

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Sprawozdanie nr 2

Sprawozdanie odnośnie programu napisanego w celu wyznaczenia
nieustalonego rozkładu temperatury we wsadzie o przekroju okrągłym

Grzegorz Haczyk

2017-01-24

Grupa projektowa 2

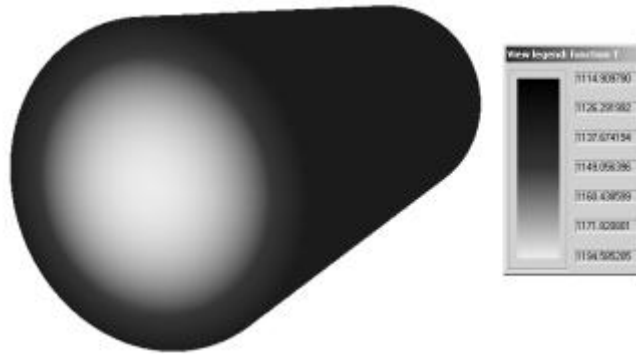
Numer indeksu: 278920



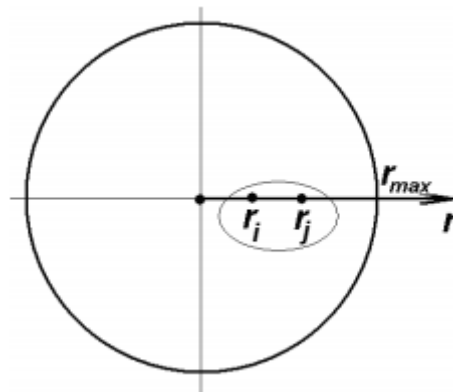
WSTĘP TEORETYCZNY

W celu przedstawienia problemu wyznaczania nieustalonego rozkładu temperatury rozpatrujemy proste jednowymiarowe zadanie. Analizujemy proces nieustalonego przewodnictwa ciepła we wsadzie o przekroju okrągłym. Przyjmujemy, że wymiana ciepła będzie odbywała się w sposób osiowo-symetryczny.

Przykładowy rozkład temperatury we wsadzie o przekroju okrągłym:



Schemat obliczeniowy do wyznaczenia nieustalonego rozkładu temperatury:



Do tego przypadku użyjemy funkcjonału:

$$J = \int_V \frac{k}{2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 dV - \int_V Q t dV + \int \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS$$

Temperaturę wewnątrz elementów wyrażamy wzorem:

$$t = \{N\}^T \{t\} = N_i t_i + N_j t_j = \frac{r_j - r}{\Delta r} t_i + \frac{r - r_i}{\Delta r} t_j$$

Δr - krok siatki,

N_i, N_j - funkcje kształtu,

t_i, t_j - temperatury w węzłach rozpatrywanego elementu

Oblicza się całki objętościowe powyższego funkcjonału, dlatego wyznaczamy parametry całkowania:

$$dV = 2\pi r L dr,$$

$$\int_S dS = 2\pi r_{\max} L$$

L - długość wsadu,

r_{\max} - promień wsadu

Potrzebna za chwilę będzie również wartość wyznacznika macierzy Jacobiego, którą oblicza się według wzoru:

$$\det[J] = \det \left[\frac{dr}{d\xi} \right] = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i + \frac{\partial N_j}{\partial \xi} r_j = \frac{r_j - r_i}{2} = \frac{\Delta r}{2}$$

Obliczanie pierwszej całki z funkcjonału:

$$\begin{aligned} \int_V k \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 dV &= \int_{r_i}^{r_j} k \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} t_i + \frac{\partial N_j}{\partial r} t_j \right)^2 2\pi r L dr = \pi L \int_{r_i}^{r_j} k \left(\frac{t_j - t_i}{\Delta r} \right)^2 r dr \\ &= \pi L k \left(\frac{t_j - t_i}{\Delta r} \right)^2 \sum_{p=1}^{n_p} (r_p w_p \det[J]) = \pi L k \frac{\Delta r}{2} \left(\frac{t_j - t_i}{\Delta r} \right)^2 \sum_{p=1}^{n_p} (r_p w_p) \end{aligned}$$

Druga całka uwzględnia niestacjonarność procesu zmiany temperatury dzięki funkcji Q która jest równa:

$$Q = c\rho \frac{dt}{d\tau}$$

i jest obliczana:

$$\int_V Q t dV = \int_V c\rho \frac{dt}{d\tau} t dV = 2\pi L c\rho \int_{r_i}^{r_j} \frac{dt}{d\tau} t r dr = \pi L c\rho \sum_{p=1}^{n_p} \left(\frac{dt}{d\tau} (N_i t_i + N_j t_j) r_p w_p \Delta r \right)$$

