

Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg

Maximilian Huber

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

17. April 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Lokal geringte Räume	4
1.1	Garben	4
1.2	Lokal geringte Räume	7
2	Affine Schemata	10
2.1	$\text{Spec } A$ als topologischer Raum	10
2.2	$\text{Spec } A$ als lokal geringter Raum	17
2.2.1	Beweis von Satz 2.33	18
3	Beispiele	20
3.1	$\text{Spec } \mathbb{Z}$	20
3.2	$\text{Spec } k$ für einen Körper k	20
3.3	Der Affine n -dimensionale Raum über k	22
3.4	Weiteres Beispiel	22
3.5	Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$	24
3.6	Diskrete Bewertungsringe	25
3.6.1	Beispiele	27
4	Projektive Schemata	29
4.1	Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie	29
4.2	$\mathbb{P}^n(k)$ als Schema	29
4.2.1	1. Variante	30
4.2.2	2. Variante (Die Proj-Konstruktion)	31
4.3	Immersionen und projektive A -Schemata	34
4.3.1	Beispiele	35
5	Eigenschaften von Schemata	37
6	Tensorprodukt	38
7	Glatt, regulär & normal	39
8	k-Varietät	40
9	Der Punkteffektor	41
10	\mathcal{O}_X-Moduln	42
10.1	\mathcal{O}_X -Moduln	42
10.2	Exkurs: Vektorbündel in der Topologie	42
10.3	Quasi-Kohärenz	43
10.4	Quasikohärente Garben auf $\text{Spec } A$	44

Lokal geringte Räume

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* \mathcal{F} auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über U* .

Bei mir steht hier
im Skript $s|_U$. Of-
fenbar ein Fehler!?

Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U)$, $f \mapsto f|_U$.

Bemerkung 1.3. Ist \mathbf{Ab} die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (U \rightarrow V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (V \rightarrow U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren \mathcal{F} und \mathcal{G} , d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Definition 1.5 (Garbe).

Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X heißt *Garbe* (engl. sheaf), falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.

2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

Bemerkung 1.6. \mathcal{F} ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s & \mapsto & (s|_{U_i})_{i \in I} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & (s_i)_{i \in I} & \mapsto & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1 und Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.7. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.8. Sei M eine \mathbb{C} Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_\mathbb{C}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier
naiv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden U_i problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \rightarrow \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum X bezeichne

$\mathbf{PSh}_X :=$ die Kategorie der Prägarben auf X ,

$\mathbf{Sh}_X :=$ die Kategorie der Garben auf X , wobei $\text{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Bemerkung 1.10. Man hat den Inklusionsfunktork

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist \mathcal{F} eine (Prä)Garbe auf X und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) / \sim$$

mit

$$s \sim t :\Leftrightarrow \exists W \subset X \text{ offen} : x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s|_W = t|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von \mathcal{F} bei x_0* .

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei x_0* .

Beispiel 1.12. $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f|_W = g|_W\}$

Beispiel 1.13.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}, x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius} \right\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).

1. Es sei \mathcal{F} eine Garbe auf einem topologischen Raum X . Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Für $r \in \mathcal{F}(U)$, $x_0 \in U$ bezeichne r_{x_0} den Keim $[r]$ von \mathcal{F} bei x_0 . Es seien nun $s, t \in \mathcal{F}(U)$, für die $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$ gelte. Zeige, dass $s = t$.
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

Beweis. 1. Für alle $x_0 \in U$ existieren offene U_{x_0} mit $s|_{U_{x_0} \cap U} = t|_{U_{x_0} \cap U}$ nach Definition der Keime. Es ist $U = \bigcap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$, also folgt nach erster Garbenbedingung $s = t$.

2. Wähle $X = \{0, 1\}$ mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \quad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2|_{\{0\}} &= 5|_{\{0\}} \\ 2|_{\{1\}} &= 5|_{\{1\}} \end{aligned}$$

aber $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$. □

Definition 1.14 (push-forward).

Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und \mathcal{F} eine Garbe auf X , so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward* von \mathcal{F} .

1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

Ring := Kategorie der kommutativen Ringe mit 1

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ring}.$$

Definition 1.15 (lokaler Ring).

Sei R ein Ring. Dann heißt R *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel 1.16. $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\} \subset_{\text{Unterring}} \mathbb{Q}$

Bemerkung 1.17. Ist R lokaler Ring und $\mathfrak{m} \triangleleft R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).

