Enumeración de poliominós

Emanuel Gutiérrez Lira

Université de Québec à Trois-Rivières

Octubre, 2015

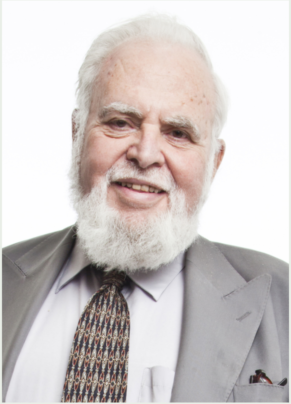
Contenido

Los poliominós

Historia...

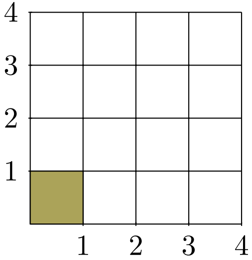
- A finales del siglo XIX ya eran utilizados en rompecabezas.
- En 1953, Golomb propuso el término poliominó (*polyomino*) por primera vez.
- Martin Gardner popularizo el término a mediados de los años 50's.
- Actualmente son objeto de estudio en el área de combinatoria.

Solomon W. Golomb



Definición

Una *celda* es un cuadrado unitario orientado en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y una *célula* es una celda "ocupada".

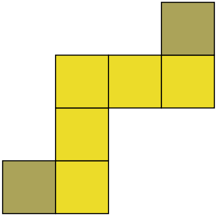


Una célula

Definición

Un *camino* conecta dos células de coordenadas (a_1, b_1) y (a_n, b_n), si existe un una serie de células con coordenadas $S = \{(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)\}$ tal que:

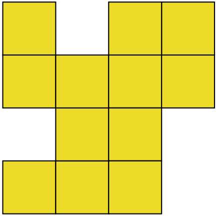
$$\sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2} = 1, \qquad \forall (a_i, b_i) \in S \setminus (a_n, b_n)$$



Un camino

Definición

Un *poliominó* es un conjunto de células tal que cualquier par de células en éste, está conectado por un camino.

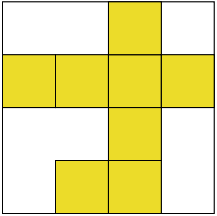


Un poliominó Un no-poliominó

El *área de un poliominó* es el número de células que contiene.
El *grado* de una célula es el número de células que están a distancia 1.

Definición

Sea **R** un rectángulo $b \times h$, $b, h \in \mathbb{N}$, un poliominó que tiene contacto con los cuatro lados de este rectángulo, es un *poliominó inscrito* en **R**. Un *poliominó libre* es un poliominó que no tienen la restricción de estar inscrito en un rectángulo.

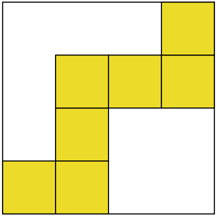


Polinomio inscrito

Minimales

Un *poliominó de área mínima* o *minimal* es un poliominó inscrito con área

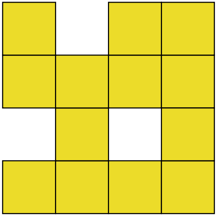
$$b + h - 1$$



Polinomio minimal

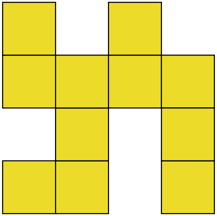
Árboles

Un *ciclo* en un poliominó es un camino dónde la célula inicial es también la célula final.



Árboles

Un poliominó es llamado *árbol* si no existen ciclos en él.

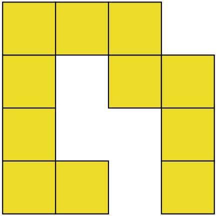


Árbol

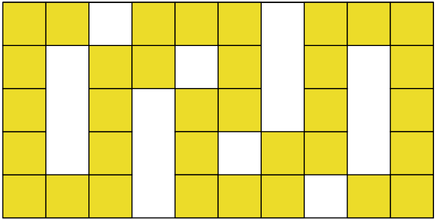
Las células que tienen grado 1 en un árbol son llamadas *hojas*.

