Zusammenfassung
Numerik III

5. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Klassifikation von partiellen DGLs

Definition (Partielle DGL).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *partielle DGL* k-ter Ordnung hat die Form

$$F(x, u, \mathrm{D}\, u, \mathrm{D}^2\, u, \dots, \mathrm{D}^k\, u) = 0\,, \qquad \text{(PDE } (*))$$

wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Definition (Klassifikation PDEs).

1. PDE $(*)$ heißt *linear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha u = f(x)$$
hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben.
2. PDE $(*)$ heißt *semilinear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\,\mathrm{D}^\alpha u + a_0(x, u, \mathrm{D}\,u, \dots, \mathrm{D}^{k-1} u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$, $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$ gegeben.
3. PDE $(*)$ heißt *quasilinear*, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}\,u, \dots, \mathrm{D}^{k-1} u)\,\mathrm{D}^\alpha u + a_0(x, u, \mathrm{D}\,u, \dots, \mathrm{D}^{k-1} u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$ gegeben.
4. PDE $(*)$ heißt *nichtlinear*, wenn sie nicht von Typ 1.–3. ist.

Beispiel.

1. *Poisson-Gleichung*
$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
ist PDE zweiter Ordnung, linear
für $f = 0$: Homogene PDE $-\triangle u = 0$ *Laplace-Gleichung*
2. *Wellengleichung*
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(t, x) & \text{in } \Omega \\ \text{RB, AB} & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
3. *Navier-Stokes-Gleichung*
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}) = \nu\triangle v - (\nu \cdot \nabla) - \nabla p + f & \text{in } \Omega \\ 0 = div(v) & \\ \text{RB, AB} & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung

Definition.

Setze $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i}\partial_{x_J} u$.
$$F(x, u, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \qquad \text{(PDE } (**)\text{)}$$
heißt *PDE 2. Ordnung*.
$$M(x) := \begin{pmatrix} \partial_{p_{11}} F & \dots & \partial_{p_{1n}} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{p_{n1}} F & \dots & \partial_{p_{nn}} F \end{pmatrix}$$

Definition.

PDE $(**)$ heißt

1. *elliptisch* in x, falls $M(x)$ positiv oder negativ definit ist.
2. *parabolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ gleich 0 ist und alle anderen gleiches Vorzeichen haben.
3. *hyperbolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ ein anderes Vorzeichen hat, als alle anderen.

Beispiel.

1. Poission-Gleichung
$$-\triangle u = f$$
mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ist elliptisch.
2. Wärmeleitungs-Gleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0$$
mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist parabolisch.
3. Wellengleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$$
mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist hyperbolisch.

2 Klassische Lösung elliptischer PDEs

Definition (Funktionenräume).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

1. $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist Raum aller auf $\overline{\Omega}$ *stetigen Funktionen* nach $\mathbb{R}^m$.
   $C(\overline{\Omega}) := C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
   $$\|u\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\| .$$
2. $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Raum aller auf Ω *k-mal stetig differenzierbaren Funktionen*, die zusammen mit ihren Ableitungen bis Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.
   $$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \| \mathrm{D}^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} .$$
3. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} < \infty\}$ mit
   $$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} ,$$
   und $\alpha \in [0, 1]$ ist Raum aller *gleichmäßig Hölder stetigen Funktionen zum Exponent α*.
4. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \mathrm{D}^\gamma u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), |\gamma| = k\}$

Bemerkung.

$C^{k,0} = C^k$, $C^{k,1} \neq C^{k+1}$.

