Zusammenfassung
Numerik III

1. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Klassifikation von partiellen DGLs

Definition (Partielle DGL).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *partielle DGL* k-ter Ordnung hatdie Form

$$F(x, u, \mathrm{D}\, u, \mathrm{D}^2\, u, \dots, \mathrm{D}^k\, u) = 0\,, \tag{PDE ($*$)}$$

wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht.

Definition (Klassifikation PDEs).

1. PDE ($*$) heißt *linear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u = f(x)$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben.

2. PDE ($*$) heißt *semilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$,$a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$ gegeben.

3. PDE ($*$) heißt *quasilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u)\, \mathrm{D}^\alpha\, u + a_0(x, u, \mathrm{D}\, u, \dots, \mathrm{D}^{k-1}\, u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \to \mathbb{R}$gegeben.

4. PDE ($*$) heißt *nichtlinear*, wenn sie nicht von Typ 1.–3. ist.

1.2 Typeneinteilung für PDEs 2. Ordnung

Definition.

Setze $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i}\partial_{x_J} u$.

$$F(x, u, p_1, \dots, p_n, p_{11}, \dots, p_{nn}) = 0 \qquad \text{(PDE } (**)\text{)}$$

heißt *PDE 2. Ordnung*.

$$M(x) := \begin{pmatrix} \partial_{p_{11}} F & \dots & \partial_{p_{1n}} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{p_{n1}} F & \dots & \partial_{p_{nn}} F \end{pmatrix}$$

Definition.

PDE $(**)$ heißt

1. *elliptisch* in x, falls $M(x)$ positiv oder negativ definit ist.
2. *parabolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ gleich 0 ist und alle anderengleiches Vorzeichen haben.
3. *hyperbolisch* in x, falls genau ein Eigenwert von $M(x)$ ein anderes Vorzeichen hat,als alle anderen.

Beispiel.

1. Poission-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ ist elliptisch.
2. Wärmeleitungs-Gleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ist parabolisch.
3. Wellengleichung mit $M = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ist hyperbolisch.

2 Klassische Lösung elliptischer PDEs

Definition (Funktionenräume).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

1. $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist Raum aller auf $\bar{\Omega}$ *stetigen Funktionen* nach $\mathbb{R}^m$.
   $C(\bar{\Omega}) := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.
   $$\|u\|_{C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|u(x)\| .$$
2. $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Raum aller auf Ω *k-mal stetig differenzierbarenFunktionen*, die zusammen mit ihren Ableitungen bis Ordnung k stetig auf $\bar{\Omega}$ fortgesetzt werdenkönnen.
   $$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sum_{|\alpha| \le k} \| \mathrm{D}^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)} .$$
3. $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)} < \infty\}$mit
   $$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} ,$$
   und $\alpha \in [0, 1]$ ist Raum aller *gleichmäßig Hölder stetigen Funktionen zum Exponent α*.
4. $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) : \ \mathrm{D}^\gamma u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m), |\gamma| = k\}$

Bemerkung.

$C^{k,0} = C^k$, $C^{k,1} \neq C^{k+1}$.

Definition.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, beschränkt. Ω gehört zur Klasse $C^{k,\alpha}$,$k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in [0, 1]$, wenn es endlich viele lokale Koordinatensysteme $s_1, \ldots, s_m$,Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, sowie $r_i > 0, h_i > 0$, $i = 1 \ldots m$ existieren, sodass

1. $\varphi_j \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}_{r_j})$ mit $\bar{\Omega}_{r_j} = \left\{ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} : \ |y_i| \le r_j, i = 1 \ldots n-1 \right\}$
2. Zu jedem $x \in \partial\Omega$ gibt es $j \in \{1, \ldots, m\}$, sodass$x = \begin{bmatrix} y \\ \varphi_j(y) \end{bmatrix}$, $y \in \Omega_{r_j}$.
3. $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \in \Omega \Leftrightarrow \exists j : \ y \in \bar{\Omega}_{r_j}$ mit$\varphi_j(y) < y_n < \varphi_j(y) + h_j$
   $\begin{bmatrix} y \\ y_n \end{bmatrix} \notin \Omega \Leftrightarrow \forall j : \ y \in \bar{\Omega}_{r_j}$ gilt$\varphi_j(y) - h_j < y_n < \varphi_j(y)$

Definition (RWP).

$$(\mathrm{RWP}) \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \\ Ru = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$