

Masterarbeit

---

# Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu Normalbasen für Erweiterungen endlicher Körper

---

vorgelegt von

**Stefan Hackenberg**

am

**Institut für Mathematik**

der

**Universität Augsburg**

betreut durch

**Prof. Dr. Dirk Hachenberger**

Stand

**6. November 2014**



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Grundbegriffe</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Ein wenig Gruppentheorie . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Automorphismen über endlichen Körpern . . . . .  | 3         |
| <b>2</b> | <b>Der Zerfall von <math>x^n - 1</math> und die Kreisteilungspolynome <math>\Phi_D(x)</math></b> | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Moduln</b>  | <b>15</b> |
| 3.1      | Über Moduln über Hauptidealbereichen . . . . .   | 15        |
| 3.2      | Vektorräume als Moduln . . . . .   | 20        |
| <b>4</b> | <b>Explizite Konstruktion von Normalbasen</b>  | <b>25</b> |
| 4.1      | Grundlegende Ideen . . . . .   | 25        |
| 4.2      | Stark reguläre Erweiterungen . . . . .   | 26        |
| 4.3      | Reguläre Erweiterungen . . . . .   | 30        |
| 4.4      | Normalbasen mit Dickson-Polynomen . . . . .  | 33        |
| 4.4.1    | Normale und vollständig normale Polynome mit Dickson-Polynomen . . . . .                         | 37        |
| <b>5</b> | <b>Vollständige Normalbasen</b>  | <b>39</b> |
| <b>6</b> | <b>Enumeration primitiv vollständig normaler Elemente</b>  | <b>44</b> |
| 6.1      | Theoretische Enumerationen . . . . .   | 46        |
| 6.2      | Implementierung endlicher Körper und Körpererweiterungen . . . . .                               | 49        |
| 6.2.1    | Beschreibung von Elementen endlicher Körper . . . . .  | 50        |
| 6.2.2    | Arithmetik in endlichen Körpern . . . . .  | 52        |
| 6.2.3    | Matrizen und Polynome über endlichen Körpern . . . . .   | 58        |
| 6.3      | Potenzieren und Primitivitätstest . . . . .  | 60        |
| 6.3.1    | Potenzieren . . . . .  | 60        |
| 6.3.2    | Primitivitätstest . . . . .  | 62        |
| 6.4      | Frobenius-Auswertung und Test auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft . . . . .                    | 65        |
| 6.4.1    | Frobenius-Auswertung . . . . .   | 65        |
| 6.4.2    | Testen von vollständigen Erzeugern . . . . .   | 68        |
| 6.5      | Implementierung der gezielten Enumeration . . . . .  | 70        |
| 6.5.1    | Enumeration eines verallgemeinerten Kreisteilungsmoduls . . . . .                                | 70        |
| 6.5.2    | Dynamische Enumeration des größten Kreisteilungsmoduls . . . . .                                 | 73        |
| 6.5.3    | Top-Level-Implementierung in Sage . . . . .  | 80        |
| 6.5.4    | Ein ausführliches Beispiel . . . . .   | 89        |
| 6.6      | Auswertung der Ergebnisse . . . . .  | 96        |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b>Literaturverzeichnis</b> | <b>97</b> |
| <b>A Tabellen</b>           | <b>99</b> |

# Kapitel 1

## Grundbegriffe

In diesem Kapitel wollen wir ein paar grundlegende Resultate wiederholen, die dem Leser sicherlich bekannt sind. Daher werden wir die meisten Aussagen ohne Beweis lediglich zitieren. Wir beginnen dabei bei der Gruppentheorie und zitieren einige Aussagen über zyklische Gruppen. Diese werden uns später helfen, die Untergruppe der (primitiven) Einheitswurzeln in Kapitel 2 zu verstehen. Im anschließend Abschnitt rekapitulieren wir ein wenig die Galoistheorie von endlichen Körpern. Insbesondere wollen wir wiederholen, dass diese zyklisch ist und von einem speziellen Automorphismus erzeugt wird.

### 1.1 | Ein wenig Gruppentheorie

[13, Theorem 1.15] fasst alle notwendigen Resultate zusammen.

#### Satz 1.1.

- (1) Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist wieder zyklisch.
- (2) Sei  $\langle a \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ , so erzeugt  $a^k$  eine Untergruppe der Ordnung  $\frac{m}{\text{ggT}(m,k)}$ .
- (3) Sei  $\langle a \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $m$  und  $d \mid m$ , so enthält  $\langle a \rangle$  genau eine Untergruppe der Ordnung  $d$ .
- (4) Sei  $f$  ein positiver Teiler der Gruppenordnung einer endlichen zyklischen Gruppe  $\langle a \rangle$ . Dann enthält  $\langle a \rangle$  genau  $\varphi(f)$  Elemente der Ordnung  $f$ .
- (5) Eine zyklische Gruppe der Ordnung  $m$  enthält genau  $\varphi(m)$  ( $\varphi$  bezeichne die Eulersche Phifunktion) Erzeuger. Ist  $a$  ein Erzeuger, so sind alle Erzeuger der Form  $a^r$  mit  $\text{ggT}(r, m) = 1$ .

Da wir später ein paar Eigenschaften der Eulerschen Phifunktion benötigen werden, wiederholen wir die wohlbekannte Definition der Eulerschen Phifunktion und geben wir dann die wichtigsten

Rechenregeln an.

---

**Definition 1.2 (Eulersche Phifunktion).**

Die Funktion

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N}^*, \\ n &\mapsto |\{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n, \text{ ggT}(a, n) = 1\}| \end{aligned}$$

heißt *Eulersche  $\varphi$ -Funktion*.

---



---

**Definition 1.3 (quadratfreier Teil).**

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_l^{r_l}$  seine Primfaktorzerlegung. Dann heißt

$$\nu(n) := p_1 \cdot \dots \cdot p_l$$

*quadratfreier Teil von  $n$ .*

---



---

**Lemma 1.4 (Rechenregeln der Eulerschen Phifunktion).** Sei  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , so gilt

$$(1) \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \text{ falls } \text{ggT}(a, b) = 1,$$

$$(2) \quad \varphi(a) = \sum_{d|a} \varphi(d) \text{ und}$$

$$(3) \quad \varphi(a) = \frac{a}{\nu(a)} \varphi(\nu(a)).$$

Zyklische Gruppen und endliche Körper hängen eng zusammen, da bekanntlich die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers immer zyklisch ist. Dies können wir nutzen, um Erzeugern (im Sinne der Gruppentheorie) der multiplikativen eines endlichen Körpers einen Namen zu geben.

---

**Satz 1.5.**

*Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers ist zyklisch.*

---

*Beweis.* [13, Theorem 2.8]. □

---

**Definition 1.6 (primitiv).**

Sei  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper.  $u \in \mathbb{F}_q$  heißt *primitiv* (oder *primitives Element*), falls  $\langle u \rangle = \mathbb{F}_q^*$ , also  $u$  ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{F}_q^*$  ist.

---

**Bemerkung 1.7.** Es ist klar, dass  $u \in \mathbb{F}_q$  genau dann primitiv ist, wenn  $\text{ord}(u) = q - 1$ , also seine gruppentheoretische Ordnung in  $\mathbb{F}_q^*$  genau der Gruppenordnung entspricht.

## 1.2 | Automorphismen über endlichen Körpern

### Satz 1.8.

Seien  $F$  ein endlicher Körper der Charakteristik  $p \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_n: F &\rightarrow F \\ a &\mapsto a^{p^n} \end{aligned}$$

ein Automorphismus auf  $F$ .

*Beweis.* [20, Corollary 3.18]. □

**Bemerkung 1.9.** Insbesondere gilt also für alle  $a, b \in F$ ,  $F$  wie oben:

$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}.$$

### Satz 1.10.

Sei  $q$  eine Primpotenz und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Der Automorphismus

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{F}_{q^n} &\rightarrow \mathbb{F}_{q^n} \\ a &\mapsto a^q \end{aligned}$$

hält die Elemente von  $\mathbb{F}_q$  fest, also

$$\sigma|_{\mathbb{F}_q} = \text{id}_{\mathbb{F}_q}.$$

Ferner ist  $\sigma^k \neq \text{id}_{\mathbb{F}_{q^n}}$  für  $k = 1, \dots, n-1$ , alle  $\sigma^k$ s sind paarweise verschiedene Automorphismen und  $\sigma^n = \text{id}_{\mathbb{F}_{q^n}}$ .

Bezeichne  $\text{Gal}(E | F)$  die Galoisgruppe einer Galoiserweiterung  $E$  über  $F$ , so können wir das folgende zentrale Resultat zitieren:

### Satz 1.11.

Es gilt

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n} | \mathbb{F}_q) = \langle \sigma \rangle.$$

Das bedeutet, dass es neben  $\sigma, \dots, \sigma^{n-1}$  keine weiteren Automorphismen von  $\mathbb{F}_{q^n}$  gibt, die  $\mathbb{F}_q$  fixieren.

*Beweis.* [20, Theorem 7.3]. □

Neben der Tatsache, dass der Frobenius alle Endomorphismen erzeugt, können wir auch zeigen, dass alle Potenzen des Frobenius von  $\mathbb{F}_q$  über  $\mathbb{F}_{q^n}$  linear unabhängig sind. Dies gilt sogar in einem

größeren Kontext:

---

**Satz 1.12 (Dedekindsches Lemma).**

Seien  $K, L$  zwei Körper,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\tau_1, \dots, \tau_n : K \rightarrow L$  injektive Körperhomomorphismen. Dann ist für jedes  $x \in K$

$$\{\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)\}$$

linear unabhängig über  $L$ .

---

*Beweis.* [10, Satz 27.2]. □

Mit Satz 1.11 wird klar, dass für ein irreduzibles Polynom  $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ , das in  $\mathbb{F}_{q^n}$  eine Nullstelle  $\alpha$  besitzt, auch  $\sigma^i(\alpha)$  für alle  $i = 1, \dots, n-1$  Nullstellen sind. Ferner kann man sich relativ einfach überlegen, dass für ein irreduzibles Polynom  $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  eine Nullstelle in  $\mathbb{F}_{q^n}$  zu besitzen hinreichend ist, dass  $f(x)$  vom Grad  $n$  ist. Beides fasst nachstehender Satz zusammen.

---

**Satz 1.13.**

Ist  $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  ein irreduzibles Polynom vom Grad  $n$ . Dann existiert eine Nullstelle  $\alpha$  von  $f(x)$  in  $\mathbb{F}_{q^n}$ , alle Nullstellen von  $f(x)$  sind einfach und gegeben durch

$$\alpha, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{n-1}} \in \mathbb{F}_{q^n}.$$


---

*Beweis.* [13, Theorem 2.14]. □



## Kapitel 2

# Der Zerfall von $x^n - 1$ und die Kreisteilungspolynome $\Phi_D(x)$

Sei  $K$  ein beliebiger Körper der Charakteristik  $p$  und  $\bar{K}$  ein fest gewählter algebraischer Abschluss. Wir wollen nun untersuchen, wie das Polynom  $x^n - 1 \in K[x]$  über  $K$  zerfällt. Dazu orientieren wir uns an [13] und [20].

### Definition 2.1 (Kreisteilungskörper, Einheitswurzeln).

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Der Zerfällungskörper von  $X^n - 1 \in K[X]$  heißt der  $n$ -te Kreisteilungskörper und wird mit  $K^{(n)}$  notiert. Die Nullstellen von  $X^n - 1$  in  $K^{(n)}$  heißen  $n$ -ten Einheitswurzeln und die Menge derer wird mit  $E^{(n)}$  bezeichnet.

### Satz 2.2.

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) Sei  $p \nmid n$ . Dann ist  $E^{(n)}$  eine zyklische Gruppe (bzgl. der Multiplikation in  $K^{(n)}$ ) der Ordnung  $n$ .
- (2) Ist  $p \mid n$  und schreibt man  $n = p^e m$  für positive ganze Zahlen  $m$  und  $e$  mit  $p \nmid m$ , so ist  $K^{(n)} = K^{(m)}$  und  $E^{(n)} = E^{(m)}$  und die Nullstellen von  $X^n - 1 \in K[X]$  sind gerade die Elemente in  $E^{(m)}$  jedoch jeweils mit Multiplizität  $p^e$ .

*Beweis.* [13, Theorem 2.42]. □

### Definition 2.3 (primitive Einheitswurzeln).

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $p \nmid n$ . Dann heißen die Erzeuger von  $E^{(n)}$  *primitive  $n$ -te Einheitswurzeln*. Die Untergruppe der primitiven Einheitswurzeln wird mit  $C^{(n)}$  bezeichnet.

**Definition 2.4 (Kreisteilungspolynom).**

Seien  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \nmid n$ . Das Polynom

$$\Phi_n(X) := \prod_{\zeta \in C(n)} (X - \zeta)$$

heißt  $d$ -tes Kreisteilungspolynom.

**Satz 2.5.**

Seien  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $p \nmid n$ . Dann gilt:

- (1)  $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$ .
- (2)  $\Phi_n(X) \in P[X]$ , wobei  $P \subset K$  den Unterkörper mit  $p$  Elementen notiert.

*Beweis.* (1) Dies ist eine einfache Folgerung aus Satz 1.1.

(2) Lässt sich per Induktion recht einfach beweisen (vgl. [13, Theorem 2.45 (ii)]). □

**Definition 2.6.**

Für zwei teilerfremde natürliche Zahlen  $q, n$  größer Null sei

$$\text{ord}_n(q) := \text{ord}([q]_n)$$

die *multiplikative Ordnung von  $q$  modulo  $n$* , wobei  $[q]_n$  die Restklasse von  $q$  in  $\mathbb{Z}_n$  bezeichnet und die Ordnung als Gruppenordnung in den Einheiten von  $\mathbb{Z}_n$ , notiert durch  $\mathbb{Z}_n^\times$ , zu lesen ist.

**Lemma 2.7 (Rechenregeln der multiplikation Ordnung modulo  $n$ ).** Seien  $m, n, q \in \mathbb{N}^*$  mit  $\text{ggT}(n, q) = 1$ ,  $\text{ggT}(m, q) = 1$  und  $\text{ggT}(m, n) = 1$ , so gilt

- (1)  $\text{ord}_n(q) \mid \varphi(n)$ ,
- (2)  $\text{ord}_{mn}(q) = \text{kgV}\{\text{ord}_m(q), \text{ord}_n(q)\}$ .

*Beweis.* (1) Klar, da  $[q]_n$  in  $\mathbb{Z}_n^\times$  eine Untergruppe der Ordnung  $\text{ord}_n(q)$  erzeugt. Nach dem Satz von Lagrange teilt deren Ordnung die Gruppenordnung  $|\mathbb{Z}_n^\times| = \varphi(n)$ .

(2) Nach dem Chinesischen Restsatz (z.B. [3, Kapitel 2 Satz 12]) ist

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}_{nm} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, \\ [x]_{nm} &\mapsto ([x]_n, [x]_m) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Ringen, da algebraisch  $\mathbb{Z}_n$  ja nichts anderes ist, als  $\mathbb{Z}/(n)$ , wobei  $(n)$  das von  $n$  im Ring  $\mathbb{Z}$  erzeugte Ideal meint. Dieser liefert einen Gruppenhomomorphismus auf den Einheiten:

$$f: \mathbb{Z}_{nm}^\times \rightarrow \mathbb{Z}_n^\times \times \mathbb{Z}_m^\times.$$

Nun ist per definitionem von  $\text{ord}_\bullet(q)$  die Behauptung klar. □

Damit können wir nun zu einem zentralen Resultat dieses Abschnittes kommen, das uns über die gesamte Arbeit hinweg begleiten wird.

### Satz 2.8.

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $\text{ggT}(q, n) = 1$ . Dann zerfällt das  $n$ -te Kreisteilungspolynom  $\Phi_n(X)$  über  $\mathbb{F}_q$  in

$$\frac{\varphi(n)}{\text{ord}_n(q)}$$

irreduzible paarweise teilerfremde Polynome von jeweils Grad  $\text{ord}_n(q)$ .

**Beweis.** Sei  $f(X) \mid \Phi_n(X)$  ein irreduzibler Teiler über  $\mathbb{F}_q$ . Ist dann  $\zeta \in C^{(n)}$  eine Nullstelle von  $f(X)$ , so sind nach Satz 1.13 auch

$$\zeta^q, \zeta^{q^2}, \dots, \zeta^{q^n}$$

Nullstellen von  $f(X)$ . Jedoch sind offenbar nur  $\text{ord}_n(q)$  dieser verschieden und da  $f$  als irreduzibles Polynom wieder nach Satz 1.13 nur einfache Nullstellen besitzt, können wir folgern, dass  $\deg f = \text{ord}_n(q)$ . Da  $f(X)$  als beliebiger irreduzibler Teiler von  $\Phi_n(X)$  gewählt wurde, folgt sofort die Behauptung, wenn man sich überlegt, dass der Grad des  $n$ -ten Kreisteilungspolynoms per definitionem gerade  $\varphi(n)$  ist.  $\square$

Im Beweis obigen Satzes haben wir gesehen, dass die Wirkung der Galoisgruppe  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n} \mid \mathbb{F}_q)$  auf der Menge der primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln  $C^{(n)}$  (die Wirkung ist selbstredend durch Einsetzen gegeben) diese in Teilmengen der Mächtigkeit  $\text{ord}_n(q)$  zerlegt. Dies lässt sich natürlich auf  $E^{(n)}$  übertragen, da ja gerade nach Satz 1.1  $E^{(n)} = \bigcup_{d \mid n} C^{(d)}$ . Dies motiviert nachstehende Definition.

### Definition 2.9.

Für  $m, q \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(m, q) = 1$  und  $j \in \mathbb{Z}_m$  definieren wir

$$M_q(j \bmod m) := \{j q^i \bmod m : i \in \mathbb{N}\} = \{j, jq, jq^2, jq^3, \dots \bmod m\}$$

Ein vollständiges Repräsentantensystem von Nebenklassen von  $M_q(1 \bmod m)$  in  $\mathbb{Z}_m$  sei mit  $R_q(m)$  bezeichnet. Für  $l \in M_q(j \bmod m)$  bezeichne ferner  $r_q(l \bmod m) := |\{l q^i : i \in \mathbb{N}\}|$  die Länge der zugehörigen Bahn.

**Bemerkung 2.10.** Per Definition von  $\text{ord}_m(q)$  ist für  $l \neq 0$

$$r_q(l \bmod m) = \text{ord}_{\frac{m}{\text{ggT}(m, l)}}(q).$$

**Beispiel 2.11.** Wollen wir den Zerfall von  $X^{21} - 1$  über  $\mathbb{F}_2$  untersuchen, so berechnen wir erst ein

Vertretersystem von Restklassen mod 21:

| $l \in R_2(21)$ | $M_2(l \bmod 21)$     |
|-----------------|-----------------------|
| 0               | 0                     |
| 1               | 1, 2, 4, 8, 11, 16    |
| 3               | 3, 6, 12              |
| 5               | 5, 10, 13, 17, 19, 20 |
| 7               | 7, 14                 |
| 9               | 9, 15, 18             |

Nun wissen wir aus Satz 2.5, dass

$$X^{21} - 1 = \Phi_1(X) \cdot \Phi_3(X) \cdot \Phi_7(X) \cdot \Phi_{21}(X).$$

Die Nullstellen von  $\Phi_{21}(X)$  partitionieren sich gerade in diejenigen  $M_2(l \bmod 21)$  für die  $l = 1, 5$ . Also haben wir

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(X) &= \frac{(X^6 + X^4 + X^2 + X + 1)}{(X - \zeta)(X - \zeta^2)(X - \zeta^4)(X - \zeta^8)(X - \zeta^{11})(X - \zeta^{16})} \cdot \frac{(X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1)}{(X - \zeta^5)(X - \zeta^{10})(X - \zeta^{13})(X - \zeta^{17})(X - \zeta^{19})(X - \zeta^{20})} \end{aligned}$$

falls wir  $\zeta \in C^{(21)}$  als Nullstelle von  $X^6 + X^4 + X^2 + X + 1$  setzen. Analog erhalten wir den Zerfall von  $\Phi_7(X)$  durch Betrachtung der  $M_2(l \bmod 21)$  für  $l = 3, 9$ .

$$\begin{aligned} \Phi_7(X) &= \frac{(X^3 + X + 1)}{(X - \zeta^3)(X - \zeta^{3^2})(X - \zeta^{3^4})} \cdot \frac{(X^3 + X^2 + 1)}{(X - \zeta^{3^3})(X - \zeta^{3^5})(X - \zeta^{3^6})} \end{aligned}$$

Sammeln wir den Rest auf, erhalten wir die Partitionierung für  $\Phi_3(X)$  und den trivialen Fall  $\Phi_1(X)$ .

$$\begin{aligned} \Phi_3(X) &= \frac{X^2 + X + 1}{(X - \zeta^7)(X - \zeta^{14})}, \\ \Phi_1(X) &= \frac{X - 1}{X - \zeta^0}. \end{aligned}$$

▲

Nun können wir uns überlegen, ob und wie unterschiedliche Kreisteilungspolynome zusammenhängen und kommen dabei auf die bekannten Resultate, die z.B. in [5, Proposition 10.6, 10.7] zu finden sind. Um diese anzugeben, benötigen wir jedoch noch einige Definitionen und zitieren einige Eigenschaften.

### Definition 2.12.

Seien  $r, n \in \mathbb{N}$ , so definiere

$$\pi_r(n) := \max\{k \in \mathbb{N}^* : k \mid n, \nu(k) \mid \nu(r)\}.$$

**Lemma 2.13.** Seien  $q > 1$  eine ganze Zahl,  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $r$  ein Primteiler von  $q - 1$ . Dann gilt:

(1) Ist  $r \neq 2$  oder  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , so gilt

$$\pi_r(q^{r^n} - 1) = r^n \pi_r(q - 1).$$

(2) Ist  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , so gilt

$$\pi_2(q^{2^n} - 1) = 2^{n-1} \pi_2(q^2 - 1).$$

*Beweis.* [5, Lemma 19.4]. □

**Lemma 2.14.** *Seien  $q, m, k > 1$  ganze Zahlen mit  $\nu(k) \mid \nu(m) \mid q - 1$ . Dann gilt*

(1) *Ist  $m$  ungerade oder  $q \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $k$  ungerade, so gilt*

$$\pi_m(q^k - 1) = k \pi_m(q - 1).$$

(2) *Ist  $m$  gerade,  $q \equiv 3 \pmod{4}$  und  $k$  gerade, so ist*

$$\pi_m(q^k - 1) = \frac{k}{2} \pi_m(q^2 - 1).$$

*Beweis.* [5, Lemma 19.5]. □

### Satz 2.15.

*Seien  $t, k \in \mathbb{N}^*$ .*

(1) *Ist  $\nu(t) \mid k$ , so gilt*

$$\Phi_k(X^t) = \Phi_{kt}(X) \in K[X].$$

(2) *Sind  $t$  und  $k$  teilerfremd, so gilt*

$$\Phi_k(X^t) = \prod_{d \mid t} \Phi_{kd}(X) \in K[X].$$

(3) *Insbesondere gilt: Ist  $q = p^r$  eine Primzahlpotenz,  $t, k \in \mathbb{N}^*$  mit  $p \nmid t, k$  und  $\pi$  eine Potenz von  $p$ . Sei ferner  $t = \pi_k(t) \cdot \bar{t}$ , so gilt*

$$\Phi_k(X^{t^\pi}) = \left( \prod_{d \mid \bar{t}} \Phi_{k d \pi_k(t)}(X) \right)^\pi \in \mathbb{F}_q[X].$$

*Beweis.* Dass sich Potenzen von  $p$  aus dem Argument herausziehen lassen, ist klar, da  $\text{id}_P = (\cdot)^\pi : P \rightarrow P$  für den Primkörper  $P \subset K$  nach Satz 1.8 eine lineare Abbildung ist. Ferner haben nach Satz 2.5 die Kreisteilungspolynome nur Koeffizienten in  $P$ .

Der Kern des Beweises des Rests liegt in der Betrachtung des Gruppenhomomorphismus

$$\psi_n : \bar{K}^* \rightarrow \bar{K}^*, \quad x \mapsto x^n$$

für  $p \nmid n$ . Denn nun ist offensichtlich, dass die Nullstellen von  $\Phi_k(X^t)$  gerade alle Elemente in  $\bar{K}^*$ , deren  $t$ -te Potenz eine primitive  $k$ -te Einheitswurzel ist, sind, also  $\psi_t^{-1}(C^{(k)})$ . Ergo formulieren sich die Aussagen wie folgt um:

(1') Ist  $\nu(t) \mid k$ , so gilt  $\psi_t^{-1}(C^{(k)}) = C^{(kt)}$ .

(2') Ist  $\text{ggT}(t, k) = 1$ , so gilt  $\psi_t^{-1}(C^{(k)}) = \bigcup_{d \mid t} C^{(kd)}$ .

(3') Ist  $k, t \in \mathbb{N}^*$  mit  $p \nmid t, k$  und  $k = \pi_k(t) \bar{k}$ , so gilt

$$\psi_t^{-1}(C^{(k)}) = \bigcup_{d \mid \bar{t}} C^{(k d \pi_k(t))}$$

Nun ist offensichtlich, dass es reicht (3') zu zeigen. Dazu notiere  $t_0 := \pi_k(t)$  und seien  $d \mid \bar{t}$  und  $\zeta \in C^{(kdt_0)}$  beliebig. Dann ist

$$\text{ord}(\zeta^t) = \text{ord}((\zeta^{t_0 d})^{\frac{\bar{t}}{d}}) = k,$$

da per definitionem von  $\pi_k(t)$  gerade  $\text{ggT}(\bar{t}, kt_0) = 1$ . Also gilt  $\psi_t(C^{(kdt_0)}) \subseteq C^{(k)}$  und damit

$$\bigcup_{d \mid \bar{t}} C^{(kdt_0)} \subseteq \psi_t^{-1} \psi_t(\bigcup_{d \mid \bar{t}} C^{(kdt_0)}) \subseteq \psi_t^{-1}(C^{(k)})$$

Die Gleichheit folgt mit einem Zählargument: Auf der einen Seite ist

$$\left| \bigcup_{d \mid \bar{t}} C^{(kdt_0)} \right| = \sum_{d \mid \bar{t}} \varphi(kdt_0) = \varphi(kt_0) \sum_{d \mid \bar{t}} \varphi(d) = \varphi(kt_0) \cdot \bar{t} = \varphi(k)t,$$

wobei an Lemma 1.4 erinnert sei. Auf der anderen Seite haben wir

$$|\psi_t^{-1}(C^{(k)})| = t|C^{(k)}| = t\varphi(k),$$

was den Beweis abschließt. □

Bevor wir den Zerfall der Kreisteilungspolynome noch genauer untersuchen, kann man als einfache Folgerung angeben, wann genau ein Binom  $x^n - \beta \in \mathbb{F}_q[x]$  irreduzibel ist.

### Satz 2.16.

Seien  $\beta \in F_q^*$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt:  $x^n - \beta \in \mathbb{F}_q[x]$  ist genau dann irreduzibel, wenn

- (1)  $p := \text{char } \mathbb{F}_q \nmid n$ ,
- (2)  $\nu(n) \mid e := \text{ord}(\beta)$  und
- (3)  $\text{ord}_{ne}(q) = n$ .

**Beweis.** Zunächst ist klar, dass  $p \nmid n$  erfüllt sein muss, da ansonsten  $\beta' \in \mathbb{F}_q^*$  existiert mit  $\beta'^p = \beta$  ( $(\cdot)^p$  ist ein Automorphismus auf  $\mathbb{F}_q$  nach Satz 1.8). Damit wäre  $x^n - \beta = (x^{\frac{n}{p}} - \beta')^p$  eine Faktorisierung. Nun sei  $u$  eine Nullstelle von  $x^n - \beta$ , so lässt sich beobachten, dass (in Notation des Beweises von Satz 2.15)  $u \in \psi_n^{-1}(C^{(e)})$ . Damit gilt nach Satz 2.15 (3)

$$x^n - \beta = \prod_{d \mid \bar{n}} \text{ggT}(x^n - \beta, \Phi_{en_0 d}(x))$$

für  $n = \pi_e(n)\bar{n}$  und diese Zerlegung ist, wie man sich analog zum Beweis von Satz 2.8 überlegen kann, nicht trivial (vgl. [16, Theorem ...]). Damit ist (2) der Behauptung klar, so dass  $x^n - \beta \mid \Phi_{ne}(x)$ . Ferner zerfällt nach Satz 2.8  $\Phi_{ne}(x)$  in  $\frac{\varphi(ne)}{\text{ord}_{ne}(q)}$  irreduzible Faktoren von jeweils Grad  $\text{ord}_{ne}(q)$ . Damit wird auch (3) der Behauptung augenblicklich klar. □

Für die letzte Bedingung in obigem Satz existieren noch verschiedene weitere äquivalente Charakterisierungen, die nachstehend zu finden sind.

### Satz 2.17.

Seien  $p$  eine Primzahl,  $q$  eine Potenz von  $p$  und  $n, e \in \mathbb{N}^*$  mit  $p \nmid n$  und  $\nu(n) \mid e \mid q-1$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $\text{ord}_{ne}(q) = n$ ,
- (2)  $\text{ggT}(\frac{q-1}{e}, n) = 1$  und  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $4 \mid n$ , und
- (3)  $\pi_n(q-1) \mid e$  und  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $4 \mid n$ .

*Beweis.* [16, Theorem ...]. □

Wir haben nun erkannt, wann genau Binome über einem endlichen Körper irreduzibel sind. Doch wenn man dem Titel dieses Kapitels Glauben schenken mag, interessieren wir uns hier vorrangig für den Zerfall der Kreisteilungspolynome über endlichen Körpern. Diese sind im Allgemeinen keine Binome, aber genau das Wissen über die Irreduzibilität von Binomen lässt uns Bedingungen formulieren, die dazu führen, dass ein Kreisteilungspolynom über einem gegebenen endlichen Körper in irreduzible Binome zerfällt. Später (Abschnitt 4.2) werden wir diese Bedingungen *stark regulär* (Definition 4.5) nennen und einsehen, dass sie eine wesentliche Rolle bei der expliziten Konstruktion von Normalbasen spielen.

### Satz 2.18.

Seien  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$  und  $m \in \mathbb{N}^*$ . Es gelte  $p \nmid m$ ,  $\nu(m) \mid q-1$  und  $4 \mid q-1$ , falls  $2 \mid m$ . Setze  $l := \pi_m(q-1)$ ,  $a := \text{ggT}(l, m)$  und  $I_a := \{j \in \mathbb{N}^* : j \geq a, \text{ggT}(j, a) = 1\}$ . Ist  $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$  eine primitive  $a$ -te Einheitswurzel, so ist

$$\Phi_m(x) = \prod_{j \in I_a} \left( x^{\frac{m}{a}} - \zeta^j \right)$$

die vollständige Faktorisierung des  $m$ -ten Kreisteilungspolynoms über  $\mathbb{F}_q$ .

*Beweis.* Wir stellen fest, dass  $\mathbb{F}_q$  in der Tat  $a$ -te Einheitswurzeln enthält, da  $\text{ord}_a(q) = 1$ . Dies ist klar, da  $l$  per definitionem  $q-1$  teilt und  $a = \text{ggT}(l, m)$ . Nun wollen wir uns klar werden, dass beide Seiten obiger Gleichung auch identisch sind: Für  $j \in I_a$  durchläuft  $\zeta^j$  alle primitiven  $a$ -ten Einheitswurzeln und damit sind die Nullstellen der rechten Seite der Gleichung gerade alle primitiven  $m$ -ten Einheitswurzeln. Bleibt die Irreduzibilität von  $x^{\frac{m}{a}} - \zeta^j$  zu zeigen, wobei wir ohne Einschränkung  $j = 1$  wählen können: Klar ist, dass  $p \nmid \frac{m}{a}$ , da  $p \nmid m$  nach Voraussetzungen. Ferner ist  $\nu(l) = \nu(m)$ , da wegen  $\nu(m) \mid q-1$  gilt:

$$\pi_m(q-1) = \max\{k \in \mathbb{N}^* : k \mid q-1, \nu(k) = \nu(m)\}.$$

Also ist auch  $\nu(a) = \nu(\text{ggT}(l, m)) = \nu(m)$  und damit folgt  $\nu(\frac{m}{a}) \mid \nu(m) = \nu(a) \mid a$ , womit auch (2) in Satz 2.16 erfüllt wäre. Da  $\nu(m) \mid q-1$  ist  $\pi_{\frac{m}{a}}(q-1) \mid m$ , also auch  $\pi_{\frac{m}{a}}(q-1) \mid a$ . Damit wäre durch die Bedingung  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $2 \mid m$ , auch (3) in Satz 2.17 erfüllt. □

**Bemerkung 2.19.** Man hätte obigen Beweis auch ohne das Wissen über irreduzible Binome führen können, in dem man sich Satz 2.8 bedient. So findet man dies auch in [5, Lemma 22.2].

Erinnert man sich nun erneut an Satz 2.8, so kann man sich die Frage stellen, ob man den Zusammenhang unterschiedlicher Kreisteilungspolynome aus Satz 2.15 in dem Sinne verfeinern kann, dass man sich nicht für das gesamte Kreisteilungspolynom interessiert, sondern lediglich für einen irreduziblen Teiler. Diese Frage beantwortet nachstehender Satz.

**Satz 2.20.**

Seien  $q = p^r$  eine Primzahlpotenz und  $m, t \in \mathbb{N}$  mit  $p \nmid m$ ,  $p \nmid t$  und  $\text{ggT}(m, t) = 1$ . Definieren wir ferner

$$\Delta_q(m, d) := \frac{\varphi(d) \text{ord}_m(q)}{\text{ord}_{md}(q)},$$

so gilt:

- (1) Ist  $f(x) \mid \Phi_m(x)$  ein über  $\mathbb{F}_q$  irreduzibler monischer Teiler des  $m$ -ten Kreisteilungspolynoms, so gilt

$$f(x^t) = \prod_{d \mid t} \prod_{i=1}^{\Delta_q(m, d)} f_{d,i}(x),$$

wobei für alle  $i = 1, \dots, \Delta_q(m, d)$

$$f_{d,i} \in \mathbb{F}_q[x] \text{ monisch, irreduzibel und } f_{d,i}(x) \mid \Phi_{md}(x).$$

Ferner sind alle  $f_{d,i}(x)$  paarweise teilerfremd.

- (2) Sind  $f(x) \mid \Phi_m(x)$  und  $g(x) \mid \Phi_m(x)$  zwei teilerfremde, monische, über  $\mathbb{F}_q$  irreduzible Teiler des  $m$ -ten Kreisteilungspolynoms, so sind auch  $f(x^t)$  und  $g(x^t)$  teilerfremd.

**Beweis.** Wie schon im Beweis von Satz 2.15 betrachten wir den Gruppenhomomorphismus  $\psi_t$ , diesmal eingeschränkt auf  $E^{(mt)}$ :

$$\begin{aligned} \psi_t: E^{(mt)} &\rightarrow E^{(m)}, \\ x &\mapsto x^t, \end{aligned}$$

was offenbar ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus bleibt. Offensichtlich ist  $\ker \psi_t = E^{(t)}$ . Da  $\text{ggT}(m, t) = 1$ , also  $E^{(mt)} = E^{(m)} \odot E^{(t)}$  als leichte Folgerung aus Satz 1.1, ist  $\psi$  auch surjektiv.