Trzecia całka odpowiadająca za warunek brzegowy:

$$\int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS = \pi L r_{\max} \alpha (t_j - t_\infty)^2$$

Podstawiając powyższe całki do funkcjonału dla wybranego elementu e oraz po przekształceniu otrzymamy:

$$J_e = k \frac{\Delta r}{2} \left(\frac{t_j - t_i}{\Delta r} \right)^2 \sum_{p=1}^{n_p} (r_p w_p) + c\rho \Delta r \sum_{p=1}^{n_p} \left(\frac{dt}{d\tau} (N_i t_i + N_j t_j) r_p w_p \right) + r_{\max} \alpha (t_j - t_\infty)^2$$

W celu minimalizacji funkcjonału wykorzystano warunek ekstremum funkcji:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_e}{\partial t_i} &= 0 \\ \frac{\partial J_e}{\partial t_j} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Po zróżniczkowaniu względem temperatury t_i i t_j oraz po ich przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{\partial J_e}{\partial t_i} = t_i \left(\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i^2 r_p w_p \right) + t_j \left(-\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p \right) - \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} (N_i t_{i0} + N_j t_{j0}) N_i r_p w_p = 0$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial t_j} = t_i \left(-\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p \right) + t_j \left(\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_j^2 r_p w_p + 2\alpha r_{\max} \right) - \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} (N_i t_{i0} + N_j t_{j0}) N_j r_p w_p - 2\alpha r_{\max} t_{\infty} = 0$$

Postać macierzowa wygląda następująco:

$$[K_e]\{t\} + \{F_e\} = 0$$

oraz elementy macierzy:

$$K_{11} = \frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i^2 r_p w_p,$$

$$K_{12} = -\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p,$$

$$K_{21} = -\frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p,$$

$$K_{22} = \frac{k}{\Delta r} \sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} N_j^2 r_p w_p + 2\alpha r_{\max},$$

$$F_1 = -\frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} (N_i t_{i0} + N_j t_{j0}) N_i r_p w_p,$$

$$F_2 = -\frac{c\rho\Delta r}{\Delta \tau} \sum_{p=1}^{n_p} (N_i t_{i0} + N_j t_{j0}) N_j r_p w_p - 2\alpha r_{\max} t_{\infty}.$$

Aby otrzymać układ równań dla całego obszaru należy dodawać do elementów globalnej macierzy odpowiednie elementy lokalnej macierzy każdego elementu skończonego:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} [K_e]$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{F_e\}.$$

Następnie układ równań rozwiązujemy wykorzystując metodę eliminacji Gaussa i otrzymujemy temperatury na poszczególnych węzłach.

OPIS PROGRAMU

Program został napisany w języku C++. Program napisany jest w jednym pliku źródłowym, w którym utworzono strukturę:

- ❖ struct element
 - int Np - liczba punktów całkowania
 - int WB - warunek brzegowy
 - double K - współczynnik przewodzenia ciepła
 - double C - ciepło właściwe
 - double Ro - gęstość
 - double Rmax - promień maksymalny
 - double Rp - punkt całkowania Gaussa
 - double Tot - temperatura otoczenia
 - double Alfa - współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła
 - double dR - krok siatki
 - double dTau - krok czasowy
 - double TpTau - temperatura wewnątrz elementu
 - double *E, *W, *N1, *N2 - ksi, waga, funkcje kształtu
 - double **Ke - lokalna macierz K
 - double *Fe - lokalny wektor F

W głównej części programu w pierwszej kolejności odbywa się wczytywanie danych z pliku "dane.txt"

1	0.00	r_{\min} - promień minimalny wsadu [m]
2	0.08	r_{\max} - promień maksymalny wsadu [m]
3	300	α - współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$
4	100	t_0 - temperatura początkowa [$^{\circ}C$]
5	200	t_{∞} - temperatura otoczenia [$^{\circ}C$]
6	700	c - ciepło właściwe $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$
7	7800	ρ - gęstość $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
8	25	k - współczynnik przewodzenia ciepła $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$
9	1000	τ_{\max} - czas procesu [s]

Są to dane z zadania rachunkowego 6.3 z pliku pdf.

