Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg **Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

30. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Lokal geringte Räume 1

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe). Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)\,,$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{UW}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\rho_{VW}"] & \mathcal{F}(W) \end{tikzcd}$$

Bei mir steht hier im Skript $s|_U$. Offenbar ein Fehler!?

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über* U.

Beispiel 1.1.

$$\mathcal{C}^\circ_X : U \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}^\circ_X(V) \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U)$, $f \mapsto f|_U$.

Bemerkung 1.2. Ist $\mathbf{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \to V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (U \to V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (V \to U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.2 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U) \\ \mathcal{F}(V) \arrow[u] \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(V) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.3 (Garbe).

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *Garbe*, falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \qquad \forall i, j,$$

so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_i = s|_{U_i} \qquad \forall i.$$

Bemerkung 1.3. $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto \left(s|_{U_i}\right)_{i \in I}$$

$$(s_i)_{i \in I} \longmapsto \left(s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}\right)_{(i,j) \in I^2}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.4. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}^\infty_M : U \mapsto \mathcal{C}^\infty_M(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in \mathrm{C}^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.5. Sei M eine $\mathbb{C}$ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}^\times_\mathbb{C} : U \mapsto \mathcal{O}^\times_\mathbb{C}(U) := \{f : U \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}_C^\times,\ f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier naiv??

$$\mathcal{H} := \mathrm{im}^{\mathrm{naiv}}(\exp) : U \mapsto \mathrm{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \to \mathbb{C} \mid f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \tfrac{1}{2} < |z| < \tfrac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$
$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \to \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden U_i problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \to \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

Definition 1.4.

Für einen topologischen Raum X bezeichne

$$\mathbf{PSh}_X := \text{die Kategorie der Prägarben auf } X,$$
$$\mathbf{Sh}_X := \text{die Kategorie der Garben auf } X, \text{ wobei } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Bemerkung 1.6. Man hat den Inklusionsfunktor

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{PSh}_X,\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

Definition 1.5 (Halm).

Ist $\mathcal{F}$ eine (Prä)Garbe auf X und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim$$

mit

$$s \sim t \ :\Leftrightarrow\ \exists W \subset X \text{ offen}:\ x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s\big|_W = t\big|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von $\mathcal{F}$ bei x_0*.

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei x_0*.

Beispiel 1.7. $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f\big|_W = g\big|_W\}$

Beispiel 1.8.

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{C},x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius}\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

Definition 1.6 (push-forward).

Ist $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward von* $\mathcal{F}$.

1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

$$\textbf{Ring} := \text{ Kategorie der kommuativen Ringe mit 1}$$

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \textbf{Top}_X^{\text{op}} \to \textbf{Ring}.$$

Definition 1.7 (lokaler Ring).

Sei R ein Ring. Dann heißt R *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel 1.9. $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$

Bemerkung 1.10. Ist R lokaler Ring und $\mathfrak{m} \lhd R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

Beispiel 1.11. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$ ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}^\infty_{M,x_0} \setminus (\mathcal{C}^\infty_{M,x_0})^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt

$$\left[\frac{1}{f} : W \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}\right] \in \mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$$

ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal.

Definition 1.8 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus:

- einem topologischen Raum X und
- einer Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X von Ringen,

so dass $\mathcal{O}_{X,x_0}$ für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt $\mathcal{O}_X$ die *Strukturgarbe von* $(X, \mathcal{O}_X)$. Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \lhd \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von x_0 in* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Beispiel 1.12. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

Definition 1.9 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind R, S lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \lhd R$, $\mathfrak{m}_S \lhd S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

Definition 1.10 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X \to Y &\text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X &\text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{array}{rccc} f^\#_{x_0} : & \mathcal{O}_{Y,y_0} & \to & \mathcal{O}_{X,x_0} \\ & [s] & \mapsto & [f^\#_U(s)] \end{array}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 1.13. In Definition 1.10 ist $f^\#_{x_0}$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f^\#_U(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, $U \subset Y$, $y_0 \in U$ und analog $f^\#_V(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V)$, $V \subset Y$, $y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes

Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f_U^\#"] \arrow[d, "|_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "|_{f^{-1}(W)}"] & \ni & f_U^\#(s) \arrow[d, mapsto] \\
s|_W = t|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "f_W^\#"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \\
t \arrow[u, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f_W^\#"] \arrow[u, "|_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[u, "|_{f^{-1}(W)}"'] & \ni & f_V^\#(t) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Affine Schemata 2

2.1 Spec A als topologischer Raum

Sei im Folgenden A ein kommuativer Ring mit 1 und $\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \lhd A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist $\mathfrak{a} \lhd A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec} A\,.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \operatorname{Spec} A \mid \exists\, \mathfrak{a} \lhd A :\; U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

Beweis (der Topologie-Eigenschaften).

