem narzędzia SOLVER oraz własny problem.

Własny problem polegał wyznaczeniu temperatur na powierzchniach warstw ściany zewnętrznej nośnej domu. W sprawozdaniu opisany jest przebieg realizowania zadania, użyte dane, wzory, metody, wyniki oraz wnioski.

Niezbędne dane, które wykorzystano do realizacji zadania:

K - współczynnik przewodzenia ciepła $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$,

α - współczynnik wymiany ciepła $\left[\frac{W}{m^2 \cdot K}\right]$,

S - powierzchnia $[m^2]$,

L - długość odnosząca się do poszczególnych warstw $[m]$,

q - strumień ciepła $\left[\frac{W}{m^2}\right]$,

t_{∞} - temperatura otoczenia $[K]$.

Grzegorz Haczyk

2016-11-23

OPIS PROGRAMU

Program został napisany w języku C++.

Program napisany jest w jednym pliku źródłowym, w którym utworzono 4 struktury:

- struct wezel
 - double x - współrzędna x
 - int WB - warunki brzegowe
 - wezel(int x, int WB) - konstruktor
 - wezel() - konstruktor domyślny

- struct element
 - int nr_el - numer elementu
 - int id1, id2 - węzeł początkowy i końcowy
 - double K - współczynnik przewodzenia ciepła
 - double S - powierzchnia na której zadane są warunki brzegowe
 - double L - długość / grubość elementu / warstwy
 - double **IH - lokalna macierz [H]
 - double *IP - lokalny wektor {P}
 - wezel *w - obiekt struktury wezel
 - element(int nr_el, int id1, int id2) - konstruktor
 - element() - konstruktor domyślny

- struct układ
 - double **gH - globalna macierz [H]
 - double *gP - globalny wektor {P}
 - bool gauss(int n, double **AB, double *X) - metoda wykonująca algorytm eliminacji Gaussa

- struct siatka
 - int ne - liczba elementów
 - int nh - liczba węzłów
 - double q, alfa, tot - strumień ciepła, współczynnik wymiany ciepła, temperatura otoczenia
 - element *el - obiekt struktury element
 - układ ur - obiekt struktury układ
 - siatka(int ne) - konstruktor
 - siatka() - konstruktor domyślny

W głównej części programu w pierwszej kolejności odbywa się wczytywanie danych z pliku 'dane.txt' (Rys.1.). Kolejne linie kodu poświęcone są macierzy. Pierwsza tworzona jest macierzAlfaS $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cdot S \end{bmatrix}$ którą wykorzystano przy tworzeniu macierzy lokalnej [H] dla konkretnego elementu skończonego, która tworzona jest w następnej kolejności. Wykorzystując sumę macierzy elementów z uwzględnieniem miejsca elementów lokalnych macierzy powstaje globalna macierz [H]. Następnie tworzone są wektory {P} uwzględniając warunki brzegowe, otrzymane po przekształceniu z wektora obciążeń. Po tym tworzony jest wektor globalny {P} zachowując warunki brzegowe. Następnie w celu rozwiązania układu równań: $[H] \cdot \{t\} + \{P\} = 0$ tworzona jest macierz rozszerzona [HP], która powstaje poprzez dopisanie do macierzy [H] wektor wyrazów wolnych {P}. Jest to początek rozwiązywania układu równań metodą eliminacji Gaussa. Na koniec po wywołaniu metody odpowiadającej za ten algorytm informacje są odczytywane i zapisywane do pliku 'wyniki.txt'(Rys. 2.). Do rozwiązania układu równań wybrałem metodę eliminacji Gaussa, ponieważ na przedmiocie z poprzedniego semestru mieliśmy zadanie zaimplementować właśnie tą metodę.

```

1 2 //ilosc elementow
2 1 //id wezla pocz
3 1 //warunek brzegowy pocz
4 2 //id wezla kon
5 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
6 50 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
7 2 //powierzchnia elementu
8 2.5 //dlugosc elementu
9 2 //id 2 wezla pocz (ten sam co id wezla 1 kon)
10 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
11 3 //id 2 wezla kon
12 2 //warunek brzegowy kon
13 50 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
14 2 //powierzchnia 2 elementu
15 2.5 //dlugosc 2 elementu
16 -150 //q
17 10 //alfa
18 400 //tot - temp otoczenia