1. Es sei R ein kommutativer Ring und R^\times seine Einheitengruppe. Zeige, dass R genau dann lokal ist, wenn $R \setminus R^\times \triangleleft R$ gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ein Ideal in R bilden.
2. Es sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu R bezeichnen wir mit $\text{Quot}(R)$. Lokalisieren wir R nach \mathfrak{p} , so erhalten wir den Ring $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \text{Quot}(R) \mid a \in R, b \notin \mathfrak{p} \right\}$. Zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist.

Beweis. 1. „ \Rightarrow “ Ist R lokal, so ist $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R .

„ \Leftarrow “ Ist $R \setminus R^\times$ ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei $\mathfrak{m} \triangleleft R$ ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$.

2. Wir zeigen $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$, dann folgt die Behauptung mit 1.

„ \subseteq “ Es sei

$$h = p_1 \frac{s_1}{t_1} + \dots + p_n \frac{s_n}{t_n}.$$

Setze

$$\begin{aligned} z_1 &:= p_1 s_1 t_2 \dots t_n + p_2 s_2 t_1 t_3 \dots t_n + p_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \\ z_0 &:= t_1 \dots t_n, \end{aligned}$$

so ist $h = \frac{z_1}{z_0}$. Wäre $h \in R_{\mathfrak{p}}^\times$, sagen wir $\frac{s}{t}$ sein Inverses, so müsste gelten $z_1 s = z_0 t$. Die linke Seite jedoch ist in \mathfrak{p} , die rechte nicht. Damit ist $h \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$.

„ \supseteq “ Sei $\frac{s}{t} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$, so ist $s \frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. □

Beispiel 1.18. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$ ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty \setminus (\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt

$$\left[\frac{1}{f} : W \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} \right] \in \mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$$

ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist \mathfrak{m} ein Ideal.

Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}_X) bestehend aus:

- einem topologischen Raum X und
- einer Garbe \mathcal{O}_X auf X von Ringen,

so dass \mathcal{O}_{X,x_0} für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt \mathcal{O}_X die *Strukturgarbe von* (X, \mathcal{O}_X) . Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \triangleleft \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von* x_0 *in* (X, \mathcal{O}_X) .

Beispiel 1.20. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel $(\mathbb{R}, C_{\mathbb{R}}^\infty)$ bestehend aus \mathbb{R} und der Garbe der C^∞ -Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal \mathfrak{m}_{x_0} angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$.
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass \mathbb{C} mit der Garbe der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ eine lokal geringter Raum ist und dass $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis. 1. Es gilt

$$\begin{aligned} [f : U \rightarrow \mathbb{R}] \in (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times &\Leftrightarrow \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit } f|_{U \cap V} \neq 0 \forall x \in U \cap V \\ &\Leftrightarrow f(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Also $[f] \in C_{\mathbb{R},x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times$ genau dann, wenn $f(x_0) = 0$. Damit ist $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times$ ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto f(x_0), \end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind R, S lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \triangleleft R, \mathfrak{m}_S \triangleleft S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X, y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\# : \mathcal{O}_{Y,y_0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X,x_0} \\ [s] &\mapsto [f_U^\#(s)] \end{aligned}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 1.23. In Definition 1.22 ist $f_{x_0}^\#$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U), U \subset Y, y_0 \in U$ und analog $f_V^\#(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V), V \subset Y, y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} s \in \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) & \ni & f_U^\#(s) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{f_W^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ t \in \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) & \ni & f_V^\#(t) \end{array}$$

Affine Schemata

2.1 Spec A als topologischer Raum

Sei im Folgenden A ein kommutativer Ring mit 1 und $\text{Spec } A := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist $\mathfrak{a} \triangleleft A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec } A.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \text{Spec } A \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft A : U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\text{Spec } A$ definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

Beweis (der Topologie-Eigenschaften). 1. Zeige: $\emptyset, \text{Spec } A$ offen $\iff \text{Spec } A, \emptyset$ abgeschlossen.

Dazu: $V(A) = \emptyset, V((0)) = \text{Spec } A$

2. Zeige: U_1, U_2 offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen $\iff M_1, M_2$ abgeschlossen $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ abgeschlossen.

Dazu: $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

3. $(U_i)_{i \in I}$ offen $\Rightarrow \cup_{i \in I} U_i$ offen $\iff (M_i)_{i \in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \cap_{i \in I} M_i$ abgeschlossen.

Dazu: $\cap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

□

Bemerkung 2.2. Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \text{Spec } A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \triangleleft A$.