Deklaruję macierz globalną gK oraz wektor gF oraz odpowiednią ilość elementów

```
double **gK = new double *[nh];
for (int i = 0; i < nh; i++) {
    gK[i] = new double[nh];
}
double *gF = new double[nh];
element *e1 = new element[nh];
```

Następnie przypisuje wartości wagom oraz ksi i obliczam funkcje kształtu:

```
W[0] = 1;
W[1] = 1;
E[0] = -0.5773502692;
E[1] = 0.5773502692;
N1[0] = 0.5 * (1 - E[0]);
N1[1] = 0.5 * (1 - E[1]);
```

```
N2[0] = 0.5 * (1 + E[0]);
N2[1] = 0.5 * (1 + E[1]);
```

W dalszej części programu są trzy pętle for zagnieżdżone, pierwsza która jest wykonywana dla każdego kroku czasowego, następna pętla wykonywana dla każdego elementu, a następna pętla jest odpowiedzialna za obliczanie lokalnej macierzy sztywności oraz za obliczanie lokalnego wektora obciążeń, a następnie generowana jest macierz globalna oraz wektor globalny:

```
//----- GENEROWANIE MACIERZY GLOBALNEJ -----
gF[i] = gF[i] + e1[i].Fe[0];
gF[i + 1] = gF[i + 1] + e1[i].Fe[1];
gK[pom][pom] = gK[pom][pom] + e1[i].Ke[0][0];
gK[pom][pom + 1] = gK[pom][pom + 1] + e1[i].Ke[0][1];
gK[pom + 1][pom] = gK[pom + 1][pom] + e1[i].Ke[1][0];
gK[pom + 1][pom + 1] = gK[pom + 1][pom + 1] + e1[i].Ke[1][1];
```

Następnie wywoływana jest funkcja która oblicza rozkład temperatury na każdym z węzłów w danym kroku.

W programie zaimplementowałem dwie funkcje jedną odpowiadającą za wyświetlanie macierzy globalnej, a drugą za obliczanie układów równań metodą eliminacji Gaussa, którą implementowałem w pierwszym programie.

Poniżej zrzuty ekranu podczas wykonywania się programu:

```

Dane:
Rmin - promien minimalny [m] : 0
Rmax - promien maksymalny [m] : 0.08
AlfaAir - wspolczynnik konwekcyjnej wymiany ciepla [W/(m^2*C)] : 300
Tp - temperatura poczatkowa [K] : 100
Tot - temperatura otoczenia [K] : 200
C - cieplo wlasciwe [J/(kg*K)] : 700
Ro - gestosc [kg/m^3] : 7800
K - wspolczynnik przewodzenia ciepla [W/(m*K)] : 0
TauMax - czas procesu [s] : 1000

dTau [s] : 50

  26.82   -23.18    0      0      0      0      0      0      0      -364
 -23.18   114.56   -69.54    0      0      0      0      0      0   -2184
  0      -69.54   229.12   -115.9    0      0      0      0      0   -4368
  0      0      -115.9   343.68   -162.26    0      0      0      0   -6552
  0      0      0      -162.26   458.24   -208.62    0      0      0   -8736
  0      0      0      0      -208.62   572.8    -254.98    0      0   -10920
  0      0      0      0      0      -254.98   687.36   -301.34    0   -13104
  0      0      0      0      0      0      -301.34   801.92   -347.7   -15288
  0      0      0      0      0      0      0      -347.7   479.42   -17972

WYNIKI
t1 = 100.413
t2 = 100.478
t3 = 100.65
t4 = 100.998
t5 = 101.649
t6 = 102.846
t7 = 105.044
t8 = 109.097
t9 = 116.61
  
```

Na powyższym zrzucie ekranu widzimy, że program wyświetla wczytane dane z pliku następnie wyświetla informacje o kroku czasowym, macierz globalną K i wektor F oraz wyniki dla pierwszego kroku czasowego.

Na drugim rzucie widać ostatni krok czasowy oraz jego wyniki, dla lepszej przejrzystości umieszczam w formie tabeli macierze w pierwszym kroku czasowym.

