AG Algebra
Differential graduierte Lie Algebren

Stefan Hackenberg

05.06.2014

Generalvoraussetzung

k ein Körper mit Charakteristik 0. V ein k-Vektorraum.

Generalvoraussetzung

k ein Körper mit Charakteristik 0. V ein k-Vektorraum.

Notation

Sei L eine Lie Algebra. Für $a \in L$ heißt

$$\mathrm{ad}(a) = [a, \_] : \; L \to L, \quad b \mapsto [a, b]$$

Adjunktion mit a.

Generalvoraussetzung

k ein Körper mit Charakteristik 0. V ein k-Vektorraum.

Notation

Sei L eine Lie Algebra. Für $a \in L$ heißt

$$\mathrm{ad}(a) = [a, \_] : \; L \to L, \quad b \mapsto [a, b]$$

Adjunktion mit a.

Notation

Für eine assoziative Algebra R bezeichne R_L die dazu assoziierte Lie Algebra mit Lie-Klammer $[a, b] := ab - ba$.

Notationen

Notationen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \; v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad\qquad T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

Notationen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n \geq 0} v_n : \; v_n \in \bigotimes^n V \right\} \quad \xleftrightarrow{\text{unendl. Summen} \qquad \text{endl. Summen}} \quad T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \bigotimes^n V$$

Notationen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \; v_n \in \bigotimes^n V \right\} \xleftrightarrow[\text{endl. Summen}]{\text{unendl. Summen}} T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

Notationen

unendl. Summen ⟷ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad \overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$

Notationen

unendl. Summen $\longleftrightarrow$ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$ Ideal in $P(V)$

$$\overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$ Ideal in $T(V)$

Notationen

unendl. Summen ⟷ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

$$T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$

Ideal in $P(V)$

$$\overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$

Ideal in $T(V)$

$$E(V) := 1 + \mathfrak{m}(V)$$

Notationen

unendl. Summen ⟷ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$ Ideal in $P(V)$

$$\overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$ Ideal in $T(V)$

$$E(V) := 1 + \mathfrak{m}(V)$$

$$e : \mathfrak{m}(V) \to E(V), \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log : E(V) \to \mathfrak{m}(V), \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Notationen

unendl. Summen ⟷ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\} \qquad T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

assoziative k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \ v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$ Ideal in $P(V)$

$$\overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$ Ideal in $T(V)$

$$E(V) := 1 + \mathfrak{m}(V)$$

sind invers zueinander

$$e : \mathfrak{m}(V) \to E(V), \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log : E(V) \to \mathfrak{m}(V), \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Notationen

$$\widehat{I}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$$\widehat{L}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

Notationen

$$\widehat{I}(V) \;:=\; \{x \in P(V) :\; \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$$\widehat{L}(V) \;:=\; \{x \in P(V) :\; \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

$\Delta, p, q : P(V) \to P(V \oplus V)$ induziert durch

$\Delta_1(v) = (v, v), \quad p_1(v) = (v, 0), \quad q_1(v) = (0, v)\,.$

Notationen

$$\widehat{l}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$$l(V) :=$$ Die kleinste Lie Unteralgebra von $\overline{T(V)}_L$, die V enthält

$$\widehat{L}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

$\Delta, p, q : P(V) \to P(V \oplus V)$ induziert durch

$$\Delta_1(v) = (v, v), \quad p_1(v) = (v, 0), \quad q_1(v) = (0, v)\,.$$

Notationen

die *freie Lie-Algebra von V*

$$\widehat{l}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$l(V)$:= Die kleinste Lie Unteralgebra von $\overline{T(V)}_L$, die V enthält

$$\widehat{L}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

$\Delta, p, q : P(V) \to P(V \oplus V)$ induziert durch

$\Delta_1(v) = (v, v), \quad p_1(v) = (v, 0), \quad q_1(v) = (0, v)\,.$

Notationen

die *freie Lie-Algebra von V*

$$\widehat{l}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$l(V) :=$ Die kleinste Lie Unteralgebra von $\overline{T(V)}_L$, die V enthält

$$\widehat{L}(V) := \{x \in P(V) : \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

$\Delta, p, q : P(V) \to P(V \oplus V)$ induziert durch

$$\Delta_1(v) = (v, v), \quad p_1(v) = (v, 0), \quad q_1(v) = (0, v)\,.$$

Universelle Eigenschaft: Ist H eine Lie Algebra und $f : V \to H$ eine lineare Abbildung, so $\exists! \, \phi : l(V) \to H$ Homomorphismus von Lie Algebren, der f fortsetzt.