Beispiel 2.3 (Spec \mathbb{Z}). Für $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für p Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \iff (a) \subseteq (p) \iff p \mid a \iff p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\text{Spec } \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset, \text{Spec } \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \text{Spec } \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

Lemma 2.4. Sei $x \in \text{Spec } A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\text{Spec } A$ gleich

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

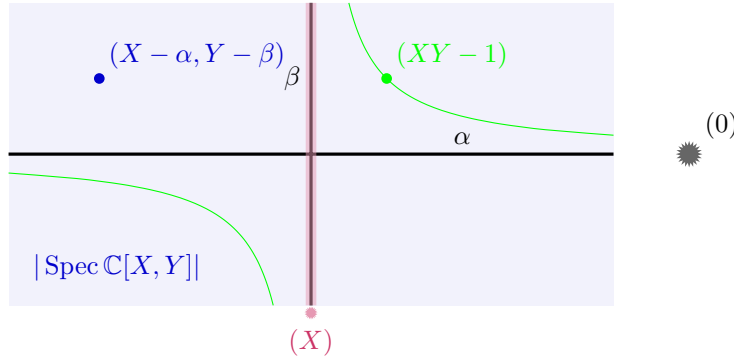
Beweis.

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \text{Spec } A \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \triangleleft A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} B = V(x)$$

□

Bemerkung 2.5. Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: Spec $\mathbb{C}[X, Y]$ **Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei X ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Er heißt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

Beispiel 2.7. Sei $A = \mathbb{C}[X, Y]$.

- $x = (0) \in \text{Spec } A$ ist generisch.
- $x = (X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft A$ ist abgeschlossen, da aus $x \triangleleft A$ maximal $V(x) = \{x\}$ und somit x abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \triangleleft A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.
- $x = (XY - 1) \triangleleft A$ ist ebenfalls weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

Definition 2.8 (basisoffene Menge).

Für $f \in A$ nennt man

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die zu f gehörige *basisoffene Menge*.

Lemma 2.9. Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U \subseteq \text{Spec } A$ ist eine Vereinigung von $D(f) \in \mathfrak{B}$ und \mathfrak{B} ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

Beweis. Sei $U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})$ offen und $\mathfrak{p} \in U$, so ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Damit existiert $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$ und $f \in \mathfrak{a}$. Also $(f) \subseteq \mathfrak{a}$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. Damit folgt $D(f) \subseteq U$.

Zusammenfassend gilt für $U \subseteq \text{Spec } A$ offen: $\forall \mathfrak{p} \in U \exists f \in A: \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$. Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f_{\mathfrak{p}})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. □

Lemma 2.10. Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ gilt

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, d.h. $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus (V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ aber nicht $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Also existiert $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Damit ist $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Dies ist ein Widerspruch, da \mathfrak{p} ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette. \square

Definition 2.11 (Radikal).

Für $\mathfrak{a} \triangleleft A$ heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von \mathfrak{a} .

Lemma 2.12. $\sqrt{\mathfrak{a}} \triangleleft A$.

Beweis. • $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ ✓

- Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in A$. Dann $f^n \in \mathfrak{a}, r \in A$. Also $(rf)^n \in \mathfrak{a}$ und damit $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}, g^m \in \mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned} (f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i} \right) g^n + \left(\sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i} \right) f^n \end{aligned}$$

Da g^n und f^n jeweils in \mathfrak{a} liegen, ist auch die Summe dort. \square

Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).

Ein Ideal $\mathfrak{b} \triangleleft A$ heißt Radikalideal (radiziell), falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

Bemerkung 2.14. Es gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 2.15. Für $\mathfrak{a} \triangleleft A$ gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

Beweis. „ \subseteq “ Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, f^n \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also $f^n \in \mathfrak{p}$ und da \mathfrak{p} prim, folgt $f \in \mathfrak{p}$.

„ \supseteq “ Ist $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, so zu zeigen, dass $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. Sei also $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \triangleleft A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$,
- M ist angeordnet durch „ \subseteq “,
- ist $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $\mathfrak{b} := \cup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \triangleleft A$ mit $\mathfrak{b} \in M$.

Damit hat M mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\mathfrak{b}_{\max} \in M$.

Nun sei behauptet, dass $\mathfrak{b}_{\max} \triangleleft A$ ein Primideal ist. Dazu sei $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$, wobei wir annehmen, dass $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$. Betrachte $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$, was ein Ideal in A ist, aber nicht in M liegt. Analog können wir dies von $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$ sagen. Damit existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \quad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von \mathfrak{b}_{\max} ist und wir folgern $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$, wodurch man den Widerspruch erhält.

Damit ist $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$ und $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$. □

Satz 2.16.

Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt sogar

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. „ \Leftarrow “ Aus $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$.

„ \Rightarrow “ Aus $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, d.h. $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. □

Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum X heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = A_1 \cup A_2$ mit $A_{1,2} \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X = A_1$ oder $X = A_2$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn Z mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

Beispiel 2.18. Spec \mathbb{Z} ist irreduzibel. Ist nämlich $A_1 \subsetneq \text{Spec } \mathbb{Z}$ abgeschlossen, so ist $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für irgendwelche Primzahlen p_i .

