Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg **Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

22. April 2013

Inhaltsverzeichnis

Lokal geringte Räume 1

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe). Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)\,,$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{UW}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\rho_{VW}"] & \mathcal{F}(W) \end{tikzcd}$$

Bei mir steht hier im Skript $s\big|_U$. Offenbar ein Fehler!?

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s\big|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über* U.

Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}^\circ_X : U \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid\ f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}^\circ_X(V) \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U),\ f \mapsto f\big|_U$.

Bemerkung 1.3. Ist **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \to V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (U \to V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (V \to U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U) \\ \mathcal{F}(V) \arrow[u] \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.5 (Garbe).

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *Garbe* (engl. sheaf), falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s\big|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit
$$s_i\big|_{U_i \cap U_j} = s_j\big|_{U_i \cap U_j} \qquad \forall i, j,$$
so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit
$$s_i = s\big|_{U_i} \qquad \forall i.$$

Bemerkung 1.6. $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto \left(s\big|_{U_i}\right)_{i \in I}$$

$$(s_i)_{i \in I} \longmapsto \left(s_i\big|_{U_i \cap U_j} - s_j\big|_{U_i \cap U_j}\right)_{(i,j) \in I^2}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1 und Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.7. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}^\infty_M : U \mapsto \mathcal{C}^\infty_M(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in \mathrm{C}^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.8. Sei M eine $\mathbb{C}$ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}} : U \mapsto \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}}(U) := \{f : U \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times_C, \; f \mapsto \exp(f).$$

Warum steht hier naiv??

Betrachte nun die Prägarbe

$$\mathcal{H} := \mathrm{im}^{\mathrm{naiv}}(\exp) : U \mapsto \mathrm{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \to \mathbb{C} \mid f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \tfrac{1}{2} < |z| < \tfrac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$
$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \to \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden U_i problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \to \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum X bezeichne

$$\mathbf{PSh}_X := \text{die Kategorie der Prägarben auf } X,$$
$$\mathbf{Sh}_X := \text{die Kategorie der Garben auf } X, \text{ wobei } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Bemerkung 1.10. Man hat den Inklusionsfunktor

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{PSh}_X, \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist $\mathcal{F}$ eine (Prä)Garbe auf X und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim$$

mit

$$s \sim t \ :\Leftrightarrow \ \exists W \subset X \text{ offen}: \ x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s\big|_W = t\big|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von $\mathcal{F}$ bei x_0*.

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei x_0*.

Beispiel 1.12. $(\mathcal{C}^\infty_M)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f\big|_W = g\big|_W\}$

Beispiel 1.13.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{C},x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius}\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\}\end{aligned}$$

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).

1. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einen topologischen Raum X. Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Für $r \in \mathcal{F}(U)$, $x_0 \in U$ bezeichne r_{x_0} den Keim $[r]$ von $\mathcal{F}$ bei x_0. Es seien nun $s, t \in \mathcal{F}(U)$, für die $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$ gelte. Zeige, dass $s = t$.
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

Beweis.

1. Für alle $x_0 \in U$ existieren offene U_{x_0} mit $s\big|_{U_{x_0} \cap U} = t\big|_{U_{x_0} \cap U}$ nach Definition der Keime. Es ist $U = \cap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$, also folgt nach erster Garbenbedingung $s = t$.
2. Wähle $X = \{0, 1\}$ mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$2\big|_{\{0\}} = 5\big|_{\{0\}}$$
$$2\big|_{\{1\}} = 5\big|_{\{1\}}$$

aber $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$. $\square$

Definition 1.14 (push-forward).

Ist $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so ist durch

$$f_* \mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward von* $\mathcal{F}$.

1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

$$\textbf{Ring} := \text{ Kategorie der kommuativen Ringe mit 1}$$

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \textbf{Top}_X^{\mathrm{op}} \to \textbf{Ring}.$$

Definition 1.15 (lokaler Ring).

Sei R ein Ring. Dann heißt R *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel 1.16. $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\} \underset{\text{Unterring}}{\subset} \mathbb{Q}$

Bemerkung 1.17. Ist R lokaler Ring und $\mathfrak{m} \lhd R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).

1. Es sei R ein kommutativer Ring und $R^\times$ seine Einheitengruppe. Zeige, dass R genau dann lokal ist, wenn $R \setminus R^\times \lhd R$ gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ein Ideal in R bilden.
2. Es sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu R bezeichnen wir mit $\mathrm{Quot}(R)$. Lokalisieren wir R nach $\mathfrak{p}$, so erhalten wir den Ring $R_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R) \mid a \in R,\ b \notin \mathfrak{p}\}$. Zeige, dass $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist.

Beweis. 1. „$\Rightarrow$“ Ist R lokal, so ist $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R.

„$\Leftarrow$“ Ist $R \setminus R^\times$ ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei $\mathfrak{m} \lhd R$ ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$.

2. Wir zeigen $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$, dann folgt die Behauptung mit 1.

„$\subseteq$“ Es sei

$$h = p_1 \frac{s_1}{t_1} + \ldots + p_n \frac{s_n}{t_n}.$$

Setze

$$\begin{aligned} z_1 &:= p_1 s_1 t_2 \ldots t_n + p_2 s_2 t_1 t_3 \ldots t_n + p_n s_n t_1 \ldots t_{n-1} \\ z_0 &:= t_1 \ldots t_n, \end{aligned}$$

so ist $h = \frac{z_1}{z_0}$. Wäre $h \in R_\mathfrak{p}^\times$, sagen wir $\frac{s}{t}$ sein Inverses, so müsste gelten $z_1 s = z_0 t$. Die linke Seite jedoch ist in $\mathfrak{p}$, die rechte nicht. Damit ist $h \in R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$.

„$\supseteq$“ Sei $\frac{s}{t} \in R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$, so ist $s\frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. □

Beispiel 1.18. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$ ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}^\infty_{M,x_0} \setminus \left(\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}\right)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt

$$\left[\frac{1}{f} : W \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}\right] \in \mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$$

ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal.

Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus:

- einem topologischen Raum X und
- einer Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X von Ringen,

so dass $\mathcal{O}_{X,x_0}$ für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt $\mathcal{O}_X$ die *Strukturgarbe von* $(X, \mathcal{O}_X)$. Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \lhd \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von* x_0 *in* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Beispiel 1.20. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel $(\mathbb{R}, C^\infty_\mathbb{R})$ bestehend aus $\mathbb{R}$ und der Garbe der C^∞-Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass $C^\infty_{\mathbb{R},x_0}$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal $\mathfrak{m}_{x_0}$ angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C^\infty_{\mathbb{R},x_0} / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$.
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass $\mathbb{C}$ mit der Garbe der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ eine lokal gerinter Raum ist und dass $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis. 1. Es gilt

$$\begin{aligned}[f : U \to \mathbb{R}] \in (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit} f\big|_{U\cap V} \neq 0 \ \forall x \in U \cap V \\ &\Leftrightarrow \quad f(x_0) \neq 0.\end{aligned}$$

Also $[f] \in C^\infty_{\mathbb{R},x_0} \setminus (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times$ genau dann, wenn $f(x_0) = 0$. Damit ist $C^\infty_{\mathbb{R},x_0} \setminus (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times$ ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi : \ C^\infty_{\mathbb{R},x_0} &\to \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto f(x_0),\end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind R, S lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \lhd R$, $\mathfrak{m}_S \lhd S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\to f_*\mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y,\end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f^\#_{x_0} : \ \mathcal{O}_{Y,y_0} &\to \mathcal{O}_{X,x_0} \\ [s] &\mapsto [f^\#_U(s)]\end{aligned}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 1.23. In Definition 1.22 ist $f^\#_{x_0}$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s\big|_W = t\big|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f^\#_U(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, $U \subset Y$, $y_0 \in U$ und analog $f^\#_V(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V)$, $V \subset Y$, $y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^\#_U"] \arrow[d, "|_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "|_{f^{-1}(W)}"] & \ni & f^\#_U(s) \arrow[d, mapsto] \\
s\big|_W = t\big|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "f^\#_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f^\#_U(s)\big|_{f^{-1}(W)} = f^\#_V(t)\big|_{f^{-1}(W)} \\
t \arrow[u, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^\#_W"] \arrow[u, "|_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[u, "|_{f^{-1}(W)}"'] & \ni & f^\#_V(t) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Affine Schemata 2

2.1 $\operatorname{Spec} A$ als topologischer Raum

Sei im Folgenden A ein kommutativer Ring mit 1 und $\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \lhd A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist $\mathfrak{a} \lhd A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec} A\,.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \operatorname{Spec} A \mid \exists\ \mathfrak{a} \lhd A:\ U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie.*

Beweis (der Topologie-Eigenschaften).

1. Zeige: $\emptyset$, $\operatorname{Spec} A$ offen $\iff$ $\operatorname{Spec} A$, $\emptyset$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$
2. Zeige: U_1, U_2 offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen $\iff M_1, M_2$ abgeschlossen $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$
3. $(U_i)_{i\in I}$ offen $\Rightarrow \cup_{i\in I} U_i$ offen $\iff (M_i)_{i\in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \cap_{i\in I} M_i$ abgeschlossen.
   Dazu: $\cap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$ □

Bemerkung 2.2. Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \operatorname{Spec} A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \lhd A$.

Beispiel 2.3 ($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$). Für $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots\cdot p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für p Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \Leftrightarrow (a) \subseteq (p) \Leftrightarrow p \mid a \Leftrightarrow p \in \{p_1, \ldots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \ldots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

Lemma 2.4. *Sei $x \in \operatorname{Spec} A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\operatorname{Spec} A$ gleich*

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

Beweis.

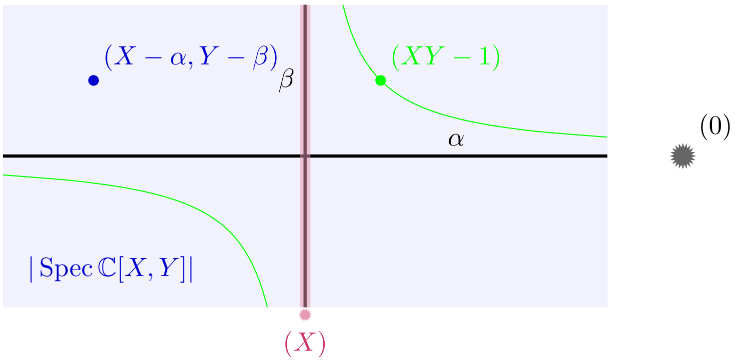
$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \operatorname{Spec} A \text{ abg.} \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \lhd A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} = V(x)$$

□

Bemerkung 2.5. Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: Spec $\mathbb{C}[X,Y]$



Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).