```

Rys.1. Dane w pliku 'dane.txt'.

```

1 430
2 422.5
3 415
4

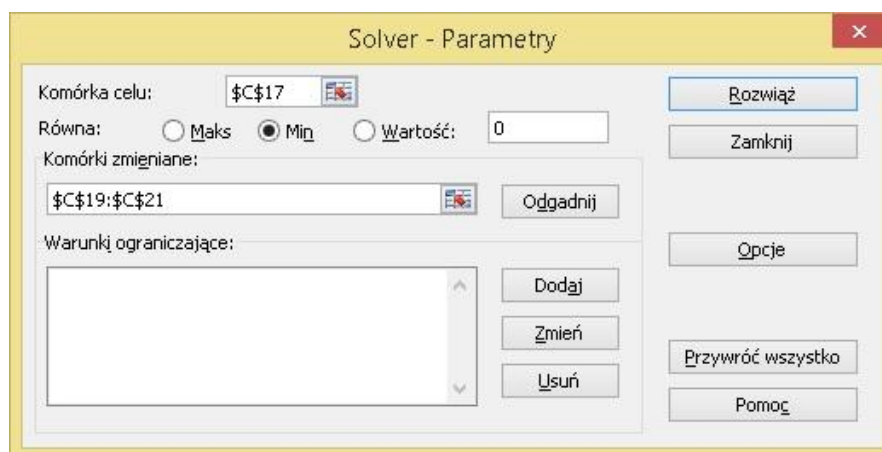
```

Rys. 2. Wartości temperatur w pliku 'wyniki.txt'.

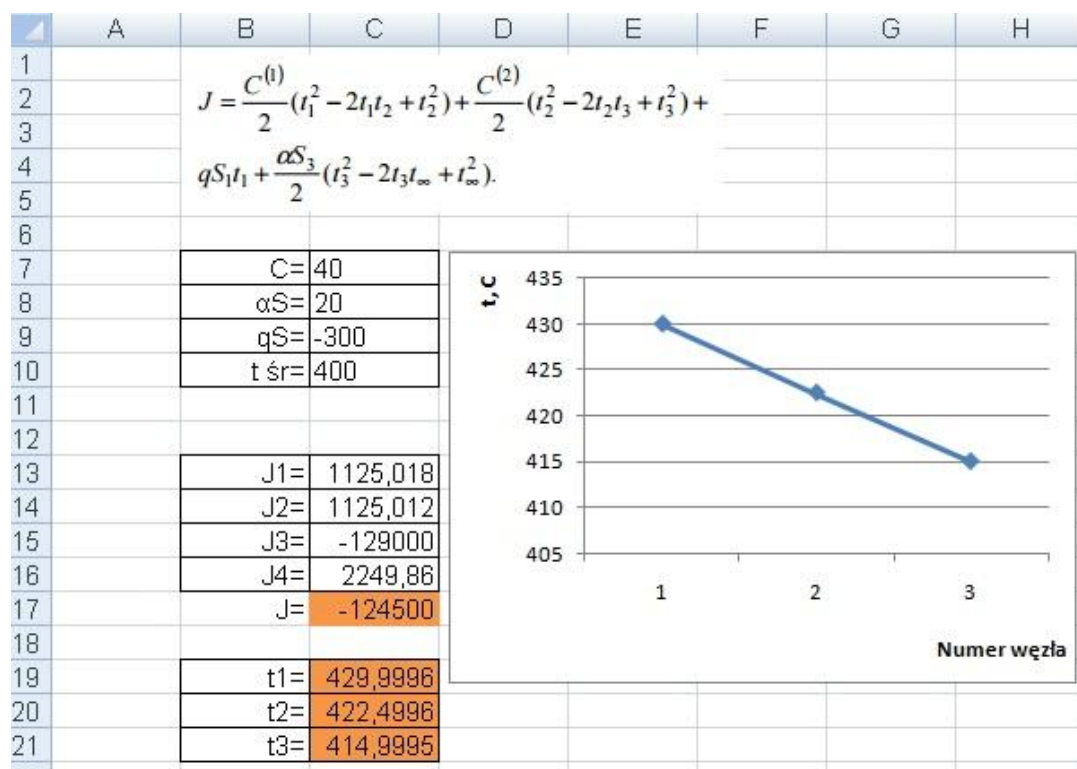
ZADANIE W PROGRAMIE EXCEL

Aby sprawdzić czy napisany przeze mnie program działa poprawnie wykonałem zadanie zamieszczone w pliku PDF. Polegało ono na obliczeniu wartości temperatur w węzłach siatki elementów skończonych za pomocą bezpośredniej minimalizacji funkcjonału.