Serpientes

Un árbol es llamado *serpiente* si el número de hojas es exactamente 2.



Serpiente

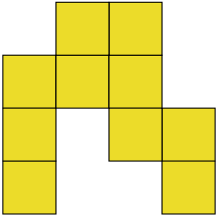


Serpiente de área mixamal

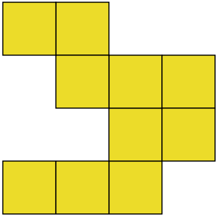
Una *serpiente de área maximal* es una sepiente inscrita tal que sea si se agrega una célula más se forma un ciclo.

Convexos

Un poliominó es *verticalmente convexo* si todas sus columnas son conexas. Analogamente, un poliominó *horizontalmente convexo* tiene todos sus renglones convexos.



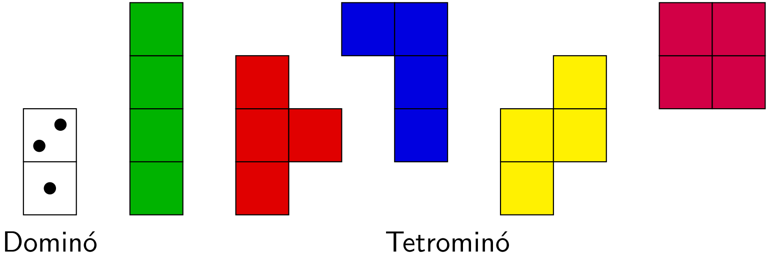
Verticalmente conexo



Horizontalmente conexo

Un polinomio que es al mismo tiempo vertical y horizontalmente conexo es llamado un *polinomio conexo*.

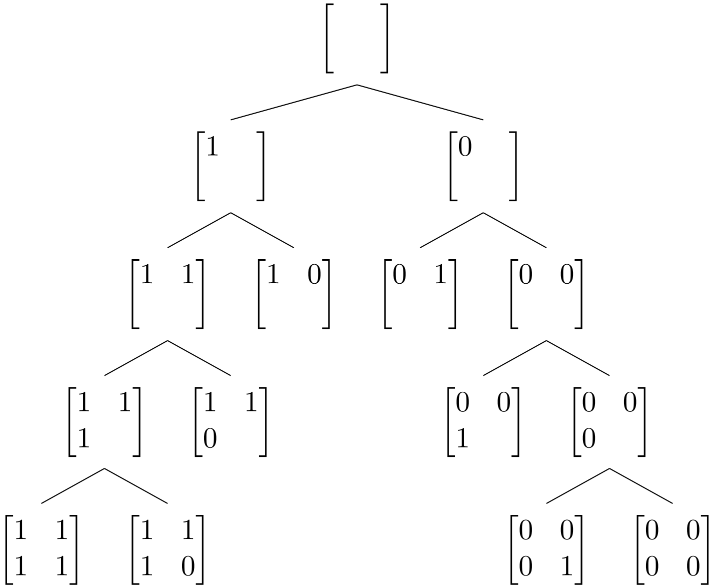
Ejemplos comunes



Algoritmo de enumeración

- Enumerar los poliominós inscritos en un rectángulo $b \times h$.
- Se llena una matriz renglón por renglón de valores numéricos con el propósito de saber si una celda está ocupada o no por una célula.
- Ya que sólo hay dos casos posibles, se construye un árbol binario donde la arista izquierda de cada nodo representa el hecho de haber agregado una célula, y la arista derecha, el caso contrario.
- La altura del árbol de búsqueda es $a = b \times h + 1$, y el número de nodos está dado por $2^a - 1$