Sei X ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Er heißt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

Beispiel 2.7. Sei $A = \mathbb{C}[X,Y]$.

- $x = (0) \in \operatorname{Spec} A$ ist generisch.
- $x = (X-\alpha, Y-\beta) \lhd A$ ist abgeschlossen, da aus $x \lhd A$ maximal $V(x) = \{x\}$ und somit x abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \lhd A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.
- $x = (XY-1) \lhd A$ ist ebenfalls weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

Definition 2.8 (basisoffene Menge).

Für $f \in A$ nennt man

$$D(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die *zu f gehörige basisoffene Menge*.

Lemma 2.9. *Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ ist eine Vereinigung von $D(f) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ offen und $\mathfrak{p} \in U$, so ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Damit existiert $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$ und $f \in \mathfrak{a}$. Also $(f) \subseteq \mathfrak{a}$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. Damit folgt $D(f) \subseteq U$.

Zusammenfassend gilt für $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ offen: $\forall \mathfrak{p} \in U\ \exists f\mathfrak{p} \in A$: $\mathfrak{p} \in D(f\mathfrak{p}) \subseteq U$. Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f\mathfrak{p})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. $\square$

Lemma 2.10. *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ *gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, d.h. $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus \big(V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})\big)$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ aber nicht $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Also existiert $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Damit ist $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette. □

Definition 2.11 (Radikal).

Für $\mathfrak{a} \lhd A$ heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von $\mathfrak{a}$.

Lemma 2.12. $\sqrt{a} \lhd A$.

Beweis.
- $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ ✓
- Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $r \in A$. Dann $f^n \in \mathfrak{a}$, $r \in A$. Also $(rf)^n \in \mathfrak{a}$ und damit $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}$, $g^m \in \mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned}(f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i}\right) g^m + \left(\sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i}\right) f^n\end{aligned}$$

Da g^m und f^n jeweils in $\mathfrak{a}$ liegen, ist auch die Summe dort. □

Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).

Ein Ideal $\mathfrak{b} \lhd A$ heißt *Radikalideal (radiziell)*, falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

Bemerkung 2.14. Es gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 2.15. *Für* $\mathfrak{a} \lhd A$ *gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

Beweis. „$\subseteq$“ Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $f^n \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also $f^n \in \mathfrak{p}$ und da $\mathfrak{p}$ prim, folgt $f \in \mathfrak{p}$.

„$\supseteq$“ Ist $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, so zu zeigen, dass $f \notin \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. Sei also $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \lhd A \mid a \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$,
- M ist angeordnet durch „$\subseteq$“,
- ist $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $\mathfrak{b} := \cup_{i\in I}\mathfrak{b}_i \lhd A$ mit $\mathfrak{b} \in M$.

Damit hat M mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\mathfrak{b}_{\max} \in M$.

Nun sei behauptet, dass $\mathfrak{b}_{\max} \lhd A$ ein Primideal ist. Dazu sei $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$, wobei wir annehmen, dass $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$. Betrachte $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$, was ein Ideal in A ist, aber nicht in M liegt. Analog künnen wir dies von $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$ sagen. Damit existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \qquad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von $\mathfrak{b}_{\max}$ ist und wir folgern $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$, wodurch man den Widerspruch erhült.

Damit ist $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$ und $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$. □

Satz 2.16. *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt sogar

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Aus $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$.

„$\Rightarrow$“ Aus $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, d.h. $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})}\mathfrak{p}$, folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. □

Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum X heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = A_1 \cup A_2$ mit $A_{1,2} \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X = A_1$ oder $X = A_2$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn Z mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

Beispiel 2.18. Spec $\mathbb{Z}$ ist irreduzibel. Ist nämlich $A_1 \subsetneq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ abgeschlossen, so ist $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für irgendwelche Primzahlen p_i.

Lemma 2.19. *In* Spec A *gilt:*

$$V(\mathfrak{a}) \textit{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \textit{ Primideal.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und mit Satz 2.16 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$.

Für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$, gilt: Ist $xy \in \mathfrak{p}$, so folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \;\Rightarrow\; V(\mathfrak{a}) = \big(V(\mathfrak{a}) \cap V((x))\big) \cup \big(V(\mathfrak{a}) \cap V((y))\big).$$

Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$. Wieder mit Satz 2.16 folgt $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und damit $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

„⇐“ Schreibe $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$. Dann folgt wiederum mit Satz 2.16 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$.
Ist $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$, also $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$, also $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$, so existiert $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für $y \in \mathfrak{c}$, ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ Primideal, also nach Wahl von x ist $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Insgesamt ist $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$ und damit $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$. □

Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von A.

Korollar 2.21. *Es gilt*

$$\operatorname{Spec} A \textit{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Nil}(A) \textit{ Primideal.}$$

Beweis. Lemma 2.19 mit $\mathfrak{a} = (0)$. □

Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlosser Teilmengen, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$.

Lemma 2.23. *Ist A noethersch, so ist auch* $\operatorname{Spec} A$ *noethersch.*

Beweis. Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für geeignete $\mathfrak{a}_i \in \operatorname{Spec} A$, so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in A. □

Satz 2.24.

Ist X noetherschscher topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen, so zerlegt sich

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

in abgeschlosse irreduzible Teilmengen $A_i \subseteq A$. Nimmt man $A_i \nsubseteq A_j$ für $i \neq j$, so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.

Die A_i heißen (irreduzible) Komponenten *von A.*

Beweis. Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen $\mathcal{V} \neq \emptyset$, so hütte man ein inklusionsminimales $A \in \mathcal{V}$, denn falls nicht gübe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit $A_i \in \mathcal{V}$. Da X noethersch, müsste diese Folge stationür werden, wodurch man einen Widerspruch erhült.

Dieses $A \in \mathcal{V}$ hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da $A \in \mathcal{V}$ minimal sind $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$. Aber damit ist $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$. Ein Widerspruch, der wie gewünscht $\mathcal{V} = \emptyset$ liefert.

Eindeutigkeit. Sind

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_r = A_1' \cup \ldots \cup A_s'$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist $A_1 \subseteq A_1' \cup \ldots \cup A_s'$, also $A_1 = (A_1' \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_s' \cap A_1)$. Da A_1 irreduzibel künnen wir oBdA $A_1 = A_1 \cap A_1'$ annehmen. Also ist $A_1 \subseteq A_1'$.

Analog ist $A_1' \subseteq A_k$ für ein $k = 1, \ldots, r$. Zusammenfassend gilt

$$A_1 \subseteq A_1' \subseteq A_k,$$

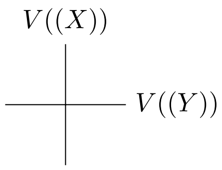
was nach Voraussetzung $k = 1$ impliziert. Also $A_1 = A_1'$.

Nun sukzessive weiter. □

Beispiel 2.25. In Spec $k[X, Y]$ zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$

Im Bild



Beispiel 2.26. Sei k algebraisch abgeschlossen. Betrachte Spec $k[X, Y]$. Die maximalen Ideale sind gerade $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$ für $\alpha, \beta \in k$. Ein abgeschlosser Punkt $\mathfrak{m} \in$ Spec $k[X, Y]$ wird eindeutig durch $(\alpha, \beta) \in k^2$ gegeben. Quelle suchen!

$\mathbb{A}_k^2 :=$ Spec $k[X, Y]$ wird der *2 dimensionale affine Raum über k* genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ liefert

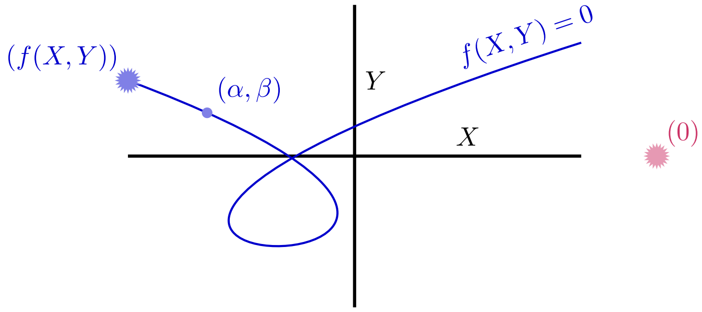
$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_\phi \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

„⇒“ ist klar. Also zu „⇐“. Es ist $f(\alpha, \beta) = 0$, also $f(X, Y) = (X - \beta)h(X, Y)$ für gewisses h. Es ist $f(X, Y) - f(\alpha, Y) = (X - \alpha)g(X, Y)$, da die linke Seite $X = \alpha$ als Nullstelle hat.

$$\begin{aligned}
A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\
&= \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \lhd k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \alpha \ \Rightarrow \ f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \alpha \ \Rightarrow \ f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\
&\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.
\end{aligned}$$

Abbildung 2: $\operatorname{Spec} k[X,Y]$



In $\mathbb{A}_k^2$ hat man aber noch mehr Punkte: Sei $\mathfrak{p} \lhd k[X,Y]$ Primideal, aber nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$ kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise $\mathfrak{p} = (f(X,Y))$ für $f \in k[X,Y]$ irreduzibel, so liegen alle $(\alpha,\beta) \in k^2$ mit $f(\alpha,\beta) = 0$ auf der entsprechenden Menge in k^2, d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X,Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} := (X-\alpha, Y-\beta) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

Lemma 2.27. *Ist A ein Ring, $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$ und $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ die Projektion, so ist*

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} &\to \operatorname{Spec} A \\ \overline{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A.$$

Beweis.

Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).

Ein topologischer Raum X heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist $X = \bigcap_{i\in I} U_i$ mit U_i offen, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset I$ mit $X = \bigcap_{i\in F} U_i$.

X heißt *kompakt*, wenn X hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

Satz 2.29.

Ist A ein Ring, so ist $\operatorname{Spec} A$ *quasi-kompakt.*

Beweis. Wir zeigen: Ist $\emptyset = \bigcap_{i\in I} Z_i$ für abgeschlossene Z_i, so existiert $F \subset I$ endlich mit $\emptyset = \bigcap_{i\in F} Z_i$.

Sei also $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$, $\mathfrak{a}_i \lhd A$ und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i},$$

also insbesondere $1 \in \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i}$ und $1 \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. Ergo

$$1 = a_{i_1} + \ldots + a_{i_r},$$

für $F := \{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$. Nun ist $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{i_r}$, also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

2.2 Spec A als lokal geringter Raum

Wir wollen $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ als die „guten Funktionen“ auf Spec A auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei A ein Ring, dann heißt $S \subseteq A$ *multiplikative Teilmenge*, wenn $1 \in S$ ist und aus $a, b \in S$ auch $ab \in S$ folgt.