1. Zeige: $\emptyset$, $\operatorname{Spec} A$ offen $\iff$ $\operatorname{Spec} A$, $\emptyset$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$
2. Zeige: U_1, U_2 offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen $\iff M_1, M_2$ abgeschlossen $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$
3. $(U_i)_{i\in I}$ offen $\Rightarrow \cup_{i\in I} U_i$ offen $\iff (M_i)_{i\in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \cap_{i\in I} M_i$ abgeschlossen.
   Dazu: $\cap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$ □

Bemerkung 2.1. Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \operatorname{Spec} A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \lhd A$.

Beispiel 2.2 (Spec $\mathbb{Z}$). Für $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für p Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \Leftrightarrow (a) \subseteq (p) \Leftrightarrow p \mid a \Leftrightarrow p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

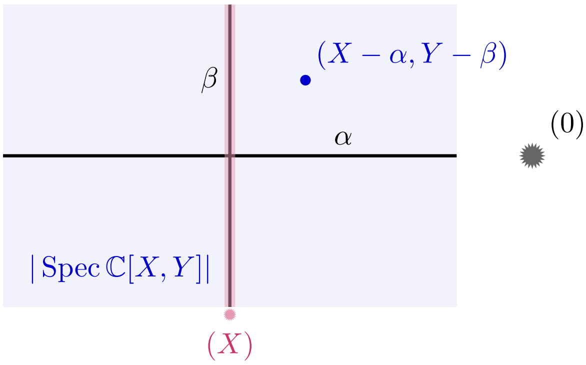
Insbesondere gilt

- $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

Lemma 2.3. *Sei $x \in \operatorname{Spec} A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\operatorname{Spec} A$ gleich*

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

Abbildung 1: $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$



Beweis.

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B\subseteq \operatorname{Spec} A \text{ abg.} \\ x\in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a}\lhd A \\ \mathfrak{a}\subseteq x}} = V(x)$$

□

Bemerkung 2.4. Beachte, dass

$$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b} \quad\Rightarrow\quad V(\mathfrak{b})\subseteq V(\mathfrak{a})$$

Definition 2.2 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).

Sei X ein topologischer Raum. Ein $x\in X$ heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Er heißt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

Beispiel 2.5. Sei $A=\mathbb{C}[X,Y]$.

- $x=(0)\in\operatorname{Spec} A$ ist generisch.
- $x=(X-\alpha, Y-\beta)\lhd A$ ist abgeschlossen, da aus $x\lhd A$ maximal $V(x)=\{x\}$ und somit x abgeschlossen folgt.
- $x=(X)\lhd A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 zusammenfassen.

Definition 2.3 (basisoffene Menge).

Für $f\in A$ nennt man

$$D(f) := \operatorname{Spec} A\setminus V((f)) = \{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A \mid f\notin\mathfrak{p}\}$$

die *zu f gehörige basisoffene Menge.*

Lemma 2.6. *Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f)\mid f\in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U\subseteq\operatorname{Spec} A$ ist eine Vereinigung von $D(f)\in\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ offen und $\mathfrak{p} \in U$, so ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Damit existiert $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$ und $f \in \mathfrak{a}$. Also $(f) \subseteq \mathfrak{a}$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. Damit folgt $D(f) \subseteq U$.

Zusammenfassend gilt für $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ offen: $\forall \mathfrak{p} \in U \ \exists f\mathfrak{p} \in A$: $\mathfrak{p} \in D(f\mathfrak{p}) \subseteq U$. Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f\mathfrak{p})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.7 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. □

Lemma 2.7. *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ *gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$