

Zusammenfassung Numerik III

2. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
1.1 Klassifikation von partiellen DGLs	2
1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung	3
2 Klassische Lösung elliptischer PDEs	3
2.1 Eindeutigkeit	5
2.2 Existenz	6
3 Differenzenverfahren	6
3.1 Differenzenverfahren für die Poissongleichung in $\Omega = (a, b)$	6

1 Einführung

1.1 Klassifikation von partiellen DGLs

Definition (Partielle DGL).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *partielle DGL* k -ter Ordnung hat die Form

$$F(x, u, D u, D^2 u, \dots, D^k u) = 0, \quad (\text{PDE } (*))$$

wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht.

Definition (Klassifikation PDEs).

1. PDE (*) heißt *linear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

2. PDE (*) heißt *semilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, D u, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

3. PDE (*) heißt *quasilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, D u, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + a_0(x, u, D u, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

4. PDE (*) heißt *nichtlinear*, wenn sie nicht von Typ 1.–3. ist.

1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung

Definition.

Setze $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$.

$$F(x, u, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \quad (\text{PDE } (**))$$

heißt *PDE 2. Ordnung*.

$$M(x) := \begin{pmatrix} \partial_{p_{11}} F & \dots & \partial_{p_{1n}} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{p_{n1}} F & \dots & \partial_{p_{nn}} F \end{pmatrix}$$

Definition.

PDE (**) heißt

1. *elliptisch* in x , falls $M(x)$ positiv oder negativ definit ist.
2. *parabolisch* in x , falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ gleich 0 ist und alle anderen gleiches Vorzeichen haben.
3. *hyperbolisch* in x , falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ ein anderes Vorzeichen hat, als alle anderen.

Beispiel.

1. Poisson-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ist elliptisch.
2. Wärmeleitungs-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist parabolisch.
3. Wellengleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist hyperbolisch.

2 Klassische Lösung elliptischer PDEs

Definition (Funktionsräume).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

1. $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist Raum aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen nach \mathbb{R}^m .
 $C(\overline{\Omega}) := C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|.$$

2. $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Raum aller auf Ω k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen bis Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}.$$

3. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} < \infty\}$ mit

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha},$$

und $\alpha \in [0, 1]$ ist Raum aller gleichmäßig Hölder stetigen Funktionen zum Exponent α .

4. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : D^\gamma u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), |\gamma| = k\}$

Bemerkung.

$$C^{k,0} = C^k, C^{k,1} \neq C^{k+1}.$$

Definition.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt. Ω gehört zur Klasse $C^{k,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in [0, 1]$, wenn es endlich viele lokale Koordinatensysteme s_1, \dots, s_m , Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, sowie $r_i > 0$, $h_i > 0$, $i = 1 \dots m$ existieren, sodass

1. $\varphi_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{r_j})$ mit $\overline{\Omega}_{r_j} = \left\{ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} : |y_i| \leq r_j, i = 1 \dots n-1 \right\}$

2. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$, sodass $x = \begin{bmatrix} y \\ \varphi_j(y) \end{bmatrix}$, $y \in \Omega_{r_j}$.

3. $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \in \Omega \Leftrightarrow \exists j : y \in \overline{\Omega}_{r_j} \text{ mit } \varphi_j(y) < y_n < \varphi_j(y) + h_j$
 $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \notin \Omega \Leftrightarrow \forall j : y \in \overline{\Omega}_{r_j} \text{ gilt } \varphi_j(y) - h_j < y_n < \varphi_j(y)$

Definition (RWP).

$$(\text{RWP}) \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ Ru = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} u + c(x)u$$

und $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter $A(x) := \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$

Randbedingungen:

Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Neumann-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu = g$ auf $\partial\Omega$

Robin-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu + \alpha(x)u = g$ auf $\partial\Omega$.

Voraussetzungen:

1. \mathcal{L} ist gleichmäßig elliptisch, d.h. $\exists \lambda_0 > 0$, sodass

$$\xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$$

2. $a_{ij}, b_i, c, f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$.

Definition (Klassischer Lösung).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ heißt *klassische Lösung* von (RWP) mit $Ru = u$, wenn die Gleichungen von (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. $\partial\Omega$ erfüllt sind.

2.1 Eindeutigkeit**Satz 2.1 (Maximum Prinzip).**

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von (RWP) mit $f \leq 0$ in Ω und $c(x) \equiv 0$.

Dann

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x).$$

Korollar 2.2.

Sei $c \geq 0, f \leq 0$ in Ω . Dann

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} \max u, 0.$$

Korollar 2.3 (Vergleichsprinzip).

Für $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$ in Ω und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$.

Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Korollar 2.4 (Eindeutigkeit).

Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

2.2 Existenz

Satz 2.5.

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ Lipschitzgebiet, $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in C(\partial\Omega)$.
Dann besitzt (RWP) genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

3 Differenzenverfahren

3.1 Differenzenverfahren für die Poissongleichung in $\Omega = (a, b)$