Die *Lokalisierung* A_S oder $A[S^{-1}]$ von A bezüglich S ist der Ring

$$A_S := \big(A \times S\big) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in S : \; u(at - bs) = 0.$$

Schreibe $\frac{a}{s} := [(a, s)]$ und definiere eine Ringstruktur auf A_S durch Bruchrechnen.

Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist $S \subseteq A$ wie in Definition 2.30, $\varphi : A \to R$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(S) \subseteq R^\times$, so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A_S \arrow[d, "\exists!"] \\ & R \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wobei $\iota : A \to A_S, \; a \mapsto \frac{a}{1}$.

Beweis. Klar, weil dieses $\psi : A_S \to R$ durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

Beispiel 2.32.

- $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $f \in A$ fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A,\ b \notin \mathfrak{p} \right\}$$
ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Satz 2.33.

Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Dann existiert auf X eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ mit:

i) Es existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$.

ii) Für $f \in A$ betrachte
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(X) & \to & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)\big|_{D(f)}. \end{array}$$
Dann ist $\varphi(f)\big|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$ eine Einheit und der eindeutig durch
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] \arrow[dr] & A_f \arrow[d, "\varphi_f"', "\exists!"] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\cdot|_{D(f)}"] & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{tikzcd}$$
gegebene Ringhomomorphismus φ_f ist ein Isomorphismus.

iii) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ hat man das koanonische Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$
und $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ ist ein Isomorphismus.

2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

Definition 2.34 ($\mathcal{B}$-(Prä)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$ heißt $\mathfrak{B}$-*Prägarbe* auf $X = \operatorname{Spec} A$, wenn $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf
$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$
ist.

$\mathcal{F}$ heißt $\mathfrak{B}$-*Garbe*, wenn $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Prägarbe ist und die Garbenbedingungen für die $D(f)$ erfüllt sind.

Hilfslemma 2.35. Es gilt:

1. $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe.
2. Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe $\bar{\mathcal{F}}$ auf X mit $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$ für alle $D(f) \in \mathfrak{B}$.

Beweis. 1.

TODO

Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der zu einem $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $(U_i, \mathcal{O}_X\big|_{U_i})$ ist ein affines Schema.

Bemerkung 2.37. Beachte dabei: Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ offen, so ist durch

$$\mathcal{F}\big|_U : \ V \mapsto \mathcal{F}\big|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe $\mathcal{F}\big|_U$ auf U definiert.

Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y).$$

mit $f : X \to Y$ stetig und $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ Garbenmorphismus auf Y so dass $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ lokaler Ringhomomorphismus

Bemerkung 2.39. Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ring} & \to & \mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}} \\ A & \mapsto & (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{rrcl} f : & \operatorname{Spec} B & \to & \operatorname{Spec} A \quad , \\ & \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}.$$

Letzterer ist für $g \in A$ gegeben durch

$$\begin{array}{rrcl} f^\#_{D(g)} : & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) = A_g & \to & \big(f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}\big)(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ & \dfrac{a}{g^n} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei wir durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

$$\begin{array}{rrcl} f^\#_{\mathfrak{p}} : & A_{\mathfrak{p}} & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{q}} \\ & \dfrac{a}{\gamma} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\gamma \notin \mathfrak{p}$ (also $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Beispiele 3

3.1 Spec $\mathbb{Z}$

Jeder Ring A hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & A \\ 1 & \mapsto & 1 \\ z & \mapsto & \begin{cases} 1+1+\ldots+1 & z>0 \\ 0 & z=0 \\ -1-1-\ldots-1 & z<0 \end{cases}. \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ von affinen Schemata. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist somit ein *finales Objekt* in der Kategorie $\mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}}$.

Ferner können wir zusammenfassen

Offene Mengen $\emptyset \neq U \subseteq \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ offen $\Leftrightarrow U = \begin{cases} \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \ldots, (p_r)\} & , r \in \mathbb{N}_0 \\ \emptyset \end{cases}$

Basisoffene Mengen $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$ für $f = p_1^{\nu_1} \ldots p_r^{\nu_r}$.

Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(D(f)) = \mathbb{Z}_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z},(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \nmid b, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.2 Spec k für einen Körper k

Als topologischer Raum $\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$.

Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\{(0)\}) = k$.

Bemerkung 3.1. Sei A ein Ring. Angenommen wir haben $\operatorname{Spec} A \xrightarrow{(f, f^\#)} \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k, so haben wir

$$f^\#_{\operatorname{Spec} k} : k = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} k) = A,$$

wobei aus $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(f^{-1}(\{(0)\})) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ resultiert. Insgesamt ist A also eine k-Algebra (d.h. ein Ring zusammen mit $k \to A$).

Bemerke hierbei „Grothendiecks Gesamtphilosophie“:

> *Alles relativ lesen!*

Definition 3.2 (S-Schema).

Sei S ein Schema. Dann ist ein S-*Schema* ein Schema X zusammen mit einem Strukturmorphismus $X \xrightarrow{\varphi} S$. Dies ergibt die Kategorie $\mathbf{Sch}_S$, wenn man

$$\operatorname{Hom}(X \xrightarrow{\varphi} S, Y \xrightarrow{\varphi} S) := \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd} \right\}$$

setzt.

Beispiel 3.3. $\mathbf{Sch}_k := \mathbf{Sch}_{\operatorname{Spec} k}$ sind die sog. k-*Schemata*. Ein Beispiel hierfür ist $\operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \to \operatorname{Spec} k$ via $k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$.

Bemerkung 3.4. Sei X ein Schema und $x \in X$ und weiter $\mathfrak{m}_x \lhd \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal. Dann ist

$$\kappa(x) := k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

der *Restklassenkörper von* x.

Betrachte nun $(f, f^\#) : \operatorname{Spec} k \to X$ mit

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Spec} k(x) &\to X \\ \eta_x &\mapsto x, \end{aligned}$$

wobei topologisch gesehen $\eta_x \in \operatorname{Spec} k(x)$ der einzige Punkt dieses Schemas ist. Für $U \subseteq X$ offen haben wir:

$$f_U^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k(x)}(U) = \begin{cases} 0 & x \notin U \\ k(x) & x \in U. \end{cases}$$

Im Fall $x \in U$ geht dies via

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x).$$

Ist umgekehrt $(f, f^\#) : \operatorname{Spec} k \to X$ ein Schemamorphismus, so setze $x := f((0)) \in X$ und $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}$ liefert einen Ringhomomorphismus der Halme:

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k,(0)} = k.$$

Dieser ist lokal (also $f_x^\#(\mathfrak{m}_x) = (0)$). Damit ist

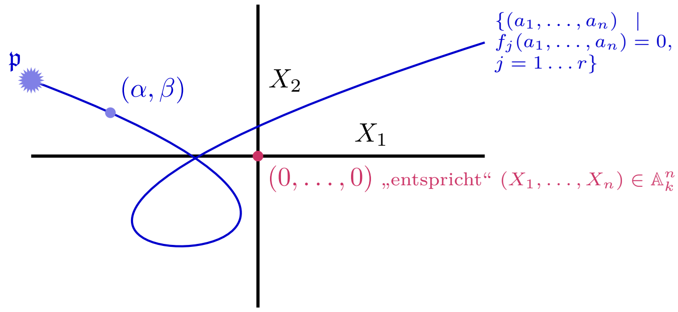
$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \xhookrightarrow{f_x^\# \mod \mathfrak{m}_x} f_x^\# \mod \mathfrak{m}_x k$$

wohldefiniert und somit ist $k \mid k(x)$ eine Körpererweiterung.

Zusammengefasst haben wir:

Einen Punkt $x \in X$ wählen mit Restklassenkörper $k(x)$ und eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$.	$\Longleftrightarrow$	Einen Schemamorphismus $\operatorname{Spec} k \to X$ wählen für eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$.

Abbildung 3: Spec $k[X_1, \dots, X_n]$



3.3 Der Affine n-dimensionale Raum über k

Sei k wieder ein Körper. Der affine n-dimensionale Raum über k ist $\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$.

Wir erinnern an den Hilbertschen Nullstellensatz:

Satz 3.5 (Hilbertscher Nullstellensatz).

Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann ist jedes maximale Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ von der Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

Beweis. ohne Beweis. □

Wir haben bereits gezeigt:

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n, \qquad \text{via } (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Sei $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$ ein nicht maximales Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ (die Darstellung ist nach Satz 3.5) möglich, so gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Wir können dies in Abbildung 3 „sehen“.

3.4 Weiteres Beispiel

Betrachte $k[\![X_1, \dots, X_n]\!] = k[\![X_1, \dots, X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$ mit $R[\![X]\!] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in R\}$.

Bemerkung 3.6. $g \in k[\![X_1, \dots, X_n]\!] \setminus (X_1, \dots, X_n)$ ist eine Einheit.

Beweis. Idee: Ansatz für eine Variable: $g(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$. Dann

$$1 = g(X)h(X) = \underbrace{a_0 b_0}_{} = 1 + (\underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{} = 0)X + \dots$$

□

Funktor Spec Wir haben den Funktor Spec: Die Ringhomomorphismen

Lokalisierung an $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$

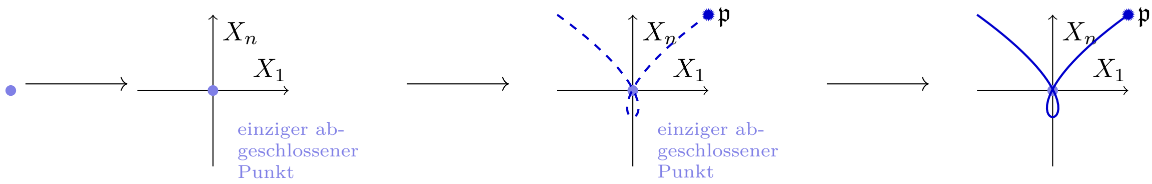
$$\begin{array}{ccccccc}
k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_N]_{(X_1, \dots, X_n)} & \longrightarrow & k[\![X_1, \dots, X_n]\!] & \longrightarrow & k \\
f & \longmapsto & \dfrac{f}{1} & & & & \\
 & & \dfrac{f}{g} & \longmapsto & fg^{-1} & & \\
 & & & & h & \longmapsto & h(0)
\end{array}$$

induzieren

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \operatorname{Spec} k & \longrightarrow & k[\![X_1,\dots,X_n]\!] & \longrightarrow & k[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n] \\
\text{topologisch:} & (0) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n). \\
 & & & \text{einziger abgeschlossener Punkt} & & \text{einziger abgeschlossener Punkt} & & \text{entspricht dem abgeschlossenen Punkt } (0,\dots,0)\in k^n
\end{array}$$

Dies ist ein Homöomorphismus auf $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^n_k \mid \mathfrak{p} \subseteq (X_1,\dots,X_n)\} = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq \mathbb{A}^n_k$.