Ist nun  $\alpha \in C^{(m)}$  eine Nullstelle von  $f(x)$ , so existiert – wiederum weil  $m$  und  $t$  teilerfremd sind – genau ein  $\beta \in C^{(m)}$  mit  $\beta^t = \alpha$ . Damit ist also

$$\psi_t^{-1}(\{\alpha\}) = \beta E^{(t)} = \bigcup_{d \mid t} \beta C^{(d)}.$$

Notiert wieder  $\sigma$  der Frobenius von  $\mathbb{F}_q$ , so sind nach Satz 1.13  $\sigma^j(\alpha)$ ,  $j = 0, \dots, \delta - 1$  für  $\delta = \text{ord}_q(m)$  die Nullstellen von  $f(x)$ . Da  $p \nmid t$  bleibt die Menge der  $t$ -en Einheitswurzeln invariant unter  $\sigma$  und damit ist die Menge der Nullstellen von  $f(x^t)$  gerade

$$\bigcup_{j=0}^{\delta-1} \sigma^j(\beta) E^{(t)} = \bigcup_{j=0}^{\delta-1} \bigcup_{d \mid t} \beta^{q^j} C^{(d)} = \bigcup_{d \mid t} \bigcup_{j=0}^{\delta-1} \beta^{q^j} C^{(d)} =: \bigcup_{d \mid t} N_d. \quad (2.1)$$



Wollen wir nun einsehen, wie  $f(x^t)$  über  $\mathbb{F}_q$  zerfällt, so müssen wir überlegen, wie obige Nullstellenmenge in  $\sigma$ -invariante Teilmengen zerfällt. Für jedes  $d \mid t$  und jedes  $j \in \{0, \dots, \delta-1\}$  ist  $\zeta \in \beta^{q^j} C^{(d)}$  ein Element mit  $\text{ord}(\zeta) = md$ , also Nullstelle von  $\Phi_{md}(x)$ . Ferner gilt offenbar  $\forall d \mid t : |N_d| = \delta\varphi(d)$  und wir können folgern, dass  $N_d$  in genau

$$\frac{\delta\varphi(d)}{\text{ord}_{md}(q)} = \frac{\text{ord}_m(q)\varphi(d)}{\text{ord}_{md}(q)} = \Delta_q(m, d)$$

$\sigma$ -invariante Teilmengen zerfällt.  $\Delta_q(m, d)$  ist in der Tat eine natürliche Zahl größer 0, da nach Lemma 2.7 (2)

$$\frac{\text{ord}_m(q)\varphi(d)}{\text{ord}_{md}(q)} = \frac{\varphi(d) \text{ggT}(\text{ord}_m(q), \text{ord}_d(q))}{\text{ord}_d(q)}$$

und  $\text{ord}_d(q) \mid \varphi(d)$  nach Lemma 2.7 (1). Damit ist alles in (1) gezeigt. Der Zusatz (2) folgt sofort, denn ist  $\alpha_f \in C^{(m)}$  bzw.  $\alpha_g \in C^{(m)}$  Nullstelle von  $f$  bzw.  $g$ , so gehören diese zu verschiedenen  $\sigma$ -invarianten Teilmengen von  $C^{(m)}$  (vgl. auch Beispiel 2.11) und folglich gehören auch  $\beta_f \in C^{(m)}$  bzw.  $\beta_g \in C^{(m)}$  mit  $\beta_f^t = \alpha_f$  bzw.  $\beta_g^t = \alpha_g$  zu verschiedenen und damit disjunkten  $\sigma$ -invarianten Teilmengen von  $C^{(m)}$ .  $\square$

**Beispiel 2.21.** Greifen wir noch einmal Beispiel 2.11 auf und betrachten einen irreduziblen Teiler  $f(x)$  von  $\Phi_7(x)$  über  $\mathbb{F}_2$ , sagen wir

$$f(x) := x^3 + x + 1.$$

Sei  $t := 3$ . Nun wissen wir nach Satz 2.20, dass  $f(x^3)$  wie folgt über  $\mathbb{F}_2$  zerfällt:

$$f(x^3) = \prod_{i=1}^{\Delta_2(7,1)} f_{1,i}(x) \cdot \prod_{i=1}^{\Delta_2(7,3)} f_{3,i}(x) = f_{1,1}(x) \cdot f_{3,1}(x)$$

da

$$\begin{aligned} \Delta_2(7,1) &= \frac{\varphi(1)\text{ord}_7(2)}{\text{ord}_7(2)} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1, \\ \Delta_2(7,3) &= \frac{\varphi(3)\text{ord}_7(2)}{\text{ord}_{21}(2)} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1. \end{aligned}$$

Wir wollen nun herausfinden, welche Teiler  $f_{1,1}(x)$  und  $f_{3,1}(x)$  von  $\varphi_7(x)$  und  $\varphi_{21}(x)$  sind. Wir übernehmen den Zerfall der Kreisteilungspolynome aus Beispiel 2.11 und können einsehen, dass

$$f_{1,1}(x) = x^3 + x^2 + 1, \quad f_{3,1}(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1. \quad \blacktriangle$$

**Beispiel 2.22.** Als zweites Beispiel wollen wir uns einen Fall betrachten, in dem  $\Delta_q(d, m)$  nicht immer 1 ist. Sei  $p = q = 3$ ,  $m = 5$  und  $t := 4$ . Also müssen wir ein Vertretersystem von Restklassen mod 20 betrachten:

| $l \in R_3(20)$ | $M_2(l \bmod 20)$ |
|-----------------|-------------------|
| 0               | 0                 |
| 1               | 1, 3, 7, 9        |
| 2               | 2, 6, 14, 18      |
| 4               | 4, 8, 12, 16      |
| 5               | 5, 15             |
| 10              | 10                |
| 11              | 11, 13, 17, 19    |

Wir sehen, dass  $\Phi_{20}(x)$  für  $l = 1, 11$  in 2 Polynome von jeweils Grad 4 zerfällt:

$$\begin{aligned}\Phi_{20}(x) &= (x^4 + x^3 + 2x + 1) \cdot (x^4 + 2x^3 + x + 1) \\ &= (x - \zeta^{11})(x - \zeta^{13})(x - \zeta^{17})(x - \zeta^{19}) \cdot (x - \zeta)(x - \zeta^3)(x - \zeta^7)(x - \zeta^9),\end{aligned}$$

wobei wir  $\zeta \in C^{(20)}$  mit Minimalpolynom  $x^4 + 2x^3 + x + 1$  gewählt haben. Nun können wir den Zerfall von  $\Phi_5(x)$  und  $\Phi_{10}(x)$  in Termen von  $\zeta$  anhand der Restklassen mod 20 beschreiben:

$$\begin{aligned}\Phi_5(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= (x - \zeta^4)(x - \zeta^8)(x - \zeta^{12})(x - \zeta^{16}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{10}(x) &= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ &= (x - \zeta^2)(x - \zeta^6)(x - \zeta^{14})(x - \zeta^{16}).\end{aligned}$$

Die Restklassen für  $l = 0, 5, 10$  gehören zu den Kreisteilungspolynomen  $\Phi_1(x), \Phi_4(x)$  und  $\Phi_2(x)$ , die wir für ein Beispiel zu Satz 2.20 nicht benötigen. Nun brauchen wir wieder einen irreduziblen monischen Teiler von  $\Phi_m(x)$  und setzen daher  $f(x) = \Phi_m(x)$ . Wir berechnen wie oben

$$\begin{aligned}\Delta_3(5, 1) &= \frac{\varphi(1) \operatorname{ord}_5(3)}{\operatorname{ord}_5(3)} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1, \\ \Delta_3(5, 2) &= \frac{\varphi(1) \operatorname{ord}_5(3)}{\operatorname{ord}_{10}(3)} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1, \\ \Delta_3(5, 4) &= \frac{\varphi(4) \operatorname{ord}_5(3)}{\operatorname{ord}_{20}(3)} = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2.\end{aligned}$$

Nun ist klar, wie  $f(x^t)$  über  $\mathbb{F}_3$  zerfällt:

$$f(x^3) = \left( \overset{d=1 \mid 4}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \right) \cdot \left( \overset{d=2 \mid 4}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \right) \cdot \left( \overset{d=4 \mid 4}{(x^4 + x^3 + 2x + 1)(x^4 + 2x^3 + x + 1)} \right) \quad \blacktriangle$$

## Kapitel 3

### Moduln

#### 3.1 | Über Moduln über Hauptidealbereichen

Nähern wir uns der Situation von Normalbasen in möglichst allgemeiner Form, so beginnt die Reise bei der Betrachtung von Moduln über Hauptidealbereichen. Dazu wiederholen wir die wichtigsten Definitionen und Aussagen. Für eine intensivere Betrachtung sei auf Standardwerke der Algebra, z.B. [11] oder [9], verwiesen. Die Referenzen als Beweise seien ohne explizite Erwähnung immer als beispielhafte Angabe zu verstehen und es sei bemerkt, dass jene grundlegenden Resultate auch in anderen Werken zu finden sind.

##### Definition 3.1 (Integritätsbereich).

Sei  $R$  ein kommutativer Ring, so heißt  $R$  *Integritätsbereich*, falls  $R$  nullteilerfrei ist und  $1 \neq 0$  in  $R$ .

**Lemma 3.2.** *Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Dann ist  $R[x]$ , also der univariate Polynomring über  $R$ , ein Integritätsbereich und  $R[x]^\times = R^\times$ .*

*Beweis.* [10, Lemma 13.4]. □

##### Definition 3.3 (assoziierte Elemente).

Sei  $R$  ein Integritätsbereich. Zwei Elemente  $r, s \in R$  heißen *assoziiert*, falls sie sich nur um eine Einheit unterscheiden, d.h. ein  $u \in R^\times$  existiert mit  $r = us$ .

**Bemerkung 3.4.** Man sieht leicht ein, dass Assoziiertheit eine Äquivalenzrelation definiert.

##### Definition 3.5 (Hauptidealbereich).

Sei  $R$  ein Integritätsbereich, so heißt  $R$  *Hauptidealbereich* oder *Hauptidealring*, falls jedes Ideal  $I \triangleleft R$  ein Hauptideal ist, d.h. ein  $r \in R$  existiert mit  $I = (r)$ .

**Lemma 3.6.** *Sei  $K$  ein Körper, so ist  $K$  und  $K[X]$  ein Hauptidealbereich.*

*Beweis.* [10, Satz 17.6]. □

### Definition 3.7 (ggT und kgV).

Sei  $R$  ein Hauptidealbereich und  $a, b \in R$ . Dann heißt  $t \in R$  mit

$$(a) + (b) = (a, b) = (t)$$

größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ ; geschrieben  $t = \text{ggT}(a, b)$ .

Ferner heißt  $T \in R$  mit

$$(a) \cap (b) = (T)$$

kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $a$  und  $b$ ; geschrieben  $T = \text{kgV}(a, b)$ .

**Bemerkung 3.8.** ggT und kgV sind nur bis auf Assoziiertheit gleich, wie man sich leicht überlegen kann.

### Definition 3.9 (irreduzibles Element).

Sei  $R$  ein Integritätsbereich, so heißt  $p \in R$  *irreduzibel*, falls  $p \neq 0$ ,  $p \notin R^\times$  und gilt:

$$\forall a, b \in R: p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

### Definition 3.10 (Faktorieller Ring).

Ein Integritätsbereich  $R$  heißt *faktorieller Ring*, falls jedes Element  $0 \neq r \in R$  eine Zerlegung in irreduzible Faktoren besitzt, d.h.

$$r = ea_1 \dots a_n$$

mit  $e \in R^\times$ ,  $n \geq 0$  und  $a_i \in R$  irreduzibel und diese Zerlegung eindeutig ist, d.h. sind

$$ea_1 \dots a_n = fb_1 \dots b_m$$

zwei Zerlegungen mit  $e, f \in R^\times$ ,  $a_i, b_j$  irreduzibel, so folgt  $n = m$  und  $a_i = u_i b_{\pi(i)}$  für eine Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, n\}$  und Einheiten  $u_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

### Satz 3.11.

*Hauptidealbereiche sind faktorielle Ringe.*

*Beweis.* [11, Theorem II.5.2]. □

**Definition 3.12 (Modul).**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring, so ist ein  $R$ -Modul eine abelsche Gruppe  $(M, +, 0)$  zusammen mit einer Abbildung

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, (r, m) \mapsto r \cdot m,$$

sodass für alle  $r, r' \in R$ ,  $m, m'$  in  $M$  gilt

- (1)  $r \cdot (r' \cdot m) = (rr') \cdot m$ ,
- (2)  $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$  und
- (3)  $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$ .

**Definition 3.13 (zyklischer Modul).**

Ein  $R$ -Modul  $M$  heißt *zyklisch*, falls ein  $x \in M$  existiert, so dass

$$M = xR.$$

**Satz 3.14.**

*Untermodule zyklischer Moduln sind wieder zyklisch.*

*Beweis.* Die Aussage ist nicht anderes, als ein Spezialfall der Tatsache, dass Untermoduln freier Moduln wieder frei sind und die Dimension des Untermoduls nie größer ist als die des Moduls ([11, Theorem 7.1]).  $\square$

**Definition 3.15 (Ordnung/Exponent eines Moduls).**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Existiert ein  $r \in R$  mit

$$rM = 0,$$

so heißt  $r$  *Ordnung von  $M$*  oder *Exponent von  $M$* .

Nun können wir ein zentrales Resultat über Moduln mit Exponenten beweisen, das sich so auch beispielsweise in [9, Lemma 8.10] wiederfindet.

**Satz 3.16 (Zerlegungssatz für Moduln mit Ordnung).**

Seien  $R$  ein Hauptidealbereich und  $M$  ein nicht-trivialer  $R$ -Modul mit Exponent  $r$ , also  $rM = 0$ . Sei  $r = ep_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  eine Zerlegung in irreduzible Faktoren, sodass die  $p_i$  paarweise nicht assoziiert sind, so existieren eindeutig bestimmte  $R$ -Moduln  $M_1, \dots, M_k$  mit  $p_i^{\alpha_i} M_i = 0$  für alle  $i = 1, \dots, k$ , sodass

$$M = \bigoplus_{i=1}^k M_i.$$

*Beweis.* Zu Beginn stellen wir fest, dass die geforderte Zerlegung für  $r$  existiert und eindeutig ist, in dem wir ( $R$  ist faktoriell nach Satz 3.11)  $r$  in irreduzible Elemente zerlegen und dann diejenigen, die zueinander assoziiert sind, zusammenfassen. Ferner notieren wir  $d_i = \frac{r}{p_i^{\alpha_i}}$ . Kümmern wir nun um die Eindeutigkeit. Sei also

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k \quad \text{mit} \quad p_i^{\alpha_i} M_i = 0$$

gegeben, so wollen wir zeigen, dass  $M_i = d_i M$  und dadurch die Komponenten  $M_i$  eindeutig festgelegt sind. Es gilt offenbar für alle  $i = 1, \dots, k$

$$d_i M \subseteq d_i M_1 + \dots + d_i M_k = d_i M_i \subseteq M_i,$$

denn  $d_i M_j = 0$  für  $i \neq j$  nach Voraussetzung. Wählen wir ein  $i = 1, \dots, k$  beliebig, so ist  $(d_i, p_i^{\alpha_i}) = (1)$ , d.h. es existieren  $s, t \in R$  mit  $sd_i + tp_i^{\alpha_i} = 1$ . Für  $m \in M_i$  folgt dann

$$m = 1m = (sd_i + tp_i^{\alpha_i})m = d_i(sm) \in d_i M.$$

Zusammen haben wir

$$M_i \subseteq d_i M \subseteq d_i M_i \subseteq M_i$$

und damit Gleichheit.

Um die Existenz zu zeigen, definieren wir einmal  $M_i := d_i M$  und müssen nun die geforderten Eigenschaften nachprüfen. Zunächst ist klar, dass  $p_i^{\alpha_i} M_i = 0$ . Da  $(d_1, \dots, d_k) = (1)$  existieren  $t_1, \dots, t_k$  mit  $\sum_{i=1}^k t_i d_i$  und für alle  $x \in M$  folgt

$$x = 1x = \sum_{i=1}^k d_i(t_i x) \in \sum d_i M = \sum M_i.$$

Es fehlt nur noch zu zeigen, dass diese Summe auch direkt ist. Dazu sei wieder  $i \in \{1, \dots, k\}$  beliebig und  $y \in \sum_{j \neq i} M_j$ . Also ist  $d_i y = 0$ . Ist ferner zusätzlich  $y \in M_i$ , so ist  $p_i^{\alpha_i} y = 0$ . Wie oben existieren  $s, t \in R$  mit  $sd_i + tp_i^{\alpha_i} = 1$ . Also

$$y = 1y = (sd_i + tp_i^{\alpha_i})y = 0,$$

was den Beweis abschließt. □

### Definition 3.17.

Seien  $M$  ein  $R$ -Modul und  $r \in R$ , so definiere

$$V_r := \{a \in M : ra = 0\}.$$

**Bemerkung 3.18.** Es ist klar, dass  $V_r$  wieder zu einem  $R$ -Modul wird, da sich  $V_r$  auch lesen lässt, als der Kern des Modulhomomorphismus

$$M \rightarrow M, a \mapsto ra.$$

**Satz 3.19.**

Seien  $M$  ein Modul über einem Hauptidealbereich  $R$  und  $r, s, t, T \in R$  mit  $t = \text{ggT}(r, s)$  und  $T = \text{kgV}(r, s)$ . Dann gilt

$$(1) \quad V_r \cap V_s = V_t.$$

$$(2) \quad V_r + V_s = V_T.$$

*Beweis.* Zunächst ist klar, dass  $V_r + V_s$  und  $V_r \cap V_s$  wiederum  $R$ -Moduln sind.

- (1) Sei  $x \in V_t$ , so ist  $t \in \text{Ann}_R x$  nach Definition des Annihilators. Dieser ist ein Ideal, also sind auch  $s, t \in \text{Ann}_R x$ . Damit folgt sofort  $x \in V_r \cap V_s$ . Sei umgekehrt  $x \in V_r \cap V_s$ , also  $rx = 0$  und  $sx = 0$ . Nach Definition des ggT existieren  $r', s' \in R$  mit  $t = r'r + s's$ , also

$$tx = r'rx + s'sx = 0.$$

- (2) Da  $r$  und  $s$  Teiler von  $T$  sind, ist klar, dass  $V_r + V_s \subseteq V_T$ . Sei umgekehrt  $z \in V_T$ . Schreibe nun  $r = r't, s = s't$  und setze  $x := s'z, y := r'z$ . Dann ist

$$rx = rs'z = Tz = r'sz = sy$$

und wegen  $Tz = 0$  folgt  $x \in U_r$  und  $y \in U_s$ . Da nach Wahl nun  $(r') + (s') = (1)$ , existieren  $\alpha, \beta \in R$  mit  $\alpha r' + \beta s' = 1$  und wir folgern

$$z = \alpha r'z + \beta s'z = \alpha y + \beta x.$$

□

**Definition 3.20 (Annihilator).**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Für  $S \subset M$  heißt

$$\text{Ann}_R(S) := \{r \in R \mid sr = 0 \ \forall s \in S\}$$

der *Annihilator von  $S$  in  $R$* . Für  $S = \{x\}$  schreibe  $\text{Ann}_R(x) := \text{Ann}_R(\{x\})$ .

**Bemerkung 3.21.** In mancher Literatur wird auch die Schreibweise  $M = (x)$  für einen zyklischen Modul benutzt, jedoch suggeriert  $(x)$  ein Ideal in  $R$  zu bezeichnen. Da dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, verzichten wir auf diese Schreibweise.

**Bemerkung 3.22.** Man spricht in obiger Definition auch vom *Annihilator-Ideal*, da in der Tat  $\text{Ann}_R(S)$  ein Ideal in  $R$  ist. Insbesondere, falls  $M = xR$  ein zyklischer  $R$ -Modul über einem Hauptidealbereich  $R$  ist, so ist

$$\text{Ann}_R(x) = (r)$$

für ein  $r \in R$ .

**Lemma 3.23.** Sei  $M = xR$  ein zyklischer  $R$ -Modul. Dann gilt

$$M \cong R / \text{Ann}_R(x)$$

als  $R$ -Moduln und dieser Isomorphismus ist kanonisch.

*Beweis.*  $\phi: R \rightarrow M$ ,  $r \mapsto rx$  liefert einen surjektiven Homomorphismus von  $R$ -Moduln, dessen Kern gerade  $\text{Ann}_R(x)$  ist. Damit folgt die Behauptung sofort aus dem Homomorphiesatz für Moduln.  $\square$

**Lemma 3.24.** Sei  $Z = Rz$  ein zyklischer  $R$ -Modul von Ordnung  $p^\alpha$  für ein Primelement  $p \in R$ . Dann sind die einzigen Teilmoduln von  $Z$

$$0 = Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha-1} \subseteq \dots \subseteq Z_0 = Z,$$

wobei  $Z_\beta = p^\beta Z$ .

*Beweis.* Nach Lemma 3.23 ist  $Z \cong R/(p^\alpha)$ . Damit stehen die Teilmoduln von  $Z$  in Bijektion zu den Teilmoduln von  $R$  (gelesen als  $R$ -Modul), die  $(p^\alpha)$  enthalten. Solch ein Teilmoduln ist also gerade ein Ideal  $(r)$  mit  $(p^\alpha) \subseteq (r)$ . Da  $p$  prim ist, folgt  $r = up^\beta$  für  $0 \leq \beta \leq \alpha$  und  $u \in R^\times$ , wobei  $u = 1$  oBdA angenommen werden kann. Damit sind die  $Z_\beta$  die einzigen Teilmoduln von  $Z$ .  $\square$

**Lemma 3.25.** Sei  $x \in M$  mit  $\text{Ann}_R(x) = (\lambda)$ . Für  $r \in R$  gilt

$$\text{Ann}_R(rx) = (\delta)$$

mit  $\lambda = \delta t$  für  $t = \text{ggT}(r, \lambda)$ .

*Beweis.* Schreibe  $r = r't$ , so ist  $\delta rx = \delta r'tx = r'\lambda x = 0$ . Also  $\delta \in \text{Ann}_R(rx)$ . Für die andere Inklusion sei  $s \in \text{Ann}_R(rx)$ , also  $srx = 0$ . Damit ist aber  $sr \in \text{Ann}_R(x)$  und  $\lambda \mid sr$ . Mit  $\lambda = \delta t$  und  $sr = sr't$  folgt für  $t \neq 0$  (der Fall  $t = 0$  ist ohnehin trivial)  $\delta \mid sr'$ . Nach Definition des ggT sind  $r'$  und  $\delta$  teilerfremd, wodurch  $\delta \mid s$ . Also  $s \in (\delta)$ .  $\square$

**Lemma 3.26.** Seien  $x, y \in M$  mit  $\text{Ann}_R(x) = (a)$  und  $\text{Ann}_R(y) = (b)$ . Sind  $a$  und  $b$  teilerfremd, so gilt  $\text{Ann}_R(x+y) = (ab)$ .

*Beweis.* Zunächst ist klar, dass  $ab(x+y) = abx + aby = 0$ , also  $(ab) \subseteq \text{Ann}_R(x+y)$ . Ist nun  $t(x+y) = 0$  für ein  $t \in R$ , so ist  $z := tx = -ty \in (x) \cap (y)$ . Ferner ist  $(x) \cap (y) \subseteq V_a \cap V_b$  nach Voraussetzung. Nach Satz 3.19 (1) ist aber  $V_a \cap V_b = (0)$ . also auch  $z = 0$ . Damit ist

$$t \in \text{Ann}_R(x) \cap \text{Ann}_R(y) = (a) \cap (b) = (\text{kgV}(a, b)) = (ab),$$

da  $a$  und  $b$  nach Voraussetzung teilerfremd sind. Also ist  $\text{Ann}_R(x+y) \subseteq (ab)$ .  $\square$

## 3.2 | Vektorräume als Moduln

**Definition 3.27**  $((V, \tau))$ .

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\tau \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ , so können wir  $V$  als  $\mathbb{K}[x]$ -Modul auffassen:

$$f(x) \cdot v := f(\tau)(v)$$

für alle  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  und  $v \in V$ . Nenne das Paar  $(V, \tau)$   $\mathbb{K}[x]$ -Modul bzgl.  $\tau$ .

**Notation 3.28.** Sei  $\tau \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .



- Es bezeichne  $\mu_\tau$  das Minimalpolynom von  $\tau$ , also das normierte Polynom kleinsten Grades  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  mit  $f(\tau) = 0$ .
- Ferner schreibe  $\chi_\tau$  für das charakteristische Polynom von  $\tau$ , also  $\chi_\tau(x) := \det(x \operatorname{id}_V - \tau) \in \mathbb{K}[x]$ . ▲

**Bemerkung 3.29.** Ist  $\mathbb{K} = F := \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $V = E := \mathbb{F}_{q^n}$  eine Körpererweiterung von Grad  $n$  und

$$\begin{aligned} \tau = \sigma : E &\rightarrow E \\ v &\mapsto v^q \end{aligned}$$

der Frobenius von  $E$ , so ist

$$\mu_\tau(x) = \chi_\tau(x) = x^n - 1,$$

denn: Es ist klar, dass  $n = \deg \chi_\tau$  und da nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist  $\sigma$  Nullstelle von  $\chi_\tau$ . Daher teilt  $\mu_\tau$  das charakteristische Polynom. Jedoch kennen wir das Minimalpolynom von  $\tau$ : Nach dem Dedekindschen Lemma (Satz 1.12) ist  $\operatorname{id}_E, \sigma, \dots, \sigma^{n-1}$  linear unabhängig über  $E$ , also insbesondere über  $F$ , und  $\sigma^n = \operatorname{id}_E$ .

### Definition 3.30 ( $\tau$ -Ordnung, Teilmodul).

Sei  $(V, \tau)$  ein  $\mathbb{K}[x]$ -Modul. Zu jedem  $v \in V$  betrachte den  $\mathbb{K}[x]$ -Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi_v : \mathbb{K}[x] &\rightarrow V \\ f(x) &\mapsto f(x) \cdot v \end{aligned}$$

Sei ferner  $\dim V < \infty$ .

- (1) Ist  $\ker \psi_v = (g(x))$  für  $g(x) \in \mathbb{K}[x]$  normiert, so heißt  $g(x)$   $\tau$ -Ordnung von  $v$ . Ferner ist  $g(x)$  eindeutig. Schreibe  $\operatorname{Ord}_\tau(v) := g(x)$ .
- (2)  $\mathbb{K}[\tau] \cdot v := \operatorname{im} \psi_v$  heißt der von  $v$  erzeugte  $\mathbb{K}[x]$ -Teilmodul von  $V$ .

**Bemerkung 3.31.** Die Eindeutigkeit der  $\tau$ -Ordnung wird sofort klar, wenn man sich überlegt, dass für einen Hauptidealbereich  $R$  mit  $(a) = (b) \subseteq R$  gilt: Schreibe  $a = bb'$  und  $b = aa'$  so gilt  $a = aa'b'$ , also  $a'b' = 1$ . Damit unterscheiden sich die Erzeuger zweier gleicher Hauptideale lediglich um eine Einheit. Wir haben jedoch  $K[x]^\times = \mathbb{K}^\times$ . Die Forderung nach Normiertheit klärt damit abschließend die Eindeutigkeit.

**Bemerkung 3.32.** In Notation von Abschnitt 3.1 gilt offensichtlich

$$\operatorname{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(v) = \ker \psi_v.$$

**Notation 3.33.** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$  einen endlichen Körper,  $V = E \mid \mathbb{F}_q$  eine Körpererweiterung und  $\tau = \sigma$  den Frobenius-Endomorphismus schreibe

$$\operatorname{Ord}_q := \operatorname{Ord}_\tau$$

und bezeichne  $\operatorname{Ord}_q$  mit  $q$ -Ordnung. ▲

**Lemma 3.34.** Sei  $(V, \tau)$  ein  $\mathbb{K}[x]$ -Modul. Ferner seien  $u, v \in V$  mit  $g(x) := \text{Ord}_\tau(u)$ ,  $h(x) := \text{Ord}_\tau(v)$  und  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ . Dann gilt

- (1)  $\text{Ord}_\tau(f(x) \cdot u) = \frac{g(x)}{\text{ggT}(f(x), g(x))}.$   
 (2)  $\text{Ord}_\tau(u + v) = g(x)h(x)$ , falls  $\text{ggT}(g, h) = 1$ .

*Beweis.* (1) Dies ist lediglich eine Umformulierung von Lemma 3.25.

(2) In Lemma 3.26 haben wir gesehen, dass in diesem Fall  $\text{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(u + v) = (g(x)h(x))$  gilt.  $\square$

**Lemma 3.35.** Sei  $(V, \tau)$  ein  $\mathbb{K}[x]$ -Modul. Sei  $v \in V$ . Dann gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x] \cdot v) = \deg(\text{Ord}_\tau(v)).$$

*Beweis.* Nach dem Homomorphiesatz gilt:  $\text{im } \psi_v \cong \mathbb{K}[x] / \ker \psi_v$  als  $\mathbb{K}[x]$ -Moduln.  $\square$

**Definition 3.36 (zyklischer  $\mathbb{K}[x]$ -Modul).**

$(V, \tau)$  heißt *zyklischer  $\mathbb{K}[x]$ -Modul bzgl.  $w$* , falls es ein  $w \in V$  gibt, sodass  $\mathbb{K}[\tau] \cdot w = V$ .

**Satz 3.37.**

*Es gilt:*

$$(V, \tau) \text{ ist ein zyklischer Modul} \iff \mu_\tau = \chi_\tau$$

*Beweis.* Fassen wir zunächst ein paar einfache Tatsachen zusammen: Ist  $v \in V$ , so haben wir

$$\dim(\mathbb{K}[x] \cdot v) = \deg(\text{Ord}_\tau(v)) \leq \deg \mu_\tau \leq \deg \chi_\tau$$

und

$$\text{Ord}_\tau(v) \mid \mu_\tau \mid \chi_\tau,$$

wobei die erste Teilbarkeitsrelation per definitionem erfüllt ist und die zweite gerade der Satz von Cayley-Hamilton ist. Damit kommen wir zum direkten Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $V$  also zyklisch bzgl.  $w$ , so ist dies nach obigem äquivalent zu  $\deg(\text{Ord}_\tau(w)) = n$ . Daraus folgt aber sofort  $\mu_t = \chi_\tau$ , da beide normiert sind.

„ $\Leftarrow$ “ Zunächst sei behauptet, dass es stets ein  $w \in V$  gibt mit  $\text{Ord}_\tau(w) = \mu_\tau$ . Sei dazu  $\mu_\tau(x) = \prod_{i=1}^r p_i(x)^{a_i}$  die Zerlegung in irreduzible Faktoren über  $\mathbb{K}[x]$ , so existieren  $w_i \in V$  mit  $\text{Ord}_\tau(w_i) = p_i^{a_i}$ . Andernfalls hätten wir einen Widerspruch zum Minimalpolynom von  $\tau$ ! Nach Satz 3.34 ist dann aber  $w := \sum_{i=1}^r w_i$  ein Element in  $V$  mit  $\tau$ -Ordnung  $\mu_\tau$ .

Ist dann also  $\mu_\tau = \chi_\tau$ , so hat obiges  $w$  genau  $\tau$ -Ordnung  $\chi_\tau$ ; erzeugt also  $V$  als  $\mathbb{K}[x]$ -Modul.

$\square$

**Satz 3.38.**

Sei  $(V, \tau)$  ein zyklischer Modul über einem endlich dimensionalem Vektorraum. Sei ferner  $g(x) \in \mathbb{K}[x]$  normiert mit  $g \mid \mu_\tau$ . Dann gilt:

- (1)  $V_g$  (siehe Definition 3.17) ist ein  $\mathbb{K}[x]$ -Teilmodul von  $V$ .
- (2) Alle  $\mathbb{K}[x]$ -Teilmoduln von  $V$  sind von dieser Form.
- (3) Die Erzeuger von  $V_g$  sind genau die Elemente  $v \in V$  mit  $\text{Ord}_\tau(v) = g$ , d.h. für diese gilt  $\mathbb{K}[x] \cdot v = V_g$ . Insbesondere sind die Erzeuger von  $V$  gerade die Elemente  $u \in V$  mit  $\text{Ord}_\tau(u) = \mu_\tau$ .
- (4)  $V_g$  ist zyklisch bzgl.  $\tau$  mit Minimalpolynom  $g(x)$ . Ferner ist  $\dim(V_g) = \deg(g)$ .

**Beweis.** (1) Klar:  $0 \in V_g$ . Weiter seien  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  und  $v \in V_g$  mit  $h(x) := \text{Ord}_\tau(v)$ , so ist nach Lemma 3.34  $\text{Ord}_\tau(f(x) \cdot v) = \frac{h(x)}{\text{ggT}(f, h)} \mid g(x)$ . Damit liegt auch  $f(x) \cdot v$  in  $V_g$ .

(2) Dies ist lediglich eine Umformulierung von Satz 3.16 und Lemma 3.24.

(3) Sei  $v \in V$  ein Erzeuger von  $V_g$ , so ist per definitionem von  $g(x) \cdot v = 0$ . Also  $\text{Ord}_\tau(v) \mid g(x)$ . Schreibe  $\text{Ord}_\tau(v) =: h(x)$ , so folgt

$$h(x) \cdot V_g = \mathbb{K}[x] \cdot (h(x) \cdot v) = 0 \Leftrightarrow g(x) \mid h(x).$$

Ist andererseits  $w \in V$  mit  $\text{Ord}_\tau(w) = g(x)$ , so können wir zunächst festhalten, dass  $\mathbb{K}[x] \cdot w \subseteq V_g$ . Sei ferner  $x \in V$  ein Erzeuger von  $V_g$ . Dann ist  $w = f(x) \cdot v$  für ein  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  und ferner  $\text{ggT}(f(x), g(x)) = 1$  nach Lemma 3.34. Also existieren  $f'(x), g'(x) \in \mathbb{K}[x]$  mit  $f'f + g'g = 1$ . Wir folgern:

$$v = (f'(x)f(x) + g'(x)g(x)) \cdot v = f'(x) \cdot w,$$

d.h.  $v \in \mathbb{K}[x] \cdot w$ ; mithin  $V_g \subseteq \mathbb{K}[x] \cdot w$ .

(4) Klar nach (3) und Lemma 3.35. □

**Bemerkung 3.39.** Die Punkte (1) und (2) hätten bereits in Abschnitt 3.1 aufgeführt werden können, da die Zyklizität des Moduls hier ausreichend war. In [5, Theorem 7.10] ist dies auch so vorzufinden.

**Korollar 3.40.** Sei  $v \in V$  mit  $\text{Ord}_\tau(v) = g(x)$ . Für  $w \in V$  gilt dann:

$$w \in V_g \Leftrightarrow w = f(x) \cdot v \text{ für ein } f(x) \in \mathbb{K}[x]_{<\deg g}$$

**Beweis.** Nach Satz 3.38 ist  $v$  Erzeuger von  $V_g$ , d.h.  $V_g = \text{im } \psi_v \cong \mathbb{K}[x]/(g(x))$ , wobei letztere Isomorphie nach dem Homomorphiesatz gilt. Dies zeigt die Behauptung. □

Wir schließen dieses Kapitel mit einer wesentlichen Beobachtung, über den Zusammenhang von Zerlegungen im Ring  $\mathbb{K}[x]$  und im Vektorraum  $V$ . Für den Spezialfall von zyklischen Galoisweiterungen findet man den Satz auch in [5, Theorem 8.6] wieder.

**Definition 3.41 (Zerlegung).**

Sei  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  normiert mit  $\deg f \geq 1$ , so heißt  $\Delta \subseteq \mathbb{K}[x]$  *Zerlegung von  $f(x)$* , falls gilt: Alle  $\delta \in \Delta$  sind normiert, vom Grad größer gleich 1, paarweise teilerfremd und es gilt:  $f(x) = \prod_{\delta \in \Delta} \delta(x)$ .

**Satz 3.42.**

Sei  $(V, \tau)$  ein zyklischer Moduln von endlicher Dimension. Seien ferner  $g(x) \in \mathbb{K}[x]$  normiert mit  $g \mid \mu_\tau$  und  $\Delta$  eine Zerlegung von  $g$ . Dann gilt:

- (1)  $V_g = \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_\delta$  ist eine direkte Summe von zyklischen Moduln bzgl.  $\tau$ .
- (2) Jedes  $w \in V_g$  lässt sich eindeutig schreiben als  $w = \sum_{\delta \in \Delta} w_\delta$  mit  $w_\delta \in V_\delta$ . Ferner gilt

$$\text{Ord}_\tau(w) = \prod_{\delta \in \Delta} \text{Ord}_\tau(w_\delta)$$

und  $\text{Ord}_\tau(w)$  ist ein normierter Teiler von  $g(x)$ .

- (3)  $w$  ist ein Erzeuger von  $V_g$  genau dann, wenn für alle  $\delta \in \Delta$  auch  $w_\delta$  Erzeuger von  $V_\delta$  ist.
- (4) Ist  $V_g = \bigoplus_{i \in I} V_i$  eine Zerlegung in Teilmoduln, so existieren eine Zerlegung  $\Delta$  von  $g$  und eine Bijektion  $\pi : I \rightarrow \Delta$ , so dass  $V_i = V_{\pi(i)}$ .

**Beweis.** (1) Betrachten wir  $V_g$  selbst als  $\mathbb{K}[x]$ -Modul, so ist diese Aussage lediglich eine Anwendung von Satz 3.16.

- (2) Dass die geforderte Zerlegung in  $w_\delta$  existiert und eindeutig ist, ist eine direkte Konsequenz aus (1). Da  $w$  von  $g(x)$  annulliert wird, ist klar, dass  $\text{Ord}_\tau(w) \mid g$ . Analog gilt auch  $\text{Ord}_\tau(w_\delta) \mid \delta$  für alle  $\delta \in \Delta$ . Diese sind jedoch teilerfremd und wir erhalten die postulierte Gleichung aus Lemma 3.34 (2).
- (3) Dies ist mit (2) und Satz 3.38 (3) sofort klar.
- (4) Nach Satz 3.38 (2) sind alle  $V_i = V_{\pi(i)}$  für einen normierten Teiler  $\pi(i) \mid g$ . Da die Summe direkt ist, folgt die Behauptung mit Satz 3.19.  $\square$

## Kapitel 4

# Explizite Konstruktion von Normalbasen

Wir haben nun kennengelernt, wie man einen Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{K}$  zusammen mit einem Endomorphismus  $\tau$  als  $\mathbb{K}[x]$ -Modul lesen kann. Analog dazu wollen wir nun eine Erweiterung endlicher Körper  $E$  über  $F$  in diesem Kontext verstehen:  $E$  ist ein Vektorraum über  $F$  und wird mit Hilfe des Frobenius  $\sigma : \bar{F} \rightarrow \bar{F}$  zu einem  $F[x]$ -Modul im Sinne von Definition 3.27. Dies wird uns helfen, normale (und später vollständig normale) Elemente zu konstruieren.

### 4.1 | Grundlegende Ideen

Seien im Folgenden stets  $F := \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$  und  $E := \mathbb{F}_{q^n} \mid F$  eine Körpererweiterung. Wir wiederholen kurz die Definition einer *Normalbasis*.

#### Definition 4.1 (normales Element, normales Polynom, Normalbasis).

Sei  $F$  ein Körper und  $E \mid F$  eine endliche Galoiserweiterung von Grad  $n$ . Sei ferner  $w \in E$  mit  $F(w) = E$ .  $w$  heißt *normal* über  $F$ , falls

$$\{\gamma(w) \mid \gamma \in \text{Gal}(E \mid F)\}$$

eine  $F$ -Basis von  $E$  ist.  $\{\gamma(w) \mid \gamma \in \text{Gal}(E \mid F)\}$  heißt entsprechend *Normalbasis* und  $g(x) \in F[x]$  mit

$$g(x) = \prod_{\gamma \in \text{Gal}(E|F)} (x - \gamma(w))$$

heißt *normales Polynom*.

Wir wollen nun die Begriffe der normalen Elemente und der Erzeuger von zyklischen Moduln aus vorhergehendem Kapitel in Zusammenhang bringen. Dazu müssen wir uns Gedanken machen, wie sich Normalität im Kontext der Modulstruktur einer Körpererweiterung lesen lässt.

#### Satz 4.2.

Ein Element  $u \in E$  ist genau dann normal über  $F$ , wenn

$$\text{Ord}_q(u) = x^n - 1 \quad \in F[x].$$

*Beweis.* Nach Bemerkung 3.29 ist das Minimalpolynom des Frobenius von  $F$  gerade  $x^n - 1$ . Ferner wissen wir nach Satz 1.11, dass  $\text{Gal}(E | F) = \langle \sigma \rangle$ . Letztlich liefert Satz 3.38 (3), dass die Erzeuger von  $E$  als  $F[x]$ -Modul, also gerade die normalen Elemente, jene mit  $q$ -Ordnung  $x^n - 1$  sind.  $\square$

**Korollar 4.3.** Sei  $x^n - 1 = \prod_{i=1}^s r_i(x)$  eine Zerlegung in paarweise teilerfremde Polynome. Seien ferner  $u_i \in V_{r_i}$  Elemente mit  $\text{Ord}_q(u_i) = r_i(x) \ \forall i = 1, \dots, s$ . Dann ist

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_s$$

normal in  $E | F$ .

