Zusammenfassung
Numerik III

3. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Klassifikation von partiellen DGLs

Definition (Partielle DGL).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *partielle DGL* k-ter Ordnung hat die Form

$$F(x, u, \mathrm{D}\, u, \mathrm{D}^2\, u, \dots, \mathrm{D}^k\, u) = 0\,, \tag{PDE (*)}$$

wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Definition (Klassifikation PDEs).

1. PDE $(*)$ heißt *linear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u = f(x)$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben.

2. PDE $(*)$ heißt *semilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$,$a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$ gegeben.

3. PDE $(*)$ heißt *quasilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$ gegeben.

4. PDE $(*)$ heißt *nichtlinear*, wenn sie nicht von Typ 1.–3. ist.

1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung

Definition.

Setze $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i}\partial_{x_J} u$.

$$F(x, u, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \tag{PDE (**)}$$

heißt *PDE 2. Ordnung.*

$$M(x) := \begin{pmatrix} \partial_{p_{11}} F & \dots & \partial_{p_{1n}} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{p_{n1}} F & \dots & \partial_{p_{nn}} F \end{pmatrix}$$

Definition.

PDE $(**)$ heißt

1. *elliptisch* in x, falls $M(x)$ positiv oder negativ definit ist.
2. *parabolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ gleich 0 ist und alle anderengleiches Vorzeichen haben.
3. *hyperbolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ ein anderes Vorzeichen hat,als alle anderen.

Beispiel.

1. Poission-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ist elliptisch.
2. Wärmeleitungs-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist parabolisch.
3. Wellengleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist hyperbolisch.

2 Klassische Lösung elliptischer PDEs

Definition (Funktionenräume).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

1. $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist Raum aller auf $\overline{\Omega}$ *stetigen Funktionen* nach $\mathbb{R}^m$.
   $C(\overline{\Omega}) := C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
   $$\|u\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|u(x)\| .$$
2. $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Raum aller auf Ω *k-mal stetig differenzierbarenFunktionen*, die zusammen mit ihren Ableitungen bis Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werdenkönnen.
   $$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sum_{|\alpha|\le k} \| \mathrm{D}^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} .$$
3. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} < \infty\}$mit
   $$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sup_{x\neq y\in\overline{\Omega}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} ,$$
   und $\alpha \in [0, 1]$ ist Raum aller *gleichmäßig Hölder stetigen Funktionen zum Exponent* α.
4. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \mathrm{D}^\gamma u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), |\gamma| = k\}$

Bemerkung.

$C^{k,0} = C^k$, $C^{k,1} \neq C^{k+1}$.

Definition.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt. Ω gehört zur Klasse $C^{k,\alpha}$,$k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in [0, 1]$, wenn es endlich viele lokale Koordinatensysteme $s_1, \dots, s_m$,Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, sowie $r_i > 0, h_i > 0$, $i = 1 \dots m$ existieren, sodass

1. $\varphi_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{r_j})$ mit $\overline{\Omega}_{r_j} = \left\{ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} : \ |y_i| \le r_j, i = 1 \dots n - 1 \right\}$
2. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ gibt es $j \in \{1, \dots, m\}$, sodass$x = \begin{bmatrix} y \\ \varphi_j(y) \end{bmatrix}$, $y \in \Omega_{r_j}$.
3. $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \in \Omega \Leftrightarrow \exists j : \ y \in \overline{\Omega}_{r_j}$ mit$\varphi_j(y) < y_n < \varphi_j(y) + h_j$
   $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \notin \Omega \Leftrightarrow \forall j : \ y \in \overline{\Omega}_{r_j}$ gilt$\varphi_j(y) - h_j < y_n < \varphi_j(y)$

Definition (RWP).

$$\text{(RWP)} \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ Ru = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u$$

und $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.Weiter $A(x) := \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$

Randbedingungen:

Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Neumann-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu = g$ auf $\partial\Omega$

Robin-RB $A(x)\nabla u \cdot \nu + \alpha(x)u = g$ auf $\partial\Omega$.

Voraussetzungen:

1. $\mathcal{L}$ ist gleichmäßig elliptisch, d.h. $\exists \lambda_0 > 0$, sodass
$$\xi^T A(x)\xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \Omega\,.$$
2. $a_{ij}, b_i, c, f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$.

Definition (Klassischer Lösung).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ heißt *klassische Lösung* von (RWP) mit $Ru = u$, wenn dieGleichungen von (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. $\partial\Omega$ erfüllt sind.

2.1 Eindeutigkeit

Satz 2.1 (Maximum Prinzip).

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von (RWP) mit $f \leq 0$ in Ω und $c(x) \equiv 0$.
Dann
$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)\,.$$

Korollar 2.2.

Sei $c \geq 0, f \leq 0$ in Ω. Dann
$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} \max u, 0\,.$$

Korollar 2.3 (Vergleichsprinzip).

Für $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2 \in \Omega$ und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$.
Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Korollar 2.4 (Eindeutigkeit).

Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2.2 Existenz

Satz 2.5.

$\Omega \in \mathbb{R}^n$ Lipschitzgebiet, $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in C(\partial\Omega)$.
Dann besitzt (RWP) genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3 Differenzenverfahren

3.1 Differenzenverfahren für die Poissongleichung in $\Omega = (a, b)$