Was passiert aber auf Schemaniveau?



Betrachte dazu

$$\operatorname{Spec} k \longrightarrow k[\![X_1,\dots,X_n]\!]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[X_1,\dots,X_N]_{(X_1,\dots,X_n)}/\mathfrak{p} \longrightarrow \operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{p} \approx V(\mathfrak{p})$$

Nehmen wir das explizite Beispiel $\mathfrak{p} = (Y^2 - X^2(X+1))$. Es ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $V(\mathfrak{p})$ irreduzibel.

Beachte: $1 + X \in k[\![X]\!]$ hat eine Wurzel, wie man durch folgenden Ansatz mit $h(X) = a_0 + a_1X + \dots$ sieht:

$$1 + X = (h(X))^2 = a_0^2 + 2a_0a_1X + \dots$$

Setze $a_0 := 1$ oder -1 und löse sukzessizve auf. Demnach ist $Y^2 - X^2(X+1) = (Y - Xh(X))(Y + Xh(X))$ nicht mehr prim, also $V(\mathfrak{p}) \subseteq k[\![X,Y]\!]$ nicht mehr irreduziebel!

Betrachte genauer

$$\begin{array}{ccccc}
k[\![u,v]\!]/(uv) & \xrightarrow{\cong} & k[\![z,w]\!]/(z^2-w^2) & \xrightarrow{\cong} & k[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^2(h(X))^2) \\
u \longmapsto z+w & & z \longmapsto Y & & \\
v \longmapsto z-w & & w \longmapsto Xh(X) & &
\end{array}$$

In Bildern:

$$\operatorname{Spec} k[\![u,v]\!]/(uv) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^2(X+1))$$

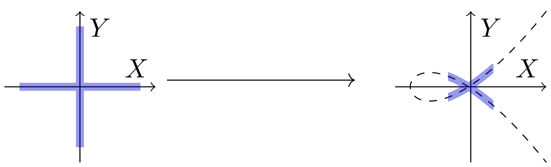
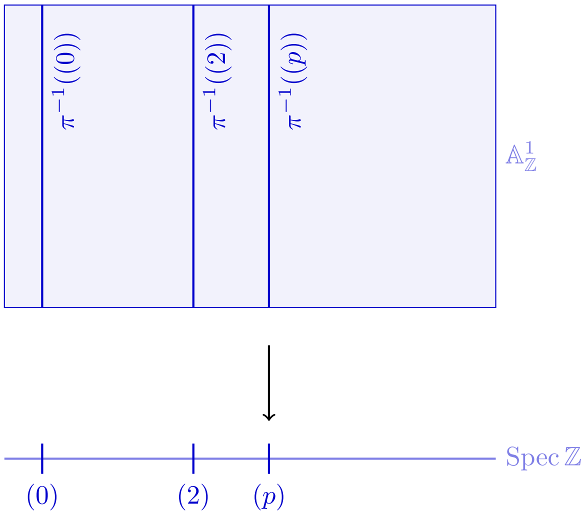


Abbildung 4: Veranschaulichung von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$



3.5 Spezielles Beispiel $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$

Wir haben $\pi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Topologisch ist

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{p \text{ prim}} \pi^{-1}((p)) \cup \pi^{-1}((0)).$$

Abbildung 4 verdeutlicht dies.

Zu $\pi^{-1}((0))$ Betrachte nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$, so gilt $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$.

Betrachte $S := \mathbb{Z} \backslash \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ und die Lokalisierung $g : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]_S$. Es ist klar: $\mathbb{Z}[X]_S = \mathbb{Q}[X]$

Ferner gilt $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[X] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild:

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \mid \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)\} = \pi^{-1}(0),$$

Zu $\pi^{-1}((p))$ Es ist $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p)) \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$. Dann betrachte $\rho : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$ und $\rho^* : \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$. Wegen $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X] / \ker \rho$ ist ρ^* ein Homöomorphismus auf

$$V(\ker \rho) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \ker \rho \subseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1}((p)) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

Zusammengefasst ist:

$$\pi^{-1}((0)) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$$
$$\pi^{-1}((p)) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p},$$

wobei die Gleichheiten topologisch zu lesen sind.

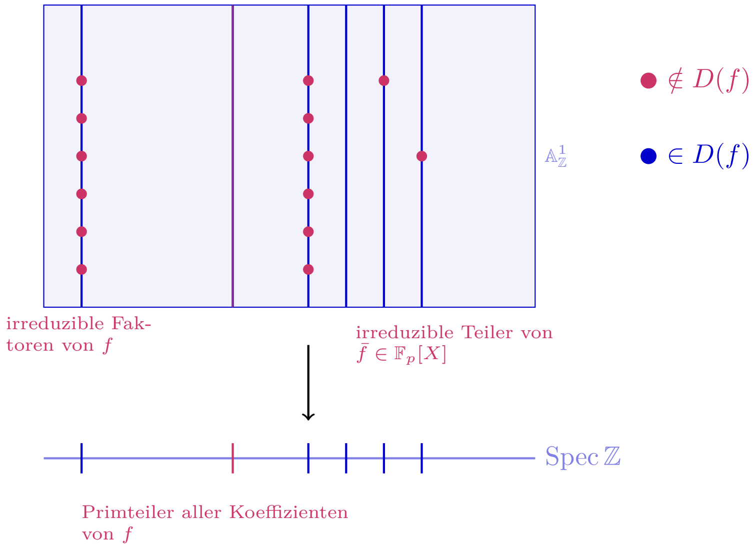
Betrachte $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$

1. Fall. $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, also

$$\mathfrak{p} = (\mu(X))$$

mit $\mu(X) \in \mathbb{Z}[X]$ einem primitiven, irreduziblen Polynom.

Abbildung 5: Veranschaulichung von $D(f) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$



2. Fall. $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$, so ist $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$ für ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[X]$, also $\mathfrak{p} = \rho^{-1}((q(X)))$ für ein irreduzibles $q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ oder (0). Dann ist

$$\mathfrak{p} = (r(X), p)$$

mit $r(X) \in \mathbb{Z}[X]$ und $r(X) \equiv q(X) \bmod p$.

Es stellt sich die Frage, wie für $f \in \mathbb{Z}[X]$ die $D(f) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ aussehen. Dazu

1. Fall $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0))$**.** Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dann $f(X) = \xi q_1(X)^{\nu_1} \dots q_r(X)^{\nu_r}$ und es gilt

$$f \notin \mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} = (q(X))$$

mit $q \neq q_1, \dots, q_r$.

2. Fall $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$**.** $f(X) \notin (r(X), p)$ mit $r(X) \mod p \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel. Für eine Primzahl p, betrachte $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$. Ist $\bar{f}(X) = 0$, so ist $f(X) \in (r(X), p)$ für alle $r(X)$. Für $\bar{f}(X) = \bar{q}_1(X)^{\nu_1} \dots \bar{q}_s(X)^{\nu_s}$, ist $f(X) \in (q_i(X), p)$ für diese i.

Dargestellt ist dies wieder in Abbildung 5.

3.6 Diskrete Bewertungsringe

Definition 3.7 (Diskrete Bewertung).

Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper k ist eine Abbildung

$$v : k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

so dass

1. $v(0) = \infty$, $v(x) \in \mathbb{Z}$ für $x \neq 0$,
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle x, y und
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle x, y.

Bemerkung 3.8. Wählt man $q > 1$ (in $\mathbb{R}$), so ist

$$|\cdot| : k \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| := q^{-v(x)}$$

eine Betragsfunktion mit

1. $|x| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$. Die erste Ungleichung wird auch nicht-archimedische Dreiecksungleichung genannt.

Definition 3.9 (Bewertungsring).

Ist (k, v) ein diskret bewerteter Körper, so ist

$$\mathcal{O} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$$

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := \{x \in k \mid v(x) > 0\} = \{x \in k \mid |x| < 1\} \lhd \mathcal{O},$$

der *Bewertungsring* zu k.

Ein *diskreter Bewertungsring (dvr)* ist ein Integritätsbereich R, zusammen mit diskreter Bewertung $v : K = \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass $R = \mathcal{O}$ gilt.

Ferner gilt $\mathcal{O}$ ist ein Hauptidealbereich (PID), $k = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$.

Ist $\pi \in \mathcal{O}$ mit $v(\pi) = 1$, so ist $\mathfrak{m} = (\pi)$ und $\mathcal{O}$ hat genau die Ideale (π^k) für $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.10. Der Wertebereich $v(k \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe, also $v(k \setminus \{0\}) = d\mathbb{Z}$ für ein d. Wir können meistens oBdA $d = 1$ annehmen.

Bemerkung 3.11. Beachte: Für $x \in \mathcal{O}$ gilt

$$v(x) = n \ \Leftrightarrow\ x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Für $\xi = \frac{x}{y} \in K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$ ist $v(\xi) = v(x) - v(y)$.

Beweis (von Definition 3.9). TODO. $\square$

Bemerkung 3.12.

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O} = \{(0), (\pi) = \mathfrak{m}\},$$

da in Hauptidealbereichen jedes Primideal $\neq (0)$ auch maximal ist.

Definition 3.13.

Ist $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring, so heißt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$$

der *Restklassenkörper* von $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt

- von *verschiedener Charakteristik*, wenn für $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$, $\operatorname{char} K = 0$ und $\operatorname{char} k \neq 0$ ist und
- von *gleicher Charakteristik*, wenn $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k$.

3.6.1 Beispiele

1. Sei k ein Körper,

$$K := k((t)) := \operatorname{Quot} k[\![t]\!] = \left\{ f(t) = \sum_{l=-N}^{\infty} a_t t^l \mid a_l \in k \right\}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} v: & k[\![t]\!] & \to & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ & f(t) = \sum a_l t^l & \mapsto & \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid t^{-k} f(t) \in k[\![t]\!]\} = \min\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{array}$$

Auf $k((t))$ Dies ist eine diskrete Bewertung mit $\mathcal{O} = k[\![t]\!]$:

$$\begin{array}{rrcl} v: & k((t)) & \to & \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\} \\ & f(t) = \sum a_l t^l & \mapsto & = \min\{l \in \mathbb{Z}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{array}$$

$k((t))$ trägt damit $|\cdot| := q^{-v(\cdot)}$, also ist $k((t))$ ein metrischer Raum mit $d(x, y) := |x - y|$, dieser ist vollständig.