*Beweis.* Satz 3.42.  $\square$

## 4.2 | Stark reguläre Erweiterungen

**Beispiel 4.4.** Wählen wir einmal  $q = 7$  und  $n = 9$ . Also  $F = \mathbb{F}_7$ . Ferner wissen wir aus Kapitel 2, dass

$$x^9 - 1 = x^9 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_9(x) = (x-1)((x+3)(x+5))((x^3+3)(x^3+5)) \in \mathbb{F}_7[x]$$

die vollständige Faktorisierung von  $x^9 - 1$  über  $\mathbb{F}_7$  ist. Da es sich hier bei den Faktoren lediglich um Binome handelt, können wir relativ einfach Elemente passender  $q$ -Ordnungen angeben: Beginnen wir mit  $\Phi_9 = (x^3 + 3)(x^3 + 5)$ . Gesucht ist nun ein Element  $u$  in einer passenden Erweiterung von  $F$  mit  $\text{Ord}_q(u) = \Phi_9$ . Sei dazu  $u \in \bar{F}$  eine primitive 27-te Einheitswurzel. Dann gilt:

$$\text{ord}(u^{342}) = \text{ord}(u^{18}) = \frac{27}{\text{ggT}(27, 18)} = 3$$

Wenn man sich die Frage stellt, warum an diesem Punkt gerade 342 eine interessante Zahl ist, so wird man diese sofort wiederfinden, wenn man versucht ein Element  $w \in \bar{F}^*$  mit  $q$ -Ordnung  $x^3 + 3$  (bzw.  $x^3 + 5$ ) wiederzufinden:

$$(x^3 + 3) \cdot w = w^{q^3} + 3w = w(w^{7^3-1} + 3) = w(w^{342} + 3) \stackrel{!}{=} 0.$$

Da  $w \neq 0$  und per definitionem der Kreisteilungspolynome  $(-3), (-5) \in \mathbb{F}_7$  primitive 3-te Einheitswurzeln sind, brauchen wir ein  $w$  mit  $\text{ord}(w^{342}) = 3$ ; was obiges  $u$  gerade erfüllt! Damit ist also  $u^{18} = u^{342}$  eine der beiden dritten Einheitswurzeln  $(-3)$  oder  $(-5) \in \mathbb{F}_7$  und wir können mit Lemma 3.34 folgern:

$$\text{Ord}_q(u + u^2) = \Phi_9$$

Auch die Suche nach einem Element mit  $q$ -Ordnung  $\Phi_3$  ist damit erledigt: Mit analoger Argumentation wie oben erhalten wir, dass

$$\text{Ord}_q(u^3 + u^6) = \Phi_3.$$

Zusammengefasst ist also  $u$  ein normales Element von  $\mathbb{F}_{7^9} | \mathbb{F}_7$ .  $\blacktriangle$

Ein entscheidender Vorteil in der Konstruktion eines normalen Elements in obigem Beispiel war der Zerfall der Kreisteilungspolynome in Binome. Aus Satz 2.18 wissen wir bereits, wann die Kreisteilungspolynome in Binome zerfallen. Damit können wir diese sehr einfache Möglichkeit Normalbasen explizit anzugeben, als Reihe von Aussagen formulieren:

**Definition 4.5 (stark regulär).**

Das Paar  $(q, n) \in \mathbb{N}^2$  heißt *stark regulär*, falls

- $q = p^r$  mit  $p$  einer Primzahl und  $r > 0$ ,
- $p \nmid n$ ,
- $\nu(n) \mid q - 1$ ,
- $4 \mid q - 1$ , falls  $n$  gerade.

Schreibe  $n \in \mathcal{S}_q$ , falls  $(q, n)$  stark regulär. Eine Körpererweiterung  $\mathbb{F}_{q^n} \mid \mathbb{F}_q$  heißt *stark regulär*, falls  $n \in \mathcal{S}_q$ .

**Satz 4.6.**

Sei  $F = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $m \in \mathcal{S}_q$ . Seien  $l := \pi_m(q - 1)$ ,  $a := \text{ggT}(l, m)$  und  $u \in \bar{\mathbb{F}}_q$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel. Dann gilt:

- (1)  $\mathbb{F}_q(u) = \mathbb{F}_{q^m} =: E$ .
- (2)  $\text{Ord}_q(u)$  ist ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_m$  in  $\mathbb{F}_q[x]$ .
- (3)  $v := \sum_{i \in I_a} u^i$  hat  $q$ -Ordnung  $\Phi_m$ .

*Beweis.* (1) Aus Lemma 2.14 haben wir  $\pi_m(q^m - 1) = m\pi_m(q - 1) = ml$  und damit  $[F(u) : F] = \text{ord}_{ml}(q) = m$ .

(2) Sei nun  $\zeta \in F^*$  eine primitive  $a$ -te Einheitswurzel. Dann ist nach Satz 2.18

$$\Phi_m(x) = \prod_{i \in I_a} (x^{\frac{m}{a}} - \zeta^i).$$

Wie in Beispiel 4.4 betrachten wir für  $i \in I_a$ :

$$\begin{aligned} (x^{\frac{m}{a}} - \zeta^i) \cdot u &= (\sigma^{\frac{m}{a}} - \zeta^i \text{id}_E) \\ &= u^{q^{\frac{m}{a}}} - \zeta^i u \\ &= u(u^{q^{\frac{m}{a}-1}} - \zeta^i), \end{aligned} \tag{*}$$

wobei wie üblich  $\sigma : E \rightarrow E, x \mapsto x^q$  den Frobenius von  $E \mid F$  meint. Wir wollen nun zeigen, dass  $\text{Ord}_q(u) = (x^{\frac{m}{a}} - \zeta^i)$  für ein  $i \in I_a$ , explizit also, dass  $(*) = 0$  für ein  $i \in I_a$  gilt. Dazu müssen wir  $q^{\frac{m}{a}} - 1$  genauer untersuchen: Wiederum nach Lemma 2.14 haben wir:

$$\pi_m(q^{\frac{m}{a}} - 1) = \frac{m}{a} \pi_m(q - 1) = \frac{ml}{a} = \text{kgV}(m, l) =: c.$$

Nun ist  $q^{\frac{m}{a}} - 1 = ck$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(k, ml) = 1$ , wie man sich anhand der Primfaktorzerlegungen leicht klar machen kann. Erinnern wir uns kurz, dass  $u$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel war, so folgern wir:

$$\text{ord}(u^{ck}) = \text{ord}(u^c) = \frac{ml}{\text{ggT}(ml, c)} = \frac{ml}{c} = a.$$

Ergo gibt es  $j \in I_a$  mit  $u^{ck} = \zeta^j$  und für dieses  $j$  ist  $(*)$  gerade 0, was zu zeigen war.

(3) Seien  $j \in I_a$  mit  $\text{Ord}_q(u) = x^{\frac{m}{a}} - \zeta^j$  und  $i \in I_a$  beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{m}{a}} - \zeta^{ji}\right)u^i &= \left(u^{q^{\frac{m}{a}}}\right)^i - (\zeta^j u)^i \\ &= \left(u^{q^{\frac{m}{a}}} - \zeta^j u\right) \sum_{k=0}^{i-1} u^{k q^{\frac{m}{a}}} \zeta^{(i-1-k)j} u^{i-1-k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da  $i$  teilerfremd zu  $ml$  ist, haben wir ferner  $\text{ord}(u) = \text{ord}(u^i)$  und können folgern, dass  $\text{Ord}_q(u^i) = x^{\frac{m}{a}} - \zeta^{ji}$ . Packen wir nun alles zusammen und bedenken, dass  $I_a \rightarrow I_a, i \mapsto ij$  eine Bijektion ist, können wir den letzten Schritt im Beweis führen:

$$\text{Ord}_q\left(\sum_{i \in I_a} u^i\right) = \prod_{i \in I_a} \text{Ord}_q(u^i) = \prod_{i \in I_a} \left(x^{\frac{m}{a}} - \zeta^{ji}\right) = \prod_{k \in K_a} \left(x^{\frac{m}{a}} - \zeta^k\right) = \Phi_m(x).$$

□

Da wir nun die einzelnen Bausteine kennen, können wir auf die Faktorisierung und damit auf eine explizite Angabe eines normalen Elements zu schließen:

**Korollar 4.7.** Für  $F = \mathbb{F}_q$ ,  $n \in \mathcal{S}_q$  sei  $\lambda \in F^*$  eine primitive  $\pi_n(q-1)$ -te Einheitswurzel. Zu jedem  $m \mid n$  seien

- $a(q, m) := \text{ggT}(m, \pi_m(q-1))$  und
- $I_a := \{i \leq a : \text{ggT}(i, a) = 1\}$ .

Dann ist

$$x^n - 1 = \prod_{m \mid n} \prod_{i \in I_{a(q, m)}} \left( x^{\frac{m}{a(q, m)}} - \lambda^{\frac{\pi_n(q-1)}{a(q, m)} i} \right)$$

die vollständige Faktorisierung von  $x^n - 1$  über  $\mathbb{F}_q$ .

**Beweis.** Da  $\text{ord}\left(\lambda^{\frac{\pi_n(q-1)}{a(q, m)}}\right) = a(q, m)$  und für  $m \mid n$  offensichtlich auch  $m \in \mathcal{S}_q$ , ist obige Aussage lediglich eine Anwendung von Satz 4.6. □

#### Satz 4.8.

Seien  $F = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $n \in \mathcal{S}_q$  und  $L := \pi_n(q-1)$ . Ferner sei  $u \in \bar{F}$  eine primitive  $(nL)$ -te Einheitswurzel. Dann ist mit Notation aus Korollar 4.7

$$w := \sum_{m \mid n} \sum_{i \in I_a} u^{\frac{nL}{m \pi_m(q-1)} i}$$

normal in  $E := \mathbb{F}_{q^n}$  über  $F$ .



*Beweis.* Im Grunde haben wir bereits alles gezeigt. Daher reicht ein kurzer Kommentar, warum wir Satz 4.6 anwenden können aus. Es ist trivialerweise

$$\text{ord}\left(u^{\frac{nL}{m\pi_m(q-1)}}\right) = m\pi_m(q-1)$$

und damit sind alle Voraussetzungen erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 4.9.** Wie wir in Beispiel 4.4 und Satz 4.6 gesehen haben, sind die  $(ml)$ -ten Einheitswurzeln die Elemente von kleinster multiplikativer Ordnung, deren  $q$ -Ordnung ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_m(x)$  wird. Natürlich können wir dieses Konzept auch erweitern und uns überlegen, welche primitiven Einheitswurzeln die selbe Eigenschaft erfüllen. Darüber hinaus können wir die Elemente deren  $q$ -Ordnung ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_m(x)$  über  $F[x]$  ist, auch durch die Modulstruktur selbst beschreiben. Diese beiden Überlegungen wollen wir in den nächsten beiden Lemmas beweisen.

**Lemma 4.10.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.6, also  $F = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $m \in \mathcal{S}_q$ . Setze ferner  $l := \pi_m(q-1)$ ,  $a := \text{ggT}(l, m)$ . Ist nun  $\theta$  eine primitive  $(nf)$ -te Einheitswurzel für  $l \mid f \mid q-1$ , so ist  $\text{Ord}_q(\theta)$  ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_m(x)$  über  $F[x]$ .*

*Beweis.* Sei  $f = le$  mit  $\text{ggT}(e, l) = 1$ . Diese Zerlegung ist möglich, da  $l$  per definitionem der größte Teiler von  $q-1$  ist, dessen Primfaktoren allesamt in  $m$  vorkommen, d.h. jeder Primfaktor von  $q-1$  der  $l$  teilt, kommt dort bereits in maximaler Potenz vor. Damit reicht es – wenn wir den Beweis von Satz 4.6 noch einmal nachvollziehen – zu zeigen, dass  $\text{ggT}(mle, ck) = ce$  für  $c := \text{kgV}(m, l)$  und  $q^{\frac{m}{a}} - 1 = ck$  für ein  $k$  mit  $\text{ggT}(k, ml) = 1$ . Da  $\text{ggT}(e, l) = 1$ , ist per definitionem von  $l$  auch  $\text{ggT}(e, m) = 1$  und damit auch  $\text{ggT}(e, c) = 1$ . Da  $e \mid q-1 \mid q^{\frac{m}{a}-1}$  zerfällt  $k$  in  $k = \bar{k}k_e$  mit  $e \mid k_e$  und  $\text{ggT}(\bar{k}, e) = 1$ . Damit folgt  $\text{ggT}(mle, ck) = ce$  und wir haben  $\text{ord}(\theta^{ck}) = \frac{mle}{\text{ggT}(mle, ck)} = \frac{mle}{ce} = a$ .  $\square$

Als Korollar dieses Lemmas können wir einen Satz von Semaev 1989 in [19] beweisen, welcher erneut von Blake, Gao und Mullin 1997 in [1] bewiesen wurde:

**Satz 4.11 ([1, Theorem 2.7], [19]).**

*Sei  $q = p^r$  eine Primzahlpotenz. Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(n, q) = 1$ . Ist  $x^n - a \in \mathbb{F}_q[x]$  irreduzibel mit Wurzel  $\theta \in \mathbb{F}_{q^n}$ , so gilt*

$$\mathbb{F}_{q^n} = \bigoplus_{l \in R_q(n)} \langle \theta^l \rangle_q,$$

*wobei  $\langle \theta^l \rangle_q := \text{span}_{\mathbb{F}_q} \{ \theta^i \mid i \in M_q(l \bmod n) \}$ .*

*Beweis.* Aus Satz 2.16 und Satz 2.17 wissen wir, dass für  $a \in \mathbb{F}_q^*$  das Polynom  $x^n - a \in \mathbb{F}_q[x]$  genau dann irreduzibel ist, wenn  $p \nmid n$ ,  $\nu(n) \mid f := \text{ord}(a)$ ,  $l := \pi_n(q-1) \mid f$  und  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $4 \mid n$ . Ist bereits  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $n$  gerade, so sind wir genau in der Situation, dass  $n$  stark regulär ist. Damit ist  $\theta$  eine primitive  $(nf)$ -te Einheitswurzel und wir wissen nach Lemma 4.10, dass  $\text{Ord}_q(\theta)$  ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_n(x)$  über  $\mathbb{F}_q[x]$  ist, womit alles gezeigt wäre.

Es bleibt ein Wort zur Situation  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , falls  $n$  gerade, zu verlieren. Dieser Fall wird von den bisherigen Resultaten nicht erfasst. Mit etwas mehr Aufwand ist es jedoch möglich, die explizite Konstruktion von Normalbasen mit primitiven Einheitswurzeln zu erweitern, wie Hachenberger in [5, Section 22] zeigt.  $\square$

Bevor wir die Ideen der stark regulären Körpererweiterungen verallgemeinern wollen, betrachten wir noch ein Lemma, das die irreduziblen Teilmodule genauer beschreibt und in ganz ähnlicher Form in [5, Theorem 22.5] wiederzufinden ist.

**Lemma 4.12.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.6, also  $F = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $m \in \mathcal{S}_q$ . Setze ferner  $l := \pi_m(q-1)$ ,  $a := \text{ggT}(l, m)$ . Ist dann  $u$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel mit  $\text{Ord}_q(u) = f(x)$  für  $f(x)$  einen irreduziblen monischen Teiler von  $\Phi_m(x)$ , so gilt für  $v \in E := \mathbb{F}_{q^m}$ :*

$$\text{Ord}_q(v) = f(x) \iff v = g(x) \cdot u \quad \text{für ein } 0 \neq g \in F[x]_{< \frac{m}{a}}$$

*Beweis.* In Korollar 3.40 haben wir gezeigt, dass für  $v \in E$  gilt

$$v \in E_f \iff v = g(x) \cdot u \quad \text{für ein } g(x) \in F[x]_{< \deg f}, \text{ ggT}(f, g) = 1$$

Da  $f$  irreduzibel von Grad  $\frac{m}{a}$  ist, sind alle  $v \in E_f \setminus \{0\}$  von  $q$ -Ordnung  $f$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.13.** Obiges Lemma gilt nicht nur für primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzeln, sondern – wie man offensichtlich erkennen kann – für jedes Element mit gleicher  $q$ -Ordnung!

## 4.3 | Reguläre Erweiterungen

Die Erkenntnisse über stark reguläre Erweiterungen wollen wir nutzen, um Normalbasen auch in einem allgemeineren Kontext angeben zu können. Ist nämlich  $m \in \mathbb{N}$  ungerade mit  $p \nmid m$  und setzen wir  $s = \text{ord}_{\nu(m)}(q)$ , so erkennen wir, dass  $\nu(m) \mid q^s - 1$  per definitionem von  $\text{ord}_{\nu(m)}(q)$ . Mit anderen Worten:  $m \in \mathcal{S}_{q^s}$ !

### Definition 4.14 (regulär).

Sei  $q = p^r$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Setze  $n = n'p^c$  mit  $p \nmid n'$ . Das Paar  $(q, n)$  heißt *regulär*, falls  $\text{ggT}(n, \text{ord}_{\nu(n')}(q)) = 1$ . Ist  $F = \mathbb{F}_q$  und  $E = \mathbb{F}_{q^n}$ , so nenne die Erweiterung  $E \mid F$  *regulär*.

### Satz 4.15.

Seien  $F := \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper für eine Primzahlpotenz  $q = p^r$  und  $m \in \mathbb{N}$  ungerade mit  $p \nmid m$ . Setze  $s := \text{ord}_{\nu(m)}(q)$ ,  $l := \pi_m(q^s - 1)$ ,  $b := b(q, m) = \text{ggT}(l, m)$ ,  $E := \mathbb{F}_{q^m}$  und  $E' = \mathbb{F}_{q^{sm}}$ . Ist dann  $u$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel, so gilt

- (1)  $F(u) = E'$ ,
- (2)  $\text{Ord}_q(u) = f(x^s)$  für einen monischen irreduziblen Teiler  $f(x) \in F[x]$  von  $\Phi_m(x)$  und
- (3)  $v := \sum_{\substack{j \in R_q(m) \\ \text{ggT}(j, m) = 1}} u^j$  hat  $q$ -Ordnung  $\Phi_m(x^s)$ .

*Beweis.* (1) Zunächst stellen wir fest, dass

$\square$

Nun haben wir also Elemente mit  $q$ -Ordnung  $\Phi_m(x^s)$  gefunden. Es stellt sich jedoch die Frage, wie wir daraus Elemente mit  $q$ -Ordnung  $\Phi_m(x)$  „basteln“ können. Dies zeigt uns der folgende Satz:

**Satz 4.16.**

Seien alle Voraussetzungen und Notationen wie in Satz 4.15. Sei jedoch zusätzlich  $\text{ggT}(m, s) = 1$ . Bezeichne ferner  $\sigma_E : E' \rightarrow E'$ ,  $x \mapsto x^{q^m}$  den Frobenius von  $E'$  auf  $E$ . Ist dann  $u$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel und  $v = \sum_{j \in R_q(m)} u^j$ , so gilt:

- (1)  $H(\sigma_E)(v)$  hat  $q$ -Ordnung  $\Phi_m(x)$  für  $H(x) := \frac{\Phi_m(x^s)}{\Phi_m(x)}$ .
- (2)  $\text{Tr}_{E'|E}(v)$  hat  $q$ -Ordnung  $\Phi_m(x)$ .
- (3)  $\text{Ord}_q(\text{Tr}_{E'|E}(u))$  ist ein irreduzibler monischer Teiler von  $\Phi_m(x)$ .

*Beweis.* Zerlegen wir  $s = \bar{s}p^\beta$  mit  $p \nmid \bar{s}$ , so ist nach Voraussetzungen  $\text{ggT}(\bar{s}, m) = 1$  und wir sind in der Situation von Satz 2.15. Damit gilt

$$\Phi_m(x^s) = \Phi_m(x^{\bar{s}})^{p^\beta} = \prod_{d|\bar{s}} \Phi_{md}(x)^{p^\beta}.$$

Mit konsequenter Anwendung von Lemma 3.34 folgern wir die Behauptungen:

$$\text{Ord}_q(H(\sigma_E)v) = \frac{\Phi_m(x^s)}{\text{ggT}(\Phi_m(x^s), H(x))} = \Phi_m(x).$$

Für (2) und (3) überlegen wir uns, dass für  $a \in E'$

$$\text{Tr}_{E'|E}(a) = \sum_{i=0}^{s-1} a^{q^{im}} = \left[ \frac{x^{sm} - 1}{x^m - 1} \right] (\sigma_E)(a)$$

und

$$\frac{x^{sm} - 1}{x^m - 1} = \frac{\prod_{d|\bar{s}m} \Phi_d(x)^{p^\beta}}{\prod_{d|m} \Phi_d(x)} = \Phi_m(x)^{p^\beta-1} \prod_{\substack{l|m \\ l \neq m}} \Phi_l(x)^{p^\beta-1} \prod_{\substack{d|\bar{s} \\ d \neq 1}} \Phi_{md}(x)^{p^\beta}.$$

Ergo ist

$$\text{Ord}_q(\text{Tr}_{E'|E}(v)) = \frac{\Phi_m(x^s)}{\text{ggT}(\Phi_m(x^s), \frac{x^{sm}-1}{x^m-1})} = \Phi_m(x)$$

und

$$\text{Ord}_q(\text{Tr}_{E'|E}(u)) = \frac{f(x^s)}{\text{ggT}(f(x^s), \frac{x^{sm}-1}{x^m-1})} = f_{1,1}(x),$$

wobei wir uns hierfür noch einmal an Satz 2.20 erinnern müssen, wo wir gezeigt haben, dass in genau dieser Situation

$$f(x^{\bar{s}}) = \prod_{d|m} \prod_{i=1}^{\Delta_q(m,d)} f_{d,i}(x)$$

für monische, irreduzible Teiler  $f_{d,i}$  von  $\Phi_{md}(x)$  für alle  $i = 1, \dots, \Delta_q(m, d)$  und wir damit

$$\text{ggT}\left(f(x^{\bar{s}})^{p^\beta}, \frac{x^{sm}-1}{x^m-1}\right) = \prod_{\substack{d|m \\ d \neq 1}} \prod_{i=1}^{\Delta_q(m,d)} f_{d,i}(x)$$

folgern können. Abschließend sehen wir dass

$$\Delta_q(m, 1) = \frac{\varphi(1) \operatorname{ord}_m(q)}{\operatorname{ord}_{1 \cdot m}(q)} = 1.$$

□

Wir können in gewisser Weise sogar eine Verschärfung obiges Satzes angeben und die Verwendung der Spurfunktion etwas erweitern. Wir müssen lediglich dafür sorgen, dass wir ein Element des Körpers erhalten, für den wir Erzeuger (und letztendlich normale Elemente) konstruieren wollen.

#### Satz 4.17.

*Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.16 und sei wiederum  $u$  eine primitive  $(ml)$ -te Einheitswurzel. Für  $g(x) \in F[x]$  gilt: Ist  $[F(g(x) \cdot u) : F] = m$ , so gilt*

$$\operatorname{Ord}_q(g(x) \cdot u) \text{ ist ein monischer irreduzibler Teiler von } \Phi_m(x).$$

*Beweis.* Auf der einen Seite haben wir

$$\operatorname{Ord}_q(g(x) \cdot u) \mid x^m - 1 = \prod_{d \mid m} \Phi_m(x),$$

da  $g(x) \cdot u$  nach Voraussetzung Grad  $m$  über  $F$  hat und auf der anderen Seite gilt nach Lemma 3.34

$$\operatorname{Ord}_q(g(x) \cdot u) = \frac{f(x^s)}{\operatorname{ggT}(f(x^s), g(x))} \mid f(x^s).$$

Wir wissen jedoch aus Satz 2.20 (vgl. auch den Beweis von Satz 4.16), dass

$$f(x^s) = \prod_{d \mid \bar{s}} \prod_{i=1}^{\Delta_q(m, d)} f_{d,i}(x)^{p^\beta}$$

für  $s = \bar{s}p^\beta$  mit  $p \nmid \bar{s}$  und  $f_{d,i}(x)$  monische, irreduzible Teiler von  $\Phi_{md}(x)$ . Da  $p \nmid m$  nach Voraussetzung, kommt  $\Phi_m(x)$  in  $x^m - 1$  lediglich in einfacher Vielfachheit vor und damit folgt

$$\operatorname{Ord}_q(g(x) \cdot u) = f_{1,1}(x)$$

für den einzigen monischen irreduziblen Teiler in  $f(x^s)$  von  $\Phi_m(x)$ . □

Auch für reguläre Erweiterungen wollen wir ein Analogon von Lemma 4.10 beweisen:

**Lemma 4.18.** *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.15, also also  $F := \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper für eine Primzahlpotenz  $q = p^r$  und  $m \in \mathbb{N}$  ungerade mit  $p \nmid m$ . Setze  $s := \operatorname{ord}_{\nu(m)}(q)$ ,  $l := \pi_m(q^s - 1)$ ,  $b := b(q, m) := \operatorname{ggT}(l, m)$ ,  $E := \mathbb{F}_{q^m}$  und  $E' = \mathbb{F}_{q^{sm}}$ . Ist nun  $\theta$  eine primitive  $(nf)$ -te Einheitswurzel für  $l \mid f \mid q^s - 1$ , so ist  $\operatorname{Ord}_q(\theta) = f(x^s)$  für  $f$  einen irreduziblen Teiler von  $\Phi_m(x)$  über  $F[x]$ .*

*Beweis.* Lemma 4.10 mit dem Beweis von Satz 4.15. □

## 4.4 | Normalbasen mit Dickson-Polynomen

### Definition 4.19 (Dickson-Polynom).

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Für  $a \in \mathbb{F}_q$  definieren wir das  $n$ -te Dickson-Polynom erster Art über  $\mathbb{F}_q$  (hier auch nur  $n$ -tes Dickson-Polynom) als

$$D_n(x, a) := \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} (-a)^i x^{n-2i}.$$

Das  $n$ -te Dickson-Polynom zweiter Art über  $\mathbb{F}_q$  ist gegeben durch

$$E_n(x, a) := \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} (-a)^i x^{n-2i}.$$

**Bemerkung 4.20.** Über den komplexen Zahlen sind die Dickson-Polynome nahe verwandt mit den Chebyshev-Polynomen, wie man z.B. in [13, Absatz nach Corollary 7.15] nachlesen kann. Über endlichen Körpern liefern sie eine spezielle Klasse von Permutations-Polynomen (vgl. [13, Theorem 7.16], [15, Section 9.6]).

Die Dickson-Polynome erfüllen einige interessante Eigenschaften, welche wir im Folgenden zitieren wollen.

### Satz 4.21.

Seien  $n \in \mathbb{N}^*$  und  $a, y \in \mathbb{F}_q$  beliebig, so gilt

$$D_n(y + ay^{-1}, a) = y^n + a^n y^{-n}.$$

*Beweis.* [13, Gleichung (7.8)]. □

### Satz 4.22.

Sei  $a \in \mathbb{F}_q$ . Die Dickson-Polynome erster und zweiter Art erfüllen für alle  $n \geq 2$  folgende Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} D_n(x, a) &= xD_{n-1}(x, a) - aD_{n-2}(x, a), \\ E_n(x, a) &= xE_{n-1}(x, a) - aE_{n-2}(x, a) \end{aligned}$$

mit den Startwerten  $D_0(x, a) = 2$  und  $D_1(x, a) = x$  bzw.  $E_0(x, a) = 1$  und  $E_1(x, a) = x$ . Ferner gilt

$$D_m^n(x, a) = D_m(D_n(x, a), a^n)$$

*Beweis.* [?? ] □

Ferner können wir eine relativ einfache Charakterisierung angeben, wann ein Polynom der Form  $D_n(x, a) - b$  irreduzibel ist.

#### Satz 4.23.

Seien  $n \geq 2$  eine ganze Zahl und  $a, b \in \mathbb{F}_q$  mit  $a \neq 0$ . Seien

$$x^2 + bx + a^n = (x - \beta_1)(x - \beta_2), \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}_{q^2}$$

und  $e_i = \text{ord}(\beta_i)$  für  $i = 1, 2$ . Es ist

$$D_n(x, a) + b$$

irreduzibel genau dann, wenn für sowohl (1), als auch (2) für  $i = 1, 2$  erfüllt sind:

(1) Jeder ungerade Primteiler von  $n$  teilt  $e_i$ , jedoch nicht  $\frac{q^2-1}{e_i}$ .

(2) Ist  $n$  gerade, so ist  $\text{char } \mathbb{F}_q$  ungerade und eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

(1')  $b^2 - 4a^n \neq 0$  ist ein quadratischer Rest in  $\mathbb{F}_q$ ,  $2 \mid e_i$  und falls  $4 \mid n$ , so  $4 \mid (q-1)$ .

(2')  $b^2 - 4a^n$  ist ein quadratischer Nichtrest in  $\mathbb{F}_q$ ,  $-b - 2a^{\frac{n}{2}}$  ist ein quadratischer Rest in  $\mathbb{F}_q$ ,  $2 \mid \frac{q^2-1}{e_i}$  und falls  $4 \mid n$ , so  $2 \mid e_i$ , aber nicht  $\frac{q^2-1}{2e_i}$ .

*Beweis.* [4, Theorem 4]

□

Da die weiteren Aussagen lediglich für ungerade Erweiterungen bewiesen werden, wollen wir obigen Satz in einer handlicheren Form für unsere Zwecke noch einmal verfassen.

**Korollar 4.24.** Seien  $n \geq 3$  eine ungerade ganze Zahl und  $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ . Seien

$$x^2 - bx + a^n = (x - \beta_1)(x - \beta_2), \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}_{q^2}$$

und  $e_i = \text{ord}(\beta_i)$  für  $i = 1, 2$ . Es ist

$$D_n(x, a) - b$$

irreduzibel genau dann, wenn  $\nu(n) \mid e_i$ , aber  $\nu(n) \nmid \frac{q^2-1}{e_i}$  für  $i = 1, 2$ .

Scheerhorn zeigt in [17, 18], dass sich Dickson-Polynome eignen, um Normalbasen zu beschreiben. Im weiteren Verlauf werden wir sogar sehen, dass man daraus vollständig normale Polynome, also Polynome, deren Nullstellen vollständig normale Elemente (??) sind, konstruieren lassen. Alle Folgerungen über (vollständig) normale Polynome basieren jedoch auf zwei zentralen Resultaten über die Modulstruktur der betrachteten Erweiterungskörper, wie die beiden nachstehenden Sätze

angeben.

**Satz 4.25 ([18, Theorem 2]).**

Seien  $n \geq 3$  ein Produkt ungerader Primzahlen von  $(q+1)$  und  $a, b \in \mathbb{F}_q =: F$ , so dass  $D_n(x, a) - b \in F[x]$  irreduzibel ist. Sei  $\gamma \in E := \mathbb{F}_{q^n}$  eine Wurzel von  $D_n(x, a)$ . Dann ist

$$E = \langle 1 \rangle_q \oplus \bigoplus_{l \in R_q(n) \setminus \{0\}} \langle D_l(\gamma, a) \rangle_q,$$

eine Zerlegung von  $E$  in irreduzible  $F[x]$ -Teilmoduln, wobei

$$\langle D_l(\gamma, a) \rangle_q := \text{span}_F \{ D_i(\gamma, a) \mid i \in M_q(l \bmod n) \},$$

so dass  $\{ D_i(\gamma, a) \mid i \in M_q(l \bmod n) \}$  eine  $F$ -Basis von  $\langle D_l(\gamma, a) \rangle_q$  ist.

**Satz 4.26 ([18, Theorem 3]).**

Seien  $n \geq 3$  ein Produkt ungerader Primzahlen von  $(q-1)$  und  $a, b \in \mathbb{F}_q =: F$ , so dass  $D_n(x, a) - b \in F[x]$  irreduzibel ist. Seien ferner  $x^2 + bx + a^n = (x - \beta)(x - a^n \beta^{-1}) \in \mathbb{F}_q$  und  $\theta \in \mathbb{F}_{q^n}$  eine Wurzel von  $x^n - \beta$ . Setze  $\gamma := \theta + a\theta^{-1}$ , so gilt für  $l \in R_q(n) \setminus \{0\}$

$$\langle \theta^l \rangle_q \oplus \langle \theta^{n-l} \rangle_q = \langle D_l(\gamma, a) \rangle_q$$

Genauere  
Betrachtung,  
warum  
 $x^2 + bx + a^n$   
hier nicht  
irreduzibel ist!?

In [17]scheerhorn:1997 werden die Beweise dieser Resultate ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Theorie über (stark) reguläre Erweiterungen geführt, wie wir sie im letzten Abschnitt kennengelernt haben. Wir wollen uns nun im Folgenden überlegen, dass die Theorie der vorherigen Abschnitte an diesem Punkt ein besseres Verständnis der Struktur der Zerlegung des Erweiterungskörpers in Teilmoduln liefert. Ferner sind wir in der Lage das vielleicht überraschende Auftauchen von Dickson-Polynomen im Kontext (vollständig) normaler Elemente zu rechtfertigen und die benötigten Eigenschaften herzuleiten, welche an diesem Punkt eine zentrale Rolle spielen und die Verwendung der Dickson-Polynome motivieren.

**Beweis (von Satz 4.25).** Betrachten wir die vorliegende Situation, so sehen wir, dass  $s := \text{ord}_{\nu(n)}(q) = 2$  und damit  $n \in S_{q^2}$ . Sei nun  $x^2 - bx + a^n = (x - \beta)(x - a^n \beta^{-1})$  über  $K := \mathbb{F}_{q^2}$ . Dann ist nach Satz 2.16 und Satz 2.17  $x^n - \beta \in \mathbb{F}_{q^2}[x]$  irreduzibel. Ist dann  $\theta \in \mathbb{F}_{q^{2n}} =: E'$  eine Wurzel, so wissen wir nach Satz 4.11 und Lemma 4.18 ( $\theta$  ist eine  $(n \text{ ord}(\beta))$ -te primitive Einheitswurzel), dass  $\text{Ord}_q(\theta) = f(x^s)$  für einen irreduziblen Teiler  $f(x)$  von  $\Phi_n(x)$  über  $F$ .

Es ist nun  $\theta^{q^n} = \theta^{-1}$ : Da  $\theta \in E'$ , gilt  $\theta^{q^{2n}} = \theta$ , also

$$\theta^{q^{2n}-1} = 1 = \theta^{(q^n+1)(q^n-1)}.$$

wäre  $\theta^{q^n-1} = 1$ , so läge  $\theta$  bereits in  $\mathbb{F}_{q^n}$ , im Widerspruch zur Definition von  $\theta$ . Also haben wir nach Satz 4.17 gerade

$$\text{Ord}_q(\theta + a\theta^{-1}) = \text{Ord}_q((1 + ax^n) \cdot \theta) = f_{1,1}(x)$$

für einen monischen, irreduziblen Teiler  $f_{1,1}(x)$  von  $\Phi_n(x)$  (wieder in Notation von Satz 2.20), denn mit Satz 4.21 sehen wir, dass

$$D_n(\theta + a\theta^{-1}, a) - b = \theta^n + a^n\theta^{-n} - b = \beta + a^n\beta^{-1} - b = b - b = 0$$

und da  $D_n(x, a) - b \in F[x]$  irreduzibel nach Voraussetzung, hat  $\theta + a\theta^{-1}$  Grad  $n$  über  $F$ . Wählen wir  $1 \neq l \in R_q(n)$ , so entspricht  $\text{Ord}_q(\theta^l) = g(x^s)$  für einen monischen irreduziblen Teiler  $g(x) \mid \Phi_m(x)$  mit  $m \mid n$  und  $\text{ggT}(f, g) = 1$ . Wegen  $\theta^l + a^l\theta^{-l} = D_l(\theta + a\theta^{-1}, a)$  hat  $\theta^l + a^l\theta^{-l}$  Grad kleiner oder gleich  $n$  über  $F$  (vgl. Bemerkung 4.27) und damit sind auch  $\text{Ord}_q(\theta + a\theta^{-1})$  und  $\text{Ord}_q(\theta^l + a^l\theta^{-l})$  nach Satz 2.20 (2) teilerfremd.  $\square$

**Bemerkung 4.27.** In der Tat können wir sogar genau angeben, welchen Grad  $\theta^l + a^l\theta^{-l}$  über  $F$  hat: Ist  $l \mid n$ , so hat  $\theta^l + a^l\theta^{-l}$  Grad  $\frac{n}{l}$  über  $F$ , denn nach Satz 4.22 ist

$$\mathbb{F}_q \ni D_n(\theta + a\theta^{-1}, a) = D_{\frac{n}{l}}(D_l(\theta + a\theta^{-1}, a), a^l) = D_{\frac{n}{l}}(\theta^l + a^l\theta^{-l}, a^l).$$

## TODO

**Beweis (von Satz 4.26).** Im Grunde brauchen wir nichts zu zeigen, wenn wir uns überlegen, dass hier  $n$  stark regulär ist! Nach Lemma 4.10 ist dann  $\text{Ord}_q(\theta)$  ein irreduzibler monischer Teiler von  $x^n - 1$ . Also werden alle irreduziblen Teilmoduln von  $\mathbb{F}_{q^n}$  von  $\theta^l$  mit  $l \in \mathcal{R}_q(n)$  erzeugt. Wie im Beweis von Satz 4.25 ist natürlich

$$D_n(\theta + a\theta^{-1}, a) - b = 0 \quad \text{und} \quad D_l(\theta + a\theta^{-1}, a) = \theta^l + a^l\theta^{-l}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Letztlich überlege man sich, dass  $\text{Ord}_q(a^l\theta^{-l}) = \text{Ord}_q(\theta^{n-l})$ , da  $a \in F$ .  $\square$

Man bemerke, dass im Beweis von Satz 4.25  $\theta + a\theta^{-1}$  lediglich eine Abwandlung von  $\theta + \theta^{q^n} = \text{Tr}_{E'|E}(\theta)$  ist! Daher ist das Resultat vielleicht auch nicht besonders überraschend, da wir in Satz 4.16 erkannt haben, wie die Spurfunktion zur Konstruktion von normalen Elementen in regulären Erweiterungen zentral ist. In Notation des vorherigen Abschnittes würde man die beiden Sätze von Scheerhorn vielleicht auf die folgende Art und Weise aufschreiben. Insbesondere erlaubt es die Theorie aus den vorherigen Abschnitten, den Fall  $\nu(n) \mid (q-1)$  zu erweitern, um auch dort (unter leichten Zusatzvoraussetzungen) ein normales Element zu konstruieren.