Wprowadziłem potrzebne dane. Następnie napisałem odpowiednie funkcje liczące, stworzyłem wykres. Na koniec skorzystałem z narzędzia SOLVER ustawiając odpowiednie parametry i dane. Wyniki bezpośredniej minimalizacji funkcjonału oraz dane przedstawione są na rysunku poniżej (Rys. 3. , Rys. 4.).



Rys. 3. Parametry ustawione w narzędziu SOLVER



Rys. 4. Arkusz EXCEL po wykonaniu minimalizacji funkcjonału.

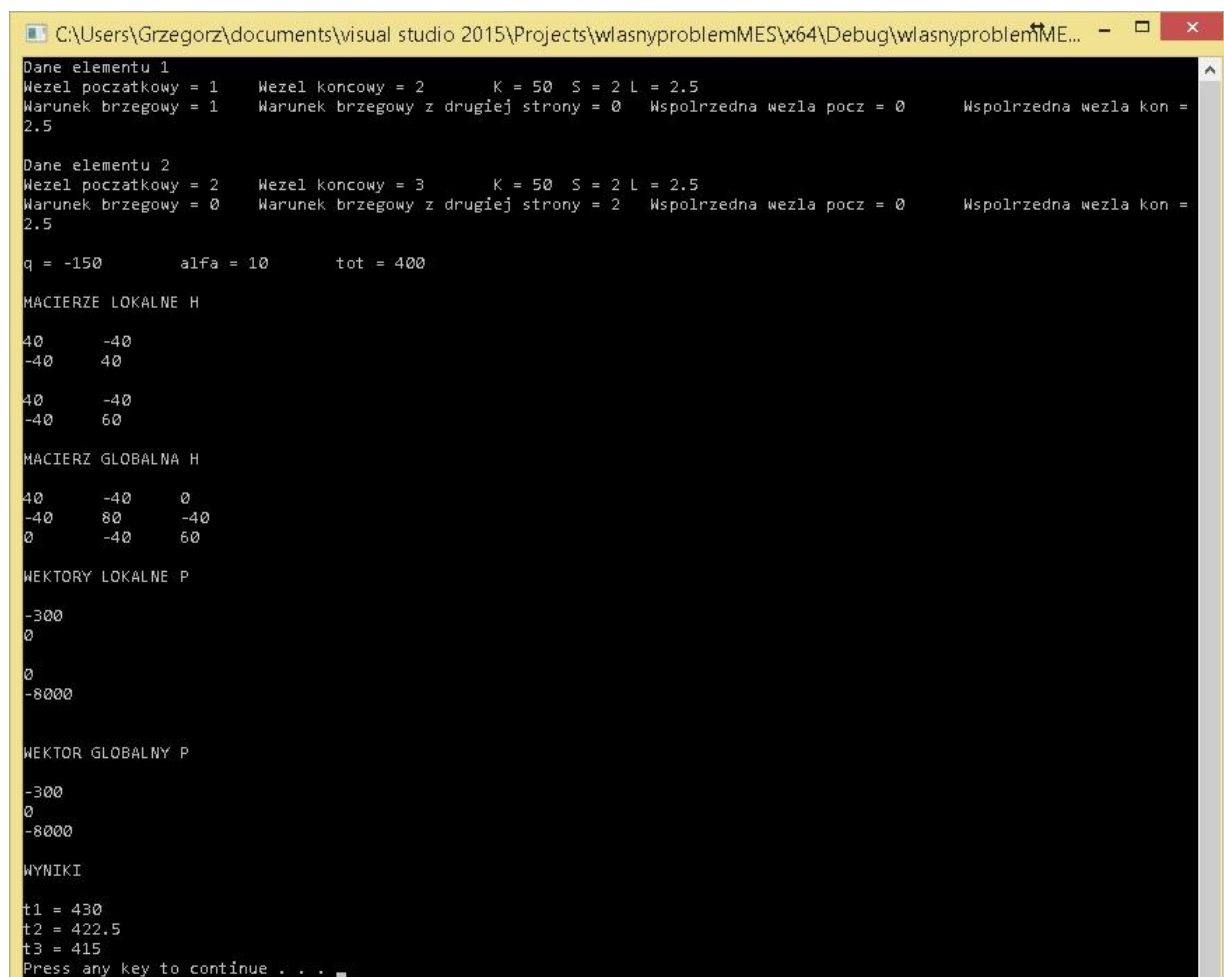
Przy zaokrągleniu wartości temperatur wynoszą:

$$t_1 = 430 \text{ K}$$

$$t_2 = 422,5 \text{ K}$$

$$t_3 = 415 \text{ K}$$

Porównując te dane z danymi z wykonania programu (Rys. 2.) widać, że wyniki są sobie równe dzięki czemu wiem, że mój program działa prawidłowo. Dodatkowe screeny z działania programu widać na Rys. 5..



```

C:\Users\Grzegorz\documents\visual studio 2015\Projects\wlasnyproblemMES\x64\Debug\wlasnyproblemME...
Dane elementu 1
Wezel poczatkowy = 1   Wezel koncowy = 2   K = 50   S = 2   L = 2.5
Warunek brzegowy = 1   Warunek brzegowy z drugiej strony = 0   Wspolrzeczna wezla pocz = 0   Wspolrzeczna wezla kon = 2.5

Dane elementu 2
Wezel poczatkowy = 2   Wezel koncowy = 3   K = 50   S = 2   L = 2.5
Warunek brzegowy = 0   Warunek brzegowy z drugiej strony = 2   Wspolrzeczna wezla pocz = 0   Wspolrzeczna wezla kon = 2.5

q = -150   alfa = 10   tot = 400

MACIERZE LOKALNE H
40   -40
-40   40
40   -40
-40   60

MACIERZ GLOBALNA H
40   -40   0
-40   80   -40
0   -40   60

WEKTORY LOKALNE P
-300
0
0
-8000

WEKTOR GLOBALNY P
-300
0
-8000

WYNIKI
t1 = 430
t2 = 422.5
t3 = 415
Press any key to continue . . .

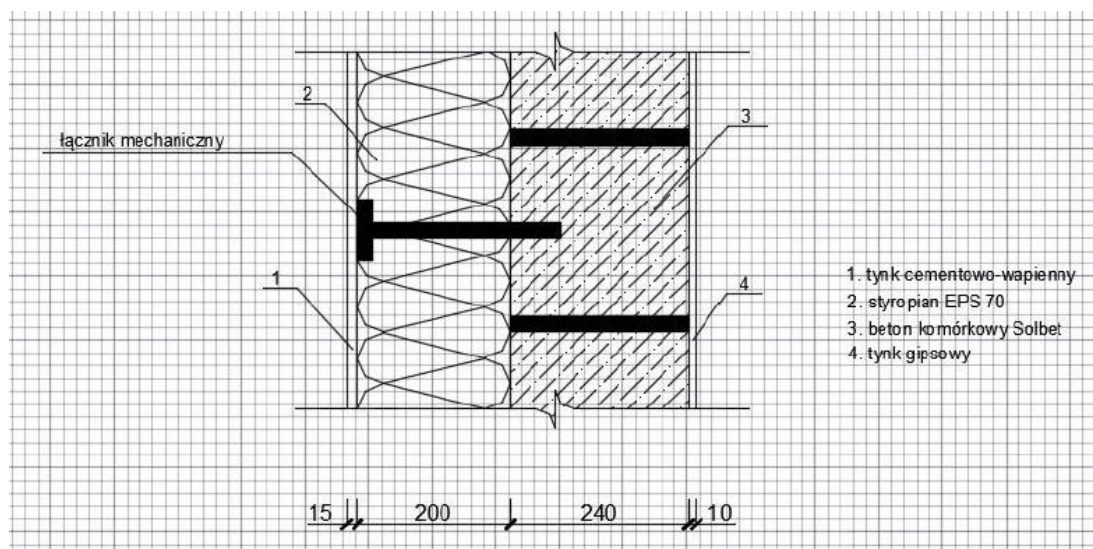
```

Rys. 5. Rezultat uruchomienia programu.

WŁASNY PROBLEM

Ściana zewnętrzna nośna domu

Dane do tego problemu uzyskałem od kolegi z budownictwa. Poniżej przedstawony jest schemat (Rys. 6.) oraz dane (Rys. 7.).