Für den Restklassenkörper gilt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k[\![t]\!]/tk((t)) \cong k,$$

da $\mathfrak{m} = tk[\![t]\!] = (t)$. t heißt dabei *Uniformierende*.

2. Betrachte

$$\begin{array}{rccl} \nu_p: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & \dfrac{a}{b} & \mapsto & v(a) - v(b) \end{array}$$

mit $v(a) = \max\{k: \ p^k \mid a\}$ für eine Primzahl p.

ν_p ist eine diskrete Bewertung, die *p-adische Bewertung*. Ferner ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form} \mid p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

und $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$ und

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_p.$$

$|\cdot|_p := p^{-\nu_p(\cdot)} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *p-adischer Betrag*. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ist jedoch nicht vollständig, da z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ ein Cauchyfolge bildet.

Man erhält die Vervollständigungen

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, |\cdot|) &\rightsquigarrow \mathbb{R} \\ (\mathbb{Q}, |\cdot|_p) &\rightsquigarrow \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

Zurück zu Schemata Sei $\mathcal{O}$ ein dvr, so ist $\operatorname{Spec} \mathcal{O} = \{(0), (\pi)\}$. Dabei ist (0) der generische Punkt mit $\overline{\{(0)\}} = V((0)) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ und (π) ein abgeschlossener Punkt, genannt der *spezielle Punkt* in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$.

Beispiel 3.14. Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ und k algebraisch abgeschlossen. Wir betrachten

$$E := \operatorname{Spec} A \quad \text{mit } A := k[X, Y]/(Y^2 - (X^3 + aX + b)).$$

Dies ist der affine Teil einer *elliptischen Kurve*, wenn $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \in k$.

Wir haben

$$|E| \cong \{(x_0, y_0) \in k^2 \mid y_0^2 - (x_0^3 + ax_0 + b) = 0\}.$$

Sei $(x_0, y_0) \in |E|$, oder besser $\mathfrak{p} := (X - x_0, Y - y_0) \in E$. Es ist $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ ein dvr.

Dazu:

1. Fall $y_0 \neq 0$**.** , so ist $\mathcal{O}_{E,y} = A_\mathfrak{p}$. Betrachten wir $\frac{\bar{f}(X,Y)}{\bar{g}(X,Y)} \in A_\mathfrak{p}$, also $\bar{f}, \bar{g} \in A$ und $\bar{g} \notin (X - x_0, Y - y_0)$, d.h. $\bar{g}(x_0, y_0) \neq 0$. Ferner ist

$$Y^2 - (X^3 + aX + b) = (Y + y_0)(Y - y_0) + (X^2 x_0 X + (x + x_0^2))(X - x_0)$$

und wenn $y_0 \neq 0$, so ist $(Y + y_0) \notin (X - x_0, Y - y_0)$. Demnach ist $Y + y_0 \in A_\mathfrak{p}^\times$, also gilt in $A_\mathfrak{p}$:

$$Y - y_0 = \frac{X^2 + x_0 X + (a + x_0^2)}{Y + y_0}(X - x_0)$$

und $(X - x_0, Y - y_0)A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = (X - x_0)A_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptideal.

Also ist

$$\begin{array}{rccl} v: & A_\mathfrak{p} & \to & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ & a & \mapsto & \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in (X - x_0)^k\} \end{array}$$

eine diskrete Bewertung!

2. Fall $y_0 = 0$**.** Dies geht analog und man sieht, dass

$$X^2 + x_0 X + (a + x_0^2) \notin (X - x_0, Y),$$

da nach Voraussetzung $4a^2 + 27b^2 \neq 0$. Also ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = (Y - y_0)A_\mathfrak{p}$.

Bemerkung 3.15. Sei $K(E) := \mathcal{O}_{E,(0)} = \mathrm{Quot}(A) = A_{(0)}$ der *Funktionenkörper* von E. Für $\mathfrak{p} \in E$ hat man die *Null-/Polstellenordnung*

$$v_\mathfrak{p} : K(E) \to \mathrm{Quot}(A_\mathfrak{p}) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Projektive Schemata 4

4.1 Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie

Sei k ein Körper. So ist

$$\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1}) := \{L \subset k^{n+1}\text{UVR} \mid \dim_k L = 1\}$$

der n-dimensionale projektive Raum.

Homogene Koordinaten $[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ mit $0 \neq (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$ definiert als

$$[x_0 : \cdots : x_n] := \operatorname{span}_k \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $[x_0 : \cdots : x_n] = [y_0, \ldots, y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times$ mit $x_i = \lambda y_i \forall i$. Damit gilt dann, dass $\mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$, wobei $\sim$ die gerade eben definierte Äquivalenzrelation bezeichnet.

Überdeckung $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit

$$\begin{array}{ccccc} U_i & = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} & \ni & [x_0 : \cdots : x_0] \\ {\scriptstyle h_i}\big\downarrow{\scriptstyle b_{ij}} & & & \big\downarrow \\ k^n & & \ni & \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

als "Karten".

Beachte $\mathbb{P}^n(k) \backslash U_i = \{[x_0 : \cdots : 0 : \cdots : x_n] \mid (x_0, \ldots, \cancel{x_i}, \ldots, x_n) \neq 0\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}^{n-1}(k)$

Bemerkung 4.1.
- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
- $\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
- $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$

4.2 $\mathbb{P}^n(k)$ als Schema

Statt einem Körper k können wir einen Ring A betrachten.

4.2.1 1. Variante

Betrachte $U_i := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \not{i}, \dots, x_n] = \mathbb{A}^n_A$.

In $\mathbb{RP}^n$ würden wir diese mit dem Kartenwechsel verkleben:

$$(y_0, \dots, \not{i}, \dots, y_n) \mapsto [y_0, \dots, \underset{i\text{-te}}{1}, \dots, y_n]$$

$$\begin{tikzcd}
 & U_i \cap U_j & \\
h_i(U_i \cap U_j) \arrow[ur] \arrow[rr, "\text{Kartenwechsel}"] \arrow[d, equal] & & h_j(U_i \cap U_j) \arrow[ul] \arrow[d, equal] \\
\{(y_0, \dots, \not{i}, \dots, y_n) \mid y_j \neq 0\} \arrow[rr] & & \{(z_0, \dots, \not{j}, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\}
\end{tikzcd}$$

$$(y_0, \dots, \not{i}, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \underset{i\text{-te}}{\frac{1}{y_j}}, \dots, \not{j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right)$$

Betrachte also

$$\begin{aligned}
U_{ij} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \not{i}, \dots, x_n][x_j^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \not{i}, \dots, x_n] = U_i \\
U_{ji} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \not{j}, \dots, x_n][x_i^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \not{j}, \dots, x_n] = U_j
\end{aligned}$$

und wähle einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rccl}
\phi_{ij}: & U_{ij} & \to & U_{ji} \\
 & x_k & \mapsto & \dfrac{x_k}{x_j} \quad \text{für } k \neq i \\
 & x_i & \mapsto & \dfrac{1}{x_j}.
\end{array}$$

Es gilt nun $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, denn

$$\begin{aligned}
U_{ij} \cap U_{ik} &= D(x_j x_k) \subseteq U_i \\
U_{ji} \cap U_{jk} &= D(x_i x_k) \subseteq U_j
\end{aligned}$$

sowie

$$\phi_{ik}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$$

Wir haben also eine Familie $(U_i)_{i=0,\dots,n}$ von (affinen) Schemata. Für jedes Paar (i, j) eine offene Imersion $U_{ij} \hookrightarrow U_i$ mit (affinen) Schemata und Isomorphismen $\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$, so dass $\phi_{ik}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$.

Bleibt zur Übung lediglich zu zeigen, dass ein (bist auf Isomorphie) eindeutiges Schema $\mathbb{P}^n_A$ mit Überdeckung $\mathbb{P}^n_A = \bigcup_{i=0}^n V_i$ für $V_i \subseteq \mathbb{P}^n_A$ offen und Isomorphismen $V_i \xrightarrow{\cong} U_i$ von (affinen) Schemata existiert.

4.2.2 2. Variante (Die Proj-Konstruktion)

Definition 4.2 (graduierte A-Algebra).

Sei A ein Ring, dann heißt

$$S := \oplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$$

eine *graduierte A-Algebra*, wenn

- S ein Ring,
- $S_n \subset S$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul,
- $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$ ist,
- wir einen Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} S$ haben und
- die S_n A-Untermoduln sind.

Ein $s \in S_n$ heißt *homogen vom Grad n*.

Definition 4.3 (homogenes Ideal).

Ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd S$ heißt *homogen*, wenn

$$\mathfrak{a} = \oplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{a} \cap S_n.$$

Lemma 4.4. *Es ist äquivalent*

- $\mathfrak{a}$ *homogen,*
- $\mathfrak{a}$ *wird von homogenen Elementen erzeugt*
- *Aus $a \in \mathfrak{a}$ mit $a = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$ für $a_n \in S_n$ folgt $a_n \in \mathfrak{a}$.*

Beweis. leicht. □

Beispiel 4.5. $S = A[x_0, \ldots, x_n] = \oplus_{m \geq 0} S_m$ mit

$$S_m = \{f(x_0, \ldots, x_n) \mid f \text{ homogen von Grad } m\},$$

d.h.

$$f \in S_m \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1}} \alpha_\nu X_0^{\nu_0} \ldots X_n^{\nu_n} \quad \text{mit } \nu_0 + \ldots + \nu_n = m.$$

Definition 4.6 (Proj(S)).

Setze $S_+ := \oplus_{n \geq 1} S_n$, dann ist das *projektive Spektrum* $\operatorname{Proj} S$ *von* S definiert als

$$\operatorname{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S \text{ homogen} \mid S_+ \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

Definition 4.7 (Zariski Topologie auf Proj(S)).

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \lhd S$ setze

$$V_+(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Proj}(S).$$

Dann bilden diese $V_+(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der *Zariski-Topologie auf* $\operatorname{Proj}(S)$.

Beweis. Wie im inhomogenen Fall. □

Bemerkung 4.8. Ein homogenes $\mathfrak{a} \lhd S$, $\mathfrak{a} \neq S$, ist prim genau dann, wenn gilt:

$$xy \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathfrak{a} \text{ oder } y \in \mathfrak{a}$$

für alle homogenen x, y.