### Satz 4.28.

Seien  $F := \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$  und  $m \in \mathbb{N}^*$  ungerade mit  $p \nmid n$  und  $\nu(n) \mid q^2 - 1$ . Sind  $a, b \in F$ , sodass  $D_n(x, a) - b \in F[x]$  irreduzibel mit Nullstelle  $\gamma \in E := \mathbb{F}_{q^n}$ , so gilt:

- (1)  $E = F(\gamma)$ ,
- (2) Ist  $\nu(n) \mid (q+1)$ , so gilt: Für alle  $l \in R_q(n)$  mit  $r_q(l \bmod n) = \text{ord}_q(m)$  für einen Teiler  $m$  von  $n$  ist  $\text{Ord}_q(D_l(\gamma, a))$  ist ein irreduzibler Teiler von  $\Phi_m(x)$ .
- (3) Setze

$$v := \sum_{l \in R_q(n)} D_l(\gamma, a).$$

Dann ist  $v \in E$  normal über  $F$ , falls  $\nu(n) \mid (q+1)$  oder  $a^l \neq -1$  für alle  $l \in R_q(n)$ .



*Beweis.* Für  $\nu(n) \mid (q+1)$  liegt gerade Satz 4.25 vor und es gibt nichts mehr zu zeigen. Aussage (2) haben wir uns bereits in Bemerkung 4.27 überlegt. Für  $\nu(n) \mid (q-1)$  bleibt anzugeben, warum  $v$  normal über  $F$  ist, wenn  $a^l \neq -1$  für alle  $l \in R_q(n)$ . Da in  $v$  gerade je zwei Erzeuger pro irreduzible Teilmodul von  $E$  vorkommen, ist sicherzustellen, dass diese sich nicht gegenseitig aufheben: Existierte  $a^l = -1$  für ein  $l \in R_q(n)$ , so wäre

$$\theta^{n-l} + a^l \theta^{n-l} = 0.$$

□

#### 4.4.1 | Normale und vollständig normale Polynome mit Dickson-Polynomen

Mit Hilfe dieser Resultate lassen sich nun relativ einfach vollständig normale Polynome angeben, wie sie in [18, Section 3] und [17, Section 4] zu finden sind. Ihre Beweise beinhalten keine besondere Beachtung der Modulstrukturen und sollen daher hier nur nachvollzogen werden. Zunächst brauchen wir jedoch eine Transformation eines Polynoms, welches gerade die Nullstellen desselbigen invertiert.

##### Definition 4.29 (reziprokes Polynom).

Sei  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  ein Polynom über einem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann heißt

$$f^*(x) := \frac{1}{f(0)} x^{\deg f} f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{K}[x]$$

reziprokes Polynom von  $f(x)$ .

*Bemerkung 4.30.* Man bemerke, dass das reziproke Polynom stets monisch ist.

*Bemerkung 4.31.* Ist  $u$  eine Nullstelle von  $f(x)$ , so ist  $u^{-1}$  eine Nullstelle von  $f^*(x)$ , wie man sofort erkennen kann.

##### Satz 4.32 ([18, Theorem 4]).

Seien  $n \geq 3$  ein Produkt aus ungeraden Primteilern von  $(q+1)$  und  $D_n(x, a) - b \in \mathbb{F}_q[x]$  irreduzibel. Seien ferner  $s, t \in \mathbb{F}_q$  mit  $s \neq 0$ . Dann ist

$$(D_n(sx + t, a) - b)^*$$

normal über  $\mathbb{F}_q$  genau dann, wenn für jedes  $l \in R_q(n)$  ein  $i \in M_q(l \bmod n)$  existiert, so dass  $E_{n-1-i}(t, a) \neq 0$ .

*Beweis.* Setzen wir wieder  $x^2 - bx + a^n = (x - \beta)(x - a^n \beta^{-1})$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$  wie im Beweis von Satz 4.25 mit  $\theta \in \mathbb{F}_{q^{2n}}$  einer Nullstelle von  $x^n - \beta$ , so erkennen wir, dass  $s(\theta - t + a\theta^{-1})^{-1}$  eine Nullstelle von  $(D_n(sx + t, a) - b)^*$  ist. Dort haben wir ebenfalls gesehen, dass  $\{1\} \cup \{\theta^l + a^l \theta^{-l} : l = 1, \dots, n-1\}$  eine  $\mathbb{F}_q$ -Basis von  $F_{q^n}$  bildet. Offensichtlich ist  $s(\theta - t + a\theta^{-1})^{-1}$  genau dann normal über  $\mathbb{F}_q$ , wenn  $(\theta + t + a\theta^{-1})$  normal über  $\mathbb{F}_q$  ist. Also überlegen wir uns, für welche  $\alpha = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\theta^i + a^i \theta^{-i})$  das Produkt  $\alpha(\theta - t + a\theta^{-1})$  in  $\mathbb{F}_q^*$  liegt. Durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass die Koeffizienten

$a_i$  gerade die Rekursionsgleichung der Dickson-Polynome zweiter Art erfüllen müssen (siehe [18, Beweis zu Theorem 4] für die konkrete Rechnung). Damit ist  $\alpha(\theta - t + a\theta^{-1}) \in \mathbb{F}_q^*$ , falls

$$\alpha = E_{n-1}(t, a) + \sum_{i=1}^{n-1} E_{n-1-i}(t, a)(\theta^i a^i \theta^{-i}).$$

Die Aussage folgt dann sofort mit Satz 4.25 (oder Satz 4.28) □

Ferner können wir genau diese Folgerung benutzen, um vollständig normale Polynome, also solche, die über jedem Zwischenkörper normal sind, anzugeben.

**Satz 4.33 ([18, Theorem 5]).**

*Seien  $n \geq 3$  ein Produkt aus ungeraden Primteilern von  $(q+1)$  und  $D_n(x, a) - b \in \mathbb{F}_q[x]$  irreduzibel. Seien ferner  $s, t \in \mathbb{F}_q$  mit  $s \neq 0$ . Ist  $d$  ein Teiler von  $n$ , so ist*

$$(D_n(sx + t, a) - b)^*$$

*normal über  $\mathbb{F}_{q^d}$  genau dann, wenn für jedes  $l \in R_{q^d}(\frac{n}{d})$  ein  $i \in M_{q^d}(l \bmod \frac{n}{d})$  existiert, so dass  $E_{\frac{n}{d}-1-i}(t, a) \neq 0$ .*

**Beweis.** Wie wir uns bereits in Bemerkung 4.27 überlegt haben, hat  $\theta^{\frac{n}{d}} + a^{\frac{n}{d}} \theta^{-\frac{n}{d}}$  Grad  $\frac{n}{d}$  über  $\mathbb{F}_q$  und das Minimalpolynom von  $(\theta - t + a\theta^{-1})$  über  $\mathbb{F}_{q^d}$  ist  $D_{\frac{n}{d}}(x + t, a) - (\theta^{\frac{n}{d}} + a^{\frac{n}{d}} \theta^{-\frac{n}{d}})$ . Dann folgt die Aussage analog zu vorherigem Satz. □

Nun lassen sich einige Korollare ziehen, in denen spezielle Werte für  $a, b, s, t$  dazu führen, dass die geforderten Eigenschaften aus Satz 4.32 bzw. Satz 4.33 erfüllt sind. Diese werden wir hier nicht beweisen und der Leser sei auf [18] verwiesen.

**Korollar 4.34.** *Sei  $n \geq 3$  ein Produkt ungerader Primfaktoren von  $(q-1)$  und sei  $D_n(x, a) - b$  irreduzibel über  $\mathbb{F}_q$ . Ist ferner  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ , so ist*

$$(D_n(x \pm 1, 1) - b)^*$$

*ein vollständig normales Polynom über  $\mathbb{F}_q$ .*

**Beweis.** [18, Corollary 2]. □

**Korollar 4.35.** *Sei  $n \geq 3$  ein Produkt ungerader Primfaktoren von  $(q-1)$  und sei  $D_n(x, a) - b$  irreduzibel über  $\mathbb{F}_q$ . Dann ist*

$$(D_n(x \pm 2, 1) - b)^*$$

*ein vollständig normales Polynom über  $\mathbb{F}_q$ .*

**Beweis.** [18, Corollary 3]. □

## Kapitel 5

### Vollständige Normalbasen

In den vorherigen Kapiteln haben wir einige Resultate zu Normalbasen kennen gelernt. Es stellt sich jedoch ganz natürlich die Frage, ob dieser Begriff nicht erweitert werden kann: Für eine Körpererweiterung  $E$  über  $F$  existieren im Allgemeinen Zwischenkörper  $E | K | F$ , so wollen wir untersuchen, ob ein Element  $w \in E$ , welches normal über  $F$  ist, auch normal über allen Zwischenkörpern bleibt. Solche Elemente wollen wir *vollständig normal* nennen. Ähnlich zu normalen Elementen kann man mit Hilfe der Modulstrukturen von Körpererweiterungen eine Theorie aufbauen, die es erlaubt, vollständig normale Elemente in vollständige Erzeuger (Definition 5.6) zu zerlegen, wie es für normale Elemente aus Korollar 4.3 kennt. Hachenberger konnte in [5] ausarbeiten, wie die simultan auftretenden Modulstrukturen zu behandeln sind. Wir wollen hier die zentralen Resultate lediglich ohne Beweise zitieren. Eine ebenfalls gute Übersicht dazu findet man in [15, Section 5.4]. Wir beginnen bei der grundlegendsten Definition, die sich ja bereits in der Kapitelüberschrift wiederfinden lässt.

#### Definition 5.1 (vollständig normal).

Sei  $E | F$  eine Körpererweiterung endlicher Körper  $E$  über  $F$ .  $w \in E$  heißt *vollständig normal*, falls  $w$  normal über jedem Zwischenkörper  $E | K | F$  ist.

Die Begriffe *vollständige Normalbasis*, *vollständig normales Polynom* sind analog zu Definition 4.1 zu setzen.

Ein besonders trivialer Fall würde auftreten, wenn bereits alle normalen Elemente eine Körpererweiterung auch vollständig normal wären. Man kann zeigen, dass dies in der Tat unter gewissen Bedingungen auftreten kann und verleiht dieser Konstellation den Namen *einfach*.

#### Definition 5.2 (einfach).

Eine Körpererweiterung  $E | F$  endlicher Körper  $F$  und  $E$  heißt *einfach*, falls jedes normale Element von  $E$  über  $F$  bereits vollständig normal ist.

**Satz 5.3.**

Sei  $\mathbb{F}_{q^m} \mid \mathbb{F}_q$  eine Erweiterung endlicher Körper. Dann ist äquivalent:

- (1)  $\mathbb{F}_{q^m} \mid \mathbb{F}_q$  ist einfach.
- (2) Für jeden Primteiler  $r \mid m$  ist jedes normale Element in  $\mathbb{F}_{q^m}$  über  $\mathbb{F}_q$  auch normal in  $\mathbb{F}_{q^m}$  über  $\mathbb{F}_{q^r}$ .
- (3) Für jeden Primteiler  $r \mid m$  teilt  $r$  nicht  $\text{ord}_{(\frac{m}{r})'}(q)$ .

*Beweis.* [5, Corollary 15.8]. □

Im Abschnitt über normale Elemente konnten wir herausarbeiten, dass die Zerlegung von  $x^n - 1$  in Kreisteilungspolynome ein guter Startpunkt ist, um normale Elemente zu konstruieren und die Modulstrukturen zu beschreiben. Jedoch zeigt es sich, dass im Allgemeinen ein Element, dessen  $q$ -Ordnung einem Kreisteilungspolynom entspricht, eine  $q^d$ -Ordnung für einen Teiler  $d$  von  $n$  besitzt, die kein reines Kreisteilungspolynom mehr ist. Also muss eine passende Klasse von Polynomen gefunden werden, um die verschiedenen simultan auftauchenden  $q^d$ -Ordnungen zu erfassen: *verallgemeinerte Kreisteilungspolynome*.

**Definition 5.4 (verallgemeinertes Kreisteilungspolynom).**

Sei  $F$  ein endlicher Körper. Seien  $k, t \geq 1$  natürliche Zahlen und  $k$  teilerfremd zu  $\text{char } F$ , so heißt

$$\Phi_{k,t}(x) := \Phi_k(x^t) \in F[x]$$

*verallgemeinertes Kreisteilungspolynom.*

**Definition 5.5 (verallgemeinerter Kreisteilungsmodul, Modulcharakter).**

Sei  $\Phi_{k,t}$  ein verallgemeinertes Kreisteilungspolynom über einem endlichen Körper  $F$ . Notiere ferner  $\sigma : \bar{F} \rightarrow \bar{F}$  den Frobenius von  $F$ , so heißt

$$\mathcal{C}_{k,t} := \{w \in \bar{F} : \Phi_{k,t}(\sigma)(w) = 0\}$$

*verallgemeinerter Kreisteilungsmodul.*

Der *Modulcharakter* von  $\mathcal{C}_{k,t}$  ist  $\frac{kt}{\nu(k)}$ .

**Definition 5.6 (vollständiger Erzeuger).**

Sei  $\mathcal{C}_{k,t}$  ein verallgemeinerter Kreisteilungsmodul über  $\mathbb{F}_q$ .  $w \in \bar{F}$  heißt *vollständiger Erzeuger* von  $\mathcal{C}_{k,t}$ , falls  $w$  ein Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$  als  $\mathbb{F}_{q^d}[x]$ -Modul für alle Teiler  $d$  des Modulcharakters  $\frac{kt}{\nu(k)}$  ist.

**Definition 5.7 (Zerlegung in verallgemeinerte Kreisteilungsmoduln).**

Sei  $\Phi_{k,t}$  ein verallgemeinertes Kreisteilungspolynom über  $F$ .  $\Delta \subseteq F[x]$  heißt eine *Zerlegung von  $\Phi_{k,t}$  in verallgemeinerte Kreisteilungspolynome*, falls  $\Delta$  nur verallgemeinerte Kreisteilungspolynome enthält, diese paarweise teilerfremd sind und

$$\Phi_{k,t}(x) = \prod_{\Psi \in \Delta} \Psi(x).$$

Definiere ferner

$$i(\Delta) := \{(l, s) \in \mathbb{N}^2 : \Phi_{l,s} \in \Delta\}.$$

**Definition 5.8 (verträgliche Zerlegung).**

Sei  $\Delta$  eine Zerlegung von  $\Phi_{k,t}$  in verallgemeinerte Kreisteilungspolynome über  $F$ . Dann heißt  $\Delta$  *verträgliche Zerlegung* falls gilt: Für jedes  $(l, s) \in i(\Delta)$  sei  $w_{l,s} \in F$  ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{l,s}$  über  $F$ , so ist

$$w = \sum_{(l,s) \in i(\Delta)} w_{l,s}$$

ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$  über  $F$ .

Nun können wir den einen zentralen Satz formulieren, der eine passende Zerlegung eines erweiterten Kreisteilungspolynoms herstellt, so dass sich ein vollständiger Erzeuger als Summe von vollständigen Erzeugern der entsprechenden Teilmoduln zusammensetzen lässt. Man bemerke an dieser Stelle, dass das Problem der vollständigen Erzeuger (und damit der vollständigen Normalbasen) ungleich schwerer ist, als das der normalen Elemente, da sich dort Elemente mit teilerfremden  $q$ -Ordnungen *immer* zu einem Element summieren, dessen  $q$ -Ordnung gerade das Produkt der  $q$ -Ordnungen ist (vgl. Satz 3.42); mit anderen Worten also die Summe von Erzeugern disjunkter Teilmoduln stets wieder einen Erzeuger liefert. Dies ist bei vollständigen Erzeugern nur bedingt gegeben, wie nachstehender Zerlegungssatz beschreibt.

**Satz 5.9 (Zerlegungssatz für verallgemeinerte Kreisteilungsmoduln).**

Sei  $\Phi_{k,t}$  ein verallgemeinertes Kreisteilungspolynom über einem endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  mit Charakteristik  $p$ . Sei  $r$  eine Primzahl mit

- $r \mid t$ ,      •  $r \neq p$ ,      •  $r \nmid k$ .

Dann ist

$$\Delta_r := \{\Phi_{k, \frac{t}{r}}, \Phi_{kr, \frac{t}{r}}\}$$

eine Zerlegung von  $\Phi_{k,t}$  in verallgemeinerte Kreisteilungspolynome und diese ist verträglich genau dann, wenn

$$r^a \nmid \text{ord}_{\nu(kt')}(q)$$

mit  $a = \max\{b \in \mathbb{N} : r^b \mid t\}$ .

*Beweis.* [5, Decomposition Theorem, Section 19]. □

Sicherlich kann man sich nun fragen, in welchen Fällen die kanonische Zerlegung von einem erweiterten Kreisteilungspolynom in Kreisteilungspolynome noch verträglich ist. Nach [5, Theorem 19.10] ist die kanonische Zerlegung von  $\Phi_{k,t}(x)^\pi$  verträglich über  $\mathbb{F}_q$ , falls  $\text{ord}_{\nu(kt')}(q)$  und  $t'$  teilerfremd sind. Dies motiviert dieser Klasse von Kreisteilungsmoduln einen eigenen Namen zu geben:

---

**Definition 5.10 (regulär).**

Ein verallgemeinerter Kreisteilungsmodul  $\mathcal{C}_{k,t}$  mit  $\text{ggT}(k,t) = 1$  heißt *regulär* über  $\mathbb{F}_q$ , falls  $\text{ord}_{\nu(kt')}(q)$  und  $kt$  teilerfremd sind.

Eine Körpererweiterung  $\mathbb{F}_{q^m} | \mathbb{F}_q$  heißt *regulär*, falls  $\mathcal{C}_{1,m}$  regulär ist.

---



---

**Definition 5.11 (ausfallend).**

Sei  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  ein regulärer verallgemeinerter Kreisteilungsmodul über  $\mathbb{F}_q$  mit  $\text{char } \mathbb{F}_q = p$ . Schreibe  $k = 2^c \cdot \bar{k}$  mit  $\bar{k}$  ungerade. Dann heißt  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  *ausfallend*, falls gilt:

- $q \equiv 3 \pmod{4}$ ,
  - $c \geq 3$  und
  - $\text{ord}_{2^c}(q) = 2$ .
- 

Hachenberger war es nun möglich, für reguläre Kreisteilungsmoduln zu beweisen, dass alle auftretenden Zwischenkörper, deren Betrachtung bei der Suche nach vollständigen Erzeugern notwendig ist, von einem einzigen Zwischenkörper (oder zwei Zwischenkörpern) dominiert werden. Das bedeutet, dass ein Element eines regulären Kreisteilungsmoduls maximal zwei bestimmte  $q^\bullet$ -Ordnungen besitzen muss, um bereits den Kreisteilungsmodul vollständig zu erzeugen. Die geforderten  $q^\bullet$ -Ordnungen werden durch nachstehende Definition gegeben und wir schließen dieses Kapitel mit der Angabe dieses wahrlich beachtlichen Resultats.

---

**Definition 5.12 ( $\tau$ -Teiler).**

Sei  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  ein regulärer verallgemeinerter Kreisteilungsmodul über  $\mathbb{F}_q$ . Schreibe

$$\text{ord}_k(q) = \text{ord}_{\nu(k)}(q) \prod_{r \in \pi(k)} r^{\alpha_r},$$

wobei  $\pi(k)$  die Primteiler von  $k$  bezeichnen. Dann heißt

$$\tau := \tau(q, k) := \prod_{r \in \pi(k)} r^{\lfloor \frac{\alpha_r}{2} \rfloor}$$

der  $\tau$ -Teiler von  $\mathcal{C}_{k,p^b}$ .

---

**Satz 5.13 (Über reguläre Erweiterungen).**

Sei  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$ . Seien  $k$  eine positive ganze Zahl teilerfremd zu  $q$  und  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  ein regulärer verallgemeinerter Kreisteilungsmodul. Dann gilt:

- (1) Ist  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  nicht ausfallend, so ist  $u \in \bar{F}$  genau dann ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,p^b}$ , falls

$$\text{Ord}_{q^\tau}(u) = \Phi_{\frac{k}{\tau}, p^b}.$$

- (2) Ist  $\mathcal{C}_{k,p^b}$  ausfallend, so ist  $u \in \bar{F}$  genau dann ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,p^b}$ , falls

$$\text{Ord}_{q^\tau}(u) = \Phi_{\frac{k}{\tau}, p^b} \quad \text{und} \quad \text{Ord}_{q^{2\tau}}(u) = \Phi_{\frac{k}{2\tau}, p^b}.$$

Beweis. [5, Theorem 20.3].

□

## Kapitel 6

# Enumeration primitiv vollständig normaler Elemente

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir lediglich normale und vollständig normale Elemente in Erweiterungen endlicher Körper betrachtet. Es existiert jedoch eine weitere besondere Eigenschaft, die gerade in der Anwendung von großem Interesse ist: Primitivität (Definition 1.6). Zusammen haben wir nun drei Eigenschaften eines Elements  $u \in E$  einer Erweiterung endlicher Körper  $E | F$  kennengelernt, die von Interesse sind. Daher ist es nur sinnvoll sich der Frage zu widmen, *wie viele* Elemente mit den jeweiligen Eigenschaften es gibt. Mit Satz 1.1 und Satz 1.5 ist sofort klar, dass es in  $\mathbb{F}_q$  genau  $\varphi(q-1)$  primitive Elemente gibt! Daher ist die Fragestellung nach der Anzahl primitiver Elemente schnell gelöst. Darüber hinaus wollen wir die folgenden Notationen treffen.

### Definition 6.1.

Seien  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $n \in \mathbb{N}^*$ , so bezeichne  $\mathcal{N}(q, n)$ ,  $\mathcal{CN}(q, n)$ ,  $\mathcal{PN}(q, n)$  bzw.  $\mathcal{PCN}(q, n)$  die Anzahl der normalen, vollständig normalen, primitiv normalen bzw. primitiv vollständig normalen Elemente in  $\mathbb{F}_{q^n}$  über  $\mathbb{F}_q$ , d.h.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(q, n) &:= |\{u \in \mathbb{F}_{q^n} : u \text{ ist normal über } \mathbb{F}_q\}| \\ \mathcal{CN}(q, n) &:= |\{u \in \mathbb{F}_{q^n} : u \text{ ist vollständig normal über } \mathbb{F}_q\}| \\ \mathcal{PN}(q, n) &:= |\{u \in \mathbb{F}_{q^n} : u \text{ ist primitiv und normal über } \mathbb{F}_q\}| \\ \mathcal{PCN}(q, n) &:= |\{u \in \mathbb{F}_{q^n} : u \text{ ist primitiv und vollständig normal über } \mathbb{F}_q\}| \\ \mathcal{G} &:= \{n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 : \forall q \text{ Primzahlpotenz gilt } \mathcal{PCN}(q, n) > 0\}\end{aligned}$$

Vielleicht erscheint die Definition von  $\mathcal{G}$  etwas überraschend, da für jedes Element in  $\mathcal{G}$  schließlich *unendlich viele* Körpererweiterungen auf die Existenz eines  $\mathcal{PCN}$ -Elements getestet werden müssen. Doch es sei an dieser Stelle vorweg genommen, dass wir in der Lage sind mit Hilfe eines asymptotischen Resultats und der konkreten Angabe von endlich vielen  $\mathcal{PCN}$ -Elementen zu zeigen, dass  $\mathcal{G}$  nicht leer ist!

Nun können wir folgende Probleme definieren:

### Problem 6.2 ( $\mathcal{N}(q, n) = ?$ ).

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Was ist  $\mathcal{N}(q, n)$ ?



**Problem 6.3 ( $\mathcal{CN}(q, n) = ?$ ).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Was ist  $\mathcal{CN}(q, n)$ ?

**Problem 6.4 ( $\mathcal{PN}(q, n) = ?$ ).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Was ist  $\mathcal{PN}(q, n)$ ?

**Problem 6.5 ( $\mathcal{PCN}(q, n) = ?$ ).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Was ist  $\mathcal{PCN}(q, n)$ ?

Offensichtlich können wir die obigen Problemstellungen leicht abschwächen und uns zunächst fragen, ob überhaupt Elemente mit den geforderten Eigenschaften existieren. Auch dazu wollen wir passende Probleme formulieren.

**Problem 6.6 ( $\mathcal{N}(q, n) > 0$ ?).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ist  $\mathcal{N}(q, n) > 0$ ?

**Problem 6.7 ( $\mathcal{CN}(q, n) > 0$ ?).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ist  $\mathcal{CN}(q, n) > 0$ ?

**Problem 6.8 ( $\mathcal{PN}(q, n) > 0$ ?).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ist  $\mathcal{PN}(q, n) > 0$ ?

**Problem 6.9 ( $\mathcal{PCN}(q, n) > 0$ ?).**

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ist  $\mathcal{PCN}(q, n) > 0$ ?

Zuletzt wollen wir natürlich auch für  $\mathcal{G}$  eine Problemstellung zu formulieren:

**Problem 6.10 ( $n \in \mathcal{G}$ ?).**

Finde möglichst viele  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  mit  $n \in \mathcal{G}$ .

Bisher haben wir all diese Probleme nicht ausreichend geklärt. Doch im folgenden Abschnitt wollen wir uns jenen Fragestellungen zunächst theoretisch widmen, um in den darauffolgenden gezielte Enumerationen auf Basis der theoretischen Resultate, die über (vollständig) normale Elemente im bisherigen Verlauf erarbeitet wurden, durchzuführen, um für die offen bleibenden Fragen

## 6.1 | Theoretische Enumerationen

Wir starten mit einem wohlbekannten Resultat, das eine Antwort auf die Frage nach der Existenz von normalen Elementen (Problem 6.6) gibt:

### Satz 6.11 (Satz von der Normalbasis).

*Zu jedem endlichen Körper  $F$  und jeder endlichen Erweiterung  $E$  von  $F$  existiert eine Normalbasis von  $E$  über  $F$ .*

*Beweis.* [13, Theorem 2.35].

□

Selbige Aussage können wir auch für vollständig normale Elemente treffen, was zuerst 1986 von Bessenohl und Johnsen [2] bewiesen wurde.

### Satz 6.12 (Verschärfung des Satzes von der Normalbasis).

*Zu jedem endlichen Körper  $F$  und jeder endlichen Erweiterung  $E$  von  $F$  existiert eine vollständige Normalbasis von  $E$  über  $F$ .*

*Beweis.* [2, Satz 1.2].

□

Damit wäre auch Problem 6.7 beantwortet! Von den Existenzfragen bleibt damit noch die Existenz von primitiv normalen und primitiv vollständig normalen Elementen in beliebigen Erweiterungen offen. Erstere beantwortete Lenstra, Jr. und Schoof 1987 [12] nach den Vorarbeiten von Carlitz und Davenport.

### Satz 6.13 (Satz von der primitiven Normalbasis).

*Zu jedem endlichen Körper  $F$  und jeder endlichen Erweiterung  $E$  von  $F$  existiert eine primitive Normalbasis von  $E$  über  $F$ .*

*Beweis.* [12].

□

Bleibt also nur noch die Frage nach der Existenz primitiver vollständig normaler Elemente. Auch wenn Hachenberger 2001 [8] und 2015 [6] die beiden nachstehenden bedeutsamen Resultate beweisen konnte, bleibt die Suche nach  $\mathcal{PCN}$ -Elementen weiterhin ein offenes Problem, dem wir uns im weiteren Verlauf experimentell widmen wollen.

#### Satz 6.14.

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$ , so dass  $\mathbb{F}_{q^n}$  über  $\mathbb{F}_q$  eine reguläre Erweiterung ist. Sei ferner  $4 \mid (q-1)$ , falls  $q$  ungerade und  $n$  gerade ist. Dann existiert ein primitives Element in  $\mathbb{F}_{q^n}$ , das vollständig normal über  $\mathbb{F}_q$  ist.

Beweis. [8, Theorem 1.4]. □

#### Satz 6.15.

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $n \geq 2$ . Dann gilt: Für Primzahlpotenzen  $q$  mit  $q \geq n^4$  existiert ein primitives Element in  $\mathbb{F}_{q^n}$ , das vollständig normal über  $\mathbb{F}_q$  ist.

Beweis. [6, Theorem 2]. □

Wir können nun zusammenfassen, dass von obigen Existenzproblemen lediglich Problem 6.9 überlebt hat und alle anderen durch theoretische Resultate abgedeckt werden konnten. Nun können wir versuchen die Zählprobleme anzugehen und starten mit einem allgemein bekannten Resultat.

#### Definition 6.16.

Sei  $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  ein Polynom über einem endlichen Körper. Definiere

$$\phi_q(f) := |\{g(x) \in \mathbb{F}_q[x] : \deg g < \deg f, \text{ggT}(f, g) = 1\}|.$$

**Bemerkung 6.17.**  $\phi_q(f)$  ist das Analogon zur Eulerschen Phifunktion für Polynome, da  $\phi_q(f)$  gerade die Anzahl der Einheiten im Ring  $\mathbb{F}_q[x]/(f(x))$  angibt.

#### Satz 6.18.

Seien  $q$  eine Primzahlpotenz und  $n \in \mathbb{N}^*$  mit  $n \geq 2$ , so existieren in  $\mathbb{F}_{q^n}$  genau

$$\phi_q(x^n - 1) = q^{n'(\pi-1)} \prod_{d|n} \left( q^{\text{ord}_d(q)} - 1 \right)^{\frac{\varphi(d)}{\text{ord}_d(q)}}$$

Elemente, die normal über  $\mathbb{F}_q$  sind, wobei  $n = n'\pi$  mit  $\text{ggT}(n', q) = 1$ .

Beweis. [13, Theorem 3.73] oder [5, Theorem 10.5]. □

Obiger Satz beantwortet also Problem 6.2 vollständig. Für die Anzahlen von primitiv normalen und primitiv vollständig normalen Elementen einer gegebenen Körpererweiterung war es jedoch bisher nicht möglich Aussagen zu formulieren, die alle Paare  $(q, n)$  erfassen.

Ein kleiner Schritt in Richtung der Bestimmung der Anzahl von vollständig normalen Elementen besteht sicherlich in der Erkenntnis, dass für einfache Erweiterungen (Definition 5.2) diese Frage von Satz 6.18 beantwortet wird. Ferner war Hachenberger in [5, Section 21] in der Lage diese Frage für reguläre Kreisteilungsmoduln (und damit für reguläre Erweiterungen) zu beantworten:

### Satz 6.19.

Seien  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$  und  $m \in \mathbb{N}^*$  mit  $\text{ggT}(m, q) = 1$ . Ist dann  $\mathcal{C}_{m, p^b}$  ein regulärer Kreisteilungsmodul über  $\mathbb{F}_q$ , so ist die Anzahl der vollständigen Erzeuger von  $\mathcal{C}_{m, p^b}$  gleich

$$(1) \left( q^{\frac{\text{ord}_m(q)}{\tau}} - 1 \right)^{\frac{\tau \varphi(m)}{\text{ord}_m(q)}} \cdot q^{(p^b-1)\varphi(m)}, \quad \text{falls } \mathcal{C}_{m, p^b} \text{ nicht ausfallend ist und}$$

$$(2) \left( q^{\frac{2 \text{ord}_m(q)}{\tau}} - 4q^{\frac{\text{ord}_m(q)}{\tau}} + 3 \right)^{\frac{\tau \varphi(m)}{2 \text{ord}_m(q)}} \cdot q^{(p^b-1)\varphi(m)}, \quad \text{falls } \mathcal{C}_{m, p^b} \text{ ausfallend ist,}$$

wobei  $\tau = \tau(q, n)$  aus Definition 5.12.

*Beweis.* [5, Proposition 21.1, Proposition 21.2]. □

Ferner lässt sich daraus eine Abschätzung für die Anzahl von vollständig normalen Elementen einer regulären Körpererweiterung ableiten.

### Satz 6.20.

Sei  $\mathbb{F}_{q^m}$  über  $\mathbb{F}_q$  eine reguläre Erweiterung endlicher Körper, so ist die Anzahl der vollständig normalen Elemente in  $\mathbb{F}_{q^m} \mid \mathbb{F}_q$  mindestens

$$(q-1)^{m'} \cdot q^{m'(p^b-1)},$$

wobei  $m = m' p^b$  mit  $\text{ggT}(p, m') = 1$  und  $p$  der Charakteristik von  $\mathbb{F}_q$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $m' \mid (q-1)$  und die Erweiterung damit einfach ist.

*Beweis.* [5, Theorem 21.3, Theorem 6.1]. □

Bei primitiv normalen und primitiv vollständig normalen Elementen ist das Wissen über deren Anzahlen leider noch spärlicher gesät. Für  $\mathcal{PCN}$ -Elemente existieren die folgenden Abschätzun-

gen.

### Satz 6.21.

Sei  $p$  eine Primzahl und  $q$  eine Potenz von  $p$ . Dann gilt:

- (1)  $\mathcal{PCN}(q, 2^l) \geq 4(q-1)^{2^{l-2}}$ , falls  $q \equiv 3 \pmod{4}$  und  $l \geq e+3$  für  $e$  maximal, so dass  $2^e \mid (q^2-1)$ , oder  $q \equiv 1 \pmod{4}$  und  $l \geq 5$ .
- (2)  $\mathcal{PCN}(q, r^l) \geq r^2(q-1)^{r^{l-2}}$ , falls  $r \neq p$  eine ungerade Primzahl und  $l \geq 2$ .
- (3)  $\mathcal{PCN}(q, r^l) \geq r(q-1)^{r^{l-1}} \varphi(q^{r^{l-1}} - 1)$ , falls  $r \geq 7$ ,  $\geq p$  eine Primzahl und  $l \geq 2$ .
- (4)  $\mathcal{PCN}(q, p^l) \geq p q^{p^{l-1}-1} (q-1)$ , falls  $l \geq 2$ .
- (5)  $\mathcal{PCN}(q, p^l) \geq p q^{p^{l-1}-1} (q-1) \varphi(q^{p^{l-1}} - 1)$ , falls  $p \geq 7$  und  $l \geq 2$ .

Beweis. [7].

□

Wie man nun deutlich erkennen kann, besteht immer noch große Unklarheit über die Anzahl von primitiv (vollständig) normalen Elementen und selbst die Zahl vollständig normaler Elemente ist nicht hinreichend geklärt. Daher bietet es sich freilich an, eine computergestützte Enumeration durchzuführen, um den Nebel ein wenig mehr lichten zu können. Morgan und Mullen [14] haben bereits 1996 für  $(q, n)$  aus  $\{(2, 2), \dots, (2, 18), (3, 2), \dots, (3, 12), (4, 2), \dots, (4, 9), (5, 2), \dots, (5, 8), (7, 2), \dots, (7, 6), (8, 2), \dots, (8, 5), (9, 2), \dots, (9, 5)\}$  die Werte  $\mathcal{CN}(q, n)$  und  $\mathcal{PCN}(q, n)$  bestimmen können. Betrachten wir einmal diese Zahlenkonstellationen und fragen uns, ob wir diese nicht durch obige theoretische Resultate abdecken kann, so müssen wir feststellen, dass die Anzahlen der vollständig normalen Elemente lediglich die Paare  $(2, 6), (2, 10), (2, 12), (2, 18), (3, 8), (3, 10), (5, 6)$  nicht einfach und nicht regulär sind, also  $\mathcal{CN}(q, n)$  nicht bereits aus obigen Sätzen folgt.

Daher setzen wir uns im Folgenden das Ziel, die Tabelle von Morgan und Mullen einerseits zu verifizieren und andererseits zu erweitern, um ein weitaus breiteres Spektrum an Zahlenwerten präsentieren zu können. Dabei sei angemerkt, dass in [14] die theoretischen Überlegungen aus Kapitel 5 gänzlich unbeachtet blieben. Wir wollen diese jedoch in nachfolgender Implementierung intensiv nutzen, um bestmögliche Ausbeute vorhandener Rechenleistung zu erhalten.

## 6.2 | Implementierung endlicher Körper und Körpererweiterungen

Grundsätzlich wurde zur konkreten Suche und Enumeration primitiver und vollständig normaler Elemente das Computeralgebrasystem **Sage** verwendet. **Sage** bietet bereits die Möglichkeit in endlichen Körpern zu rechnen. Jedoch hat sich herausgestellt, dass die zugrunde liegenden C-Bibliotheken (im Allgemeinen Fall ist dies das **Pari C library**<sup>1</sup>) zu langsam sind. Dies ist sicherlich auf die Allgemeinheit ihrer Anwendungsgebiete zurückzuführen. Beispielsweise arbeitet die **Pari**-Bibliothek stets mit Ganzzahlen beliebiger Größe. Deren Arithmetik ist selbstredend aufwendiger und langsamer, als maschineninterne **Integer**-Arithmetik. Daher haben wir uns entschlossen

<sup>1</sup>vgl. [http://www.sagemath.org/doc/reference/rings\\_standard/sage/rings/finite\\_rings/constructor.html](http://www.sagemath.org/doc/reference/rings_standard/sage/rings/finite_rings/constructor.html)

eigene C-Bibliotheken anzulegen, die auf einfacher (jedoch begrenzter) Integer-Arithmetik basieren.

### 6.2.1 | Beschreibung von Elementen endlicher Körper

Die Implementierung von Primkörpern ist freilich kanonisch. Daher brauchen wir an dieser Stelle nicht viele Worte verlieren, da wir auf der Suche nach primitiv und vollständig normalen Elementen ohnehin nur in Erweiterungen von Graden größer 1 zu rechnen haben.

Sei also  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper von Charakteristik  $p$  und  $q = p^r$  für  $r > 1$ . Wie auch in Sage üblich, haben wir uns entschieden bei der programmatischen Beschreibung die Isomorphie

$$\mathbb{F}_q \cong \mathbb{F}_p[x]/(f(x))$$

mit  $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  irreduzibel von Grad  $r$  zu nutzen. Also wird ein Element  $w \in \mathbb{F}_q$  als Array der Länge  $r + 1$  beschrieben, wobei die nullte Stelle des Arrays auch den Koeffizienten von  $x^0$  meint, und alle Berechnungen (insb. Multiplikation) modulo  $f(x)$  ausgeführt.

Es hat sich herausgestellt, dass es von Vorteil ist, neben dem Koeffizienten tragenden Array ein weiteres Array mitzuführen, welches die Indizes speichert, deren zugehörige Koeffizienten nicht verschwinden. Letztlich fehlt noch, wie es in C üblich und notwendig ist, die Länge des Indexarrays zu speichern und wir erhalten den Datentyp `struct FFElem`.