Definition (Alternativ).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt. Ω gehört zur Klasse $C^{k,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in [0, 1]$, wenn es endlich viele lokale Koordinatensysteme $s_1, \dots, s_m$, Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, sowie $r_i > 0, h_i > 0$, $i = 1 \dots m$ existieren, sodass

1. $\varphi_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{r_j})$ mit $\overline{\Omega}_{r_j} = \left\{ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} : \ |y_i| \leq r_j, i = 1 \dots n-1 \right\}$
2. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$, sodass $x = \begin{bmatrix} y \\ \varphi_j(y) \end{bmatrix}$, $y \in \Omega_{r_j}$.
3. $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \in \Omega \Leftrightarrow \exists j : \ y \in \overline{\Omega}_{r_j}$ mit $\varphi_j(y) < y_n < \varphi_j(y) + h_j$
   $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \notin \Omega \Leftrightarrow \forall j : \ y \in \overline{\Omega}_{r_j}$ gilt $\varphi_j(y) - h_j < y_n < \varphi_j(y)$

Definition (RWP).

$$(\text{RWP})\begin{cases}\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega\\ Ru = g & \text{auf } \partial\Omega\end{cases}$$

mit

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u$$

und $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Weiter $A(x) := \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{bmatrix}$

Randbedingungen:

Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Neumann-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu = g$ auf $\partial\Omega$

Robin-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu + \alpha(x)u = g$ auf $\partial\Omega$.

Voraussetzungen:

1. $\mathcal{L}$ ist gleichmäßig elliptisch, d.h. $\exists\lambda_0 > 0$, sodass

$$\xi^T A(x)\xi \geq \lambda_0\|\xi\|^2 \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \Omega\,.$$

2. $a_{ij}, b_i, c, f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$.

Definition (Klassische Lösung).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ heißt *klassische Lösung* von (RWP) mit $Ru = u$, wenn die Gleichungen von (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. $\partial\Omega$ erfüllt sind.

2.1 Eindeutigkeit

Satz 2.1 (Maximums Prinzip).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von (RWP) mit $f \leq 0$ in Ω und $c(x) \equiv 0$.
Dann

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} g(x)\,.$$

Korollar 2.2.

Sei $c \geq 0, f \leq 0$ in Ω. Dann

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} \max\{u, 0\}\,.$$

Korollar 2.3 (Vergleichsprinzip).

Für $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2 \in \Omega$ und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$.
Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Korollar 2.4 (Eindeutigkeit).

Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2.2 Existenz

Satz 2.5.

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ Lipschitzgebiet, $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in C(\partial\Omega)$.
Dann besitzt (RWP) genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3 Differenzenverfahren

3.1 Differenzenverfahren für die Poissongleichung in $\Omega = (a, b)$

Differenzenverfahren

$$\text{(RWP 1)} \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

1. Diskretisierung $h = \frac{b-a}{n}$, $\Omega_h = \{x_i = a + ih : \ i = 1 \dots n-1\}$, $\partial\Omega_h = \{x_0 = a, x_n = b\}$.

2. Approximation der Ableitung

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u_i(x_i - h)}{h^2} =: \Delta_h u(x_i)$$

bezeichne

$$\text{(RWP 1)}_h \quad \begin{cases} -\Delta_h u_h = f & \text{in } \Omega_h \\ u_h = g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems mit OBdA $\Omega = (0, 1)$

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h(x_1) \\ \\ \vdots \\ \\ u_h(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{bmatrix}$$

bezeichne (LSG 1) $-\tilde{\Delta}_u \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$.

Definition (Konvergenzordnung).

$U_h := \{f : \Omega_h \to \mathbb{R}\}, R_h : C(\overline{\Omega}) \to U_h$ die Einschränkung. (RWP)_h heißt *konvergent von Ordnung* P, falls $\exists c > 0, h_0 > 0$, sodass für die Lösung u von (RWP) und die Lösung u_h von (RWP)_h gilt:

$$\|u_h - R_h u\|_h \leq ch^P \qquad \forall h \leq h_0 \, .$$

Definition (Konsistenzordnung).

$(\mathrm{RWP})_h$ heißt *konsitent von Ordnung P*, falls

$$\|\mathcal{L}_h R_h u - R_h \mathcal{L} u\|_h \leq c\|u\|_{C^{P+2}(\overline{\Omega})} h^P \qquad \forall u \in C^{p+2}(\overline{\Omega})\,.$$

Definition (Stabil).

$(\mathrm{RWP})_h$ heißt *stabil*, falls $\tilde{\mathcal{L}}_h$ invertierbar und $\exists h_0 > 0:$

$$\sup_{0<h\leq h_0} \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\| < \infty\,.$$

Satz 3.1.