Definition 4.9 (basisoffenen Mengen auf $\mathrm{Proj}(S)$).

Analog zu $\operatorname{Spec} A$ bilden für $f \in S$ die *basisoffenen Mengen in* $\mathrm{Proj}(S)$

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \subseteq \mathrm{Proj}(S)$$

eine Basis der Topologie auf $\mathrm{Proj}(S)$.

Definition 4.10 (homogene Lokalisierung).

- Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ heißt

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{\frac{s}{t} \mid s, t \in S,\ t \notin \mathfrak{p},\ s, t \text{ homogen von gleichem Grad}\right\}$$

homogene Lokalisierung von $\mathfrak{p}$.

- Für $f \in S$ homogen von Grad m heißt

$$S_{(f)} := \left\{\frac{s}{f^k} \mid s \in S,\ k \in \mathbb{N}_0,\ s \text{ homogen von Grad } k \deg f\right\}$$

homogene Lokalisierung bezüglich f.

Lemma 4.11. *Es gilt: $S_{(\mathfrak{p})}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal*

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} := \left\{\frac{s}{t} \mid s \in \mathfrak{p}\right\}.$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

Satz 4.12.

Auf $\mathrm{Proj}(S)$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$ mit:

1. *Für alle homogenen $f \in S_+$ hat man den Isomorphismus*

$$(\varphi, \varphi^\#) : \left(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}\big|_{D_+(f)}\right) \to \operatorname{Spec}(S_{(f)}, \mathcal{O}_{S_{(f)}})$$

2. *Diese induzieren Isomorphismen*

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S),\mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Damit wird $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ zu einem Schema.

Beweis. „analog“ zum Beweis für Spec mit nachfolgendem Lemma. □

Lemma 4.13. *Ist $f \in S_+$ homogen, so ist*

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & D_+(f) & \to & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $S \xrightarrow{\lambda} S_f \xleftarrow{\iota} S_{(f)}$, so haben wir

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} S & \operatorname{Spec} S_f \arrow[l, "\lambda^*"'] \arrow[dd, "\iota^*"] \\ D(f) \arrow[ur, "\lambda^*", "\approx"'] & \\ D_+(f) \arrow[u, hook, "\text{stetig}"] \arrow[r, "\phi"] & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathfrak{p}S_f \arrow[dd] \\ \mathfrak{p} \arrow[ur, mapsto] & \\ \mathfrak{p} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{tikzcd}$$

Die Stetigkeit im linken Diagramm folgt aus der Tatsache, dass $V_+(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Proj}(S)$ und $\operatorname{Proj}(S)$ trägt die Teilraumtopologie von $\operatorname{Spec} S$. Damit ist ϕ stetig.

Wir wollen die Umkehrabbildung von ϕ angeben:

$$\begin{array}{rcl} D_+(f) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q}. \end{array}$$

Den Rest zeigen nachstehende Hilfslemmata. $\square$

Hilfslemma 4.14. $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$ ist homogenes Primideal in S.

Beweis.

$$\mathfrak{q}S_f = \left\{ \frac{b}{f^l}\frac{c}{f^n} \in S_f \;\middle|\; \begin{array}{l} b \text{ homogen, } \deg b = l \deg f \\ \frac{b}{f^n} \in \mathfrak{q},\ c \in S, n \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

Bemerke, dass $\mathfrak{p}$ ein homogenes Ideal ist, weil $\mathfrak{q}S_f$ es ist. Genauer: $S_f = \oplus_{n \geq 0} S_{f,n}$ mit

$$S_{f,n} := \left\{ \frac{c}{f^m} \mid c \text{ homogen, } \deg c - m \deg f = n \right\}.$$

Es bleibt also zu zeigen: Sind $a, a' \in S$ homogen und $aa' \in \mathfrak{p}$, so folgt $a \in \mathfrak{p}$ oder $a' \in \mathfrak{p}$.

Sei dazu $r = \deg a$, $s = \deg a'$. Aus $aa' \in \mathfrak{p}$ folgt $\lambda(aa') = \frac{aa'}{1} \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k \in \mathfrak{q}S_f$, also $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k = \frac{b}{f^l}\frac{c}{f^n}$ wie oben. Potenzieren mit $\deg f$ ergibt

$$\frac{a^{k \deg f} a'^{k \deg f}}{f^{kr} f^{ks}} = \frac{b^{\deg g}}{f^{l \deg f}} \frac{c^{\deg f}}{f^{n \deg f}} \frac{1}{f^{kr} f^{ks}} \in S_f.$$

$\square$

Leider noch nicht fertig :-(

wir definieren $\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj}(A[X_0, \ldots, X_n])$ als Schema. Dabei stellen sich aber die Fragen, was dabei $D_+(X_i)$ sein soll und ob die beiden Varianten übereinstimmen.

Lemma 4.15. *Die beiden Varianten der Definition von $\mathbb{P}^n_A$ stimmen überein und es gilt*

$$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} S_{(X_i)} \cong \mathbb{A}^n_A.$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

4.3 Immersionen und projektive A-Schemata

Definition 4.16 (offene und abgeschlossene Immersion).

Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt

1. *offene Immersion*, wenn es $U \subseteq^\circ X$ gibt, so dass

$$f : (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\cong} (U, \mathcal{O}_X\big|_U) \xhookrightarrow{(\iota,\iota^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$$

2. *abgeschlossene Immerson*, wenn gilt:
   - f ist topologisch ein Homöomorphismus auf $\operatorname{im} f := Z \subset X$ abgeschlossen,
   - $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ ist ein surjektiver Garbenmorphismus, d.h. für alle $y \in Y$ ist

   $$f^\#_{(f(y))} : \mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

   surjektiv.

   Wir schreiben dann auch $Y \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X \to Y$.

Beispiel 4.17. Ist A ein Ring, $a \lhd A$, so induziert

$$A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{a}$$

eine abgeschlossene Immersion

$$f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

Bemerkung 4.18. Es ist $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. Aber es folgt nicht notwendigerweise $A/\mathfrak{a} \overset{?}{\cong} A/\mathfrak{b}$!

Dazu betrachte einen Ring A mit nilpotenten Elementen, d.h. $\operatorname{Nil} A := \sqrt{(0)} \neq (0)$ und

$$f : \operatorname{Spec} A/\operatorname{Nil}(A) \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$$

ist eine abgeschlossene Immersion mit

$$\operatorname{im} f = V(\operatorname{Nil}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \operatorname{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} A.$$

Jedoch ist dies *kein* Isomorphismus.

Definition 4.19 (abgeschlossenes Unterschema).

Ist $f : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so nennen wir Y ein *(bzgl. f) abgeschlossenes Unterschema von X*.

Definition 4.20 (projektives Schema über A).

Sei A ein Ring. Ein *projektives Schema über A* ist ein A-Schema X mit einer abgeschlossenen Immersion, so dass

$$\begin{tikzcd} \iota : X \arrow[rr, hook, "|" marking] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_A \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert.

Bemerkung 4.21. **Leider noch nicht fertig :-(**

4.3.1 Beispiele

Zunächst ein etwas abstrakteres Beispiel.

Satz 4.22.

Sei $S := A[X_0, \dots, X_n]$. Ist $\mathfrak{b} \lhd S$ ein homogenes Ideal, so ist $B := S/\mathfrak{b}$ in natürlicher Weise eine graduierte A-Algebra und $\mathrm{Proj}(B)$ ein projektives A-Schema.

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

Und nun einige konkrete!

1. $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k)$ und $\mathbb{P}^n_k$. Sei k ein Körper. Wir haben $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k) := k^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$ und dagegen $\mathbb{P}^n_k := \mathrm{Proj}\, k[T_0, \dots, T_n]$. Eine algebraische Menge in $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k)$ ist per definitionem

$$Z := \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

für $f_1(T_0, \dots, T_n), \dots, f_r(T_0, \dots, T_n) \in k[T_0, \dots, T_n]$ homogen.

Satz 4.23.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{P}^n_{klass}(k) & \to & \mathbb{P}^n_k \\ & [x_0 : \ldots : x_n] & \mapsto & \langle x_i T_j - x_j T_i \mid i, j \rangle \end{array}$$

ist eine Bijektion auf

$$\mathbb{P}^n_k(k) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}^n_k \mid \mathfrak{p} \textit{ ist } k\textit{-rational}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{P}^n_k).$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

Bemerkung 4.24. Wir haben dies auch schon affin gesehen:

$$\begin{array}{rcl} k^n = \mathbb{A}^n_{\text{klass}}(k) & \to & \mathbb{A}^n_k = \mathrm{Spec}\, k[X_1, \dots, X_n] \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) \end{array}.$$

Bemerkung 4.25. Sei X ein Schema. Wir erinnern daran, dass

$$X(K) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\, k, X) = \{(\varphi, \varphi^{\#}) : \mathrm{Spec}\, k \to X\}$$

mit

$$\varphi_\eta : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k, \eta} = k$$

mit $x = \varphi(\eta)$, wobei topologisch $\mathrm{Spec}\, k = \{\eta\}$. Damit haben wir

$$\overline{\varphi^n_\eta} : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x) \hookrightarrow k$$

Wir folgern eine Seite später dass $k(x) \cong k$ kanonisch. Das ist mir nicht klar :-(

(Körperhomomorphismen sind immer injektiv) und wir erhalten folgende 1-1 Beziehung:

$$X(k) \overset{\text{1-1}}{=} \{x \in X \text{ zusammen mit Inklusionen } \iota : k(x) \hookrightarrow k\}.$$

Beachte dabei:

$$X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sch}) \quad \rightsquigarrow \quad X(k) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\, k, X)$$

$$Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sch}|_k) \quad \rightsquigarrow \quad Y(k) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}|_k}(\mathrm{Spec}\, k, X) = \left\{ \begin{tikzcd} \varphi : \mathrm{Spec}\, k \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\, k & \end{tikzcd} \right\}$$

In diesem Sinne ist $\mathbb{P}^n_k$ als k-Schema zu lesen mit $\mathbb{P}^n_k \to \mathrm{Spec}\, k$.

2. Projektiver Abschluss Sei $\mathfrak{a} \lhd k[Y_1, \dots, Y_n]$, so hat man die abgeschlossene Immersion

$$\operatorname{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

mit Bild $V(\mathfrak{a})$.

Betrachte die Homogenisierung von $\mathfrak{a}$ in $k[T_0, \dots, T_n]$: Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_1)$. Definiere

$$f_i^{\text{homo}}(T_0, \dots, T_n) := T_0^{\deg f_i} f_i(\tfrac{T_1}{T_0}, \dots, \tfrac{T_n}{T_0}) \in k[T_0, \dots, T_n].$$

Damit können wir nun folgenden Satz formulieren.