Listing 6.1: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

15 /**
16  * Finite Field Element.
17  *
18  * !! idcs must be in desc order !!
19  *
20  * Uses int arrays, i.e. you must not consider
21  * PrimeFields of order p with (p-1)*(p-1) > INT_MAX
22  */
23 struct FFElem{
24     int *el;
25     int *idcs;
26     int len;
27 };

```

`len` gibt immer die Länge von `idcs` an. Zusätzlich fordern wir noch folgende Eigenschaften, die den Umgang mit `struct FFElem` erleichtern.

#### Invariante 6.22.

Für das Indexarray `idcs` eines `struct FFElem` sei sichergestellt, dass die Werte stets in absteigender Reihenfolge sortiert sind.

#### Invariante 6.23.

Bei der Benutzung von `struct FFElem` sei sichergestellt, dass die Länge aller auftretenden Arrays dem Grade der Körpererweiterung über dem jeweiligen Primkörper entspricht

Satz 6.22 erleichtert den Zugriff auf den Grad des Elements (also seinen Grad als Polynom in  $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$ ). Letztere Invariante stellt sicher, dass durch Veränderung eines `struct FFElem` (beispielsweise Arithmetik) kein Speicherzugriffsfehler auftritt.

**Beispiel 6.24.** Wollen wir das Element

$$w := x^8 + 2 * x^6 + x^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$$

des endlichen Körpers  $\mathbb{F}_{3^{10}}$  (wir verzichten auf Angabe eines Minimalpolynoms, da es hier keine Rolle spielt) in obiger Darstellung beschreiben, so müssen wir C-üblich Speicher allokieren und die Arrays in passender Länge anlegen:

```
struct FFElem *w = malloc(sizeof(struct FFElem));
w->el = (int[]) {2, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0};
w->idcs = (int[]) {9, 7, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
w->len = 4;
```

Der besseren Lesbarkeit zu Gute haben wir die ungenutzten Indizes und die verschwindenden Koeffizienten mit 0 aufgefüllt. Man überlege sich jedoch, dass lediglich eine einzige 0 notwendig ist und alle anderen beliebig ersetzt werden könnten. Beispielsweise ist

```
struct FFElem *w = malloc(sizeof(struct FFElem));
w->el = (int[]) {2, -10, 1, 100, -2, -3, 2, -4, 1, -8};
w->idcs = (int[]) {9, 7, 2, 0, -3, -2, -5, -1, -1, -1};
w->len = 4;
```

mit obiger Beschreibung identisch. ▲

## Hilfsfunktionen zum Anlegen und Löschen

Da C ohne *Garbage-Collection* auskommt, muss man selbst für die entsprechende Speicherverwaltung sorgen. Dies erleichtern die Funktionen `mallocFFElem` und `freeFFElem`.

Listing 6.2: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```
30 inline struct FFElem *mallocFFElem(int m){
31     struct FFElem *ff = malloc(sizeof(struct FFElem));
32     ff->el = malloc(m*sizeof(int));
33     ff->idcs = malloc(m*sizeof(int));
34     ff->len = 0;
35     return ff;
36 }
```

Listing 6.3: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```
37 inline void freeFFElem(struct FFElem *ff){
38     free(ff->el);
39     free(ff->idcs);
40     free(ff);
41 }
```

Schließlich führen wir noch eine Funktion ein, die den Inhalt eines `struct FFElems` in ein neues kopiert. Dieses muss aber bereits allokiert sein!

Listing 6.4: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

50 /**
51  * Copies the content of ff1 into ff2
52  *
53  * !! ff2 must be malloced!
54  */
55 inline void copyFFElem(struct FFElem *ff1, struct FFElem *ff2){
56     if(ff1 == ff2) return;
57     int i;
58     for(i=0; i < ff1->len; i++){
59         ff2->idcs[i] = ff1->idcs[i];
60         ff2->el[ ff1->idcs[i] ] = ff1->el[ ff1->idcs[i] ];
61     }
62     ff2->len = ff1->len;
63 }

```

---

## 6.2.2 | Arithmetik in endlichen Körpern

### Additions- und Multiplikationstabellen

Will man Arithmetik mit `struct FFElems` betreiben, so stellt sich sicherlich am Anfang die Frage, wie die Arithmetik im Primkörper  $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  aussehen möge. Da die `FFElems` auf `int`-Arrays basieren liegt es nahe, die Addition bzw. Multiplikation zweier Elemente  $a, b \in \mathbb{F}_p$  durch die integrierten Funktionen  $(a+b) \% p$  und  $(a*b) \% p$  zu implementieren. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass dies vergleichsweise langsam ist. Insbesondere bei kleinen Primzahlen hat sich das Anlegen einer Additions- und einer Multiplikationstabelle bewährt. Diese sind `int`-Arrays, sodass die  $(a+b)$ -te Stelle der Additions- und die  $(a*b)$ -te Stelle der Multiplikationstabelle gerade das Ergebnis der jeweiligen Rechnung in  $\mathbb{F}_p$  liefert.

**Bemerkung 6.25.** Um sich nicht um vorzeichenbehaftete Werte kümmern zu müssen, überdecken die Tabellen auch negative Bereiche und daher ist eine Additionstabelle in  $\mathbb{F}_p$  stets von Länge  $4(p-1)+1$  und eine Multiplikationstabelle von Länge  $2(p-1)^2+1$ .

**Beispiel 6.26.** Betreiben wir Arithmetik in  $\mathbb{F}_3$ , so legen wir eine Additions- bzw. Multiplikationstabelle wie folgt an und stellen durch eine Verschiebung des Pointers sicher, dass auch vorzeichenbehaftete Rechnungen richtig erfasst werden können.

```

int addTableRow[] = {2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1};
int initialAddShift = 4;
int *addTable = addTableRow+initialAddShift;
int multTableRow[] = {2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1};
int initialMultShift = 4;
int *multTable = multTableRow+initialMultShift;

```

Führen wir nun Rechnungen durch können wir diese nutzen:

```

addTable[ 2+1 ] // == 0
addTable[ 0-2 ] // == 1
multTable[ 2*2 ] // == 1

```



## Addition

Aufgrund der effizienteren Darstellung der Elemente endlicher Körper durch Speicherung ihrer Indices, ist die Addition nicht lediglich gegeben durch komponentenweise Betrachtung, sondern erfordert etwas mehr Aufwand.

Listing 6.5: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

```

226 /**
227  * Adds two FFElems.
228  *
229  * !! ff1 may be same as ret !!
230  * !! ff2 must not be same as ret !!
231  */
232 inline void addFFElem(struct FFElem *ff1, struct FFElem *ff2,
233                      struct FFElem *ret,
234                      int *tmp,
235                      int *multTable, int *addTable){
236     int i=0,j=0,k=0, i2;
237     bool end = false;
238     //handle trivial cases
239     if(ff1->len == 0){
240         copyFFElem(ff2,ret);
241         return;
242     }
243     if(ff2->len == 0){
244         copyFFElem(ff1,ret);
245         return;
246     }
247     copyArray(ff1->idcs,tmp,ff1->len);
248     while( end == false ){
249         while( tmp[i] != ff2->idcs[j] ){
250             if( tmp[i] > ff2->idcs[j] ){
251                 ret->el[ tmp[i] ] = ff1->el[ tmp[i] ];
252                 ret->idcs[k] = tmp[i];
253                 i++; k++;
254             }else if( tmp[i] < ff2->idcs[j] ){
255                 ret->el[ ff2->idcs[j] ] = ff2->el[ ff2->idcs[j] ];
256                 ret->idcs[k] = ff2->idcs[j];
257                 j++; k++;
258             }
259             if(i == ff1->len || j == ff2->len){
260                 end = true;
261                 break;
262             }
263         }
264         if(end == true) break;
265         //tmp[i] == ff2->idcs[j]
266         i2 = tmp[i];
267         ret->el[i2] = addTable[ ff1->el[i2] + ff2->el[i2] ];
268         if(ret->el[i2] != 0){
269             ret->idcs[k] = i2;
270             k++;
271         }

```

---

```

272     }
273     i++; j++;
274     if(i == ff1->len || j == ff2->len) end = true;
275 }
276 //add rest of ff1 or ff2
277 if(i != ff1->len ){
278     while(i<ff1->len){
279         ret->el[ tmp[i] ] = ff1->el[ tmp[i] ];
280         ret->idcs[k] = tmp[i];
281         i++; k++;
282     }
283 }else if(j != ff2->len){
284     while(j<ff2->len){
285         ret->el[ ff2->idcs[j] ] = ff2->el[ ff2->idcs[j] ];
286         ret->idcs[k] = ff2->idcs[j];
287         j++; k++;
288     }
289 }
290 ret->len = k;
291 }

```

---

Wie später aus der Beschreibung anderer Algorithmen hervorgeht, ist es von Vorteil, wenn das Ergebnis einer Addition bereits eines der beiden addierten Elemente ist. Auf diese Weise spart man das Anlegen unnötiger Hilfs-FFElems. Wie man schnell einsieht, werden jeweils nur die beiden Indexarrays durchlaufen und lediglich wenn diese gleich sind, muss eine Addition ausgeführt werden; ansonsten reicht es den jeweiligen Koeffizienten zu übernehmen.

## Multiplikation

Wir haben uns entschieden, keine speziellen Multiplikationsalgorithmen (wie Karatsuba oder FFT-basierte Algorithmen) zu implementieren, da die hier betrachteten Erweiterungen nicht von Graden sind, in denen jene Algorithmen ihre Vorteile ausspielen könnten.

Listing 6.6: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

302 /**
303  * Multiplies two FFElems and reduces the result by mipo.
304  *
305  * !! tmp must have at least length m!
306  * !! ret must be malloced!
307  */
308 inline void multiplyFFElem(struct FFElem *ff1, struct FFElem *ff2,
309     struct FFElem *ret,
310     struct FFElem *mipo, int *tmp, int m,
311     int *multTable, int *addTable){
312     /*
313     * catch trivial cases
314     */
315     if(ff1->len == 0 || ff2->len == 0){
316         ret->len = 0;
317         return;
318     }

```

```

319     if(ff1->len == 1 && ff1->idcs[0] == 0 && ff1->el[0] == 1){
320         copyFFElem(ff2, ret);
321         return;
322     }
323     if(ff2->len == 1 && ff2->idcs[0] == 0 && ff2->el[0] == 1){
324         copyFFElem(ff1, ret);
325         return;
326     }
327
328     /*
329     * Do multiplication
330     */
331     int maxlen = ff1->idcs[0] + ff2->idcs[0] + 1;
332     int i,j,i2,j2,k;
333     int max2 = maxlen;
334     if( maxlen > m ){
335         max2 = m;
336         initPoly(tmp,maxlen-m);
337     }
338     initPoly(ret->el,max2);
339     //multiply
340     for(i=0;i<(ff1->len);i++){
341         for(j=0;j<(ff2->len);j++){
342             i2 = ff1->idcs[i];
343             j2 = ff2->idcs[j];
344             k = i2+j2;
345             if(k<m){
346                 ret->el[k] = addTable[ ret->el[k] +
347                                     multTable[ ff1->el[i2] * ff2->el[j2] ] ];
348             }else{
349                 tmp[k-m] = addTable[ tmp[k-m] +
350                                     multTable[ ff1->el[i2] * ff2->el[j2] ] ];
351             }
352         }
353     }
354
355     /*
356     * Reduce mod mipo
357     */
358     if(maxlen > m){
359         int quo;
360         for(i=maxlen-m-1;i>=0;i--){
361             quo = tmp[i];
362             if(quo == 0) continue;
363             for(j=0;j<(mipo->len); j++){
364                 j2 = mipo->idcs[j];
365                 k = i+j2;
366                 if(k>=m){
367                     tmp[k-m] = addTable[ tmp[k-m] -
368                                         multTable[ mipo->el[j2]*quo ] ];
369                 }else{
370                     ret->el[k] = addTable[ ret->el[k] -
371                                         multTable[ mipo->el[j2]*quo ] ];
372                 }

```

```

373     }
374 }
375 }
376
377 /*
378  * Recalc indices
379  */
380 i2 = 0;
381 for(i=max2-1;i>=0;i--){
382     if(ret->el[i] != 0){
383         ret->idcs[i2] = i;
384         i2++;
385     }
386 }
387 ret->len = i2;
388 }

```

Außer den beiden zu multiplizierenden `FFElems` muss man natürlich das Minimalpolynom des zu Grunde liegenden Körpers und dessen Grad über dem Primkörper – hier mit `int m` bezeichnet – mit übergeben. Leider war es an dieser Stelle im Gegensatz zur Addition nicht möglich, die Indizes des Produkts direkt zu berechnen, da es sich bei den Koeffizienten des Produkts ja Summen von Produkten von Koeffizienten der beiden Faktoren handelt. Daher muss nach der Reduktion modulo Minimalpolynoms eine Neuberechnung der Indizes erfolgen.

## Quadratur

Im Hinblick auf das Testen von `struct FFElems` auf Primitivität und dem damit verbundenen Potenzieren, existiert eine separate Funktion zur Quadrierung eines `FFElems`. Es ist klar, dass beim Quadrieren weniger Produkte und Summen berechnet werden müssen als bei einer allgemeinen Multiplikation.

Listing 6.7: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

404 /**
405  * Squares an FFElem
406  *
407  * !! ff is not modified !!
408  * !! tmp must have at least length m !!
409  */
410 inline void squareFFElem(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
411     struct FFElem *ret, int *tmp, int m,
412     int *multTable, int *addTable){
413     /*
414      * catch trivial cases
415      */
416     if(ff->len == 0){
417         copyFFElem(ff,ret);
418         return;
419     }
420     if(ff->len == 1 && ff->idcs[0] == 0 && ff->el[0] == 1){
421         copyFFElem(ff,ret);
422         return;

```

```

423     }
424
425     /*
426     * Do multiplication
427     */
428     int maxlen = 2*ff->idcs[0] + 1;
429     int i,j,i2,j2,k;
430     int max2 = maxlen;
431     if( maxlen > m ){
432         max2 = m;
433         initPoly(tmp,maxlen-m);
434     }
435     initPoly(ret->el,max2);
436     for(i=0;i<(ff->len);i++){
437         // same index must be squared
438         i2 = ff->idcs[i];
439         k = 2*i2;
440         if(k<m){
441             ret->el[k] = addTable[ ret->el[k] +
442                                 multTable[ ff->el[i2]*ff->el[i2] ] ];
443         }else{
444             tmp[k-m] = addTable[ tmp[k-m] +
445                                 multTable[ ff->el[i2]*ff->el[i2] ] ];
446         }
447         // other indices only multiplied and doubled
448         for(j=i+1;j<(ff->len);j++){
449             i2 = ff->idcs[i];
450             j2 = ff->idcs[j];
451             k = i2+j2;
452             if(k<m){
453                 ret->el[k] = addTable[ ret->el[k] +
454                                         multTable[ 2 * multTable[ ff->el[i2] * ff->el[j2] ] ] ];
455             }else{
456                 tmp[k-m] = addTable[ tmp[k-m] +
457                                         multTable[ 2 * multTable[ ff->el[i2] * ff->el[j2] ] ] ];
458             }
459         }
460     }
461     /*
462     * Reduce mod mipo
463     */
464     if(maxlen > m){
465         int quo;
466         for(i=maxlen-m-1;i>=0;i--){
467             quo = tmp[i];
468             if(quo == 0) continue;
469             for(j=0;j<(mipo->len); j++){
470                 j2 = mipo->idcs[j];
471                 k = i+j2;
472                 if(k>=m){
473                     tmp[k-m] = addTable[ tmp[k-m] -
474                                             multTable[ mipo->el[j2]*quo ] ];
475                 }else{
476                     ret->el[k] = addTable[ ret->el[k] -

```

---

```

477             multTable[ mipo->el[j2]*quo ] ];
478         }
479     }
480 }
481 }
482
483 /*
484  * Recalc indices
485  */
486 i2 = 0;
487 for(i=max2-1;i>=0;i--){
488     if(ret->el[i] != 0){
489         ret->idcs[i2] = i;
490         i2++;
491     }
492 }
493 ret->len = i2;
494 }

```

---

### 6.2.3 | Matrizen und Polynome über endlichen Körpern

#### Matrizen und Matrixmultiplikation

Nach ?? ist das Potenzieren mit der Charakteristik in endlichen Körpern eine lineare Abbildung. Dies wollen wir Nutzen und haben daher als Darstellung von Matrizen über endlichen Körpern naheliegenderweise ein Array aus FFElems gewählt.

Listing 6.8: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

515 /**
516  * Matrix multiplication
517  *
518  * !! tmp must have at least length m!
519  */
520 inline void matmul(struct FFElem **mat, struct FFElem *ff,
521     struct FFElem *ret,
522     int m, int *multTable, int *addTable){
523     int i,j,i2, row;
524     bool end;
525     for(row=0;row<m;row++){
526         ret->el[row] = 0;
527         i=0; j=0;
528         end = false;
529         while(end == false){
530             while(ff->idcs[i] != mat[row]->idcs[j]){
531                 if(ff->idcs[i] > mat[row]->idcs[j]) i++;
532                 else if(ff->idcs[i] < mat[row]->idcs[j]) j++;
533                 if(i == ff->len || j == mat[row]->len){
534                     end = true;
535                     break;
536                 }
537             }

```

---

```

538         if(end == true) break;
539         i2 = ff->idcs[i]; // == mat[row]->idcs[j]
540         ret->el[row] = addTable[ ret->el[row]
541             + multTable[ mat[row]->el[i2]*ff->el[i2] ] ];
542         i++;
543         j++;
544         if(i==ff->len || j==mat[row]->len) end = true;
545     }
546 }
547 i2 = 0;
548 for(i=m-1;i>=0;i--){
549     if(ret->el[i] != 0){
550         ret->idcs[i2] = i;
551         i2++;
552     }
553 }
554 ret->len = i2;
555 }

```

---

Hier wird – anders als bei der Addition – nur nach den gemeinsamen Indizes gesucht (alle anderen Produkte sind schließlich 0). Invariante 6.22 stellt dabei wiederum sicher, dass das hier aufgeführte Verfahren funktioniert.

Ferner existiert eine Funktion, die das Freigeben von Matrizen erleichtert.

Listing 6.9: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

43 inline void freeFFElemMatrix(struct FFElem **mat, int len){
44     if(mat==0) return;
45     int i;
46     for(i=0;i<len;i++) freeFFElem(mat[i]);
47     free(mat);
48 }

```

---

## Polynome

Im Hinblick auf das Testen von FFElems auf vollständige Normalität (bzw. vollständige Erzeuger-Eigenschaft) müssen wir einen Weg wählen, Polynome über endlichen Körpern darzustellen; also Polynome deren Koeffizienten FFElems sind. Dazu führen wir ein eigenes **struct** ein.

Listing 6.10: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

144 struct FFPoly{
145     struct FFElem **poly;
146     int lenPoly;
147 };

```

---

Listing 6.11: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

149 inline struct FFPoly *mallocFFPoly(int m, int lenPoly){
150     struct FFPoly *poly = malloc(lenPoly*sizeof(struct FFElem*));
151     poly->lenPoly = lenPoly;
152     int i;

```

---

```

153     for(i=0;i<lenPoly;i++) poly->poly[i] = mallocFFElem(m);
154     return poly;
155 }

```

Listing 6.12: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

```

157 inline void freeFFPoly(struct FFPoly *poly){
158     int i;
159     for(i=0;i<poly->lenPoly;i++) freeFFElem(poly->poly[i]);
160     free(poly->poly);
161     free(poly);
162 }

```

## 6.3 | Potenzieren und Primitivitätstest

### 6.3.1 | Potenzieren

Für das Potenzieren von FFElems wurde stets ein Square-and-Multiply-Ansatz verwendet. Da in endlichen Körpern jedoch das Potenzieren mit der Charakteristik eine lineare Abbildung darstellt, ist es a priori nicht unklug eine  $p$ -adische Square-and-Multiply-Variante zu wählen. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass in den meisten Fällen normales Square-and-Multiply schneller ist als sein  $p$ -adisches Pendant. Dies veranschaulicht auch nachstehendes Beispiel.

**Beispiel 6.27.** Sei  $u \in E := \mathbb{F}_{3^4}$  und zu berechnen sei  $u^{16}$ , so stellen wir zunächst 16 binär und 3-adisch da:

$$16 = 10000_2 = 121_3.$$

Damit gilt

$$u^{16} = ((u^2)^2)^2 = (u^3 \cdot u \cdot u)^3 \cdot u.$$

In einer Implementierung sehen wir also, dass die binäre Exponentiation 4 Quadrierungen „kostet“, die 3-adische Version hingegen 2 Matrixmultiplikationen und 3 Multiplikationen. Da in der Regel allgemeine Multiplikationen teuer sind, wäre in diesem Fall die binäre Variante wohl die bessere Wahl.

Wollen wir  $u^{10}$  berechnen, so sehen wir aus

$$10 = 1010_2 = 101_3,$$

dass in diesem Fall die binäre Exponentiation 4 Quadrierungen und eine allgemeine Multiplikation erfordert, die 3-adische Variante jedoch nur 2 Matrixmultiplikationen und 1 allgemeine Multiplikation. Letzteres lässt sich sogar auf eine Matrixmultiplikation reduzieren, berechnet man die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung  $E \rightarrow E$ ,  $x \mapsto x^9$  bereits vorher! Die beiden Varianten der Berechnung würden in diesem Fall also wie folgt von Statten gehen:

$$u^{10} = ((u^2)^2 \cdot u)^2 = u^9 \cdot u. \quad \blacktriangle$$



Nachstehend werden nun die beiden Varianten der Implementierung der Potenzierung aufgeführt. Wir beginnen mit  $p$ -adischem Square-and-Multiply. Zu bemerken ist, dass die Potenz bereits in  $p$ -adischer Darstellung als `int`-Array übergeben werden muss. Zudem werden vermeidbare Matrix-multiplicationen (vgl. obiges Beispiel) nicht durchgeführt und es ist sicherzustellen, dass `struct FFElem **matCharac` als `struct FFElem*`-Array von Länge  $(l + 1)m$  ist, wobei  $l$  die Länge des maximal auftretenden 0-Intervalls in der  $p$ -adischen Darstellung meint (in obigem Beispiel bei  $u^{10}$  wäre  $l = 1$ ).

Listing 6.13: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

562 /**
563  * Square and multiply in charac
564  * mat is powering by charac
565  *
566  * !! ff is modified !!
567  */
568 inline void powerFFElem(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
569                        struct FFElem *ret,
570                        int m, int *power, int powerLen,
571                        struct FFElem **matCharac, int *tmp, struct FFElem *ffTmp,
572                        int *multTable, int *addTable){
573     int i,j,k;
574     int lenCurGap = 0;
575     struct FFElem *ffSwitch = 0;
576     struct FFElem *ffRetInt = ret;
577     // init ret to 1
578     ffRetInt->el[0] = 1; ffRetInt->idcs[0] = 0; ffRetInt->len = 1;
579     for(j=powerLen-1;j>=0;j--){
580         for(k=0;k<power[j];k++){
581             multiplyFFElem(ffRetInt,ff,ffTmp, mipo,tmp,m,multTable,addTable);
582             ffSwitch = ffRetInt; ffRetInt = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
583         }
584         if(j==0 || power[j-1] == 0){
585             lenCurGap++;
586             continue;
587         }
588         matmul(matCharac+lenCurGap*m, ff, ffTmp, m, multTable,addTable);
589         ffSwitch = ff; ff = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
590         lenCurGap = 0;
591     }
592     copyFFElem(ffRetInt,ret);
593 }

```

---

Als nächstes folgt die standardmäßige binäre Exponentiation. Auch hier wird die Potenz bereits in Binärdarstellung erwartet.

Listing 6.14: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

602 /**
603  * Square and multiply
604  *
605  * !! ff is modified !!
606  */
607 inline void powerFFElemSqM(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,

```

---

---

```

608     struct FFElem *ret,
609     int m, int *power, int powerLen,
610     int *tmp, struct FFElem *ffTmp,
611     int *multTable, int *addTable){
612     int i,j,k;
613     int lenCurGap = 0;
614     struct FFElem *ffSwitch = 0;
615     struct FFElem *ffRetInt = ret;
616     // init ret to 1
617     ffRetInt->el[0] = 1; ffRetInt->idcs[0] = 0; ffRetInt->len = 1;
618     for(j=powerLen-1;j>=0;j--){
619         if(power[j] == 1){
620             multiplyFFElem(ffRetInt,ff,ffTmp, mipo,tmp,m,multTable,addTable);
621             //switch ffTmp and ffRetInt
622             ffSwitch = ffRetInt; ffRetInt = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
623         }
624         if(j>0){
625             squareFFElem(ff,mipo,ffTmp,tmp,m,multTable,addTable);
626             //switch ffTmp and ff
627             ffSwitch = ff; ff = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
628         }
629     }
630     copyFFElem(ffRetInt,ret);
631 }

```

---

### 6.3.2 | Primitivitätstest

Beim Testen eines Elements eines endlichen Körpers auf Primitivität bedienen wir uns des wohl-bekannten Satz von Lagrange aus der Gruppentheorie und geben zunächst ein kleines Lemma an, auf dem der dann folgende Algorithmus basiert.

**Lemma 6.28.** Sei  $u \in \mathbb{F}_q$  und

$$q - 1 = p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}$$

die Primfaktorzerlegung von  $q - 1$ . Definiere für alle  $i = 1, \dots, r$

$$\bar{n}_i := \frac{q-1}{p_i} = p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_{i-1}^{\nu_{i-1}} \cdot p_i^{\nu_i-1} \cdot p_{i+1}^{\nu_{i+1}} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}.$$

Dann gilt:  $u$  ist primitiv genau dann, wenn

$$u^{\bar{n}_i} \neq 1 \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

*Beweis.* Per definitionem der Primitivität klar. □

Es bleibt jedoch immer noch offen diese  $r$  Potenzierungen möglichst gut zu organisieren. Nehmen wir an, die Primzahlen sind in der Primfaktorzerlegung

$$q - 1 = p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}$$

aufsteigend sortiert, also  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ , so hat sich als besonders hilfreich erwiesen, die Potenzen  $\bar{n}_i$  auf Basis der Potenzen

- $d := \text{ggT}\{\bar{n}_i : i = 1, \dots, r\}$  und
- $d' := \text{ggT}\{\frac{\bar{n}_i}{d} : i = 1, \dots, r-1\}$

durchzuführen und die bereits berechneten Potenzen zu nutzen, wie nachstehendes Beispiel veranschaulicht.

**Beispiel 6.29.** Sei  $u \in \mathbb{F}_{3^{10}}$ . Da

$$3^{10} - 1 = 2^3 \cdot 11^2 \cdot 61,$$

sind folgende Potenzen von  $u$  zu berechnen:

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= 2^2 \cdot 11^2 \cdot 61 = 29524, \\ \bar{n}_2 &= 2^3 \cdot 11 \cdot 61 = 5368, \\ \bar{n}_3 &= 2^3 \cdot 11^2 = 968.\end{aligned}$$

Wir sehen jedoch dass die Potenzen

$$d := \text{ggT}\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3\} = 2^2 \cdot 11 = 44$$

und

$$d' := \text{ggT}\{\frac{\bar{n}_1}{d}, \frac{\bar{n}_2}{d}\} = 61$$

uns die Arbeit erheblich erleichtern können: Wir berechnen  $v := u^d = u^{44}$  und  $w := v^{d'} = v^{61}$  separat, so schreiben sich die restlichen Potenzen wie folgt:

$$\begin{aligned}u^{\bar{n}_3} &= w^{11}, \\ u^{\bar{n}_2} &= v^2, \\ u^{\bar{n}_1} &= v^2 \cdot v^9.\end{aligned}$$

Selbstverständlich kann man den Test auf Primitivität bereits abbrechen, falls  $v = 1$  oder  $w = 1$ . Es ist klar, dass in diesem Beispiel obiges Vorgehen eine erhebliche Verkleinerung der zu berechnenden Potenzen liefert, die jedoch nicht in allen Fällen erwartet werden kann. ▲

In nachstehender Implementierung sind die separat aufgelisteten Potenzen  $d$  mit `commonBarFactor` und  $d'$  mit `commonBiggestBarFactor` bezeichnet und werden in  $p$ -adischer bzw. binärer Darstellung erwartet. Ferner werden die restlichen  $\bar{n}_i$ s in `barFactors` bereits in  $p$ -adischer bzw. binärer Darstellung als ein einziges `int`-Array übergeben, wobei die jeweilige Länge der einzelnen Faktoren in dem `int`-Array `lenBarFactors` zu hinterlegen ist. Wie im Quelltext bemerkt, wird die Exponentiation  $p$ -adisch durchgeführt (siehe Listing 6.13), falls `matCharac` ungleich 0 ist, ansonsten binär (siehe Listing 6.14), wobei natürlich sicherzustellen ist, dass die Potenzen in passender Darstellung vorliegen.

Listing 6.15: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```
666 /**
667  * Test if element is primitive.
668  *
669  * !! if matCharac is Zero, all powers are assumed as binary arrays !!
670  *
671  * !! fff, ffTmp, ffTmp2, ffTmp3, ffRet must be malloced !!
672  * !! x is NOT modified !!
673  */
674 inline bool isPrimitive(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
```

```

675     int m,
676     int *barFactors, int *lenBarFactors, int countBarFactors,
677     int *commonBarFactor, int lenCommonBarFactor,
678     int *commonBiggestBarFactor, int lenCommonBiggestBarFactor,
679     struct FFElem **matCharac,
680     struct FFElem *fff, struct FFElem *ffff, struct FFElem *ffTmp,
681     struct FFElem *ffTmp2, struct FFElem *ffRet,
682     int *tmp, int *multTable, int *addTable){
683     int i;
684     int curPos = 0;
685     bool binarySqM = (matCharac == 0);
686     struct FFElem *ffSwitch = 0;
687
688     copyFFElem(ff,fff);
689     // all barFactors are power of commonBarFactor
690     if(binarySqM)
691         powerFFElemSqM(fff,mipo,ffTmp,
692             m,commonBarFactor,lenCommonBarFactor,
693             tmp,ffTmp2,
694             multTable,addTable);
695     else
696         powerFFElem(fff,mipo,ffTmp,
697             m,commonBarFactor,lenCommonBarFactor,
698             matCharac,tmp,ffTmp2,
699             multTable,addTable);
700     if(isOne(ffTmp)) return false;
701     //switch ffTmp and fff
702     ffSwitch = fff; fff = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
703     copyFFElem(fff,ffff);
704     //test first barFactor
705     if(binarySqM)
706         powerFFElemSqM(ffff,mipo,ffTmp,
707             m,barFactors,lenBarFactors[0],
708             tmp,ffTmp2,
709             multTable,addTable);
710     else
711         powerFFElem(ffff,mipo,ffTmp,
712             m,barFactors,lenBarFactors[0],
713             matCharac,tmp,ffTmp2,
714             multTable,addTable);
715     if(isOne(ffTmp)) return false;
716     curPos += lenBarFactors[0];
717     //test further factors which are powers of commonBiggestBarFactor
718     //so first, calc  $y^{\text{commonBiggestBarFactor}}$ 
719     copyFFElem(fff, ffff);
720     if(binarySqM)
721         powerFFElemSqM(ffff,mipo,ffTmp,
722             m,commonBiggestBarFactor,lenCommonBiggestBarFactor,
723             tmp,ffTmp2,
724             multTable,addTable);
725     else
726         powerFFElem(ffff,mipo,ffTmp,
727             m,commonBiggestBarFactor,lenCommonBiggestBarFactor,
728             matCharac,tmp,ffTmp2,

```

```

729         multTable,addTable);
730     if(isOne(ffTmp)) return false;
731     ffSwitch = fff; fff = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
732     for(i=1;i<countBarFactors;i++){
733         // copy z (fff) to ffff
734         copyFFElem(fff,ffff);
735         // *** ffff == fff == y^commonBiggestBarFactor
736         if(binarySqM)
737             powerFFElemSqM(ffff, mipo, ffTmp,
738                             m,barFactors+curPos, lenBarFactors[i],
739                             tmp,ffTmp2,
740                             multTable,addTable);
741         else
742             powerFFElem(ffff, mipo, ffTmp,
743                             m,barFactors+curPos, lenBarFactors[i],
744                             matCharac,tmp,ffTmp2,
745                             multTable,addTable);
746
747         if(i>1){
748             multiplyFFElem(ffRet,ffTmp,ffTmp2,mipo,
749                             tmp,m,multTable,addTable);
750         }else{
751             ffSwitch = ffTmp2; ffTmp2 = ffTmp; ffTmp = ffSwitch;
752         }
753         if(isOne(ffTmp2)) return false;
754         curPos += lenBarFactors[i];
755         ffSwitch = ffRet; ffRet = ffTmp2; ffTmp2 = ffSwitch;
756     }
757     return true;
758 }

```

## 6.4 | Frobenius-Auswertung und Test auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft

### 6.4.1 | Frobenius-Auswertung

Sei wie immer  $F = \mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper und  $E = \mathbb{F}_{q^m}$  eine Körpererweiterung. Sei  $\mathcal{C}_{k,t}$  ein verallgemeinerter Kreisteilungsmodul über  $F$  (vgl. Definition 5.5) und  $u \in E$  ein Element, das wir als vollständigen Erzeuger in Betracht ziehen (vgl. Definition 5.6). Nach ?? (3) ist  $u$  genau dann ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$ , wenn

$$\text{Ord}_{q^d}(u) = \Phi_{\nu(k), \frac{kt}{\nu(k)d}} \quad \forall d \mid \frac{kt}{\nu(k)}.$$

Folglich müssen wir, um  $q$ -Ordnungen berechnen zu können, in der Lage sein, für beliebige Zwischenkörper  $F \mid K \mid E$  von Grad  $d$  über  $F$  und beliebige  $f(x) \in K[x]$

$$f(\sigma^d)(u) \in E$$

auswerten zu können, wobei wieder  $\sigma : \bar{F} \rightarrow \bar{F}, x \mapsto x^q$  den Frobenius über  $F$  bezeichne. Bleibt die Frage, wie die verschiedenen Zwischenkörper mit Hilfe der FFElems gelesen werden können. Da wir  $E$  jedoch stets als Erweiterung über dem zu Grunde liegenden Primkörper betrachten (vgl. Unterabschnitt 6.2.1) ist dies völlig unklar. Daher umgehen wir dieses Problem und betrachten eine beliebige Einbettung von  $K$  in  $E$ . Die Frage, ob man damit immer noch  $q$ -Ordnungen berechnen kann, beantwortet nachstehendes Lemma.

**Lemma 6.30.** *Seien  $F \mid K \mid E$  ein Turm endlicher Körper mit  $[K : F] = d$  und  $\sigma : \bar{F} \rightarrow \bar{F}$  der Frobenius von  $F$ . Sei  $f(x) \in K[x]$  ein Polynom und  $u \in E$ . Für je zwei injektive Körperhomomorphismen  $g, h : K \rightarrow E$  ist entweder*

$$h(f)(\sigma^d)(u) = 0 \quad \text{und} \quad g(f)(\sigma^d)(u) = 0$$

oder

$$h(f)(\sigma^d)(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad g(f)(\sigma^d)(u) \neq 0,$$

wobei  $h(f) \in E[x]$  koeffizientenweise zu lesen ist.

Mit anderen Worten hängt also die Frage, ob eine Frobenius-Auswertung 0 ist oder nicht, nicht von der Wahl der konkreten Einbettung ab.

**Beweis.** Aufgrund der Eindeutigkeit endlicher Körper (z.B. ??) unterscheiden sich zwei Einbettungen  $g, h : K \rightarrow E$  lediglich um einen Automorphismus  $a : E \rightarrow E$ , also  $h = a \circ g$ . Dies beweist aber bereits die Behauptung.  $\square$

Damit können wir uns erstmal davon ausgehen, dass die zu betrachtenden Polynome bereits in  $E[x]$  liegen; also vom Typ FFPoly sind. Analog zu Listing 6.13 wird auch hier das Potenzieren durch Matrixmultiplikation beschrieben, wobei sicherzustellen ist, dass die maximal auftretende Matrixpotenz vorhanden ist, d.h. übergibt man ein Polynom `poly` vom Grad  $k$ , so muss `mats` als Array bestehend aus FFElem\* von Länge  $m \cdot k$  sein, wobei  $m$  wiederum den Grad der Erweiterung von  $E$  über dem Primkörper meint. Das bedeutet insbesondere, dass die erste Matrix in `mats` die Darstellungsmatrix zu  $\sigma^1$  ist und der Fall  $\sigma^0 = \text{id}$  separat betrachtet werden muss (vgl. Zeile 791 in Listing 6.16).

Im Hinblick auf das Berechnen von  $q$ -Ordnungen, wo ein Körperelement meist mehr als einmal einer Frobenius-Auswertung unterzogen werden muss, haben wir die Möglichkeit bereitgestellt, bereits durchgeführte Matrixmultiplikationen in `matmulCache` zu speichern. Das Array `matmulCacheCalced` gibt dabei an, welche Stellen in `matmulCache` bereits berechnet wurden. Selbstredend wird dieser Zwischenspeicher durch die Ausführung von `applyFrob` fortwährend aktualisiert.

Listing 6.16: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

773 /*
774  * calculates g(sigma^frobPower)(x) where g is a polynomial
775  * and sigma the frobenius
776  * application of frobenius is given by mats
777  */
778 inline void applyFrob(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
779                      struct FFPoly *poly,
780                      struct FFElem **mats,
781                      int frobPower, struct FFElem *ret,
782                      int m, int *tmp, struct FFElem *ffTmp, struct FFElem *ffTmp2,
783                      struct FFElem **matmulCache, bool *matmulCacheCalced,
```

Müsste man  
hier  
ausführlicher  
argumentieren?

```

784     int *multTable, int *addTable){
785     int i,j;
786
787     ret->len = 0;
788     for(i=0;i<poly->lenPoly;i++){
789         if(poly->poly[i]->len == 0) continue;
790         j = i*frobPower-1;
791         if(i>0 && matmulCacheCalced[j] == true){
792             multiplyFFElem(matmulCache[j],poly->poly[i],
793                 ffTmp, mipo,
794                 tmp,m,multTable,addTable);
795             addFFElem(ret,ffTmp,ret,tmp,multTable,addTable);
796         }else{
797             if(i>0){
798                 matmul(mats+j*m, ff, ffTmp, m, multTable,addTable);
799                 //update matmulCache
800                 copyFFElem(ffTmp, matmulCache[j]);
801                 matmulCacheCalced[j] = true;
802             }else{
803                 copyFFElem(ff,ffTmp);
804             }
805             //go on and multiply ffTmp with current coefficient
806             multiplyFFElem(ffTmp, poly->poly[i],
807                 ffTmp2, mipo,
808                 tmp,m,multTable,addTable);
809             addFFElem(ret,ffTmp2,ret,tmp,multTable,addTable);
810         }
811     }
812 }

```

Falls bereits klar ist, dass für ein gegebenes Element nur eine Frobenius-Auswertung vollzogen wird, so ist der `matmulCache` überflüssig und führt zur Variante `applyFrob_noCache`, die ansonsten identisch zu obigem ist.