Macierz [K] oraz wektor {F}											
28,82	-23,18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-364
-23,18	114,56	-69,54	0	0	0	0	0	0	0	0	-2184
0	-69,54	229,12	-115,9	0	0	0	0	0	0	0	-4368
0	0	-115,9	343,68	162,26	0	0	0	0	0	0	-6552
0	0	0	-162,26	458,24	-208,62	0	0	0	0	0	-8736
0	0	0	0	-208,62	572,8	-254,98	0	0	0	0	-10920
0	0	0	0	0	0	-254,98	687,36	-304,34	0	0	-13104
0	0	0	0	0	0	0	-301,34	801,92	-347,7	0	-15288
0	0	0	0	0	0	0	0	-347,7	479,42	0	-17972

Wyniki zapisują się do pliku tekstowego "wyniki.txt", który prezentuję poniżej.

```

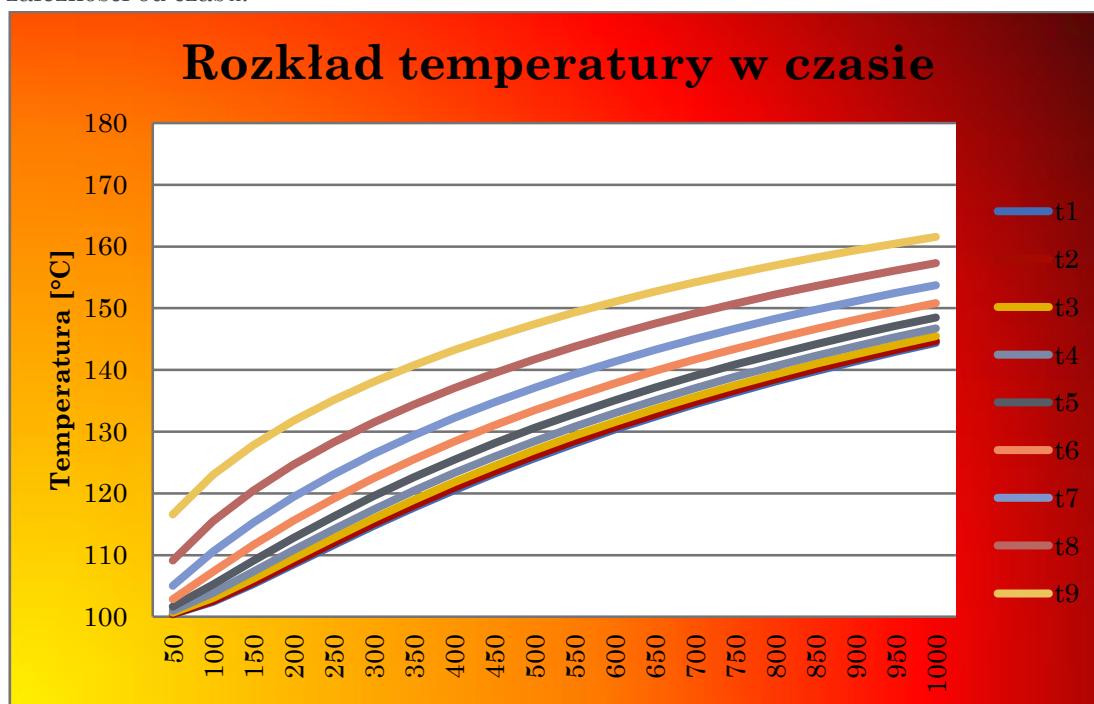
1 100.413 100.478 100.65 100.998 101.649 102.846 105.044 109.097 116.61
2 102.418 102.601 103.055 103.881 105.225 107.323 110.549 115.486 123.04
3 105.283 105.546 106.185 107.307 109.043 111.592 115.251 120.448 127.799
4 108.431 108.744 109.496 110.793 112.748 115.529 119.374 124.617 131.716
5 111.61 111.953 112.774 114.173 116.249 119.144 123.055 128.251 135.092
6 114.709 115.071 115.931 117.387 119.525 122.467 126.38 131.484 138.074
7 117.679 118.051 118.934 120.418 122.582 125.531 129.407 134.399 140.749
8 120.501 120.878 121.77 123.266 125.432 128.363 132.182 137.05 143.175
9 123.171 123.549 124.443 125.937 128.091 130.988 134.737 139.479 145.391
10 125.692 126.069 126.959 128.442 130.574 133.428 137.101 141.715 147.427
11 128.07 128.444 129.326 130.794 132.897 135.702 139.294 143.784 149.308
12 130.313 130.683 131.555 133.003 135.073 137.825 141.336 145.704 151.052
13 132.429 132.795 133.655 135.081 137.116 139.813 143.243 147.494 152.676
14 134.429 134.788 135.636 137.038 139.036 141.678 145.028 149.166 154.191
15 136.318 136.673 137.506 138.884 140.844 143.43 146.702 150.732 155.61
16 138.107 138.455 139.274 140.627 142.549 145.081 148.276 152.202 156.941
17 139.8 140.143 140.948 142.276 144.159 146.637 149.759 153.585 158.192
18 141.407 141.743 142.533 143.837 145.683 148.108 151.158 154.89 159.372
19 142.932 143.262 144.038 145.317 147.126 149.5 152.481 156.122 160.486
20 144.382 144.706 145.467 146.722 148.495 150.82 153.734 157.287 161.539

```

Powyższe wyniki skopiowałem do arkusza kalkulacyjnego w programie Excel, w celu lepszej przejrzystości oraz dokonania analizy na wykresie.