$(\mathrm{RWP})_h$ konsistent und stabil. Dann konvergent.
Ist es zusätzlich konsistent von Ordnung P und $u \in C^{p+1}(\overline{\Omega})$. Dann konvergent von Ordnung P.

Lemma 3.2.

Das Differenzenverfahren $(\mathrm{RWP}\ 1)_h$ ist konsistent von Ordnung 2. Es gilt

$$\|\triangle_h R_h u - R_h \triangle u\|_h \leq \frac{1}{12}\|u\|_{C^4(\bar{\Omega})} h^2$$

für alle $u \in C^4(\bar{\Omega})$

Definition (M-Matrix).

(Schwach diagonal dominant / diagonal dominant).

Definition (reduzibel/irreduzibel).

Definition (irreduzibel diagonal dominant).

Lemma 3.3.

Lemma 3.4.

Lemma 3.5.

Satz 3.6.

3.2 Differenzenmethode für Poissongleichungen in $= (0,1) \times (0,1)$

3.3 Diskretisierung in einem Beschränkten Gebiet in $\mathbb{R}^2$

3.3.1 Shortley-Weller-Diskretisierung

3.3.2 Interpolation

3.4 Allgemeine Dgl-Operatoren

3.5 Differenzenverfahren für Parabolische DGLn

3.6 Differenzenverfahren für Hyperbolische DGLn

4 Schwache Lösungstheorie für elliptische partielle PDE

4.1 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

4.1.1 Sobolev-Räume

4.1.2 Variationsgleichung

4.2 Eindeutige Lösbarkeit elliptischer PDE

Lemma 4.11.

Falls $b(x) = 0$ und $c(s) \geq 0$ in Ω, dann ist B in $(VGL1)'$ koerzitiv.

Satz 4.12.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, und sei $\mathcal{L}u = -div(A(x)Du) + c(x)U$ gleichmäßig elliptisch, $c(x) \geq 0$ in Ω, $a_{ij}, c \in \mathcal{L}(\Omega)$, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Dann besitzt $(VGL1)$ eine Eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Außerdem existiert eine Konstante $c > 0$ so dass $||u||_{H^1(\Omega)} \leq \hat{c}||f||_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$.

Definition (alternative def für schwach Lsg).

Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von $(RWP1)$, falls $B(u.\varphi) =< f, \varphi >_{H^{-1}, H_0^1}$ $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung.

Es existiert ein $\mu_u > 0$, so dass $\forall \mu > \mu_0$ das RWP

$$\mathcal{L}u - \mu u = f \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Lemma (Young-Ungl).

für $\alpha, \beta > 0$, $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2$$

4.3 Randwertprobleme mit inhomogenen Dirichlet-RB und/oder Robin-RB

1. Inhomogene Dirichlet-RB

$$(RWP2) \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ und es existiert stetige Fortsetzung $\tilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$

Superpositionsprinzip: $u \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ löst $(RWP2) \Leftrightarrow v = u - \tilde{g}$ löst das RWP

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = f - \mathcal{L}\tilde{g} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Schwache Formulierung:

$$\int_\Omega Dv \cdot D\varphi + b(x) \cdot Dv\varphi + c(x)v\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx - \int A(x)D\tilde{g} \cdot D\varphi + b(x) \cdot D\tilde{g}\varphi dx$$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ und gesucht ist: $v \in H_0^1(\Omega)$
$\Rightarrow u = v + \tilde{g}$
$\Rightarrow (VLG2)$: $\int_\Omega A(x)Du \cdot D\varphi + b(x) \cdot Du\varphi + cu\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ (Testraum)
$u \in \{w \in H^1(\Omega) : \tau(w) = g\}$ (Lösungsraum) wobei $tau : H^1(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\partial\Omega); \tau(w) = w|_{\partial\Omega} \; \forall w \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

2. Inhomogene Robin-RB

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ A(x)Du \cdot \nu + \mu u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

betrachte dafür nun als Testfunktionen die $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$