Listing 6.17: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

827 /*
828  * calculates  $g(\sigma^{\text{frobPower}}(x))$  where  $g$  is a polynomial
829  * and  $\sigma$  the frobenius
830  * application of frobenius is given by mats
831  */
832 inline void applyFrob_noCache(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
833     struct FFPoly *poly,
834     struct FFElem **mats,
835     int frobPower, struct FFElem *ret,
836     int m, int *tmp, struct FFElem *ffTmp, struct FFElem *ffTmp2,
837     int *multTable, int *addTable){
838     int i,j;
839     ret->len = 0;
840
841     for(i=0;i<poly->lenPoly;i++){
842         if(poly->poly[i]->len == 0) continue;
843         if(i>0){
844             j = i*frobPower-1;

```

---

```

845         matmul(mats+j*m, ff, ffTmp, m, multTable, addTable);
846     }else{
847         copyFFElem(ff, ffTmp);
848     }
849     multiplyFFElem(ffTmp, poly->poly[i],
850         ffTmp2, mipo,
851         tmp, m, multTable, addTable);
852     addFFElem(ret, ffTmp2, ret, tmp, multTable, addTable);
853 }
854 }
```

---

### 6.4.2 | Testen von vollständigen Erzeugern

Wie bereits erwähnt ist  $u \in \mathbb{F}_{q^m}$  über  $\mathbb{F}_q$  genau dann ein vollständiger Erzeuger eines verallgemeinerten Kreisteilungsmoduls  $\mathcal{C}_{k,t}$ , wenn

$$\text{Ord}_q(u) = \Phi_{\nu(k), \frac{kt}{\nu(k)d}} \quad \forall d \mid \frac{kt}{\nu(k)}.$$

Analog zum Primitivitätstest reicht es, lediglich maximale Kofaktoren des jeweiligen verallgemeinerten Kreisteilungspolynoms zu testen, wie nachstehendes Lemma beschreibt.

**Lemma 6.31.** *Seien  $u \in \mathbb{F}_{q^m}$  und  $\Phi_{k,t}(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  ein verallgemeinertes Kreisteilungspolynom. Sei ferner*

$$\Phi_{k,t}(x) = f_1(x)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot f_r(x)^{\nu_r} \in \mathbb{F}_q[x]$$

*die vollständige Faktorisierung von  $\Phi_{k,t}$  über  $\mathbb{F}_q$  und bezeichne  $F_i(x) := \frac{\Phi_{k,t}(x)}{f_i(x)}$  den jeweiligen maximalen Kofaktor von  $f_i$  in  $\Phi_{k,t}$  für alle  $i = 1, \dots, r$ . Seien zuletzt  $h: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_{q^m}$  ein injektiver Körperhomomorphismus und  $\sigma: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, x \mapsto x^q$  der Frobenius von  $\mathbb{F}_q$ , so ist  $\text{Ord}_q(u) = \Phi_{k,t}$  genau dann, wenn*

$$h(\Phi_{k,t})(\sigma)(u) = 0 \quad \text{und} \quad h(F_i)(\sigma)(u) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

*Beweis.* Klar per definitionem der  $q$ -Ordnung und Lemma 6.30. □

Nun können wir auf diese Weise leicht eine Implementierung eines Tests auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft angeben, wenn wir davon ausgehen, dass die Berechnung der maximalen Kofaktoren bereits geschehen ist. In Listing 6.18 ist also sicherzustellen, dass in dem Array `polys` sowohl das verallgemeinerte Kreisteilungspolynom, als auch alle maximalen Kofaktoren auftauchen. Das Array `evalToZero` gibt dabei an, ob bei Vorliegen eines vollständigen Erzeugers die Auswertung am jeweiligen Polynom 0 ergibt (`true`) oder nicht (`false`). Der Rückgabewert der Funktion ist selbstredend ein `bool` mit der Information, ob das getestete Element `ff` ein vollständiger Erzeuger dieses Kreisteilungsmoduls ist (`true`) oder nicht (`false`).

Listing 6.18: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

---

```

912 inline bool testSubmod(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
913     struct FFPoly **polys,
914     int polysCount, bool *evalToZero,
915     struct FFElem **mats, int *frobPowers,
916     int m, int *tmp,
917     struct FFElem *ffTmp, struct FFElem *ffTmp2, struct FFElem *ffTmp3,
```



```

918     struct FFElem **matmulCache, bool *matmulCacheCalced,
919     int *multTable, int *addTable){
920     int i;
921     int goodCounter = 0;
922     for(i=0;i<polysCount;i++){
923         applyFrob(ff,mipo,
924             polys[i],
925             mats,frobPowers[i], ffTmp,
926             m,tmp,ffTmp2,ffTmp3,
927             matmulCache,matmulCacheCalced,
928             multTable,addTable);
929         if( isZero(ffTmp) == evalToZero[i] ){
930             goodCounter++;
931         }else{
932             return false;
933         }
934     }
935     if(goodCounter == polysCount){
936         return true;
937     }
938     return false;
939 }

```

Ferner bieten wir die Möglichkeit ein Element auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft für mehrere verallgemeinerte Kreisteilungsmoduln zu testen, wie Listing 6.19 zeigt. `decompCount` ist dabei die Anzahl der zu testenden verallgemeinerten Kreisteilungsmoduln und das Array `polysCountPerDecomp` gibt die Anzahl der Polynome für den jeweiligen Kreisteilungsmodul an. Das Array `bool *toTestIndicator` legt fest, welche Kreisteilungsmoduln getestet werden. Der Rückgabewert – anders als in Listing 6.18 – ist ein `int`, der die Werte  $-1$ , falls `ff` kein vollständiger Erzeuger der getesteten Kreisteilungsmoduln ist, oder  $i$ , falls `ff` gerade vollständiger Erzeuger des  $i$ -ten getesteten Kreisteilungsmoduls ist, annimmt. Ferner bricht die Funktion ab, falls `ff` ein vollständiger Erzeuger ist, da es klar sein sollte, dass diese Eigenschaft lediglich für *einen* verallgemeinerten Kreisteilungsmodul zutreffen kann.

Listing 6.19: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

861 inline int testAllSubmods(struct FFElem *ff, struct FFElem *mipo,
862     int decompCount, struct FFPoly **polys,
863     int *polysCountPerDecomp, bool *evalToZero,
864     struct FFElem **mats, int *frobPowers, bool *toTestIndicator,
865     int m, int *tmp,
866     struct FFElem *ffTmp, struct FFElem *ffTmp2, struct FFElem *ffTmp3,
867     struct FFElem **matmulCache, bool *matmulCacheCalced,
868     int *multTable, int *addTable){
869     if(ff->len == 0) return -1;
870     int i,j,k;
871     int goodCounter = 0;
872     int curDecompPosition = 0;
873     for(i=0;i<decompCount;i++){
874         if(toTestIndicator != 0 && toTestIndicator[i] == false){
875             curDecompPosition += polysCountPerDecomp[i];
876             continue;
877         }

```

```

878     goodCounter = 0;
879     for(j=0; j<polysCountPerDecomp[i]; j++){
880         applyFrob(ff, mipo,
881             polys[curDecompPosition+j],
882             mats, frobPowers[curDecompPosition+j], ffTmp,
883             m, tmp, ffTmp2, ffTmp3,
884             matmulCache, matmulCacheCalced,
885             multTable, addTable);
886         if( isZero(ffTmp) == evalToZero[curDecompPosition+j] ){
887             goodCounter++;
888         }else break;
889     }
890     if(goodCounter == polysCountPerDecomp[i]){
891         return i;
892     }
893     curDecompPosition += polysCountPerDecomp[i];
894 }
895 return -1;
896 }

```

## 6.5 | Implementierung der gezielten Enumeration

### 6.5.1 | Enumeration eines verallgemeinerten Kreisteilungsmoduls

Sei  $E := \mathbb{F}_{q^m}$  über  $F := \mathbb{F}_q$  eine Körpererweiterung endlicher Körper. Die Frage nach einer Enumeration aller vollständig normaler Elemente dieser Erweiterung lässt sich nach dem Zerlegungssatz (Satz 5.9) auf die separate Enumeration von verallgemeinerten Kreisteilungsmoduln zurückführen. Daher starten wir mit einem verallgemeinerten Kreisteilungsmodul  $\mathcal{C}_{k,t}$  über  $\mathbb{F}_q$ . Sicherlich könnte man alle  $q^m$  Elemente von  $E$  testen, ob sie vollständige Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$  sind, was jedoch einen unnötig großen Aufwand darstellen würde. Sei nämlich  $u \in E$  ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$ , so erhalten wir alle weiteren Elemente dieses Kreisteilungsmoduls durch Anwendung von Korollar 3.40, was wir hier in passender Notation noch einmal formulieren möchten.

**Lemma 6.32.** *Sei  $u \in E$  ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$  über  $F$ . Dann gilt*

$$\mathcal{C}_{k,t} = \{f(\sigma)(u) : f(x) \in F[x]_{<\varphi(k)t}, \text{ggT}(f, \Phi_{k,t}) = 1\},$$

wobei wiederum  $\sigma$  den Frobenius von  $F$  und  $\varphi$  die Eulersche  $\varphi$ -Funktion notieren.

*Beweis.* Korollar 3.40 mit der Erkenntnis, dass  $\deg(\Phi_{k,t}) = \varphi(k)t$ . □

Nun ist klar, wie wir ausgehend von einem Erzeuger alle weiteren generieren können: Sei  $u \in E$  ein vollständiger Erzeuger von  $\mathcal{C}_{k,t}$  über  $F$ , so berechnen wir iterativ  $v := f(\sigma)(u)$  für alle  $f \in F[x]_{<\varphi(k)t}$  mit `applyFrob_noCache` (Listing 6.17) und testen anschließend  $v$  auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft mit `testSubmod` (Listing 6.18). Auf eine Berechnung von  $\text{ggT}(f, \Phi_{k,t})$  verzichten wir, da wir `testSubmod` ohnehin ausführen müssen und damit durch die Kenntnis des `ggT` keinen Vorteil erlangen würden. Die Generierung der  $f$ s erfolgt direkt in Listing 6.20, wobei die Elemente aus  $F$  wieder mittels eines injektiven Körperhomomorphismus  $F \rightarrow E$  als `FFElem*`-Array namens `elementsF` übergeben werden.

Müsste man  
hier  
ausführlicher  
argumentieren?

**Bemerkung 6.33.** Wiederum überzeuge man sich kurz mit der gleichen Argumentation wie in Lemma 6.30, dass ein Endomorphismus  $E \rightarrow E$  lediglich die Erzeuger eines verallgemeinerten Kreisteilungsmoduls permutiert.

Wie erwähnt müssen wir dieses Verfahren natürlich mit einem vollständigen Erzeuger starten. Es ist sicherzustellen, dass sich dieser am aktuellen Knoten der Liste `struct Node *root` befindet.

Listing 6.20: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

953 inline void calcSubmoduleElements(struct Node *root,
954     struct FFElem *mipo,
955     int maxLenPoly,
956     int *genCounts, int curGen,
957     struct FFPoly **polys, int polysCount, bool *evalToZero,
958     struct FFElem **mats, int matLen, int *frobPowers,
959     struct FFElem **elementsF,
960     int m, int q, int *tmp,
961     struct FFElem *ffTmp, struct FFElem *ffTmp2, struct FFElem *ffTmp3,
962     struct FFElem *ffTmp4,
963     struct FFElem **matmulCache, bool *matmulCacheCalced,
964     int *multTable, int *addTable){
965     int i,j;
966     struct Node *curRoot = root;
967     struct FFElem *ff = root->ff;
968     int *curPoly = malloc( maxLenPoly*sizeof(int) );
969     struct FFPoly *curFPoly = malloc( sizeof(struct FFPoly) );
970     curFPoly->poly = malloc( maxLenPoly*sizeof(struct FFElem*) );
971     curFPoly->lenPoly = 0;
972
973     initPoly(curPoly,maxLenPoly);
974     curPoly[0] = 2;
975     int curLenPoly = 1;
976     if( q == 2 && maxLenPoly > 1){
977         curLenPoly = 2;
978         curPoly[0] = 0;
979         curPoly[1] = 1;
980     }
981     if(q != 2 || maxLenPoly > 1){
982         while(true){
983             //setup curFPoly
984             for(i=0;i<curLenPoly;i++)
985                 curFPoly->poly[i] = elementsF[curPoly[i]];
986             curFPoly->lenPoly = curLenPoly;
987             //apply Frobenius
988             applyFrob_noCache(ff,mipo,
989                 curFPoly,
990                 mats,1, ffTmp, //return value
991                 m,tmp,ffTmp2,ffTmp3,
992                 multTable,addTable);
993             //test generated element
994             for(i=0;i<matLen;i++) matmulCacheCalced[i] = false;

```

---

```

995         if(testSubmod(ffTmp, mipo,
996                     polys, polysCount, evalToZero,
997                     mats, frobPowers, m, tmp,
998                     ffTmp2, ffTmp3, ffTmp4,
999                     matmulCache, matmulCacheCalced, multTable, addTable)){
1000             curRoot = appendToEnd(curRoot, ffTmp, m);
1001             genCounts[curGen]++;
1002         }
1003         //generate next element
1004         curPoly[0] += 1;
1005         if( curPoly[0] == q ){
1006             for(i=0; i<maxLenPoly-1 && curPoly[i]==q; i++){
1007                 curPoly[i] = 0;
1008                 curPoly[i+1] += 1;
1009             }
1010             if(i+1>curLenPoly)
1011                 curLenPoly = i+1;
1012             if( curPoly[maxLenPoly-1]==q){
1013                 break;
1014             }
1015         }
1016     }
1017 }
1018 free(curPoly);
1019 free(curFPoly->poly);
1020 free(curFPoly);
1021 }

```

---

Wie man in obigem Listing erkennt, startet die Erzeugung der Polynome aus  $F[x]_{\varphi(k)t}$  beim Polynom  $2 \in F[x]$  (falls es die Charakteristik zulässt), da  $1 \in F[x]$  ja wieder  $(1)(\sigma)(u) = \text{id}(u) = u$  liefert. `maxLenPoly` gibt dabei die maximale Länge der zu betrachtenden Polynome an (in hiesiger Notation also  $\text{maxLenPoly} = \varphi(k)t + 1$ ). Die Polynome selbst werden in zwei Schritten erzeugt: Sei  $l := \text{maxLenPoly}$ , so durchläuft das `int`-Array `curPoly` alle Elemente aus  $\mathbb{Z}_q^l$ . Das korrekte Polynom in  $E[x]$  wird dann durch einsetzen jeder Stelle dieses Tupels aus  $\mathbb{Z}_q^l$  in die `elementsF` erzeugt und in `curFPoly` gespeichert.

Die Anzahl der berechneten Erzeuger werden im `int`-Array `genCounts` an der Stelle `curGen` gespeichert und da unsere Suche auf vollständig normale Elemente abzielt, werden die konkreten Erzeuger durch `appendToEnd` an die verkettete Liste `struct Node *root` angehängt und damit für späteres Zusammensetzen gespeichert.

## Verkettete Listen zum Speichern berechneter vollständiger Erzeuger

Die verkettete Liste ist dabei wie folgt aufgebaut.

Listing 6.21: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

---

```

175 struct Node {
176     struct FFElem *ff;
177     struct Node *next;
178 };

```

---

Ebenfalls ist das Anheften eines Elements ans Ende der Liste wie man es erwartet, wobei zu bemerken gilt, dass der neue Endknoten zurückgegeben wird. Auf diese Weise muss nicht bei jedem Anheften die komplette Liste durchlaufen werden. Das Element `struct FFElem *element` wird dabei kopiert, so dass es anschließend weiterverwendet werden kann und die Liste unverändert bleibt (vgl. Anwendung in Listing 6.20).

Listing 6.22: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

180 /**
181  * appends element to end of root, where element is copied to new FFElem.
182  */
183 inline struct Node *appendToEnd(struct Node *root, struct FFElem *element, int m){
184     struct Node *nextNode = root;
185     if( nextNode != 0){
186         while(nextNode->next != 0){
187             nextNode = nextNode->next;
188         }
189         if( nextNode->ff != 0){
190             nextNode->next = malloc( sizeof(struct Node) );
191             nextNode = nextNode->next;
192         }
193         if( nextNode != 0){
194             nextNode->next = 0;
195             nextNode->ff = mallocFFElem(m);
196             copyFFElem(element, nextNode->ff);
197             return nextNode;
198         }
199     }
200     return NULL;
201 }

```

---

Wie üblich in C, ist es hilfreich das Freigeben von Speicher in eine eigene Funktion zu setzen.

Listing 6.23: Aus ../Sage/enumeratePCNs.c

---

```

203 inline void freeNode(struct Node* head){
204     struct Node *next_n = NULL;
205     struct Node *tmp_n = NULL;
206     for(tmp_n=head; tmp_n !=NULL; ){
207         next_n = tmp_n->next;
208         freeFFElem(tmp_n->ff);
209         free(tmp_n);
210         tmp_n = next_n;
211     }
212     head = 0;
213 }

```

---

## 6.5.2 | Dynamische Enumeration des größten Kreisteilungsmoduls

Da der Zerlegungssatz (Satz 5.9) nicht immer eine echte Zerlegung liefert (sich also alle vollständig normalen Elemente auf einen einzigen Modul konzentrieren) und in vielen Zerlegungen ein

verallgemeinerter Kreisteilungsmodul vorkommt, der verglichen mit den anderen Moduln dieser Zerlegung, besonders viele Elemente enthält, hat sich die Speicherung *aller* Erzeuger als schlecht erwiesen. Daher sind wir dazu übergegangen, den größten Kreisteilungsmodul dynamisch zu enumerieren. Das bedeutet, dass alle anderen verallgemeinerten Kreisteilungsmoduln vorab durch `calcSubmoduleElements` (Listing 6.20) behandelt werden. Bei der Enumeration des größten nutzen wir dann diese Informationen und setzen die gefundenen Erzeuger zu einem vollständig normalen Element zusammen. Dies können wir dann auf Primitivität durch `isPrimitive` (Listing 6.15) testen und abschließend verwerfen, da es uns ja nur auf eine Enumeration und nicht auf die konkrete Angabe der vollständig normalen und primitiven Elemente ankommt.

Die bereits berechneten vollständigen Erzeuger werden durch das Array von Listen `struct Node **roots` übergeben. `decompCount` gibt dabei die Anzahl aller (also inklusive des größten) verallgemeinerten Kreisteilungsmoduln an. Alle anderen Variablen wurden bereits in den vorherigen Funktionen erklärt, wobei noch bemerkt werden sollte, dass diesmal die Erzeugung der Polynome bei  $1 \in F[x]$  startet, da der bereits gefundene Erzeuger des größten Kreisteilungsmoduls auch Teil einer gültigen Kombination zu einem vollständig normalen Element ist. Dieser „Fehler“ in der Berechnung der Anzahl `genCounts` wird in Zeile 1156 am Ende der Funktion korrigiert. Der Erzeuger selbst befindet sich wieder am aktuellen Knoten der letzten Liste des Arrays `roots`, da die Datenstrukturen so aufgebaut werden, dass dieser größte verallgemeinerte Kreisteilungsmodul der letzte ist (siehe Zeilen 1062 und 1064).

Listing 6.24: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

1030 /**
1031  * Processes last submodule as others before, but does not save generated
1032  * elements. Cycles through already generated elements and tests for
1033  * primitivity:
1034  *
1035  * !! all temporary variables are generated inside !!
1036  */
1037 unsigned long long processLastSubmoduleAndTestPrimitivity(struct Node **roots,
1038     struct FFElem *mipo, int decompCount,
1039     int maxLenPoly,
1040     int *genCounts,
1041     struct FFPoly **polys, int polysCount, bool *evalToZero,
1042     struct FFElem **mats, int matLen, int *frobPowers,
1043     struct FFElem **elementsF,
1044     int m, int q,
1045     int *barFactors, int *lenBarFactors, int countBarFactors,
1046     int *commonBarFactor, int lenCommonBarFactor,
1047     int *commonBiggestBarFactor, int lenCommonBiggestBarFactor,
1048     struct FFElem **matCharac,
1049     struct FFElem **matmulCache, bool *matmulCacheCalced,
1050     int *multTable, int *addTable){
1051     //generate temporary variables
1052     struct FFElem *fff = mallocFFElem(m);
1053     struct FFElem *ffff = mallocFFElem(m);
1054     struct FFElem *ffTmp = mallocFFElem(m);
1055     struct FFElem *ffTmp2 = mallocFFElem(m);
1056     struct FFElem *ffTmp3 = mallocFFElem(m);
1057     struct FFElem *ffTmp4 = mallocFFElem(m);
1058     struct FFElem *ffTmp5 = mallocFFElem(m);
1059     int *tmp = malloc(m*sizeof(int));

```

```

1060
1061     int i,j;
1062     int curGen = decompCount-1;
1063     struct Node **curRoots = malloc( decompCount*sizeof(struct Node*) );
1064     struct FFElem *ff = roots[curGen]->ff;
1065     int *curPoly = malloc( maxLenPoly*sizeof(int) );
1066     struct FFPoly *curFPoly = malloc( sizeof(struct FFPoly) );
1067     curFPoly->poly = malloc( maxLenPoly*sizeof(struct FFElem*) );
1068     curFPoly->lenPoly = 0;
1069
1070     initPoly(curPoly,maxLenPoly);
1071     curPoly[0] = 1;
1072     int curLenPoly = 1;
1073
1074     unsigned long long pcn = 0;
1075     while(true){
1076         //setup curFPoly
1077         for(i=0;i<curLenPoly;i++)
1078             curFPoly->poly[i] = elementsF[curPoly[i]];
1079         curFPoly->lenPoly = curLenPoly;
1080         //apply Frobenius
1081         applyFrob_noCache(ff,mipo,
1082             curFPoly,
1083             mats,1, fff, //return value
1084             m,tmp,ffTmp,ffTmp2,
1085             multTable,addTable);
1086         //test generated element
1087         for(i=0;i<matLen;i++) matmulCacheCalced[i] = false;
1088         if(testSubmod(fff, mipo,
1089             polys,polysCount,evalToZero,
1090             mats,frobPowers,m,tmp,
1091             ffTmp,ffTmp2,ffTmp3,
1092             matmulCache,matmulCacheCalced, multTable,addTable)){
1093             genCounts[curGen]++;
1094             // build element as sum of already calced Nodes and ffTmp
1095             for(i=0;i<decompCount;i++) curRoots[i] = roots[i];
1096             // cycle through Nodes, build element and test primitivity
1097             while(true){
1098                 copyFFElem(fff,ffff);
1099                 //build element
1100                 for(i=0;i<decompCount-1;i++){
1101                     addFFElem(ffff, curRoots[i]->ff, ffff, tmp,
1102                         multTable,addTable);
1103                 }
1104                 //test primitivity
1105                 if(countBarFactors > 0){
1106                     if(isPrimitive(ffff, mipo,m,
1107                         barFactors,lenBarFactors,countBarFactors,
1108                         commonBarFactor,lenCommonBarFactor,
1109                         commonBiggestBarFactor,lenCommonBiggestBarFactor,
1110                         matCharac,
1111                         ffTmp,ffTmp2,ffTmp3,ffTmp4,ffTmp5,
1112                         tmp,multTable,addTable)){
1113                         pcn++;

```

```

1114         }
1115     }
1116
1117     //next element
1118     curRoots[0] = curRoots[0]->next;
1119     if( curRoots[0] == 0 ){
1120         for(i=0;i<decompCount-1 && curRoots[i]==0;i++){
1121             curRoots[i] = roots[i];
1122             curRoots[i+1] = curRoots[i+1]->next;
1123         }
1124     }
1125     if( curRoots[decompCount-1] == 0){
1126         break;
1127     }
1128 }
1129 }
1130 //generate next element
1131 curPoly[0] += 1;
1132 if( curPoly[0] == q ){
1133     for(i=0;i<maxLenPoly-1 && curPoly[i]==q;i++){
1134         curPoly[i] = 0;
1135         curPoly[i+1] += 1;
1136     }
1137     if(i+1>curLenPoly)
1138         curLenPoly = i+1;
1139     if( curPoly[maxLenPoly-1]==q){
1140         break;
1141     }
1142 }
1143 }
1144 free(curPoly);
1145 free(curFPoly->poly);
1146 free(curFPoly);
1147 freeFFElem(fff);
1148 freeFFElem(ffff);
1149 freeFFElem(ffTmp);
1150 freeFFElem(ffTmp2);
1151 freeFFElem(ffTmp3);
1152 freeFFElem(ffTmp4);
1153 freeFFElem(ffTmp5);
1154
1155 //we added first element twice
1156 genCounts[curGen]--;
1157 return pcn;
1158 }

```

**Bemerkung 6.34.** Wie Zeile 1105 zu erkennen gibt, kann man durch das Setzen von `countBarFactors = 0` den Test auf Primitivität überspringen. Dies ist sinnvoll, wenn man nur an der Anzahl der vollständig normalen Elemente interessiert ist.



## Vorbereiten der Enumeration auf Auffinden vollständiger Erzeuger

Alle bisher betrachteten Verfahren basierten immer auf der Annahme, dass bereits ein vollständiger Erzeuger eines Kreisteilungsmoduls bereits gefunden ist. Es ist klar, dass man diese irgendwann suchen muss, was die Funktion `processFiniteField` bewerkstelligt. Gleichzeitig bildet sie den Wrapper, der von Sage aufgerufen wird und als Rückgabewert `unsigned long long` die Anzahl der primitiven vollständig normalen Elemente trägt. Alle zu übergebenen Parameter werden in Sage erzeugt und wurden bereits erklärt.

Listing 6.25: Aus `../Sage/enumeratePCNs.c`

```

1173 unsigned long long processFiniteField(struct FFElem *mipo, int decompCount,
1174     struct FFPoly **polys, int *polysCountPerDecomp,
1175     bool *evalToZero,
1176     struct FFElem **mats, int matLen, int *frobPowers,
1177     int *genCounts, int m, int charac, int q,
1178     int *barFactors, int *lenBarFactors, int countBarFactors,
1179     int *commonBarFactor, int lenCommonBarFactor,
1180     int *commonBiggestBarFactor, int lenCommonBiggestBarFactor,
1181     struct FFElem **matCharac, struct FFElem **elementsF,
1182     int *multTable, int *addTable){
1183     time_t TIME = time(NULL);
1184     int i,j;
1185
1186     //setup temporary variables -----
1187     int *tmp = malloc(m*sizeof(int));
1188     struct FFElem *ff = mallocFFElem(m);
1189     initPoly(ff->el,m);
1190     struct FFElem *ffRet = mallocFFElem(m);
1191     struct FFElem *ffTmp = mallocFFElem(m);
1192     struct FFElem *ffTmp2 = mallocFFElem(m);
1193     struct FFElem *ffTmp3 = mallocFFElem(m);
1194     struct FFElem *ffTmp4 = mallocFFElem(m);
1195
1196     struct FFElem **matmulCache = malloc(matLen*sizeof(struct FFElem));
1197     for(i=0;i<matLen;i++) matmulCache[i] = mallocFFElem(m);
1198     bool *matmulCacheCalced = malloc(matLen*sizeof(bool));
1199
1200     bool *toTestIndicator = malloc(decompCount*sizeof(bool));
1201     struct Node **roots = malloc( decompCount*sizeof(struct Node) );
1202     struct Node **curRoots = malloc(decompCount*sizeof(struct Node*));
1203     for(i=0;i<decompCount;i++){
1204         roots[i] = malloc( sizeof(struct Node) );
1205         roots[i]->ff = 0;
1206         roots[i]->next = 0;
1207         curRoots[i] = roots[i];
1208         toTestIndicator[i] = true;
1209     }
1210     //-----
1211
1212     int foundCounter = 0;
1213     initPoly(genCounts,decompCount);
1214
1215     // chase for elements -----

```

```

1216 while(true){
1217     for(i=0;i<matLen;i++) matmulCacheCalced[i] = 0;
1218     int curGen = testAllSubmods(ff,mipo,decompCount,
1219         polys,polysCountPerDecomp,evalToZero,
1220         mats,frobPowers,toTestIndicator,
1221         m,tmp,ffTmp,ffTmp2,ffTmp3,
1222         matmulCache,matmulCacheCalced,
1223         multTable,addTable);
1224     if( curGen != -1 ){
1225         if(toTestIndicator[curGen] == true){
1226             genCounts[curGen]++;
1227             appendToEnd(roots[curGen], ff, m);
1228             foundCounter++;
1229             toTestIndicator[curGen] = false;
1230         }
1231         if(foundCounter == decompCount) break;
1232     }
1233     //generate next element
1234     // (for sure there is a more efficient method)
1235     ff->el[0] += 1;
1236     if( ff->el[0] == charac ){
1237         for(i=0; i<m-1 && ff->el[i]==charac; i++){
1238             ff->el[i] = 0;
1239             ff->el[i+1] += 1;
1240         }
1241         if( ff->el[m-1] == charac )
1242             break;
1243     }
1244     updateFFElem(ff,m);
1245 }
1246 if( foundCounter != decompCount ){
1247     printf("BAAAD_ERROR!!!\foundCounter=%i<\decompCount=%i\n",
1248         foundCounter,decompCount);
1249     exit(0);
1250 }
1251 printf("finding_time: %.2f\n", (double)(time(NULL)-TIME));
1252 //-----
1253
1254
1255
1256 // Process found elements -----
1257 int curDecompPosition = 0;
1258 for(i=0;i<decompCount-1;i++){
1259     calcSubmoduleElements(roots[i], mipo,
1260         polys[curDecompPosition]->lenPoly-1, // *** == maxLenPoly
1261         genCounts,i, // *** i == curGen
1262         polys+curDecompPosition, polysCountPerDecomp[i],
1263         evalToZero+curDecompPosition,
1264         mats, matLen, frobPowers+curDecompPosition,
1265         elementsF,
1266         m,q,tmp,
1267         ffTmp,ffTmp2,ffTmp3,ffTmp4,
1268         matmulCache,matmulCacheCalced,
1269         multTable,addTable);

```

```

1270     curDecompPosition += polysCountPerDecomp[i];
1271 }
1272 printf("all_not_last_time: %.2f\n", (double)(time(NULL)-TIME));
1273 //-----
1274
1275 // Process last Decomposition -----
1276 int curGen = decompCount-1;
1277 unsigned long long pcn =
1278     processLastSubmoduleAndTestPrimitivity(roots,mipo,decompCount,
1279     polys[curDecompPosition]->lenPoly-1, // *** == maxLenPoly
1280     genCounts,
1281     polys+curDecompPosition, polysCountPerDecomp[curGen],
1282     evalToZero+curDecompPosition,
1283     mats,matLen,frobPowers+curDecompPosition,
1284     elementsF,
1285     m,q,
1286     barFactors,lenBarFactors,countBarFactors,
1287     commonBarFactor,lenCommonBarFactor,
1288     commonBiggestBarFactor,lenCommonBiggestBarFactor,
1289     matCharac,
1290     matmulCache,matmulCacheCalced,
1291     multTable,addTable);
1292 //-----
1293
1294 //free variables
1295 for(i=0;i<decompCount;i++)
1296     freeNode(roots[i]);
1297 free(roots); free(curRoots);
1298
1299 //free temporary variables
1300 free(tmp);
1301 freeFFElem(ff);
1302 freeFFElem(ffRet);
1303 freeFFElem(ffTmp);
1304 freeFFElem(ffTmp2);
1305 freeFFElem(ffTmp3);
1306 freeFFElem(ffTmp4);
1307 for(i=0;i<matLen;i++) freeFFElem(matmulCache[i]);
1308 free(matmulCache);
1309 free(matmulCacheCalced);
1310 free(toTestIndicator);
1311
1312
1313 printf("total_time: %.2f\n", (double)(time(NULL)-TIME));
1314 return pcn;
1315 }

```

Wie zu erkennen ist, erfolgt die Suche nach vollständigen Erzeugern zunächst durch iterative Enumeration aller Elemente. Wurde ein vollständiger Erzeuger gefunden, so wird die jeweilige Stelle des `toTestIndicator` umgeschaltet, wodurch der zugehörige verallgemeinerte Kreisteilungsmodul in `testAllSubmods` nicht mehr berücksichtigt wird. Ist für jeden Kreisteilungsmodul ein vollständiger Erzeuger gefunden werden wie oben beschrieben durch `calcSubmoduleElements` (Listing 6.20) alle, bis auf den letzten, verarbeitet. Dieser wird abschließend separat in Listing 6.24 betrachtet

und liefert die Anzahl der primitiven vollständig normalen Elemente.

### 6.5.3 | Top-Level-Implementierung in Sage

Eingangs wurde zwar erwähnt, dass Sage nicht ausreichend performant ist, um die hier angestrebten Ziele zu erreichen, doch wollen wir nicht gänzlich auf die hochsprachlichen Funktionen dieses Computeralgebrasystems verzichten. Insbesondere eignet sich Sage hier, die Daten für `processFiniteField` (Listing 6.25) bereitzustellen.

#### Anwendung des Zerlegungssatzes

Es ist klar, dass am Anfang der Berechnung von primitiv vollständig normalen Elementen einer Erweiterung endlicher Körper stets die Anwendung des Zerlegungssatzes (Satz 5.9) steht.

Listing 6.26: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

544 # Application of the Decomposition Theorem (Section 19)
545 # for  $x^{n-1}$  over  $F_{p^e}$ 
546 def decompose(p,e, n):
547     pi = largestDiv(p,n)
548     return decompose_cycl_module(p,e, 1, n/pi, pi)

```

---

Listing 6.27: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

571 # internal application of the Decomposition Theorem
572 # for  $\Phi_k(x^{t*pi})$  over  $F_{p^e}$ 
573 def decompose_cycl_module(p,e, k,t,pi):
574     if p.divides(k*t): print "ERROR:  $p \nmid kt$ "
575     #test all prime divisors, start with largest one
576     flag = False
577     for r,l in reversed(factor(t)):
578         if not (r*l).divides(ordn(squarefree(k*t),p**e)):
579             R = largestDiv(r,t)
580             return decompose_cycl_module(p,e, k, t/r, pi) \
581                 + decompose_cycl_module(p,e, k*R, t/R, pi)
582     return [(k,t,pi)]

```

---

**Beispiel 6.35.** Wollen wir einmal den Zerlegungssatz auf  $E := \mathbb{F}_{3^{20}}$  über  $F := \mathbb{F}_3$  anwenden, so rufen wir `decompose(3,1,20)` auf und erhalten

$$[(1, 1, 1), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (5, 4, 1)].$$

Umformuliert bedeutet das, dass

$$x^{20} - 1 = \Phi_1(x) \Phi_2(x) \Phi_4(x) \Phi_5(x^4) \in \mathbb{F}_3[x],$$

eine verträgliche Zerlegung ist. Oder in Termen der erweiterten Kreisteilungsmoduln ist

$$\mathcal{C}_{1,20} = \mathcal{C}_{1,1} \oplus \mathcal{C}_{2,1} \oplus \mathcal{C}_{4,1} \oplus \mathcal{C}_{5,4}$$

eine verträgliche Zerlegung über  $\mathbb{F}_3$ .



Die benutzten Funktionen `largestDiv`, `ordn` und `squarefree` sind dabei wie folgt gegeben.

Listing 6.28: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

586 # returns the largest power of p dividing n
587 def largestDiv(p,n):
588     l = 0
589     while (p**l).divides(n):
590         l = l+1
591     return p**(l-1);

```

---

Listing 6.29: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

538 # computes ordn m(q) = min{ k: q ** k = 1 mod m }
539 def ordn(m,q):
540     if m == 1: return 1
541     for i in range(1,m+1):
542         if (q ** i)%m == 1: return i;

```

---

Listing 6.30: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

534 # computes the quadratic free part of an integer
535 def squarefree(n):
536     return prod(map(lambda x: x[0], factor(Integer(n))))

```

---

## Ausnutzen einfacher Zerlegungen

Zunächst müsste man für jeden erweiterten Kreisteilungsmodul nun *alle* Teiler des Modulcharakters testen, um vollständige Erzeuger zu finden. Jedoch garantiert Satz 5.3, dass dies in manchen Fällen überflüssig ist, da bei einer einfachen Erweiterung ein Erzeuger eines Kreisteilungsmoduls  $\mathcal{C}_{k,t}$  über  $\mathbb{F}_q$  bereits ein vollständiger Erzeuger ist. Ist eine Erweiterung nicht einfach, so sollte man die Hoffnung nach einer Vereinfachung der Suche nach vollständigen Erzeugern nicht aufgeben, sondern sich überlegen, dass es einen Teiler  $d \mid n$  geben kann, für den die Erweiterung  $\mathbb{F}_{q^n}$  über  $\mathbb{F}_{q^d}$  einfach ist. Dann müssten keine Teiler von Modulcharaktern getestet werden, die größer oder gleich  $d$  wären, da – wie man sich sehr leicht überlegt – falls  $\mathbb{F}_{q^n}$  über  $\mathbb{F}_q$  einfach ist, auch für alle Teiler  $d \mid n$   $\mathbb{F}_{q^n}$  über  $\mathbb{F}_{q^d}$  einfach ist.

Dies wollen wir nutzen in nachstehender Funktion, die gerade zu betrachtenden Teiler einer Erweiterung liefert (und deren Benennung vielleicht etwas kontraintuitiv gewählt wurde).

Listing 6.31: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

594 # returns the NOT completely basic divisors of an
595 # extension n over GF(p^e)
596 def get_completely_basic_divisors(p,e,n):
597     n = Integer(n)
598     q = Integer(p**e)
599     divs = []
600     for d in divisors(n):
601         isComplBasic = True
602         for r in prime_divisors(n/d):
603             if r.divides(ordn(p_free_part(n/d/r,p),q**d)):
604                 isComplBasic = False

```

---

---

```

605         break
606     divs += [d]
607     if isComplBasic: return divs
608 return divs

```

---

`p_free_part` gibt wie in Satz 5.3 (3) zu sehen ist, gerade den größten Teiler des ersten Arguments an, der nicht mehr durch  $p$ , dem zweiten Argument, teilbar ist. Es wird dabei nicht überprüft, ob das zweite Argument eine Primzahl ist.

Listing 6.32: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

612 # p-free part of t
613 def p_free_part(t,p):
614     while p.divides(t):
615         t /= p
616     return t

```

---

## Ausnutzen regulärer Kreisteilungsmoduln

Sicherlich wollen wir auch Regularität (Definition 5.10) nicht unbeachtet lassen, um uns die Suche nach vollständig normalen Elementen zu erleichtern. Also haben wir auch einen Test auf Regularität nach Sage übersetzt.