Czas [s]	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9
50	100.413	100.478	100.65	100.998	101.649	102.846	105.044	109.097	116.61
100	102.418	102.601	103.055	103.881	105.225	107.323	110.549	115.486	123.04
150	105.283	105.546	106.185	107.307	109.043	111.592	115.251	120.448	127.799
200	108.431	108.744	109.496	110.793	112.748	115.529	119.374	124.617	131.716
250	111.61	111.953	112.774	114.173	116.249	119.144	123.055	128.251	135.092
300	114.709	115.071	115.931	117.387	119.525	122.467	126.38	131.484	138.074
350	117.679	118.051	118.934	120.418	122.582	125.531	129.407	134.399	140.749
400	120.501	120.878	121.77	123.266	125.432	128.363	132.182	137.05	143.175
450	123.171	123.549	124.443	125.937	128.091	130.988	134.737	139.479	145.391
500	125.692	126.069	126.959	128.442	130.574	133.428	137.101	141.715	147.427
550	128.07	128.444	129.326	130.794	132.897	135.702	139.294	143.784	149.308
600	130.313	130.683	131.555	133.003	135.073	137.825	141.336	145.704	151.052
650	132.429	132.795	133.655	135.081	137.116	139.813	143.243	147.494	152.676
700	134.429	134.788	135.636	137.038	139.036	141.678	145.028	149.166	154.191
750	136.318	136.673	137.506	138.884	140.844	143.43	146.702	150.732	155.61
800	138.107	138.455	139.274	140.627	142.549	145.081	148.276	152.202	156.941
850	139.8	140.143	140.948	142.276	144.159	146.637	149.759	153.585	158.192
900	141.407	141.743	142.533	143.837	145.683	148.108	151.158	154.89	159.372
950	142.932	143.262	144.038	145.317	147.126	149.5	152.481	156.122	160.486
1000	144.382	144.706	145.467	146.722	148.495	150.82	153.734	157.287	161.539

Stworzyłem wykres przedstawiający rozkład temperatury dla każdego z węzłów w zależności od czasu.



WNIOSKI

Spoglądając na wykres rozkładu temperatury w czasie na poszczególnych węzłach, możemy dostrzec, że temperatura t_9 czyli w węźle 9 ostatnim wzrasta najszybciej, co znaczy, że najszybciej nagrzewa się warstwa na powierzchni wsadu. Wnioskować można z tego faktu, iż szybciej nagrzewają się węzły, w których pod uwagę brana jest konwekcja, a węzły bliższe środkowi wsadu nagrzewają się wolniej. Trzeba wziąć pod uwagę, że wsad wykonany jest z jednego materiału, tzn. w każdym swoim miejscu tego elementu właściwości są takie same. W przypadku kiedy mamy do czynienia z różnymi materiałami trzeba uwzględnić, że każdy z materiału może mieć różne ciepło właściwe, gęstość czy współczynnik przewodzenia ciepła, który to ma duży wpływ na to jak szybko przewodzone jest ciepło w danym materiale. Problem wtedy staje się bardziej skomplikowany i wykresy rozkładu temperatur w czasie nie będą wyglądały tak samo jak w naszym przypadku. Różnica temperatury pomiędzy węzłem pierwszym czyli w centrum wsadu, a węzłem ostatnim na powierzchni w pierwszym kroku czasowym wynosiła ponad $16\text{ }^{\circ}\text{C}$. W ostatnim kroku czasowym czyli 1000 sekund temperatura węzła na powierzchni wynosiła $161,5\text{ }^{\circ}\text{C}$, a w węźle najbardziej wewnątrz wsadu wynosiła $144\text{ }^{\circ}\text{C}$. Reasumując program przeze mnie napisany pozwala w dość łatwy sposób wyznaczyć nieustalony rozkład temperatury w tym przypadku we wsadzie o przekroju okrągłym kiedy znamy takie dane jak parametry elementu oraz jego właściwości. Program daje nam możliwość symulacji różnych procesów z dziedziny przemysłu.