Satz 4.26.

Ist $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ eine abgeschlossene Immersion, $X = \operatorname{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$, so nennen wir

$$\bar{X} := \operatorname{Proj} k[T_0, \dots, T_n]/\mathfrak{a}^{homo} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

mit $\mathfrak{a}^{homo} := (f_1^{homo}, \dots, f_r^{homo})$ den projektiven Abschluss von X in $\mathbb{P}_k^n$. *Es gilt*

Bei mir steht „offene Inklusion“, soll wohl aber offene Immersion gemeint sein !?

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p}^{homo} & \ni & D_+(T_0) \cap \bar{X} \arrow[r, hook, "\circ"] & \bar{X} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_k^n \\
\mathfrak{p} \arrow[u, mapsto] & \ni & X \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, hook] & & \operatorname{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n] = \mathbb{A}_k^n \cong D_+(T_0) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

wobei die Isomorphie an dieser Stelle durch die Definition der homogenen Polynome herrührt.

Beweis. klar. $\square$

Beispiel 4.27. Sei $E = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - aX - b) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, so ist

$$\bar{E} = \operatorname{Proj} k[X, Y, Z]/(Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3) \subseteq \mathbb{P}_k^2.$$

Als Übung überlege man sich was $\bar{E} \cap (\mathbb{P}_k^2 \setminus D_+(T_0))$ ist.

Eigenschaften von Schemata 5

5.1 Noethersch

Definition 5.1 ((lokal) noethersch).

X heißt *noethersch*, wenn es eine endliche affine offene Überdeckung gibt, d.h.

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} A_i$$

mit noetherschen Ringen A_i.

X heißt *lokal noethersch*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine affine offene Umgebung $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ hat mit A noethersch.

Bemerkung 5.2. Aus X lokal noethersch folgt $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch (Übungsaufgabe). Die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht.

5.2 k-Varietäten

Definition 5.3 (algebraische/projektive k-Varietät).

Sei k ein Körper. Eine *algebraische k-Varietät* ist ein k-Schema X, das eine endliche offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} A_i$$

mit endlich erzeugten k-Algebren A_i besitzt.

Eine *projektive k-Varietät* ist ein projektives k-Schema.

Bemerkung 5.4.
- Eine projektive k-Varietät ist eine algebraische k-Varietät, da wir die abgeschlossene Immersion

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^{n} D_+(T_i) \cong \operatorname{Spec} k[Y_0, \dots, \cancel{1}, \dots, Y_n]$$

haben.
- Eine k-Alegbra A ist *endlich erzeugt*, wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt und surjektive k-Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{rcl} k[Y_1, \dots, Y_n] & \twoheadrightarrow & A \\ Y_i & \mapsto & a_i. \end{array}$$

Die a_i sind dabei die Erzeuger von A.

5.3 Reduzierte Schemata

Definition 5.5 (reduzierte Ringe).

Ein Ring A heißt *reduziert*, wenn

$$\sqrt{(0)} =: \mathrm{Nil}(A) = (0),$$

also wenn A keine nilpotenten Elemente hat.

Definition 5.6 (reduzierte lokal geringte Räume).

X heißt *reduziert*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für jedes $x \in X$ reduziert ist.

Satz 5.7.

Es ist äquivalent:

1. *X ist reduziert.*
2. *Zu jedem $x \in X$ existiert eine affin offene Umgebung $U = \operatorname{Spec} A$ um x mit A reduziert.*
3. *$O_X(U)$ ist reduziert für alle offenen $U \subseteq^\circ X$.*

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

5.4 Garbifizierung

Definition 5.8 (Garbifizierung).

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{P}$ eine Prägarbe auf X. Dann ist die *Garbifizierung* von $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}^\dagger := \left(U \mapsto \mathcal{P}^\dagger(U) := \left\{ f : U \to \coprod_{x \in U} \mathcal{P}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x) \in \mathcal{P}_x \ \forall x \in U \\ \forall x \in U \exists V \text{ mit } x \in V \subseteq^\circ U \\ \text{ und } \exists s \in \mathcal{P}(V) \text{ mit } \forall z \in V : \ f(z) = s_z := [s] \in \mathcal{P}_z. \end{array} \right\} \right)$$

Satz 5.9.

1. *$\mathcal{P}^\dagger$ ist eine Garbe und man hat einen kanonischen Prägarbenmorphismus $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^\dagger$.*
2. *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist $\mathcal{F}^\dagger \cong \mathcal{F}$ kanonisch via 1.*
3. *Für alle $x \in X$ ist $(\mathcal{P}^\dagger)_x \cong \mathcal{P}_x$ kanonisch via 1.*
4. *$\mathcal{P}^\dagger$ erfüllt die offenbare universelle Eigenschaft.*

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-(**

Tensorprodukt 6

Glatt, regulär & normal 7

k-Varietät 8

9 Der Punktefunktor

$\mathcal{O}_X$-Moduln 10

10.1 $\mathcal{O}_X$-Moduln

Definition 10.1 ($\mathcal{O}_X$-Modul).

Ein $\mathcal{O}_X$*-Modul* (oder eine $\mathcal{O}_X$*-Modulgarbe*) ist eine Garbe $\mathcal{M}$ zusammen mit einer $\mathcal{O}_X(U)$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}(U)$ für jedes offene $U \subseteq^\circ X$, so dass für $V \subseteq^\circ U \subseteq^\circ X$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \Big\downarrow \cdot\big|_V \times \cdot\big|_V & & \Big\downarrow \cdot\big|_V \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

Ein *Morphismus* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ von solchen ist ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, so dass für jedes $U \subseteq^\circ X$ $\alpha(U) : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}'(U)$ $\mathcal{O}_X(U)$-linear ist.

Bemerkung 10.2. Man hat einige Konstruktionen aus der kommutativen Algebra auch für $\mathcal{O}_X$-Moduln, wie z.B.

- $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' : U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$.
- $\oplus_{i\in I}\mathcal{M}_i$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}_i$.
- Für $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ $\mathcal{O}_X$-Modul-Morphismus haben wir $\ker\alpha$ und $\operatorname{im}\alpha$, wobei Kern und Bild in $\mathbf{Sh}_X$ zu lesen sind.

Definition 10.3 (frei, lokal frei).

Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ heißt

- *frei*, wenn es eine Menge I und einen $\mathcal{O}_X$-Modul-Isomorphismus
$$\mathcal{O}_X^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$$
gibt,
- *lokal frei* oder *Vektorbündel von Rang* r, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $x \in U \subseteq^\circ X$ und einen $\mathcal{O}_U$-Modul-Isomorphismus
$$\mathcal{O}_U^r \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}\big|_U$$
gibt.

10.2 Exkurs: Vektorbündel in der Topologie

Sei X ein topologischer Raum. Dann ist ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel vom Rang r eine stetige Abbildung $\pi : E \to X$ mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ zusammen mit einem sog Bündelatlas, bestehend aus Karten
$$\psi_U : E\big|_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$$

mit $\mathrm{pr}_U \circ \psi_U = \pi\big|_{\pi^{-1}(U)}$, d.h.

$$\begin{tikzcd} E\big|_U = \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert und die Karten sind

- Homöomorphismen und so, dass
- $\psi_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^r$ ein linearer Isomorphismus ist.

Wie verstehen wir das als Garbe von Moduln? Setze $\mathcal{O}_X := U \mapsto \mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, also die Garbe der stetigen Funktionen. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Weiter haben wir $E \xrightarrow{\pi} X$ stetig. Setze

$$\mathcal{E} : U \mapsto \mathcal{E}(U) := \{\sigma : U \to \pi^{-1}(U) \subseteq E \mid \sigma \text{ stetig}, \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U\}.$$

Dies ist eine Garbe. $\mathcal{E}$ ist sogar eine $\mathcal{O}_X$–Modulgarbe: Für $U \subseteq^\circ X$ gilt

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U), \ (f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma.$$

wobei

$$\begin{array}{rrcl} f \cdot \sigma : & U & \to & \pi^{-1}(U) \\ & x & \mapsto & \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sigma(x)}_{\in E_x} \end{array}$$

und E_x ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Bleibt nur noch zu klären, wie die Bündelkarten $\psi_U : E\big|_U = \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$ eingehen:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_U"'] & \ni & (x, \alpha(x)) := (x, \pi_{\mathbb{R}^r} \circ \psi_U \circ \sigma(x)) \\ \mathcal{E}(U) \ni \sigma & U \arrow[ul, bend left] \arrow[u, shift right, bend right, "\psi_U \circ \sigma"'] & \ni & x \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$\alpha : U \to \mathbb{R}^r$ ist eine stetige Abbildung, also $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)^r$. Weiter liefert ψ_U einen $\mathcal{O}_X(U)$-Modul-Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(U) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_X(U)^r \\ \sigma & \mapsto & \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r} \circ \psi_U \circ \sigma \\ \psi_U^{-1} \circ (\mathrm{id}_U \times \alpha) & \leftarrow\!\shortmid & \alpha. \end{array}$$

Schränkt man auf $V \subseteq^\circ U$ ein, ist dies verträglich. Also

$$\mathcal{E}\big|_U \cong \mathcal{O}_X(U)$$

als $\mathcal{O}_X\big|_U$-Modulgarben.

10.3 Quasi-Kohärenz

Definition 10.4 (quasi-kohärent).

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ heißt *quasi-kohärent*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $x \in U \subseteq^\circ X$ und Mengen I, J und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Modulgarben

$$\mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}\big|_U \longrightarrow 0$$

gibt.

Definition 10.5 (von seinen globalen Schnitten erzeugt).

Ein $\mathcal{O}_X$–Modul $\mathcal{M}$ wird *von seinen globalen Schnitten erzeugt*, wenn für jedes $x \in X$ der Morphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{M}_x$$

surjektiv ist.

Mit anderen Worten: Jeder Keim $m_x \in \mathcal{M}_x$ lässt sich schreiben als

$$m_x = \sum_{\text{endl. viele } i} \lambda_i [\sigma_i]_x$$

für $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $\sigma_i \in \mathcal{M}(X)$.

Dies gilt nicht für $\mathcal{O}_X$ selbst; betrachte beispielsweise $X = \mathbb{CP}^1$ und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen.

Bemerkung 10.6. Es existiert ein surjektives $\mathcal{O}_X\big|_U^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{M}\big|_U$ genau dann, wenn $\mathcal{M}\big|_U$ durch seine auf U globalen Schnitte erzeugt wird.