Listing 6.33: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

431 # tests if cyclotomic module C_k,t is regular over F_p^e
432 def isRegular(p,e, k,t,pi):
433     return gcd( ordn( squarefree(k*p_free_part(t,p)), p**e ), k*t*pi) == 1

```

---

Ist ein Kreisteilungsmodul regulär, so ist ein Test auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft durch Satz 5.13 gegeben. Da Regularität lediglich die Anzahl der Teiler des Erweiterungsgrades, deren zugehörige Kreisteilungsmoduln auf vollständige Erzeuger getestet werden müssen, reduziert, wird Satz 5.13 durch Rückgabe der Teiler  $\tau$  bzw.  $\tau$  und  $2\tau$  (in Notation dieses Satzes) im ausfallenden Fall realisiert, wie die Funktion `get_tau_divisors` zeigt. Die zu übergebenden Parameter bestehen wieder aus  $q = p^e$  und der Daten  $(k, t, \pi)$  des zu betrachtenden Kreisteilungsmoduls  $C_{k, t\pi}$  über  $\mathbb{F}_q$ .

Listing 6.34: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

436 # returns tau-divisors for complete generator test of
437 # the cyclotomic module C_k,t*pi over F_p^e
438 def get_tau_divisors(p,e, k,t,pi):
439     if t != 1:
440         print "ERROR_get_tau_divisors: t!=1 for p=", p, "e=", e,
441               ", k=", k, "t=", t, "pi=", pi
442         raise Exception("Error_t!=1")
443     q = p**e
444     tau = ordn(k,q) / ordn(squarefree(k),q)
445     tau = prod(map(lambda ra: ra[0]**floor(ra[1]/2), factor(tau)))
446     if isExceptional(p,e, k):
447         return [ tau, 2*tau ]
448     else:
449         return [ tau ]

```

---

Wie in ?? gezeigt, ist die kanonische Zerlegung im regulären Fall verträglich. Daher tritt ein Fehler auf, wird obiger Funktion ein Kreisteilungsmodul  $\mathcal{C}_{l,m}$  übergeben mit  $m \neq p^b$  für ein  $b \geq 0$ .

Es bleibt natürlich noch ein Test anzugeben, der überprüft, ob die Parameter  $(p, e, k)$  ausfallend sind (vgl. Definition 5.11).

Listing 6.35: Aus ../Sage/enumeratePCNs.spyx

---

```

452 # tests if n is exceptional over F_p^e
453 def isExceptional(p,e, n):
454     q = p**e
455     c = 0
456     nbar = n
457     while Integer(2).divides(nbar):
458         c += 1
459         nbar /= 2
460     if (q).mod(4) == 3 and c >= 3 and ordn(q, 2**c) == 2:
461         return True
462     return False

```

---

### Die zentrale Sage-Funktion `countCompleteSubmoduleGenerators`

Als übergeordnete Funktion, die die Anzahl aller (primitiven) vollständig normale Elemente und aller vollständigen Erzeuger im Sinne des Zerlegungssatzes liefert, stellen wir `countCompleteSubmoduleGenerators` bereit. Als Argumente sind selbstredend ein endlicher Körper zu übergeben und der Grad der zu betrachtenden Erweiterung. Ferner gibt es die Möglichkeit durch das optionale Argument `binaryPowers=False` den Test auf Primitivität durch  $p$ -adische Exponentiation durchführen zu lassen wie in dem Absatz vor Listing 6.15 erwähnt wurde (vgl. auch Unterabschnitt 6.3.2). Der Test auf Primitivität lässt sich auch vollständig deaktivieren durch die Übergabe von `testPrimitivity=False` (vgl. Bemerkung 6.34).

Der Rückgabewert der Funktion enthält die Anzahl aller vollständig normalen Elemente der Erweiterung, die Anzahl aller primitiv vollständig normalen (oder 0, falls der Test auf Primitivität deaktiviert wurde), die Anzahl der jeweiligen vollständigen Erzeuger der Zerlegung in verallgemeinerte Kreisteilungsmodule nach Satz 5.9 und abschließend die Dauer der Berechnung.

Im Gegensatz zu den bisherigen Listings werden wir `countCompleteSubmoduleGenerators` in mehrere Teile aufspalten, um ein besseres Verständnis zu gewährleisten. Wir beginnen mit den ersten Zeilen, die in offensichtlicher Weise die Datenstrukturen der Zerlegung bereitstellen, wie sie in `testAllSubmods` (Listing 6.19) bzw. `testSubmod` (Listing 6.18) benötigt werden.

Listing 6.36: Aus ../Sage/enumeratePCNs.spyx

---

```

88 def countCompleteSubmoduleGenerators(F,n, binaryPowers=True, \
89     testPrimitivity=True):
90     TIME = time.time()
91     p = F.characteristic()
92     q = F.order();
93     e = q.log(p)
94     E = F.extension(Integer(n), 'a');
95     P = E.prime_subfield()

```

---

---

```

96     #generate factors
97     polys = []
98     polysCount = []
99     evalToZero = []
100    frobPowers = []
101    notComplBasicDivisors = get_completely_basic_divisors(p,e,n)
102    decomposition = decompose(p,e,n)
103    for decomp in decomposition:
104        k,t,pi = decomp
105        divs = divisors(get_module_character(*decomp))
106        divs = filter(lambda x: x in notComplBasicDivisors, divs)
107        countPolysForThisDecomp = 0
108        for d in divs:
109            G = F.extension(Integer(d), 'c');
110            Gx = PolynomialRing(G,'x');
111            h = Hom(G,E)[0]
112            cycl = Gx.cyclotomic_polynomial(squarefree(k))\
113                    (Gx.gen()**(k*t*pi/squarefree(k)/d))
114            polys += [map(lambda x: x.polynomial().list(),
115                          cycl.map_coefficients(h).list())]
116            frobPowers += [d]
117            evalToZero += [1]
118            countPolysForThisDecomp += 1
119            # add Co-Factors
120            for f,mult in cycl.factor():
121                g = cycl.quo_rem(f)[0]
122                gE = g.map_coefficients(h)
123                polys += [map(lambda x: x.polynomial().list(), gE.list())]
124                frobPowers += [d]
125                evalToZero += [0]
126                countPolysForThisDecomp +=1
127    polysCount += [countPolysForThisDecomp]

```

---

Wie man gut erkennen kann, werden einfache Zerlegungen in den Zeilen 101 und 106 ausgenutzt.

Anschließend berechnen wir, falls `testPrimitivity=True`, die Kofaktoren, wie sie beim Test auf Primitivität in `isPrimitive` (Listing 6.15) verwendet werden. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Faktoren in binärer (ab Zeile 151) oder  $p$ -adischer Form (ab Zeile 156) genutzt werden sollen. Bei  $p$ -adischer Darstellung muss, wie in dem Absatz vor `powerFFElem` (Listing 6.13) erwähnt, die Länge des maximal auftretenden 0-Intervalls berechnet werden (ab Zeile 164).

Listing 6.37: `countCompleteSubmoduleGenerators` Fortsetzung (I)

---

```

128    charac = int(E.characteristic())
129    #mipo
130    mipo = E.modulus().list()
131    m = len(mipo)-1
132
133    #calc prime factors of order
134    barFactors = []
135    primitiveOrder = E.order()-1
136    if testPrimitivity:
137        factors = reversed(factor(primitiveOrder))

```



---

```

138     for r,k in factors:
139         barFactors += [primitiveOrder/r]
140     countBarFactors = len(barFactors)
141     commonBarFactor = gcd(barFactors)
142     commonBiggestBarFactor = max(gcd(barFactors[1:]) / commonBarFactor,1)
143     barFactors = map(lambda b: b/commonBarFactor, barFactors)
144     curF = 0
145     barFactors_tmp = [barFactors[0]]
146     for b in barFactors[1:]:
147         barFactors_tmp += [ b/commonBiggestBarFactor - curF]
148         curF = b/commonBiggestBarFactor
149     barFactors = barFactors_tmp
150
151     if binaryPowers:
152         barFactors = map(lambda b: get_padic_representation(b,2),barFactors)
153         commonBarFactor = get_padic_representation(commonBarFactor,2)
154         commonBiggestBarFactor = \
155             get_padic_representation(commonBiggestBarFactor,2)
156     else:
157         barFactors = map(lambda b: get_padic_representation(b,p),barFactors)
158         commonBarFactor = get_padic_representation(commonBarFactor,p)
159         commonBiggestBarFactor = \
160             get_padic_representation(commonBiggestBarFactor,p)
161     lenCommonBarFactor = len(commonBarFactor)
162     lenCommonBiggestBarFactor = len(commonBiggestBarFactor)
163
164     lenBiggestZeroGap = 0
165     if not binaryPowers:
166         #find biggest gap (i.e. zero-interval)
167         lenCurGap = 0
168         for b in barFactors+[commonBarFactor]+[commonBiggestBarFactor]:
169             i = 0
170             while i < len(b):
171                 lenCurGap = 0
172                 while i<len(b) and b[i] == 0:
173                     lenCurGap+= 1
174                     i += 1
175                 lenBiggestZeroGap = max(lenBiggestZeroGap, lenCurGap)
176                 i += 1
177     else:
178         countBarFactors = 0
179         barFactors = []
180         commonBarFactor = []
181         commonBiggestBarFactor = []
182         lenBiggestZeroGap = 0

```

---

Im letzten Teil der reinen Sage-Aufbereitung, liften wir die Elemente des Grundkörpers mittels eines injektiven Körperhomomorphismus in den Erweiterungskörper, wie sie in `calcSubmoduleElements` (Listing 6.20) bzw. `processLastSubmoduleAndTestPrimitivity` (Listing 6.24) benötigt werden. Ferner stellen wir die Additions- und Multiplikationstabellen nach Unterabschnitt 6.2.2 auf.

---

Listing 6.38: `countCompleteSubmoduleGenerators` Fortsetzung (II)

---

```

183     #generate F elements in E

```

---

```

184     elementsF = []
185     if e == 1:
186         elementsF = map(lambda e: [e], list(F))
187     else:
188         h = Hom(F,E)[0]
189         for e in itertools.product(xrange(p), repeat=e):
190             elementsF += [h( F(list(reversed(e))) ).polynomial().list()]
191
192         #calculate addition and multiplication tables
193     ps = range(p)
194     addTable = ps[P(-2*(p-1)):] + ps*2 + ps[:Integer(P(2*(p-1)))+1]
195     multTable = ps[P(-(p-1)**2):] + ps*(2*(p-2)) + ps[:Integer(P((p-1)**2))+1]

```

---

Nun sind wir bereit alle Daten nach C zu transferieren. Dies ist ein notwendiges Übel, da die interne Repräsentation von Sage-Objekten nicht mit denen in C vereinbar sind. Beispielsweise sind Listen von Ganzzahlen keineswegs Arrays, jedoch existiert gerade für diesen Fall die Möglichkeit die komfortable Syntax von numpy-Arrays zu nutzen, die direkt auf C-Arrays basieren.<sup>2</sup>

Andere Datenstrukturen, wie die selbst erstellten `struct` `FFElems`, müssen händisch übersetzt werden. Da Cython das (etwas merkwürdig wirkende) Mischen von Python und C erlaubt, schieben wir die hierfür erstellten Funktionen der Übersetzung von Python-Listen in die jeweilige C-Datenstruktur kurz ein.

Listing 6.39: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

55 cdef FFElem *pyList2FFElem(element, int m):
56     cdef FFElem *ff = mallocFFElem(<int>m)
57     initPoly(ff.el, m)
58     for i, e in enumerate(element):
59         ff.el[i] = e
60     updateFFElem(ff, m)
61     return ff

```

---

Listing 6.40: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

63 cdef FFElem **pyList2PointFFElem(pyList, int m):
64     lenList = len(pyList)
65     cdef FFElem **ffs = <FFElem**>malloc(lenList*sizeof(FFElem*))
66     for i, e in enumerate(pyList):
67         ffs[i] = pyList2FFElem(e, m)
68     return ffs

```

---

Listing 6.41: Aus `../Sage/enumeratePCNs.spyx`

---

```

70 cdef FFPoly *pyList2FFPoly(listPoly, int m):
71     lenPoly = len(listPoly)
72     cdef FFPoly *poly = <FFPoly*>malloc(sizeof(FFPoly))
73     poly.poly = <FFElem**>malloc(lenPoly*sizeof(FFElem*))
74     poly.lenPoly = lenPoly
75     for i, e in enumerate(listPoly):

```

---

<sup>2</sup>Siehe z.B. [http://www.sagemath.org/doc/numerical\\_sage/numpy.html](http://www.sagemath.org/doc/numerical_sage/numpy.html) für die Benutzung von numpy-Arrays in Sage.

```

76     poly.poly[i] = pyList2FFElem(e,m)
77     return poly

```

Listing 6.42: Aus ../Sage/enumeratePCNs.spyx

```

79 cdef FFPoly **pyList2PointFFPoly(listPolys, int m):
80     countPolys = len(listPolys)
81     cdef FFPoly **polys = <FFPoly**>malloc(countPolys*sizeof(FFPoly*))
82     for i,e in enumerate(listPolys):
83         polys[i] = pyList2FFPoly(e,m)
84     return polys

```

Nun können wir die Beschreibung von `countCompleteSubmoduleGenerators` fortsetzen und erkennen sofort die gerade vorgestellten Funktionen der Übersetzung sowie die Benutzung der `numpy`-Arrays.

Listing 6.43: `countCompleteSubmoduleGenerators` Fortsetzung (III)

```

196  # SETUP C DATA =====
197  maxMatPower = max(map(lambda d: euler_phi(d[0])*d[1]*d[2], decomposition))
198  # multiplication and addition table
199  cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] multTableRawC\
200      = np.array(multTable, dtype=np.int32)
201  cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] addTableRawC\
202      = np.array(addTable, dtype=np.int32)
203  cdef int* multTableC = <int*>multTableRawC.data + <int*>((p-1)**2)
204  cdef int* addTableC = <int*>addTableRawC.data + <int*>(2*(p-1))
205  #setup mipo
206  cdef FFElem *mipoC = pyList2FFElem(mipo,m+1)
207  #setup matrices
208  cdef FFElem **matsC = genFrobMats(mipoC,m,maxMatPower,q,
209      multTableC, addTableC)
210  # mat charac
211  cdef FFElem **matCharacC
212  if binaryPowers:
213      matCharacC = <FFElem**>0
214  else:
215      matCharacC = genFrobMats(mipoC,m,lenBiggestZeroGap+1,
216          p, multTableC, addTableC)
217  #setup polynomials, polyLength, frobPowers, evaltoZero
218  decompCount = int(len(polysCount))
219  #evalToZeroC
220  cdef np.ndarray[char,ndim=1,mode="c",cast=True] evalToZeroC\
221      = np.array(evalToZero, dtype=np.uint8)
222  #frobPowersC
223  cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] frobPowersC\
224      = np.array(frobPowers, dtype=np.int32)
225  #polysCountC
226  cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] polysCountC\
227      = np.array(polysCount, dtype=np.int32)
228  cdef FFPoly **polysC = pyList2PointFFPoly(polys,m)
229  # bar Factors
230  cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] barFactorsC \
231      = np.array(list(itertools.chain(*barFactors)), dtype=np.int32)

```

---

```

232 cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] lenBarFactorsC \
233     = np.array(map(len,barFactors), dtype=np.int32)
234 cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] commonBarFactorC \
235     = np.array(commonBarFactor, dtype=np.int32)
236 cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] commonBiggestBarFactorC \
237     = np.array(commonBiggestBarFactor, dtype=np.int32)
238     # F elements in E
239 cdef FFElem **elementsFC = pyList2PointFFElem(elementsF,m)
240 #=====

```

---

Es gilt anzumerken, dass die Erzeugung der Darstellungsmatrizen des Frobenius in `C` durch die Funktion `genFrobMats` (die in `../Sage/enumeratePCNs.c` zu finden ist und hier nicht näher erläutert wird, da sie weder vom mathematischen Standpunkt her besonders spannend ist, noch besonderes programmiertechnisch besondere Aufmerksamkeit verdient) geschieht, wobei die maximal zu berechnende Matrixpotenz gerade durch den Grad des größten auftretenden Polynoms der Zerlegung gegeben ist. Wir wissen jedoch genau, wie der Grad eines verallgemeinerten Kreisteilungspolynoms zu berechnen ist, wie Zeile 197 erkennen lässt.

In einem letzten Schritt können wir (nun endlich) die bereitgestellte `C`-Funktion `processFiniteField` (Listing 6.25) aufrufen und die Rückgabewerte verwalten. Hier gilt es anzumerken, dass die Anzahl der vollständigen Erzeuger direkt in das Array `genCountsC` geschrieben wird und nicht als expliziter Rückgabewert erkennbar ist.

Listing 6.44: `countCompleteSubmoduleGenerators` Fortsetzung (IV)

---

```

241 #setup return values
242 cdef np.ndarray[int,ndim=1,mode="c"] genCountsC
243 genCountsC = np.zeros(decompCount, dtype=np.int32)
244
245 cdef unsigned long long pcn = \
246     processFiniteField(mipoC, decompCount,
247         polysC,<int*>polysCountC.data,
248         <char*>evalToZeroC.data,
249         matsC,maxMatPower,<int*>frobPowersC.data,
250         <int*>genCountsC.data, m, p, q,
251         <int*>barFactorsC.data, <int*>lenBarFactorsC.data,
252         countBarFactors,
253         <int*>commonBarFactorC.data,lenCommonBarFactor,
254         <int*>commonBiggestBarFactorC.data,lenCommonBiggestBarFactor,
255         matCharacC,elementsFC,
256         multTableC,addTableC)
257
258 genCounts = dict()
259 for i,d in enumerate(decomposition):
260     genCounts[d] = Integer(genCountsC[i])
261
262 # Free all malloced variables at the end =====
263 freeFFElem(mipoC)
264 freeFFElemMatrix(matsC,m*maxMatPower)
265 for i in range(len(polys)):
266     freeFFPoly(polysC[i])
267 free(polysC)
268 freeFFElemMatrix(matCharacC,m*(lenBiggestZeroGap+1))

```

---

```

269     freeFElemMatrix(elementsFC, len(elementsF))
270     #=====
271     return prod(genCounts.values()), Integer(pcn), genCounts, \
272             strfdelta(datetime.timedelta(seconds=(time.time()-TIME)))

```

---

### 6.5.4 | Ein ausführliches Beispiel

Wir wollen nun einmal das gesamte Verfahren zur Berechnung Anzahl der primitiv vollständig normalen Elemente einer Erweiterung endlicher Körper anhand eines Beispiels nachvollziehen. Dazu wählen wir  $F := \mathbb{F}_2$  und  $n := 6$ , also  $E := \mathbb{F}_{2^6}$ . Die Wahl des Minimalpolynoms dieser Erweiterung überlassen wir Sage und erhalten

$$E = \mathbb{F}_2[a] / (a^6 + a^4 + a^3 + a + 1).$$

Gehen wir erneut den Code von `countCompleteSubmoduleGenerators` Zeile für Zeile durch, so beginnen wir mit der Festlegung der grundlegenden Parameter:

$$p := 2, \quad q := 2, \quad e := 1, \quad P := \mathbb{F}_2.$$

**Berechnung der nicht einfachen Teiler** Im nächsten Schritt berechnen wir die nicht einfachen Teiler mithilfe `get_completely_basic_divisors` (Listing 6.31). Dazu gehen wir alle Teiler von  $n = 6$  durch und überprüfen, ob die jeweiligen Erweiterungen einfach sind, d.h. für jeden Teiler  $d \mid n$  testen wir für jeden Primteiler  $r \mid \frac{n}{d}$ , ob  $r \nmid \text{ord}_{(\frac{n}{dr})'}(q^d)$  (vgl. Satz 5.3). Wir brechen jeweils ab, falls ein  $r$  die Teilbarkeitsbedingung nicht erfüllt.

| $d$ | $\frac{n}{d}$ | $r$ | $(\frac{n}{dr})'$ | $\text{ord}_{(\frac{n}{dr})'}(q^d)$ | $r \nmid \text{ord}_{(\frac{n}{dr})'}(q^d)$ |
|-----|---------------|-----|-------------------|-------------------------------------|---|
| 1   | 6             | 2   | 3                 | 2                                   | $\nmid \leadsto$ nicht einfach              |
| 2   | 3             | 3   | 1                 | 1                                   | $\checkmark \leadsto$ einfach               |

Damit sind alle zu betrachtenden Teiler von  $n$  gegeben durch

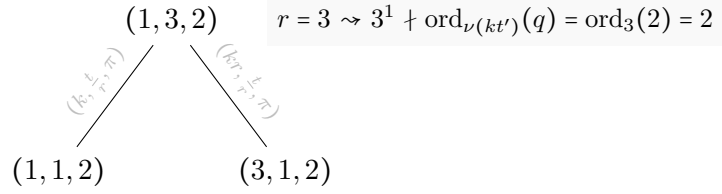
$$\text{notComplBasicDivisors} := [1, 2].$$

Wie man erkennt, wollen wir in diesem Beispiel alle auftretenden Listen in der Python/Sage-üblichen Notation `[ , ...]` angeben.

**Anwendung des Zerlegungssatzes** Anschließend folgt die Berechnung der Zerlegung in Kreisteilungsmoduln durch den Zerlegungssatz. Da wir in der konkreten Implementierung stets drei Parameter für die Angabe von Kreisteilungsmoduln verwenden, d.h. Potenzen der Charakteristik immer „ausklammern“, wollen wir dies auch hier so notieren. Der zu  $x^n - 1 = x^6 - 1$  über  $\mathbb{F}_2$  gehörige Kreisteilungsmodul ist offenbar

$$\mathcal{C}_{1,6} = \mathcal{C}_{1,3,2}$$

und wir erhalten damit das Parametertripel  $(k, t, \pi) := (1, 3, 2)$ . Hier startet der Zerlegungssatz rekursiv und wie in `decompose_cycl_module` (Listing 6.27) erkennbar, durchlaufen wir die Primteiler von  $t$  in der Größe nach absteigend sortierter Reihenfolge.



Da an den beiden Blättern  $t = 1$  gilt, endet hier die Möglichkeit einer weiteren Rekursionsstufe und wir fassen zusammen, dass

$$x^6 - 1 = \Phi_1(x)^2 \Phi_3(x)^2$$

die feinste verträgliche Zerlegung des Kreisteilungsmoduls  $\mathcal{C}_{1,6}$  über  $\mathbb{F}_2$  ist.

**Polynome aufstellen** Nun sind wir in der Lage, die Polynome zu berechnen, die wir für den Test von vermeindlichen vollständigen Erzeugen benötigen werden.

- (1) Wir starten beim ersten erweiterten Kreisteilungspolynom

$$\Phi_{1,1}^2 = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

Es ist nun  $(k, t, pi) := (1, 1, 2)$  und wir müssten alle Teiler des Modulcharakters  $\frac{kt\pi}{\nu(k)} = 2$ , betrachten. Wie man an obig berechnetem `notComplBasicDivisors` erkennt, lässt sich in diesem Fall auch keiner der beiden Teiler  $\{1, 2\}$  streichen. Ein zweiter Kniff schafft aber eine Reduktion der Teilerzahl, da  $(1, 1, 2)$  regulär über  $\mathbb{F}_2$  ist:

$$\text{ord}_{\nu(kt')}(q) = \text{ord}_1(2) = 1.$$

Da auch  $(1, 1, 2)$  nicht ausfallend über  $\mathbb{F}_2$  ist, reicht es den einzigen Teiler zu berechnen, den wir benötigen:

$$\tau(q, k) = \tau(2, 1) = 1,$$

da  $\text{ord}_k(q) = \text{ord}_1(2) = \text{ord}_{\nu(k)}(q)$ .

$d = 1$ . Nun sind alle Kofaktoren einer vollständigen Faktorisierung von  $\Phi_{1,1}(x)^2$  über  $\mathbb{F}_{2^d} = \mathbb{F}_2$  zu berechnen:

$$\Phi_{1,1}(x)^2 = (x + 1)^2$$

und der einzige Kofaktor ist durch

$$g_{1,1,1}(x) = x + 1$$

gegeben.

- (2) Nun zum zweiten Kreisteilungsmodul  $(k, t, \pi) := (3, 1, 2)$ . Der Modulcharakter ist wiederum  $\frac{kt\pi}{\nu(k)} = 2$ . Auch hier können wir mit `notComplBasicDivisors` keinen Teiler wegdiskutieren. Anders als in obigem Fall ist dieser Kreisteilungsmodul nicht einmal regulär, da

$$\text{ord}_{\nu(kt')}(q) = \text{ord}_3(2) = 2$$

nicht teilerfremd zu  $kt = 2$  ist. Also bleiben beide Teiler  $\{1, 2\}$  übrig.

$d = 1$ . Wir faktorisieren

$$\Phi_{3,1}(x)^2 = (x^2 + x + 1)^2 \in \mathbb{F}_2[x]$$

und erhalten als einzigen Kofaktor dieses Teilers

$$g_{2,1,1}(x) = x^2 + x + 1.$$

$d = 2$ . Blicken wir noch einmal in die Definition eines vollständigen Erzeugers (Definition 5.6), so sehen wir, dass wir nun  $\mathcal{C}_{3,1,2}$  als  $\mathbb{F}_{2^2}[x]$ -Modul betrachten müssen. Orientiert man sich an der Definition eines verallgemeinerten Kreisteilungsmoduls (Definition 5.5), so sind wir gezwungen  $\Phi_3(x^{\frac{2}{2}})$  über  $\mathbb{F}_{2^2}$  zu faktorisieren. Dazu überlassen wir wiederum **Sage** die Repräsentation des endlichen Körpers

$$\mathbb{F}_{2^2} = \mathbb{F}_2[b]/(b^2 + b + 1)$$

und faktorisieren

$$\Phi_{3,1}(x) = (x + b)(x + b + 1).$$

Ergo erhalten wir die beiden Kofaktoren in  $\mathbb{F}_{2^2}[x]$ :

$$g_{2,2,1}(x) := x + b + 1,$$

$$g_{2,2,2}(x) := x + b.$$

Wie aber in der Beschreibung der Implementierung erwähnt, bietet es sich an, diese Polynome mittels eines injektiven Körperhomomorphismus in  $E = \mathbb{F}_{2^6}$  zu lesen. Auch die Berechnung eines solchen überlassen wir **Sage** und wählen

$$h: \mathbb{F}_2[b]/(b^2 + b + 1) \rightarrow \mathbb{F}_2[a]/(a^6 + a^4 + a^3 + a + 1),$$

$$b \mapsto a^2 + a^2 + a.$$

Damit schreiben wir obige Kofaktoren zu

$$g_{2,2,1}(x) := x + a^3 + a^2 + a + 1,$$

$$g_{2,2,2}(x) := x + a^3 + a^2 + a$$

um, gelesen als Elemente von  $(\mathbb{F}_2[a]/(a^6 + a^4 + a^3 + a + 1))[x]$ .

Als letzten Schritt des Aufstellens der Polynome fassen wir alle Ergebnisse zusammen und erinnern uns an die Implementierung, wo neben den Polynomen auch die Information, welche Polynome bei Vorliegen eines vollständigen Erzeugers in der Frobenius-Auswertung zu Null ausgewertet werden müssen, und die Angabe der Frobenius-Potenzen benötigt werden. Da alle Polynome in *eine einzige* Liste geschrieben werden, muss man selbstredend die Anzahl der Polynome des jeweiligen Kreisteilungsmoduls abspeichern. Zusammengefasst erhalten wir folgende Daten:

$$\begin{array}{lllllll} \text{polys} := & [x^2 + 1, & x + 1, & x^4 + x^2 + 1, & x^2 + x + 1, & x + a^3 + a^2 + a + 1, & x + a^3 + a^2 + a] \\ \text{evalToZero} := & [1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0] \\ \text{frobPowers} := & [1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 2] \\ \text{polysCount} := & [2, & & 4 & & & ] \end{array}$$

Wie man sicherlich bemerkt, führen wir das den zweiten Kreisteilungsmodul definierende Polynom  $\Phi_{3,2}$  lediglich für den Teiler  $d = 1$  auf. Für den Teiler  $d = 2$  hätten wir  $\Phi_{3,1}$  jedoch mit Frobenius-Potenz 2. Da ein Element  $u \in E$  jedoch genau dann  $\Phi_{3,2}(\sigma)(u) = 0$  erfüllt, wenn  $\Phi_{3,1}(\sigma^2)(u) = 0$ , ist dieser Berechnungsschritt obsolet.

**Daten für einen Primitivitätstest** Für den in Listing 6.15 beschriebenen Primitivitätstest, müssen wir zunächst  $q^n - 1 = 2^6 - 1$  faktorisieren:

$$2^6 - 1 = 3^2 \cdot 7.$$

Also sind die zu testenden Kofaktoren gerade 9 und 21. Wir erkennen sofort, dass der größte gemeinsame Teiler beider Faktoren 3 ist und setzen daher in Benennung von `isPrimitive` (Listing 6.15)

```
commonBarFactor := 3.
```

Ergo reduzieren sich die Kofaktoren auf 3 und 7. Im nächsten Schritt betrachten wir nur noch alle Kofaktoren, die den größten Primfaktor obiger Faktorisierung enthalten. Hier ist dies nur einer: 7. Wieder berechnen wir den ggT all dieser: 7. Damit haben wir alle restlichen Daten:

```
commonBiggestBarFactor := 7
barFactors := [3, 1]
```

Benutzen wir binäre Exponentiation so übersetzen wir die erhaltenen Zahlen ins Binärsystem:

```
commonBarFactor := [1, 1]
commonBiggestBarFactor := [1, 1, 1]
barFactors := [[1, 1, 1], [1]]
```

In diesem Fall wären die Zahlen in  $p$ -adischer Schreibweise identisch, da ja  $p = 2$ .

**Aufstellen der Frobenius-Matrizen** Um den Frobenius von  $F$ , also  $\bar{F} \rightarrow \bar{F}, x \mapsto x^2$ , effizient auf Elemente aus  $E$  anwenden zu können, müssen wir seine Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis

$$\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\} \subseteq \mathbb{F}_2[a]/(a^6 + a^4 + a^3 + a + 1)$$

berechnen. Dazu fassen wir selbstredend die Elemente aus  $E$  als Vektoren in  $\mathbb{F}_2^6$  auf:

$$\begin{array}{lll} 1^2 = 1 & \cong & [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ a^2 = a^2 & \cong & [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ (a^2)^2 = a^4 & \cong & [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ (a^3)^2 = a^4 + a^3 + a + 1 & \cong & [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T \\ (a^4)^2 = a^5 + a^4 + a^2 + a + 1 & \cong & [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T \\ (a^5)^2 = a^5 + a^4 + 1 & \cong & [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T \end{array}$$

Damit erhalten wir eine Darstellungsmatrix des Frobenius:

$$\Gamma_\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wie man an den obigen Polynomen in `polys` erkennen kann, ist die maximale Potenz des Frobenius gerade 4. Daher bleibt noch  $\Gamma_\sigma^2$ ,  $\Gamma_\sigma^3$  und  $\Gamma_\sigma^4$  zu berechnen:



$$\Gamma_{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\sigma}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\sigma}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man in der Implementierung erkennen kann übergeben wir die Frobenius-Matrizen stets als `FFElem **mats`, d.h. man sollte sich obige vier Matrizen eher als eine  $(24 \times 6)$ -Matrix vorstellen, deren Zeilen jeweils aus einem `FFElem` bestehen (vgl. Abschnitt 6.2). Unter dieser Analogie ist dies gerade das Ergebnis der Funktion `genFrobMats`.

**Iteration von  $E$  auf der Suche nach vollständigen Erzeugern** Wie in der Beschreibung von `processFiniteField` (Listing 6.25) angegeben, starten wir die Suche nach vollständig normalen und primitiven Elementen bei einer Iteration des endlichen Körpers  $E$ , bis wir für jeden Kreisteilungsmodul der Zerlegung einen vollständigen Erzeuger gefunden haben. Die konkrete Iteration erfolgt dabei lexikographisch in  $\mathbb{F}_2^6$ , wobei wir der besseren Lesbarkeit geschuldet zwischen den verschiedenen Schreibweisen von Vektoren in  $\mathbb{F}_2^6$  und Polynomen in  $\mathbb{F}_2[a]/(a^6 + a^4 + a^3 + a + 1)$  ohne besondere Kennzeichnung wechseln werden.

$u := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Hier gibt es nichts zu tun.

$u := [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Wir blicken auf `polys` und berechnen

$$(x^2 + 1)(\sigma)(1) = 0 \checkmark, \quad (x + 1)(\sigma)(1) = 0 \nmid.$$

Also ist 1 kein Erzeuger von  $\mathcal{C}_{1,1,2}$  über  $\mathbb{F}_2$ . Beim zweiten Kreisteilungsmodul scheitern wir bereits beim ersten Polynom:

$$(x^4 + x + 1)(\sigma)(1) = 1 \nmid.$$

... Hier sind weitere Elemente zu denken, die ebenfalls keine vollständigen Erzeuger liefern.

$u := [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Dieses Element liefert einen vollständigen Erzeuger des zweiten Kreisteilungsmoduls:

$$\begin{aligned} (x^4 + x^2 + 1)(\sigma)(u) &= 0, & (x^2 + x + 1)(\sigma)(u) &= a^5 + a^4 + a^2 + 1, \\ (x + a^3 + a^2 + a^1)(\sigma^2)(u) &= a^5 + a^4 + a^3 + a, & (x + a^3 + a^2 + a)(\sigma^2)(u) &= a^5 + a^4. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Frobenius ist dabei jeweils durch obige Matrizen zu denken.

...

$u := [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$ . Hier haben wir einen vollständigen Erzeuger des ersten Kreisteilungsmoduls, wie nachstehende Rechnung zeigt.

$$(x^2 + 1)(\sigma)(u) = 0, \quad (x + 1)(\sigma)(u) = 1.$$

Die berechneten vollständigen Erzeuger speichern wir in einem Array aus verketteten Listen (vgl. 6.5.1). Die verketteten Listen sowie das Array wollen wir hier jedoch wieder in `Python`-üblicher Notation angeben. Bisher haben wir also für jeden Kreisteilungsmodul einen Erzeuger gefunden:

$$\text{roots} = \left[ [a^3 + a^2 + a], [a^2 + a] \right]$$

Die Benennung `roots` ist hier konsistent mit `processFiniteField` (Listing 6.25) gewählt. Jedoch sind die Elemente der Listen natürlich wieder als `FFElem` zu denken.

**Enumeration der einzelnen Kreisteilungsmoduln** An diesem Punkt haben wir für jeden Kreisteilungsmodul einen Erzeuger gefunden und können anhand diesem den jeweiligen Modul vollständig enumerieren.

$\Phi_{1,1}^2$ . Sei  $u := a^3 + a^2 + a$  unser gefundener Erzeuger, so können wir nach Lemma 6.32 den Modul durch Polynome über  $F$ , deren Grad kleiner 2 ist, enumerieren:

$$\mathcal{C}_{1,1,2} = \{f(\sigma)(u) : f \in F[x]_{<2}, \text{ggT}(f, \Phi_{1,1}^2) = 1\}.$$

Wie im Absatz nach Lemma 6.32 erwähnt, führen wir die Berechnung des `ggT` nicht durch, sondern testen jedes Element auf vollständige Erzeuger-Eigenschaft für diesen Modul.

| $f(x)$  | $f(\sigma)(u)$      | vollst. Erz. |
|---------|---------------------|--------------|
| 1       | $a^3 + a^2 + a$     | ✓            |
| $x$     | $a^3 + a^2 + a + 1$ | ✓            |
| $x + 1$ | 1                   | ✗            |

$\Phi_{3,1}^2$ . Sei in diesem Fall  $u := a^2 + a$  der gefundene Erzeuger, so müssen wir Polynome bis zum Grad 3 über  $F$  betrachten:

| $f(x)$              | $f(\sigma)(u)$        | vollst. Erz. |
|---------------------|-----------------------|--------------|
| 1                   | $a^2 + a$             | ✓            |
| $x$                 | $a^4 + a^2$           | ✓            |
| $x + 1$             | $a^4 + a$             | ✗            |
| $x^2$               | $a^5 + a^2 + a + 1$   | ✓            |
| $x^2 + 1$           | $a^5 + 1$             | ✓            |
| $x^2 + x$           | $a^5 + a^4 + a + 1$   | ✗            |
| $x^2 + x + 1$       | $a^5 + a^4 + a^2 + 1$ | ✗            |
| $x^3$               | $a^5 + a^2$           | ✓            |
| $x^3 + 1$           | $a^5 + a$             | ✗            |
| $x^3 + x$           | $a^5 + a^4$           | ✓            |
| $x^3 + x + 1$       | $a^5 + a^4 + a^2 + a$ | ✗            |
| $x^3 + x^2$         | $a + 1$               | ✗            |
| $x^3 + x^2 + 1$     | $a^2 + 1$             | ✗            |
| $x^3 + x^2 + x$     | $a^4 + a^2 + a + 1$   | ✗            |
| $x^3 + x^2 + x + 1$ | $a^4 + 1$             | ✗            |

In der konkreten Implementierung speichern wir diese Ergebnisse nicht ab, sondern erzeugen die weiteren Erzeuger des letzten Kreisteilungsmoduls dynamisch (vgl. Unterabschnitt 6.5.2), was wir hier zur besseren Übersichtlichkeit nicht tun wollen.

Nun können wir die aktualisierte Liste `roots` angeben:

$$\text{roots} = \left[ [a^3 + a^2 + a, a^3 + a^2 + a + 1], [a^2 + a, a^4 + a^2, a^5 + a^2 + a + 1, a^5 + 1, a^5 + a^2, a^5 + a^4] \right]$$

An dieser Stelle können wir bereits festhalten, dass in der Erweiterung von Grad 6 über  $\mathbb{F}_2$  genau  $6 \cdot 2 = 12$  vollständig normale Elemente existieren.

**Primitivitätstest** Für einen Primitivitätstest müssen wir die 12 vollständig normalen Elemente natürlich erst einmal „zusammenbauen“. Dazu durchlaufen wir das kartesische Produkt aus den Listen in `roots` und bilden jeweils die Summe der einzelnen Elemente (vgl. Definition 5.8).

$(a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a)$ . Wie in der Beschreibung zu `isPrimitive` (Listing 6.15) erläutert, berechnen wir zunächst  $v^{\text{commonBarFactor}} = v^3$ , wobei  $v := a^3 + a^2 + a + a^2 + a = a^3$  das zu testende Element ist. Dies führen wir mittels binärer Exponentiation durch, wie in `powerFFElemSqM` (Listing 6.14) beschrieben, geben hier jedoch nur das Ergebnis an. Es ist

$$v^3 = a^5 + a^4 + a^2 + 1 =: w.$$

Da  $w \neq 1$  müssen wir fortfahren mit dem ersten Faktor aus `barFactors`:

$$w^3 = a^5 + a^4 + a^2.$$

Auch dies ist ungleich 1, also fahren wir fort mit  $w^{\text{commonBiggestBarFactor}}$  wie in `isPrimitive` (Listing 6.15) angegeben:

$$w^7 = 1.$$

An dieser Stelle können wir abbrechen und wissen, dass  $v$  kein primitives Element ist.