Rys. 6. Przekrój poprzeczny przez ścianę zewnętrzną nośną domu.

| Lp | Warstwa | Gęstość w stanie suchym $\rho [\frac{kg}{m^3}]$ | Grubość $d [cm]$ | Wsp. przewodzenia ciepła $[\frac{W}{m \cdot K}]$ |
|----|-------------------------|--|---------------------|---|
| 1 | Tynk gipsowy | 1300 | 1 | 0.3 |
| 2 | Beton komórkowy Solbet | 400 | 24 | 0.14 |
| 3 | Styropian EPS 70 | 15 ÷ 40 | 20 | 0.031 |
| 4 | Tynk cementowo-wapienny | 1850 | 1.5 | 0.82 |

Rys. 7. Zestawienie współczynników charakteryzujących warstwy przegrody ściany zewnętrznej

Gęstość w stanie suchym nie będzie nas interesowała w rozwiązywaniu tego zagadnienia. Na podstawie tych danych sporządziłem swoją tabelę z potrzebnymi danymi (Rys. 8.).

| Warstwa | Nr elementu | $K \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$ | $S [m^2]$ | $L [m]$ |
|-------------------------|-------------|--|-----------|---------|
| Tynk gipsowy | 1 | 0.3 | 1 | 0.01 |
| Beton komórkowy Solbet | 2 | 0.14 | 1 | 0.24 |
| Styropian EPS 70 | 3 | 0.031 | 1 | 0.20 |
| Tynk cementowo-wapienny | 4 | 0.82 | 1 | 0.015 |

Rys. 8. Zestawienie potrzebnych danych.

Oprócz danych w tabeli uwzględniłem takie dane:

$$q = -1.5 \frac{W}{m^2}$$

$$\alpha = 7 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$t_{\infty} = 21 \text{ }^{\circ}\text{C} = 294 \text{ K}$$

Problem jest rozwiązywany tym samym programem co zadanie poprzednie, więc nie będę drugi raz opisywał przebiegu jego działania. Jedyne co się różni to oczywiście dane oraz wyniki. Tym razem otrzymamy wektor składający się z 5 składowych, ponieważ mamy 4 elementy a co za tym idzie 5 węzłów. Dane z pliku tekstowego (Rys. 9.), wyniki w pliku tekstowym (Rys. 10.) oraz screen z działającym programem (Rys. 11.).

```

1 4 //liczba elementow
2 1 //id wezla pocz
3 1 //warunek brzegowy pocz
4 2 //id wezla kon
5 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
6 0.3 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
7 1 //powierzchnia elementu
8 0.01 //dlugosc elementu
9 2 //id 2 wezla pocz (ten sam co id wezla 1 kon)
10 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
11 3 //id 2 wezla kon
12 0 //warunek brzegowy kon
13 0.14 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
14 1 //powierzchnia 2 elementu
15 0.24 //dlugosc 2 elementu
16 3 //id 3 wezla pocz
17 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
18 4 //id 3 wezla kon
19 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
20 0.031 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
21 1 //powierzchnia 3 elementu
22 0.20 //dlugosc 3 elementu
23 4 //id 4 wezla pocz
24 0 //warunek brzegowy wspolnego wezla
25 5 //id 4 wezla koniec
26 2 //warunek brzegowy konca
27 0.82 //wspolczynnik przewodzenia ciepla
28 1 //powierzchnia 4 elementu
29 0.015 //dlugosc 4 elementu
30 -1.5 //q
31 7 //alfa
32 294 //tot - temp otoczenia
33