$\mathcal{M}$ ist quasi-kohärent genau dann, wenn $\mathcal{M}\big|_U$ durch seine globalen Schnitte erzeugt wird und die Relationen (also $\ker(\mathcal{O}_X\big|_U^{(I)}) \to \mathcal{M})$) auch.

10.4 Quasikohärente Garben auf $\operatorname{Spec} A$

Beachte folgende Konstruktion Ist M ein A-Modul, so betrachte

- für $f \in A$: $M_f = M \otimes_A A_f$ als $A_f = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f))$-Modul.
- für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$: $M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ als $A_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \mathfrak{p}}$-Modul.

Dies ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe für $\mathfrak{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ der Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} A$. Dann folgt analog zu Satz 2.33 folgender Satz.

Satz 10.7.

Zu gegebenem A-Modul M existiert (bis auf Isomorphie) genau eine $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-Modulgarbe $M^\sim$ auf $X = \operatorname{Spec} A$ mit

$$\begin{aligned} M^\sim(D(f)) &\cong M_f \\ (M^\sim)_\mathfrak{p} &\cong M_\mathfrak{p} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $M^\sim(\operatorname{Spec} A) = M$.

Satz 10.8.

Der Funktor

$$\begin{array}{rrcl} {}^\sim : & A\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & M & \mapsto & M^\sim \\ & (M \xrightarrow{\varphi} N) & \mapsto & (M^\sim \xrightarrow{\varphi^\sim} N^\sim) \end{array}$$

ist exakt.

Beweis. Es ist zu zeigen: Ist

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

eine exakte Sequenz in A-**Mod**, so ist

$$(M')^\sim \xrightarrow{\alpha^\sim} M^\sim \xrightarrow{\beta^\sim} (M'')^\sim$$

eine exakte Sequenz in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-**Mod**. Letzteres ist aber äquivalent dazu, dass

$$(M')^\sim_\mathfrak{p} \xrightarrow{\alpha^\sim_\mathfrak{p}} M^\sim_\mathfrak{p} \xrightarrow{\beta^\sim_\mathfrak{p}} (M'')^\sim_\mathfrak{p}$$

eine exakte Halmsequenz für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist. Dies ist aber klar, weil $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ flach über A ist ([2, Example 9.1.1] oder [1, Abschnitt 7 Satz 8]) und $M^\sim_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cong M \otimes_A A_\mathfrak{p}$. □

Korollar 10.9. *Für einen A-Modul M ist $M^\sim$ quasi-kohärent.*

Beweis. Für M hat man

$$A^{(J)} \to A^{(I)} \xrightarrow{\varphi} M \to 0.$$

Nun wähle beispielsweise $I := M$ und $J := \ker \varphi$. Ferner ist

$$(A^{(J)})^\sim = (\oplus_{j\in J} A)^\sim = \oplus_{j\in J} A^\sim = \oplus_{j \in J} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{(J)}$$

und da $^\sim$ exakt ist, folgt die Exaktheit von

$$\mathcal{O}_X^{(J)} \to \mathcal{O}_X^{(I)} \to M^\sim \to 0.$$

□

Bemerkung 10.10. Sind M und N A-Moduln, so ist

$$(M \otimes_A N)^\sim = M^\sim \otimes_{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}} N^\sim.$$

Satz 10.11.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ genau dann quasi-kohärent, wenn für jede affin offene Teilmenge U ein Isomorphismus

$$\mathcal{M}\big|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$$

existiert.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Folgt aus Korollar 10.9.

„$\Rightarrow$“ Aus nachstehenden Hilfslemmas haben wir die Behauptung, da $\mathcal{M}(U)^\sim$ durch die Eigenschaft auf den $D(f)$s festgelegt ist. □

Hilfslemma 10.12. In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für jedes $x \in X$ existiert ein affin offenes $x \in U \subseteq^\circ X$ mit $\mathcal{M}\big|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$.

Beweis. Man hat den kanonischen Garbenmorphismus

$$(\mathcal{M}(U))^\sim \to \mathcal{M}\big|_U.$$

Dieser rührt her von

$$(\mathcal{M}(U))^\sim(D(f)) = \mathcal{M}(U)_f \xrightarrow{\varrho} \mathcal{M}(D(f)),$$

welcher induziert wird von den beiden Restriktionen $\mathrm{res}^{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(D(f))$ und $\mathrm{res}^{\mathcal{O}}: \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(D(f))$, da wird $\mathcal{M}(U)$ als einen $\mathcal{O}_X(U)$-Modul und $\mathcal{M}(D(f))$ als einen $\mathcal{O}_X(D(f))$-Modul auffassen wollen. Demnach haben wir für $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ und $m \in \mathcal{M}(U)$

$$\mathrm{res}^{\mathcal{M}}(\lambda m) = \mathrm{res}^{\mathcal{O}}(\lambda)\,\mathrm{res}(m).$$

Weiter ist $f \in A_f^\times = (\mathcal{O}_U(D(f)))^\times$, also dort invertierbar und wir können setzen

$$\rho(\tfrac{m}{f^n}) := \mathrm{res}(m) f^{-n}.$$

Da $\mathcal{M}$ quasi-kohärent existiert für alle $x \in X$ ein affin offenes $x \in U \subseteq^\circ X$, so dass

$$\mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X\big|_U^{(I)} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}\big|_U \to 0$$

exakt ist. Insbesondere haben wir

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \to \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \to \mathcal{M}(U).$$

Setze nun $N := \mathrm{im}(\alpha(U)) \subseteq \mathcal{M}(U)$. N ist ein $\mathcal{O}_X(U)$-Untermodul. Damit ist

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \to \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \to N \to 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X(U)$-Moduln. Wir wenden $^\sim$ an und da $^\sim$ exakt (Satz 10.8) erhalten wir

$$\mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \to \mathcal{O}_X\big|_U^{(I)} \to N^\sim \to 0.$$

Mit dem Homomorphiesatz folgt dann $\mathcal{M}\big|_U \cong N^\sim$. □

Hilfslemma 10.13. In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für beliebiges $U = \operatorname{Spec} A \subseteq^\circ X$ und $f \in A = \mathcal{O}_X(U)$ gilt

$$\mathcal{M}(U)_f \cong \mathcal{M}(D(f)).$$

Beweis. Wir überdecken $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$ durch endlich viele affin offene U_i (es reichen endlich viele, da $\operatorname{Spec} A$ quasi-kompakt!). Die U_i wählen wir dabei so, dass sie die Eigenschaften im ersten Hilfslemma genügen und setzen $V_i = U_i \cap D(f) = D(f\big|_{U_i})$. Dann haben wir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{M}(U)_f \arrow[r] \arrow[d, "\text{kanonisch}"', "\alpha"] & \oplus_i \mathcal{M}(U_i)_f \arrow[r] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & \oplus_{(i,j)} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\gamma"', "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}(D(f)) \arrow[r] & \oplus_i \mathcal{M}(V_i) \arrow[r] & \oplus_{(i,j)} \mathcal{M}(V_i \cap V_j),
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeilen jeweils exakt sind und die Isomorphismen sich aus dem ersten Hilfslemma ergeben. Man erjagt sich aus β ein Isomorphismus, dass α injektiv ist und zusammen mit γ einem Isomorphismus, kann man erneut auf Jagd gehen und die Surjektivität von α erlegen. □

Satz 10.14.

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ affin und

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben und ist $\mathcal{M}'$ quasikohärent, so ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}''(X) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.

Beweis. fehlt. □

Lemma 10.15. *Für jeden topologischen Raum X ist*

$$\Gamma(X,\_) : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Ab},\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) =: \Gamma(X,\mathcal{F})$$

linksexakt, d.h. ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Sh}_X$, so ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X)$$

eine exakte Sequenz in $\mathbf{Ab}$.

Beweis. Zeigen wir zunächst die Injektivität von $\alpha(X)$: Sei $\sigma \in \mathcal{F}(X)$ mit $\alpha(X)\sigma = 0 \in \mathcal{G}(X)$, so ist $[\alpha(X)\sigma]_x = 0 \in \mathcal{G}_x$ für alle $x \in X$, also ist $\alpha_x([\sigma]_x) = 0$ mit $[\sigma]_x \in \mathcal{F}_x$ und da α_x injektiv nach Voraussetzung, folgt $[\sigma]_x = 0$, ergo $\sigma = 0$.

Als zweites folgern wir $\ker \beta(X) = \operatorname{im} \alpha(X)$: Da $\beta \circ \alpha = 0$, folgt $\beta(X) \circ \alpha(X) = 0$, also $\operatorname{im} \alpha(X) \subseteq \ker \beta(X)$. Sei nun $\sigma \in \ker \beta(X)$. Insbesondere gilt für jedes $U \subseteq^\circ X$, dass $\beta(U)\sigma\big|_U = 0 \in \mathcal{H}(U)$. Da $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$ nach Voraussetzung, existiert eine offene Überdeckung $X = \cup_{i\in I} U_i$ mit $\ker \beta(U_i) = \operatorname{im} \alpha(U_i)$. Also finden wir zu jedem $i \in I$ ein $\tau_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\alpha(U_i)\tau_i = \sigma\big|_{U_i}$. Wir müssen nur noch sehen, dass diese geeignet verkleben: Es gilt

$$\alpha(U_i \cap U_j)\tau_i\big|_{U_i\cap U_j} = \sigma\big|_{U_j\cap U_j} = \alpha(U_i \cap U_j)\tau_j\big|_{U_j\cap U_j}$$

und mit der Injektivität von $\alpha(U_i \cap U_j)$ folgt

$$\tau_i\big|_{U_i\cap U_j} = \tau_j\big|_{U_i\cap U_j}.$$

Also verkleben die $(\tau_i)_{i\in I}$ zu $\tau \in \mathcal{F}(X)$ mit $\alpha(X)\tau = \sigma$. □

Beispiel 10.16. In Lemma 10.15 ist die Rechtsexaktheit im Allgemeinen nicht gegeben, wie man am Beispiel $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sieht: Setze $\mathcal{G} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}$ die Garbe der holomorphen Funktionen und $\mathcal{H} := \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}^\times}$ die Garbe der nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen, so ist

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\exp} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, aber

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}(X) = \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

ist alles, da die letzte Abbildung nicht surjektiv ist (es gibt keinen komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Literatur 10

[1] S. Bosch. *Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2009. ISBN: 9783540928126. URL: http://books.google.de/books?id=dI1p9fh%5C_fV0C.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449. URL: http://books.google.de/books?id=3rtX9t-nnvwC.