$(a^3 + a^2 + a + 1) + (a^2 + a)$ . Auch hier beginnen wir mit  $v := a^3 + a^2 + a + 1 + a^2 + a = a^3 + 1$  und berechnen

$$v^3 = a^5 + a^2 + a + 1 =: w.$$

Wieder ist  $w \neq 1$  und wir fahren fort mit dem ersten `barFactor`.

$$w^3 = a^4 + a^2 + a.$$

Für den Exponenten `biggestCommonBarFactor` = 7 erhalten wir:

$$w^7 = a^3 + a^2 + a =: z.$$

Diesen müssen wir nun mit allen verbleibenden `barFactors` potenzieren. In unserem Fall lediglich einer:

$$z^1 = a^3 + a^2 + a$$

und somit ist  $v$  ein primitives Element in  $E$ .

Für alle weiteren Elemente wollen wir nur das Ergebnis der Primitivitätstests in tabellarischer Form angeben.

| Gen von $\mathcal{C}_{1,1,2}$ | Gen von $\mathcal{C}_{3,1,2}$ | Element                         | primitiv |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|----------|
| $a^3 + a^2 + a$               | $a^4 + a^2$                   | $a^4 + a^3 + a$                 | ✓        |
| $a^3 + a^2 + a + 1$           | $a^4 + a^2$                   | $a^4 + a^3 + a + 1$             | ✗        |
| $a^3 + a^2 + a$               | $a^5 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + a^3 + 1$                 | ✗        |
| $a^3 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + a^3$                     | ✓        |
| $a^3 + a^2 + a$               | $a^5 + 1$                     | $a^5 + a^3 + a^2 + a + 1$       | ✗        |
| $a^3 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + 1$                     | $a^5 + a^3 + a^2 + a$           | ✓        |
| $a^3 + a^2 + a$               | $a^5 + a^2$                   | $a^5 + a^3 + a$                 | ✓        |
| $a^3 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + a^2$                   | $a^5 + a^3 + a + 1$             | ✗        |
| $a^3 + a^2 + a$               | $a^5 + a^4$                   | $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a$     | ✓        |
| $a^3 + a^2 + a + 1$           | $a^5 + a^4$                   | $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ | ✗        |

Zusammenfassend existieren also 6 primitiv vollständig normale Elemente in der Erweiterung von Grad 6 über  $\mathbb{F}_2$ .

## 6.6 | Auswertung der Ergebnisse

Alle berechneten Ergebnisse werden in Tabellen im Anhang bereitgestellt. Wie man erkennen kann, konnten wir alle Werte von Morgan und Mullen aus [14] reproduzieren. Darüber hinaus konnten wir die konkreten Anzahlen der Erzeuger der jeweiligen nicht weiter zerlegbaren Kreisteilungsmoduln bestimmen (vgl. Tabellen), was gerade aus theoretischer Sicht ein interessantes Resultat ist, da diese Zahlen möglicherweise auf der Suche nach einer allgemeinen Formel für die vollständigen Erzeuger eines Kreisteilungsmoduls helfen können (Wir erinnern uns, dass Satz 6.19 lediglich für reguläre Kreisteilungsmoduln gilt). Zuletzt sei erwähnt, dass die obig vorgestellte Implementierung nur eine unwesentliche Menge an Arbeitsspeicher erfordert, wodurch weitere Ergebnisse problemlos produziert werden könnten, wenn man Rechenzeiten von über einer Woche pro Körpererweiterung in Kauf nimmt. Die längste hier in Kauf genommene Rechenzeit lag für  $(q, n) = (243, 4)$  bei 98 Stunden und 4 Minuten.

## Literaturverzeichnis

- [1] I. F. Blake, S. Gao und R. C. Mullin. Specific irreducible polynomials with linearly independent roots over finite fields. *Linear algebra and its applications*, **253**,(1–3): 227–249, 1997.
- [2] D. Bessenohl und K. Johnsen. Eine verschärfung des satzes von der normalbasis. *Journal of algebra*, **103**,(1): 141–159, 1986.
- [3] S. Bosch. *Algebra*. Der Reihe *Springer-Lehrbuch*. Springer, 2009.
- [4] S. Gao und G. Mullen. Dickson polynomials and irreducible polynomials over finite fields. *Journal of number theory*, **49**, 118–132, 1994.
- [5] D. Hachenberger. *Finite fields: normal bases and completely free elements*. Der Reihe *Developments in Molecular and Cellular Biochemistry*. Kluwer Academic Publishers, 1997. URL: <http://books.google.de/books?id=Fv7uAAAAAAAJ>.
- [6] D. Hachenberger. Asymptotic existence results for primitive completely normal elements in galois field extensions, 2015.
- [7] D. Hachenberger. Primitive complete normal bases: existence in certain 2-power extensions and lower bounds. *Discrete mathematics*, **310**,(22): 3246–3250, 2010. Combinatorics 2008.
- [8] D. Hachenberger. Primitive complete normal bases for regular extensions. *Glasgow mathematical journal*, **43**, 383–398, 03, Mai 2001.
- [9] B. Hartley und T. Hawkes. *Rings, modules and linear algebra*. Der Reihe *Chapman and Hall mathematics series*. Chapman und Hall Limited, 1974.
- [10] C. Karpfinger und K. Meyberg. *Algebra gruppen - ringe - korper*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 2010.
- [11] S. Lang. *Algebra*. Der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 2002. URL: <http://books.google.de/books?id=Fge-BwqhQIYC>.
- [12] H. W. Lenstra, Jr. und R. J. Schoof. Primitive normal bases for finite fields. *Mathematics of computation*, **48**,(177): 217–231, Januar 1987.
- [13] R. Lidl und H. Niederreiter. *Finite fields*. (Bd. 20, Teil 1) der Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1997. URL: <http://books.google.de/books?id=xqMqxQTFUkMC>.
- [14] I. Morgan und G. Mullen. Completely normal primitive basis generators of finite fields. *Utilitas mathematica*, (49): 21–43, 1996.
- [15] G. Mullen und D. Panario. *Handbook of finite fields*. Der Reihe *Discrete Mathematics and Its Applications*. Taylor & Francis, 2013. URL: <http://books.google.de/books?id=CfBBYgEACAAJ>.

- [16] *Neues buch.*
- [17] A. Scheerhorn. Applications of finite fields. In D. Gollmann, Herausgeber, teil Dickson Polynomials and Completely Normal Elements over Finite Fields, Seiten 47–55. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1996.
- [18] A. Scheerhorn. Dickson polynomials, completely normal polynomials and the cyclic module structure of specific extensions of finite fields. *Des. codes cryptography*, **9**,(2): 193–202, 1996.
- [19] I. A. Semaev. Construction of polynomials irreducible over a finite field with linearly independent roots. *Mathematics of the ussr-sbornik*, **63**,(2): 507, 1989.
- [20] Z. Wan. *Lectures on finite fields and galois rings*. World Scientific, 2003.

## Anhang A

### Tabellen

Im Folgenden stellen wir die mit Hilfe der vorgestellten Algorithmen berechneten Werte vor. Dabei ist folgende Legende zu beachten:

$q, p, r$  sind die Daten des betrachteten Grundkörpers  $\mathbb{F}_q$ , wobei  $q = p^r$  gilt.

$\mathcal{N}(q, n)$  gibt die Anzahl der normalen Elemente der Erweiterung von Grad  $n$  über  $\mathbb{F}_q$  an.

$\mathcal{CN}(q, n)$  gibt die Anzahl der vollständig normalen Elemente der Erweiterung von Grad  $n$  über  $\mathbb{F}_q$  an.

$\mathcal{PCN}(q, n)$  gibt die Anzahl der primitiv vollständig normalen Elemente der Erweiterung von Grad  $n$  über  $\mathbb{F}_q$  an.

$\mathcal{PN}(q, n)$  gibt die Anzahl der primitiv normalen Elemente der Erweiterung von Grad  $n$  über  $\mathbb{F}_q$  an.

vollst. Erzeuger. Hier ist die Anzahl der vollständigen Erzeuger der Zerlegung nach Satz 5.9 gegeben, wobei ein Datum  $(k, t, \pi) : N$  bedeutet, dass für den Kreisteilungsmodul  $\mathcal{C}_{k,t,\pi}$  gerade  $N$  vollständige Erzeuger in  $\mathbb{F}_q$  existieren.

$(.)^*$  gibt bei Vorhandensein in der Spalte  $\mathcal{CN}(q, n)$  an, ob die aktuelle Körpererweiterung einfach (Definition 5.2) ist. Falls ja, so gilt per definitionem  $\mathcal{CN}(q, n) = \mathcal{N}(q, n)$  und  $\mathcal{PCN}(q, n) = \mathcal{PN}(q, n)$ . Daher sind in den Tabellen mit (primitiv) normalen Elementen lediglich diejenigen Erweiterungen gelistet, die nicht einfach sind.

$(.)^\dagger$  gibt bei Vorhandensein hinter einem Erzeuger-Datum an, ob dieser regulär ist (Definition 5.10).

Tabelle A.1: Enumerationen  $p = 2$

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 2   | 2   | 1   | 2   | $2^*$                | 2                     | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2  |
| 2   | 2   | 1   | 3   | $3^*$                | 3                     | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3                           |
| 2   | 2   | 1   | 4   | $8^*$                | 4                     | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 8  |
| 2   | 2   | 1   | 5   | $15^*$               | 15                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(5, 1, 1)^\dagger$ : 15                          |
| 2   | 2   | 1   | 6   | 12                   | 6                     | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(3, 1, 2)^\dagger$ : 6                           |
| 2   | 2   | 1   | 7   | $49^*$               | 49                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(7, 1, 1)^\dagger$ : 49                          |
| 2   | 2   | 1   | 8   | $128^*$              | 56                    | $(1, 1, 8)^\dagger$ : 128  |
| 2   | 2   | 1   | 9   | $189^*$              | 171                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3, $(9, 1, 1)^\dagger$ : 63 |

Tabelle A.1: Enumerationen  $p = 2$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $CN(q, n)$ | $PCN(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|------------|-------------|---|
| 2   | 2   | 1   | 10  | 420        | 250         | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(5, 1, 2)$ : 210  |
| 2   | 2   | 1   | 11  | 1023*      | 957         | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(11, 1, 1)^{\dagger}$ : 1023  |
| 2   | 2   | 1   | 12  | 768        | 360         | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 8, $(3, 1, 4)$ : 96   |
| 2   | 2   | 1   | 13  | 4095*      | 4095        | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(13, 1, 1)^{\dagger}$ : 4095  |
| 2   | 2   | 1   | 14  | 6272*      | 4074        | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(7, 1, 2)^{\dagger}$ : 3136   |
| 2   | 2   | 1   | 15  | 10125*     | 8430        | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(5, 1, 1)^{\dagger}$ : 15, $(15, 1, 1)^{\dagger}$ : 225    |
| 2   | 2   | 1   | 16  | 32768*     | 16272       | $(1, 1, 16)^{\dagger}$ : 32768  |
| 2   | 2   | 1   | 17  | 65025*     | 65025       | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(17, 1, 1)^{\dagger}$ : 65025   |
| 2   | 2   | 1   | 18  | 46872      | 24948       | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(3, 1, 2)$ : 6, $(9, 1, 2)$ : 3906  |
| 2   | 2   | 1   | 19  | 262143*    | 262143      | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(19, 1, 1)^{\dagger}$ : 262143  |
| 2   | 2   | 1   | 20  | 329280     | 150320      | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 8, $(5, 1, 4)$ : 41160  |
| 2   | 2   | 1   | 21  | 259308     | 220374      | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(7, 3, 1)$ : 86436   |
| 2   | 2   | 1   | 22  | 2091012    | 1317250     | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(11, 1, 2)$ : 1045506   |
| 2   | 2   | 1   | 23  | 4190209*   | 4099957     | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(23, 1, 1)^{\dagger}$ : 4190209   |
| 2   | 2   | 1   | 24  | 3145728    | 1246752     | $(1, 1, 8)^{\dagger}$ : 128, $(3, 1, 8)$ : 24576  |
| 2   | 2   | 1   | 25  | 15728625*  | 15188050    | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(5, 1, 1)^{\dagger}$ : 15, $(25, 1, 1)^{\dagger}$ : 1048575                           |
| 2   | 2   | 1   | 26  | 33529860   | 22345232    | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(13, 1, 2)$ : 16764930  |
| 2   | 2   | 1   | 27  | 47258883   | 39950874    | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(9, 1, 1)^{\dagger}$ : 63, $(27, 1, 1)^{\dagger}$ : 250047 |
| 2   | 2   | 1   | 28  | 102760448* | 50821260    | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 8, $(7, 1, 4)^{\dagger}$ : 12845056   |
| 2   | 2   | 1   | 29  | 268435455* | 266908663   | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(29, 1, 1)^{\dagger}$ : 268435455   |
| 2   | 2   | 1   | 30  | 111132000  | 55308540    | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 2, $(3, 1, 2)$ : 6, $(5, 1, 2)$ : 210, $(15, 1, 2)$ : 44100                               |
| 2   | 2   | 1   | 31  | 887503681* | 887503681   | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 1, $(31, 1, 1)^{\dagger}$ : 887503681   |
| 4   | 2   | 2   | 2   | 12*        | 8           | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 12  |
| 4   | 2   | 2   | 3   | 27*        | 18          | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 9  |
| 4   | 2   | 2   | 4   | 192*       | 96          | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 192   |
| 4   | 2   | 2   | 5   | 675*       | 400         | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(5, 1, 1)^{\dagger}$ : 225  |
| 4   | 2   | 2   | 6   | 1728*      | 792         | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 12, $(3, 1, 2)^{\dagger}$ : 144   |
| 4   | 2   | 2   | 7   | 11907*     | 7784        | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(7, 1, 1)^{\dagger}$ : 3969   |
| 4   | 2   | 2   | 8   | 49152*     | 24448       | $(1, 1, 8)^{\dagger}$ : 49152   |
| 4   | 2   | 2   | 9   | 107163*    | 57186       | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 9, $(9, 1, 1)^{\dagger}$ : 3969                                |
| 4   | 2   | 2   | 10  | 529200     | 241400      | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 12, $(5, 1, 2)$ : 44100   |
| 4   | 2   | 2   | 11  | 3139587*   | 1978020     | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(11, 1, 1)^{\dagger}$ : 1046529   |
| 4   | 2   | 2   | 12  | 7077888*   | 2803392     | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 192, $(3, 1, 4)^{\dagger}$ : 36864  |
| 4   | 2   | 2   | 13  | 50307075*  | 33525908    | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 3, $(13, 1, 1)^{\dagger}$ : 16769025  |
| 4   | 2   | 2   | 14  | 195084288* | 96481224    | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 12, $(7, 1, 2)^{\dagger}$ : 16257024  |
| 8   | 2   | 3   | 2   | 56*        | 36          | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 56  |
| 8   | 2   | 3   | 3   | 441*       | 378         | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 7, $(3, 1, 1)^{\dagger}$ : 63   |
| 8   | 2   | 3   | 4   | 3584*      | 1512        | $(1, 1, 4)^{\dagger}$ : 3584  |
| 8   | 2   | 3   | 5   | 28665*     | 23760       | $(1, 1, 1)^{\dagger}$ : 7, $(5, 1, 1)^{\dagger}$ : 4095   |
| 8   | 2   | 3   | 6   | 218736     | 117288      | $(1, 1, 2)^{\dagger}$ : 56, $(3, 1, 2)$ : 3906  |



Tabelle A.1: Enumerationen  $p = 2$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|---|
| 8   | 2   | 3   | 7   | 823543*              | 698544                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 7, $(7, 1, 1)^\dagger$ : 117649                           |
| 8   | 2   | 3   | 8   | 14680064*            | 5804640               | $(1, 1, 8)^\dagger$ : 14680064  |
| 8   | 2   | 3   | 9   | 110270727*           | 93223872              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 7, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 63, $(9, 1, 1)^\dagger$ : 250047 |

Tabelle A.2: Enumerationen  $p = 2$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{N}(q, n)$ | $\mathcal{PN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|---------------------|----------------------|---|
| 2   | 2   | 1   | 6   | 24                  | 18                   | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(3, 1, 2)$ : 12   |
| 2   | 2   | 1   | 10  | 480                 | 290                  | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(5, 1, 2)$ : 240  |
| 2   | 2   | 1   | 12  | 1536                | 624                  | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 8, $(3, 1, 4)$ : 192  |
| 2   | 2   | 1   | 18  | 96768               | 51660                | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(3, 1, 2)$ : 12, $(9, 1, 2)$ : 4032   |
| 2   | 2   | 1   | 20  | 491520              | 225100               | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 8, $(5, 1, 4)$ : 61440  |
| 2   | 2   | 1   | 21  | 583443              | 495159               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3, $(7, 3, 1)$ : 194481                                    |
| 2   | 2   | 1   | 22  | 2095104             | 1319692              | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(11, 1, 2)$ : 1047552   |
| 2   | 2   | 1   | 24  | 6291456             | 2488320              | $(1, 1, 8)^\dagger$ : 128, $(3, 1, 8)$ : 49152  |
| 2   | 2   | 1   | 26  | 33546240            | 22356074             | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(13, 1, 2)$ : 16773120  |
| 2   | 2   | 1   | 27  | 49545027            | 41883129             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3, $(9, 1, 1)^\dagger$ : 63, $(27, 1, 1)^\dagger$ : 262143 |

Tabelle A.3: Enumerationen  $p = 3$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 3   | 3   | 1   | 2   | 4*                   | 4                     | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2   |
| 3   | 3   | 1   | 3   | 18*                  | 9                     | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18   |
| 3   | 3   | 1   | 4   | 32*                  | 16                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 8  |
| 3   | 3   | 1   | 5   | 160*                 | 75                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(5, 1, 1)^\dagger$ : 80  |
| 3   | 3   | 1   | 6   | 324*                 | 144                   | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18, $(2, 1, 3)^\dagger$ : 18   |
| 3   | 3   | 1   | 7   | 1456*                | 728                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(7, 1, 1)^\dagger$ : 728   |
| 3   | 3   | 1   | 8   | 1536                 | 576                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 8, $(8, 1, 1)^\dagger$ : 48                              |
| 3   | 3   | 1   | 9   | 13122*               | 6075                  | $(1, 1, 9)^\dagger$ : 13122  |
| 3   | 3   | 1   | 10  | 24960                | 11160                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(5, 2, 1)$ : 6240   |
| 3   | 3   | 1   | 11  | 117128*              | 55979                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(11, 1, 1)^\dagger$ : 58564  |
| 3   | 3   | 1   | 12  | 209952*              | 65424                 | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18, $(2, 1, 3)^\dagger$ : 18, $(4, 1, 3)^\dagger$ : 648  |
| 3   | 3   | 1   | 13  | 913952*              | 456976                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(13, 1, 1)^\dagger$ : 456976   |
| 3   | 3   | 1   | 14  | 2114112              | 1054368               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(7, 2, 1)$ : 528528   |
| 3   | 3   | 1   | 15  | 9447840*             | 3962700               | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18, $(5, 1, 3)^\dagger$ : 524880   |
| 3   | 3   | 1   | 16  | 6291456              | 2289984               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 8, $(8, 1, 1)^\dagger$ : 48, $(16, 1, 1)^\dagger$ : 4096 |
| 3   | 3   | 1   | 17  | 86093440*            | 43022053              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(17, 1, 1)^\dagger$ : 43046720   |
| 3   | 3   | 1   | 18  | 172186884*           | 62696736              | $(1, 1, 9)^\dagger$ : 13122, $(2, 1, 9)^\dagger$ : 13122   |
| 3   | 3   | 1   | 19  | 774840976*           | 387177364             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(19, 1, 1)^\dagger$ : 387420488  |
| 3   | 3   | 1   | 20  | 1184481280           | 423266160             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 8, $(5, 4, 1)$ : 37015040                                |

|   |   |   |   |            |           |  |
|---|---|---|---|------------|-----------|--|
| 9 | 3 | 2 | 2 | 64*        | 32        | $(1,1,1)^\dagger: 8, (2,1,1)^\dagger: 8$   |
| 9 | 3 | 2 | 3 | 648*       | 264       | $(1,1,3)^\dagger: 648$   |
| 9 | 3 | 2 | 4 | 4096*      | 1536      | $(1,1,1)^\dagger: 8, (2,1,1)^\dagger: 8, (4,1,1)^\dagger: 64$                        |
| 9 | 3 | 2 | 5 | 51200*     | 23000     | $(1,1,1)^\dagger: 8, (5,1,1)^\dagger: 6400$  |
| 9 | 3 | 2 | 6 | 419904*    | 130848    | $(1,1,3)^\dagger: 648, (2,1,3)^\dagger: 648$   |
| 9 | 3 | 2 | 7 | 4239872*   | 2115008   | $(1,1,1)^\dagger: 8, (7,1,1)^\dagger: 529984$  |
| 9 | 3 | 2 | 8 | 16777216*  | 6117376   | $(1,1,1)^\dagger: 8, (2,1,1)^\dagger: 8, (4,1,1)^\dagger: 64, (8,1,1)^\dagger: 4096$ |
| 9 | 3 | 2 | 9 | 344373768* | 125421768 | $(1,1,9)^\dagger: 344373768$   |

Tabelle A.4: Enumerationen  $p = 3$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{N}(q, n)$ | $\mathcal{PN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|---------------------|----------------------|---|
| 3   | 3   | 1   | 8   | 2048                | 832                  | $(1,1,1)^\dagger: 2, (2,1,1)^\dagger: 2, (4,1,1)^\dagger: 8, (8,1,1)^\dagger: 64$                         |
| 3   | 3   | 1   | 10  | 25600               | 11520                | $(1,1,1)^\dagger: 2, (2,1,1)^\dagger: 2, (5,2,1): 6400$   |
| 3   | 3   | 1   | 14  | 2119936             | 1057392              | $(1,1,1)^\dagger: 2, (2,1,1)^\dagger: 2, (7,2,1): 529984$   |
| 3   | 3   | 1   | 16  | 13107200            | 4790656              | $(1,1,1)^\dagger: 2, (2,1,1)^\dagger: 2, (4,1,1)^\dagger: 8, (8,1,1)^\dagger: 64, (16,1,1)^\dagger: 6400$ |
| 3   | 3   | 1   | 20  | 1310720000          | 468392880            | $(1,1,1)^\dagger: 2, (2,1,1)^\dagger: 2, (4,1,1)^\dagger: 8, (5,4,1): 40960000$                           |

Tabelle A.5: Enumerationen  $p = 5$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 5   | 5   | 1   | 2   | 16*                  | 8                     | $(1,1,1)^\dagger: 4, (2,1,1)^\dagger: 4$   |
| 5   | 5   | 1   | 3   | 96*                  | 48                    | $(1,1,1)^\dagger: 4, (3,1,1)^\dagger: 24$  |
| 5   | 5   | 1   | 4   | 256*                 | 64                    | $(1,1,1)^\dagger: 4, (2,1,1)^\dagger: 4, (4,1,1)^\dagger: 16$                              |
| 5   | 5   | 1   | 5   | 2500*                | 1130                  | $(1,1,5)^\dagger: 2500$  |
| 5   | 5   | 1   | 6   | 8448                 | 2376                  | $(1,1,1)^\dagger: 4, (2,1,1)^\dagger: 4, (3,2,1): 528$                                     |
| 5   | 5   | 1   | 7   | 62496*               | 31248                 | $(1,1,1)^\dagger: 4, (7,1,1)^\dagger: 15624$   |
| 5   | 5   | 1   | 8   | 147456*              | 44928                 | $(1,1,1)^\dagger: 4, (2,1,1)^\dagger: 4, (4,1,1)^\dagger: 16, (8,1,1)^\dagger: 576$        |
| 5   | 5   | 1   | 9   | 1499904*             | 687132                | $(1,1,1)^\dagger: 4, (3,1,1)^\dagger: 24, (9,1,1)^\dagger: 15624$                          |
| 5   | 5   | 1   | 10  | 6250000*             | 1862760               | $(1,1,5)^\dagger: 2500, (2,1,5)^\dagger: 2500$   |
| 5   | 5   | 1   | 11  | 39037504*            | 19518752              | $(1,1,1)^\dagger: 4, (11,1,1)^\dagger: 9759376$  |
| 5   | 5   | 1   | 12  | 71368704             | 18178944              | $(1,1,1)^\dagger: 4, (2,1,1)^\dagger: 4, (3,2,1): 528, (4,1,1)^\dagger: 16, (12,1,1): 528$ |

Tabelle A.6: Enumerationen  $p = 7$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|---|
| 7   | 7   | 1   | 2   | 36*                  | 16                    | $(1,1,1)^\dagger: 6, (2,1,1)^\dagger: 6$                      |
| 7   | 7   | 1   | 3   | 216*                 | 72                    | $(1,1,1)^\dagger: 6, (3,1,1)^\dagger: 36$                     |
| 7   | 7   | 1   | 4   | 1728*                | 480                   | $(1,1,1)^\dagger: 6, (2,1,1)^\dagger: 6, (4,1,1)^\dagger: 48$ |
| 7   | 7   | 1   | 5   | 14400*               | 4800                  | $(1,1,1)^\dagger: 6, (5,1,1)^\dagger: 2400$                   |

Tabelle A.6: Enumerationen  $p = 7$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|---|
| 7   | 7   | 1   | 6   | 46656*               | 14832                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 36,<br>$(6, 1, 1)^\dagger$ : 36   |
| 7   | 7   | 1   | 7   | 705894*              | 227010                | $(1, 1, 7)^\dagger$ : 705894  |
| 7   | 7   | 1   | 8   | 3815424              | 1016320               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 48,<br>$(8, 1, 1)^\dagger$ : 2208 |
| 7   | 7   | 1   | 9   | 25264224*            | 7753806               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(9, 1, 1)^\dagger$ : 116964                           |
| 7   | 7   | 1   | 10  | 207187200            | 62435920              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(5, 2, 1)^\dagger$ : 5755200                           |
| 7   | 7   | 1   | 11  | 1694851488*          | 564443264             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(11, 1, 1)^\dagger$ : 282475248   |

Tabelle A.7: Enumerationen  $n = 3$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 2   | 2   | 1   | 3   | 3*                   | 3                     | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 1, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3     |
| 3   | 3   | 1   | 3   | 18*                  | 9                     | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18                             |
| 4   | 2   | 2   | 3   | 27*                  | 18                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 3, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 9     |
| 5   | 5   | 1   | 3   | 96*                  | 48                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 4, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 24    |
| 7   | 7   | 1   | 3   | 216*                 | 72                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 36    |
| 8   | 2   | 3   | 3   | 441*                 | 378                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 7, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 63    |
| 9   | 3   | 2   | 3   | 648*                 | 264                   | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 648                            |
| 11  | 11  | 1   | 3   | 1200*                | 384                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 10, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 120  |
| 13  | 13  | 1   | 3   | 1728*                | 576                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 12, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 144  |
| 16  | 2   | 4   | 3   | 3375*                | 1440                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 15, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 225  |
| 17  | 17  | 1   | 3   | 4608*                | 2304                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 16, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 288  |
| 19  | 19  | 1   | 3   | 5832*                | 1944                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 18, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 324  |
| 23  | 23  | 1   | 3   | 11616*               | 4440                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 22, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 528  |
| 25  | 5   | 2   | 3   | 13824*               | 3888                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 24, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 576  |
| 27  | 3   | 3   | 3   | 18954*               | 8748                  | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18954                          |
| 29  | 29  | 1   | 3   | 23520*               | 9180                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 28, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 840  |
| 31  | 31  | 1   | 3   | 27000*               | 7200                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 30, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 900  |
| 32  | 2   | 5   | 3   | 31713*               | 26100                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 31, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1023 |
| 37  | 37  | 1   | 3   | 46656*               | 13176                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1296 |
| 41  | 41  | 1   | 3   | 67200*               | 26880                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 40, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1680 |
| 43  | 43  | 1   | 3   | 74088*               | 21168                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 42, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1764 |
| 47  | 47  | 1   | 3   | 101568*              | 46596                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 46, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 2208 |
| 49  | 7   | 2   | 3   | 110592*              | 34272                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 48, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 2304 |
| 53  | 53  | 1   | 3   | 146016*              | 57744                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 52, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 2808 |
| 59  | 59  | 1   | 3   | 201840*              | 97440                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 58, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3480 |
| 61  | 61  | 1   | 3   | 216000*              | 52848                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 60, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3600 |
| 64  | 2   | 6   | 3   | 250047*              | 134136                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 63, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 3969 |
| 67  | 67  | 1   | 3   | 287496*              | 72000                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 66, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 4356 |
| 71  | 71  | 1   | 3   | 352800*              | 120960                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 70, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 5040 |
| 73  | 73  | 1   | 3   | 373248*              | 124416                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 72, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 5184 |
| 79  | 79  | 1   | 3   | 474552*              | 122040                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 78, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 6084 |
| 81  | 3   | 4   | 3   | 524880*              | 163584                | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 524880                         |

Tabelle A.7: Enumerationen  $n = 3$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|---|
| 83  | 83  | 1   | 3   | 564816*              | 260280                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 82, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 6888    |
| 89  | 89  | 1   | 3   | 696960*              | 316800                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 88, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 7920    |
| 97  | 97  | 1   | 3   | 884736*              | 294912                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 96, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 9216    |
| 121 | 11  | 2   | 3   | 1728000*             | 364608                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 120, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 14400  |
| 125 | 5   | 3   | 3   | 1937376*             | 887220                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 124, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 15624  |
| 128 | 2   | 7   | 3   | 2080641*             | 1764882               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 127, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 16383  |
| 169 | 13  | 2   | 3   | 4741632*             | 1325376               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 168, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 28224  |
| 243 | 3   | 5   | 3   | 14289858*            | 5994450               | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 14289858                          |
| 256 | 2   | 8   | 3   | 16581375*            | 6561792               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 255, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 65025  |
| 289 | 17  | 2   | 3   | 23887872*            | 6283008               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 288, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 82944  |
| 343 | 7   | 3   | 3   | 40001688*            | 12279276              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 342, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 116964 |
| 361 | 19  | 2   | 3   | 46656000*            | 10584000              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 360, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 129600 |
| 512 | 2   | 9   | 3   | 133955073*           | 113245776             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 511, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 262143 |
| 529 | 23  | 2   | 3   | 147197952*           | 34848000              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 528, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 278784 |
| 625 | 5   | 4   | 3   | 242970624*           | 61910784              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 624, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 389376 |
| 729 | 3   | 6   | 3   | 386889048*           | 140901120             | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 386889048                         |
| 841 | 29  | 2   | 3   | 592704000*           | 122760576             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 840, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 705600 |
| 961 | 31  | 2   | 3   | 884736000*           | 191020032             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 960, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 921600 |

Tabelle A.8: Enumerationen  $n = 4$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 2   | 2   | 1   | 4   | 8*                   | 4                     | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 8  |
| 3   | 3   | 1   | 4   | 32*                  | 16                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 2, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 8      |
| 4   | 2   | 2   | 4   | 192*                 | 96                    | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 192  |
| 5   | 5   | 1   | 4   | 256*                 | 64                    | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 4, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 4, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 16     |
| 7   | 7   | 1   | 4   | 1728*                | 480                   | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 48     |
| 8   | 2   | 3   | 4   | 3584*                | 1512                  | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 3584   |
| 9   | 3   | 2   | 4   | 4096*                | 1536                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 8, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 8, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 64     |
| 11  | 11  | 1   | 4   | 12000*               | 3200                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 10, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 10, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 120  |
| 13  | 13  | 1   | 4   | 20736*               | 4352                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 12, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 12, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 144  |
| 16  | 2   | 4   | 4   | 61440*               | 30720                 | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 61440  |
| 17  | 17  | 1   | 4   | 65536*               | 16896                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 16, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 16, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 256  |
| 19  | 19  | 1   | 4   | 116640*              | 31104                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 18, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 18, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 360  |
| 23  | 23  | 1   | 4   | 255552*              | 60640                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 22, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 22, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 528  |
| 25  | 5   | 2   | 4   | 331776*              | 101376                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 24, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 24, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 576  |
| 27  | 3   | 3   | 4   | 492128*              | 154368                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 26, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 26, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 728  |
| 29  | 29  | 1   | 4   | 614656*              | 139776                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 28, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 28, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 784  |
| 31  | 31  | 1   | 4   | 864000*              | 207360                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 30, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 30, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 960  |
| 32  | 2   | 5   | 4   | 1015808*             | 465000                | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 1015808  |
| 37  | 37  | 1   | 4   | 1679616*             | 420864                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 1296 |
| 41  | 41  | 1   | 4   | 2560000*             | 564224                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 40, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 40, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 1600 |
| 43  | 43  | 1   | 4   | 3259872*             | 659712                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 42, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 42, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 1848 |
| 47  | 47  | 1   | 4   | 4672128*             | 1036288               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 46, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 46, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 2208 |

Tabelle A.8: Enumerationen  $n = 4$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger  |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|---|
| 49  | 7   | 2   | 4   | 5308416*             | 1413120               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 48, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 48, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 2304    |
| 53  | 53  | 1   | 4   | 7311616*             | 1794816               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 52, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 52, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 2704    |
| 59  | 59  | 1   | 4   | 11706720*            | 3014144               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 58, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 58, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 3480    |
| 61  | 61  | 1   | 4   | 12960000*            | 3340800               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 60, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 60, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 3600    |
| 64  | 2   | 6   | 4   | 16515072*            | 6531840               | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 16515072  |
| 67  | 67  | 1   | 4   | 19549728*            | 4453760               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 66, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 66, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 4488    |
| 71  | 71  | 1   | 4   | 24696000*            | 5644800               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 70, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 70, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 5040    |
| 73  | 73  | 1   | 4   | 26873856*            | 6279168               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 72, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 72, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 5184    |
| 79  | 79  | 1   | 4   | 37964160*            | 9345024               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 78, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 78, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 6240    |
| 81  | 3   | 4   | 4   | 40960000*            | 14962688              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 80, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 80, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 6400    |
| 83  | 83  | 1   | 4   | 46314912*            | 9351040               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 82, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 82, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 6888    |
| 89  | 89  | 1   | 4   | 59969536*            | 13620480              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 88, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 88, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 7744    |
| 97  | 97  | 1   | 4   | 84934656*            | 19390976              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 96, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 96, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 9216    |
| 121 | 11  | 2   | 4   | 207360000*           | 54374400              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 120, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 120, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 14400 |
| 125 | 5   | 3   | 4   | 236421376*           | 60235200              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 124, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 124, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 15376 |
| 128 | 2   | 7   | 4   | 266338304*           | 131721408             | $(1, 1, 4)^\dagger$ : 266338304   |
| 169 | 13  | 2   | 4   | 796594176*           | 171343872             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 168, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 168, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 28224 |
| 243 | 3   | 5   | 4   | 3458087072*          | 1235872000            | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 242, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 242, $(4, 1, 1)^\dagger$ : 59048 |

Tabelle A.9: Enumerationen  $n = 6$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 2   | 2   | 1   | 6   | 12                   | 6                     | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 2, $(3, 1, 2)$ : 6   |
| 3   | 3   | 1   | 6   | 324*                 | 144                   | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18, $(2, 1, 3)^\dagger$ : 18   |
| 4   | 2   | 2   | 6   | 1728*                | 792                   | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 12, $(3, 1, 2)^\dagger$ : 144  |
| 5   | 5   | 1   | 6   | 8448                 | 2376                  | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 4, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 4, $(3, 2, 1)$ : 528                                      |
| 7   | 7   | 1   | 6   | 46656*               | 14832                 | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 6, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 36     |
| 8   | 2   | 3   | 6   | 218736               | 117288                | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 56, $(3, 1, 2)$ : 3906   |
| 9   | 3   | 2   | 6   | 419904*              | 130848                | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 648, $(2, 1, 3)^\dagger$ : 648   |
| 11  | 11  | 1   | 6   | 1416000              | 298848                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 10, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 10, $(3, 2, 1)$ : 14160                                  |
| 13  | 13  | 1   | 6   | 2985984*             | 834048                | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 12, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 12, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 144, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 144 |
| 16  | 2   | 4   | 6   | 13824000*            | 5469696               | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 240, $(3, 1, 2)^\dagger$ : 57600   |
| 17  | 17  | 1   | 6   | 21086208             | 5546304               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 16, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 16, $(3, 2, 1)$ : 82368                                  |
| 19  | 19  | 1   | 6   | 34012224*            | 7711200               | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 18, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 18, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 324, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 324 |
| 23  | 23  | 1   | 6   | 134420352            | 31821840              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 22, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 22, $(3, 2, 1)$ : 277728                                 |
| 25  | 5   | 2   | 6   | 191102976*           | 48691008              | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 24, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 24, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 576, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 576 |

Tabelle A.9: Enumerationen  $n = 6$ 

| $q$ | $p$ | $r$ | $n$ | $\mathcal{CN}(q, n)$ | $\mathcal{PCN}(q, n)$ | Erzeuger   |
|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----------------------|--|
| 27  | 3   | 3   | 6   | 359254116*           | 130838112             | $(1, 1, 3)^\dagger$ : 18954, $(2, 1, 3)^\dagger$ : 18954   |
| 29  | 29  | 1   | 6   | 551873280            | 114307056             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 28, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 28, $(3, 2, 1)$ : 703920                                   |
| 31  | 31  | 1   | 6   | 729000000*           | 157394880             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 30, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 30, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 900, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 900   |
| 32  | 2   | 5   | 6   | 1037141952           | 516358800             | $(1, 1, 2)^\dagger$ : 992, $(3, 1, 2)$ : 1045506   |
| 37  | 37  | 1   | 6   | 2176782336*          | 548654688             | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 36, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1296, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 1296 |
| 41  | 41  | 1   | 6   | 4510464000           | 1028522880            | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 40, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 40, $(3, 2, 1)$ : 2819040                                  |
| 43  | 43  | 1   | 6   | 5489031744*          | 1304511264            | $(1, 1, 1)^\dagger$ : 42, $(2, 1, 1)^\dagger$ : 42, $(3, 1, 1)^\dagger$ : 1764, $(6, 1, 1)^\dagger$ : 1764 |