Universelle Eigenschaft explizit

Satz (Dynkyn-Sprecht-Wever)

Sei H eine Lie Algebra und $\sigma_1 : V \to H$ eine lineare Abbildung. Setze für $n \geq 2$

$$\sigma_n : \otimes^n V \to H, \; \sigma_n(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) := [\sigma_1(v_1), \sigma_{n-1}(v_2 \otimes \ldots \otimes v_n)] .$$

Dann gilt:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n} : \; I(V) \to H$$

ist der eindeutige Lie-Algebren-Homomorphismus, der σ_1 fortsetzt.

Universelle Eigenschaft explizit

Satz (Dynkyn-Sprecht-Wever)

Sei H eine Lie Algebra und $\sigma_1 : V \to H$ eine lineare Abbildung. Setze für $n \geq 2$

$$\sigma_n : \otimes^n V \to H, \ \sigma_n(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) := \left[\sigma_1(v_1), \sigma_{n-1}(v_2 \otimes \ldots \otimes v_n)\right].$$

Dann gilt:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n} : \ I(V) \to H$$

ist der eindeutige Lie-Algebren-Homomorphismus, der σ_1 fortsetzt.

Beispiel

Ist V selbst eine Lie Algebra und $\sigma_1 = \mathrm{id}_V$, so ist

$$\sigma_n(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = [v_1, [v_2, [\ldots, [v_{n-1}, v_n]..]$$

Notationen

unendl. Summen ⟷ endl. Summen

$$P(V) := \left\{ \sum_{n\geq 0} v_n : \; v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$

assoziative k-Algebra durch Cauchy-Produkt

$$T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes^n V$$

unitäre k-Algebra durch $\otimes$

$$\mathfrak{m}(V) := \left\{ \sum_{n\geq 1} v_n : \; v_n \in \bigotimes^n V \right\}$$ Ideal in $P(V)$

$$\overline{T(V)} := \bigoplus_{n\geq 1} \bigotimes^n V$$ Ideal in $T(V)$

$$E(V) := 1 + \mathfrak{m}(V)$$

sind invers zueinander

$$e : \mathfrak{m}(V) \to E(V), \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log : E(V) \to \mathfrak{m}(V), \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\widehat{l}(V) := \{x \in P(V) : \; \Delta(x) = p(x) + q(x)\}$$

$$\widehat{L}(V) := \{x \in P(V) : \; \Delta(x) = p(x)q(x)\}$$

$\Delta, p, q : P(V) \to P(V \oplus V)$ induziert durch

$$\Delta_1(v) = (v, v), \quad p_1(v) = (v, 0), \quad q_1(v) = (0, v).$$

die *freie Lie-Algebra von V*

$l(V)$:= Die kleinste Lie Unteralgebra von $\overline{T(V)}_L$, die V enthält

Universelle Eigenschaft: Ist H eine Lie Algebra und $f : V \to H$ eine lin. Abbildung, so $\exists! \; \phi : l(V) \to H$ LA'Hom, der f fortsetzt.

BCH

Satz (Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel)

Sei V ein Vektorraum. Dann induziert

$$* : \widehat{l}(V) \times \widehat{l}(V) \to \widehat{l}(V), \quad x * y \ := \ \log(e^x e^y)$$

eine Gruppenstruktur auf $\widehat{l}(V)$, die explizit gegeben ist durch

$$a * b \ = \ \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{p_1+q_1>0 \\ \dots \\ p_n+q_n>0}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)\right)^{-1}}{p_1!q_1!\dots p_n!q_n!} \ \mathrm{ad}(a)^{p_1}\,\mathrm{ad}(b)^{q_1}\dots\mathrm{ad}(b)^{q_n-1}\,b$$

Definition

Sei L eine Lie Algebra. L heißt *nilpotent*, falls $L^n = 0$, für ein $n > 0$, wobei $L^n := [L, L^{n-1}]$, $L^1 := L$.

Definition

Sei L eine Lie Algebra. L heißt *nilpotent*, falls $L^n = 0$, für ein $n > 0$, wobei $L^n := [L, L^{n-1}]$, $L^1 := L$.

Satz

Sei V eine nilpotente Lie Algebra. Dann induziert

$$* : V \times V \to V,$$

gegeben durch die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, eine Gruppenstruktur auf V.

Definition

Sei L eine Lie Algebra. L heißt *nilpotent*, falls $L^n = 0$, für ein $n > 0$, wobei $L^n := [L, L^{n-1}]$, $L^1 := L$.

