Zusammenfassung
Numerik III

30. November 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Klassifikation von partiellen DGLs

Definition (Partielle DGL).

Sei $\Omega \subset R^n$ offen. Eine *partielle DGL* k-ter Ordnung hatdie Form

$$F(x, u, \mathrm{D}\, u, \mathrm{D}^2\, u, \dots, \mathrm{D}^k\, u) = 0\,, \tag{PDE (*)}$$

wobei

$$F : \Omega \times R \times R^n \times \dots \times R^{n^k} \to R$$

gegeben und $u : \Omega \to R$ gesucht.

Definition (Klassifikation PDEs).

1. PDE $(*)$ heißt *linear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u = f(x)$$
hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to R$, $f : \Omega \to R$ gegeben.
2. PDE $(*)$ heißt *semilinear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to R$,$a_0 : \Omega \times R \times R^n \times \dots \times R^{n^{k-1}} \to R$ gegeben.
3. PDE $(*)$ heißt *quasilinear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times R \times R^n \times \dots \times R^{n^{k-1}} \to R$gegeben.
4. PDE $(*)$ heißt *nichtlinear*, wenn sie nicht von Typ 1.–3. ist.

1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung

Definition.

Setze $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i}\partial_{x_J} u$.

$$F(x, u, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \tag{PDE (**)}$$

hei1ßt *PDE 2. Ordnung*.

$$M(x) := \begin{pmatrix} \partial_{p_{11}} F & \dots & \partial_{p_{1n}} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{p_{n1}} F & \dots & \partial_{p_{nn}} F \end{pmatrix}$$

Definition.

PDE $(**)$ hei1ßt

1. *elliptisch* in x, falls $M(x)$ positiv oder negativ definit ist.
2. *parabolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ gleich 0 ist und alle anderengleiches Vorzeichen haben.
3. *hyperbolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ ein anderes Vorzeichen hat,als alle anderen.

Beispiel.

1. Poission-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ist elliptisch.
2. Wärmeleitungs-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist parabolisch.
3. Wellengleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist hyperbolisch.

2 Klassische Lösung elliptischer PDEs

Definition (Funktionenräume).

Sei $\Omega \subset R^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

1. $C(\bar{\Omega}, R^m)$ ist Raum aller auf $\bar{\Omega}$ *stetigen Funktionen* nach R^m.
   $C(\bar{\Omega}) := C(\bar{\Omega}, R)$.
   $$\|u\|_{C(\bar{\Omega},R^m)} := \sup_{x\in\bar{\Omega}} \|u(x)\| .$$
2. $C^k(\bar{\Omega}, R^m)$ mit $k \in N$ ist Raum aller auf Ω *k-mal stetig differenzierbarenFunktionen*, die zusammen mit ihren Ableitungen bis Ordnung k stetig auf $\bar{\Omega}$ fortgesetzt werdenkönnen.
   $$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega},R^m)} := \sum_{|\alpha|\le k} \| \mathrm{D}^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega},R^m)} .$$
3. $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, R^m) = \{u \in C(\bar{\Omega}, R^m) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},R^m)} < \infty\}$mit
   $$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},R^m)} := \sup_{x\neq y\in\bar{\Omega}} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} ,$$
   und $\alpha \in [0, 1]$ ist Raum aller *gleichmäßig Hölder stetigen Funktionen zum Exponent α*.
4. $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}, R^m) := \{u \in C^k(\bar{\Omega}, R^m) : \ \mathrm{D}^\gamma u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, R^m), |\gamma| = k\}$

Bemerkung.

$C^{k,0} = C^k$, $C^{k,1} \neq C^{k+1}$.