```

```

1 306.541
2 306.491
3 303.919
4 294.242
5 294.214

```

Rys. 9. i Rys. 10. Dane z pliku tekstowego 'daneW.txt' oraz wyniki 'wynikiW.txt'.

```

C:\Users\Grzegorz\documents\visual studio 2015\Projects\wlasnyproblemMES\x64\Debug\wlasnyproblemME...
0.01
Dane elementu 2
Wezel poczatkowy = 2   Wezel koncowy = 3   K = 0.14   S = 1 L = 0.24
Warunek brzegowy = 0   Warunek brzegowy z drugiej strony = 0   Wspolrzedna wezla pocz = 0   Wspolrzedna wezla kon = 0.24

Dane elementu 3
Wezel poczatkowy = 3   Wezel koncowy = 4   K = 0.031   S = 1 L = 0.2
Warunek brzegowy = 0   Warunek brzegowy z drugiej strony = 0   Wspolrzedna wezla pocz = 0   Wspolrzedna wezla kon = 0.2

Dane elementu 4
Wezel poczatkowy = 4   Wezel koncowy = 5   K = 0.82   S = 1 L = 0.015
Warunek brzegowy = 0   Warunek brzegowy z drugiej strony = 2   Wspolrzedna wezla pocz = 0   Wspolrzedna wezla kon = 0.015

q = -1.5   alfa = 7   tot = 294

MACIERZE LOKALNE H

30   -30
-30   30

0.583333   -0.583333
-0.583333   0.583333

0.155   -0.155
-0.155   0.155

54.6667   -54.6667
-54.6667   61.6667

MACIERZ GLOBALNA H

30   -30   0   0   0
-30   30.5833   -0.583333   0   0
0   -0.583333   0.738333   -0.155   0
0   0   -0.155   54.8217   -54.6667
0   0   0   -54.6667   61.6667

WEKTORY LOKALNE P

-1.5
0
0
0
0
0
-2058

WEKTOR GLOBALNY P

-1.5
0
0
0
-2058

WYNIKI
t1 = 306.541
t2 = 306.491
t3 = 303.919
t4 = 294.242
t5 = 294.214
Press any key to continue . . .

```

Rys. 11. Rezultat uruchomienia programu.

Wyniki temperatur:

$$t_1 = 306.54 \text{ K} = 33.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_2 = 306.49 \text{ K} = 33.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_3 = 303.91 \text{ K} = 30.9 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_4 = 294.24 \text{ K} = 21.2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_5 = 294.21 \text{ K} = 21.2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\infty} = 294 \text{ K} = 21 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

WNIOSKI

- ❖ Postać macierzowa znacznie ułatwia rozwiązanie problemu. Dla mnie i dla wielu innych ta postać jest bardziej przejrzysta niż ta w postaci zwykłych układów równań. Znając podstawowe własności i działania macierzy w dość łatwy sposób można rozwiązać układ równań, którego celem w tym przypadku było wyznaczenie temperatur na poszczególnych węzłach danego modelu.
- ❖ Program przeze mnie napisany pozwala w łatwy sposób obliczyć temperatury w poszczególnych węzłach jakiegoś materiału lub modelu złożonego z małej jak i dużej ilości warstw różnego rodzaju materiałów. Jedyne co musimy znać to informacje na temat tych materiałów takie jak: współczynnik przewodzenia ciepła, powierzchnię, długość. Poza tym potrzebne jeszcze będą temperatura otoczenia, współczynnik wymiany ciepła oraz strumień ciepła.
- ❖ Taki program może być bardzo przydatny nie tylko dla nas, ale i dla innych osób, które zajmują się przemysłem. Na przykład program ten pozwoliłbym budowlańcom dobrać odpowiednie materiały oraz ich grubości do budowania różnych ścian, dachów, ogólnie budynków. Taki wykaz temperatur pozwala na przykład ocenić czy dana powierzchnia będzie w stanie utrzymać dużo ciepła przez długi czas.
- ❖ Narzędzie SOLVER w programie EXCEL w bardzo łatwy sposób pozwala na to samo co napisany program. Narzędzie kilkoma kliknięciami potrafi wyliczyć temperatury w węzłach siatki elementów skończonych za pomocą bezpośredniej minimalizacji funkcjonału. Kiedy nie jesteśmy pewni poprawności w działaniu naszego programu nie ma problemu przetestować go za pomocą tego narzędzia jak to robiliśmy na konkretnym przykładzie.
- ❖ Analizując wyniki własnego przykładu ze ścianą zewnętrzną domu zauważam, iż temperatura w węźle pierwszym wzrosła do 306,54 K, w tym samym węźle, w którym był strumień ciepła.
- ❖ Temperatura w warstwie pierwszej czyli z tynku gipsowego nie zmieniła się prawie wcale co spowodowane jest, że grubość tej warstwy jest bardzo mała. Zmiana temperatury w warstwie drugiej tj. betonu komórkowego Solbet jest większa od tej w warstwie pierwszej i wynosi prawie 3 jednostki. Temperatura w warstwie styropianu EPS 70 znacznie różni się w swoich skrajnych węzłach, wynosi ponad 9 stopni. W przypadku kolejnej ostatniej warstwy sytuacja jest podobna jak w przypadku pierwszej też mamy do czynienia z tynkiem o podobnej grubości. Strata ciepła w przypadku piątego węzła jest dosyć mała, bo wynosi 0.2 stopnia.