Satz

Sei V eine nilpotente Lie Algebra. Dann induziert

$$* : V \times V \to V,$$

gegeben durch die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, eine Gruppenstruktur auf V.

Definition

Sei V eine nilpotente Lie Algebra. Für die Gruppe $(V, *)$ schreibe auch

$$\exp(V) := \{e^v : v \in V\} \qquad \text{mit} \qquad e^v e^w := e^{v*w}.$$

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

1. $[\ ,\ ]$ homogen, alternierend ist, d.h. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$, $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$ für alle homogenen a, b,

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

1. $[\ ,\ ]$ homogen, alternierend ist, d.h. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$, $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$ für alle homogenen a, b,
2. die graduierte Jacobi-Identität $\forall a, b, c$ homogen gilt:

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$$

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

1. $[\ ,\ ]$ homogen, alternierend ist, d.h. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$, $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$ für alle homogenen a, b,
2. die graduierte Jacobi-Identität $\forall a, b, c$ homogen gilt:
$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$$
3. und $\mathrm{d}(L^i) \subset L^{i+1}$, $\quad \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0, \quad \mathrm{d}[a, b] = [\mathrm{d}\, a, b] + (-a)^{\bar{a}}[a, \mathrm{d}\, b]$.

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

1. $[\ ,\ ]$ homogen, alternierend ist, d.h. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$, $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$ für alle homogenen a, b,
2. die graduierte Jacobi-Identität $\forall a, b, c$ homogen gilt:
$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$$
3. und $\mathrm{d}(L^i) \subset L^{i+1}$, $\quad \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, $\quad \mathrm{d}[a, b] = [\mathrm{d}\, a, b] + (-a)^{\bar{a}}[a, \mathrm{d}\, b]$.

Definition (formal)

Eine DGLA L heißt *formal*, falls L quasiisomorph zur DGLA $H^\bullet(L)$ ist

Definition (DGLA)

Eine *differential graduierte Lie Algebra* (DGLA) $(L, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorraum $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$, einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ und einer linearen Abbildung $d \in \mathrm{Hom}^1(L, L)$, genannt *Differential*, so dass

1. $[\ ,\ ]$ homogen, alternierend ist, d.h. $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$, $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$ für alle homogenen a, b,
2. die graduierte Jacobi-Identität $\forall a, b, c$ homogen gilt:
$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$$
3. und $\mathrm{d}(L^i) \subset L^{i+1}$, $\quad \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, $\quad \mathrm{d}[a, b] = [\mathrm{d}\, a, b] + (-a)^{\bar{a}}[a, \mathrm{d}\, b]$.

Definition (formal)

Eine DGLA L heißt *formal*, falls L quasiisomorph zur DGLA $H^\bullet(L)$ ist

Definition (Derivation)

Sei L eine DGLA. $f : L \to L$ heißt *Derivation von Grad n*, falls $f(L^i) \subset L^{i+n}$ und

$$f([a, b]) = [f(a), b] + (-1)^{n\bar{a}}[a, f(b)]$$

Definition (ad_0-nilpotent)

Eine DGLA L heißt ad_0-*nilpotent*, falls für alle i, das Bild von

$$\mathrm{ad}: \; L^0 \to \mathrm{End}(L^i)$$

in einer nilpotenten Unteralgebra landet.

Definition (ad_0-nilpotent)

Eine DGLA L heißt ad_0-*nilpotent*, falls für alle i, das Bild von

$$\mathrm{ad}: \; L^0 \to \mathrm{End}(L^i)$$

in einer nilpotenten Unteralgebra landet.

Definition (Maurer-Cartan-Gleichung)

Die *Maurer-Cartan-Gleichung* einer DGLA L lautet

$$d(a) + \frac{1}{2}[a, a] = 0, \qquad a \in L^1.$$

Die Lösungen $MC(L) \subset L^1$ heißen *Maurer-Cartan-Elemente der DGLA L*.

Satz

Sei L eine ad_0-nilpotente DGLA. Dann existiert eine Operation von $\exp(L^0)$ auf den Maurer-Cartan-Elementen $MC(L)$, die explizit für $a \in L^0$, $w \in MC(L)$ gegeben ist durch

$$e^a w \;=\; w + \sum_{n \geq 0} \frac{\mathrm{ad}(a)^n}{(n+1)!} \left([a, w] + \mathrm{d}(a)\right),$$

diese heißt *Eich-Operation*.