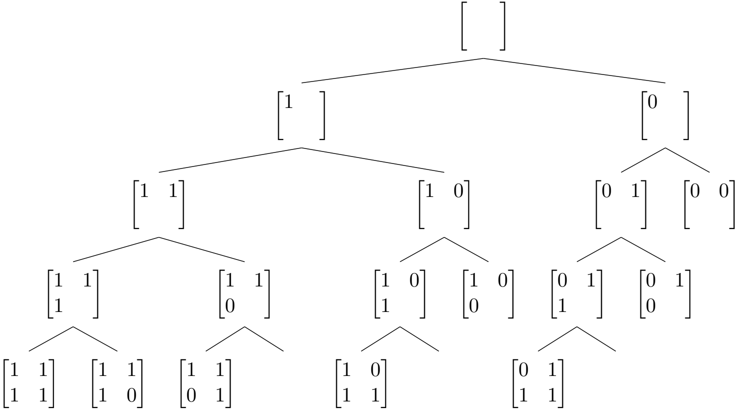
Árbol binario para una matriz de 2×2



Árbol binario

b	h	Nro. nodos
2	2	31
2	3	127
3	3	1023
3	4	8191
...	...	...
6	6	$137,438,953,499$

- La idea es podar las ramas del árbol que no conducen a obtener una configuración factible de un poliominó.



Reglas de poda

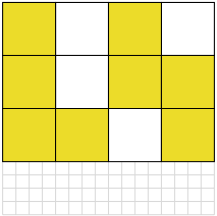
- Asegurarse que el polinomio sea inscrito. Verificando que haya células
  - **Arriba** índice $<$ b
  - **Izquierda** índice **MOD** b $= 0$
  - **Derecha** (índice $+ 1$) **MOD** b $= 0$
  - **Abajo** índice $\geq$ b $\times$ h - b
- Verificar el parámetro del área. Se puede podar cuando el número de células en la configuración ha sobrepasado el valor del parámetro, o no se pueden agregar más células para obtener la cantidad deseada. Podar si:

$$\begin{aligned} \textbf{área actual} &> \textbf{área buscada} \\ \textbf{área actual} + (\mathrm{b} \times \mathrm{h} - \textbf{área actual}) &< \textbf{área buscada} \end{aligned}$$

- Asegurarse que la configuración sea conexa.

Problema de conexidad mínima

¿Cuál es el número mínimo de células que debemos agregar para conectar las componentes en una configuración?

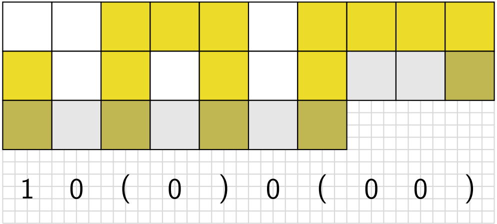


¿Posible configuración factible?

Se utiliza el alfabeto:

$$\begin{cases} 0 & \text{Celda vacía} \\ 1 & \text{Célula aislada} \\ 2 & \text{Primera célula de una componente} \\ 3 & \text{Célula intermedia de una componente} \\ 4 & \text{Última célula de una componente} \end{cases}$$

para representar el estado de una configuración en la frontera entre las celdas que ya han sido tocadas por el algoritmo y las que aún no.



Para la configuración:

0 1 0 0 (0 -) 0 0 0 1 0 (0) 0

se requieren 5 + 5 + 2 + 2 = 14 células. En el caso general, donde la configuración es de la forma:

$$0^{g0}\ \alpha_1\ 0^{g1}\ \alpha_2\ 0^{g2}\ \cdots\ 0^{gk-1}\ \alpha_k\ 0^{gk}$$

donde α_i es un componente aislado como ( ), (0), (0 - 0 -), etc. el número de células es

$$g0 + 1 + \sum_{j=1}^{k} g_j + 2 + gk + 1$$

Para la configuración:

- 0 0 (0 1 0 - 0 1) 0 0 ( ) 0 0 ( ) 0 0 -

¿Cuál es la mejor manera para conectar los componentes?

¡Gracias!