Lemma 2.19. In Spec A gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und mit Satz 2.16 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$.

Für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$, gilt: Ist $xy \in \mathfrak{p}$, so folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y))).$$

Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$. Wieder mit Satz 2.16 folgt $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und damit $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

„ \Leftarrow “ Schreibe $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$. Dann folgt wiederum mit Satz 2.16 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$.

Ist $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$, also $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$, also $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$, so existiert $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für $y \in \mathfrak{c}$, ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ Primideal, also nach Wahl von x ist $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Insgesamt ist $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$ und damit $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$. \square

Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\text{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von A .

Korollar 2.21. Es gilt

$$\text{Spec } A \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

Beweis. Lemma 2.19 mit $\mathfrak{a} = (0)$. \square

Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$.

Lemma 2.23. Ist A noethersch, so ist auch $\text{Spec } A$ noethersch.

Beweis. Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für geeignete $\mathfrak{a}_i \in \text{Spec } A$, so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in A . \square

Satz 2.24.

Ist X noethersch topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen, so zerlegt sich

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

in abgeschlossene irreduzible Teilmengen $A_i \subseteq A$. Nimmt man $A_i \not\subseteq A_j$ für $i \neq j$, so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.

Die A_i heißen (irreduzible) Komponenten von A .

Beweis. Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen $\mathcal{V} \neq \emptyset$, so hätte man ein inklusionsminimales $A \in \mathcal{V}$, denn falls nicht gäbe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit $A_i \in \mathcal{V}$. Da X noethersch, müsste diese Folge stationär werden, wodurch man einen Widerspruch erhält.

Dieses $A \in \mathcal{V}$ hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da $A \in \mathcal{V}$ minimal sind $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$. Aber damit ist $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$. Ein Widerspruch, der wie gewünscht $\mathcal{V} = \emptyset$ liefert.

Eindeutigkeit. Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$, also $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$. Da A_1 irreduzibel können wir oBdA $A_1 = A_1 \cap A'_1$ annehmen. Also ist $A_1 \subseteq A'_1$.

Analog ist $A'_1 \subseteq A_k$ für ein $k = 1, \dots, r$. Zusammenfassend gilt

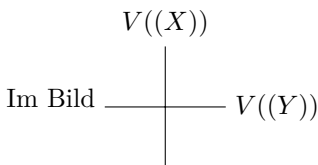
$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

was nach Voraussetzung $k = 1$ impliziert. Also $A_1 = A'_1$.

Nun sukzessive weiter. □

Beispiel 2.25. In $\text{Spec } k[X, Y]$ zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$



Beispiel 2.26. Sei k algebraisch abgeschlossen. Betrachte $\text{Spec } k[X, Y]$. Die maximalen Ideale sind gerade $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$ für $\alpha, \beta \in k$. Ein abgeschlossener Punkt $\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y]$ wird eindeutig durch $(\alpha, \beta) \in k^2$ gegeben.

Quelle suchen!

$\mathbb{A}_k^2 := \text{Spec } k[X, Y]$ wird der 2 dimensionale affine Raum über k genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

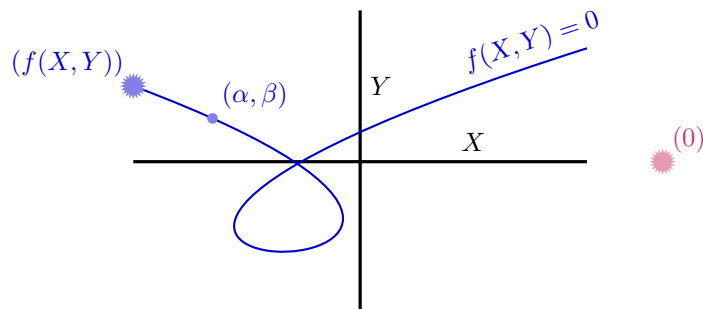
Eine abgeschlossene Teilmenge $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ liefert

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned} A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\ &= \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\} \\ &\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ ist klar. Also zu „ \Leftarrow “:
Es ist $f(\alpha, \beta) = 0$, also $f(X, Y) = (X - \beta)h(X, Y)$ für gewisses h . Es ist $f(X, Y) - f(\alpha, Y) = (X - \alpha)g(X, Y)$, da die linke Seite $X = \alpha$ als Nullstelle hat.

Abbildung 2: $\text{Spec } k[X, Y]$ 

In \mathbb{A}_k^2 hat man aber noch mehr Punkte: Sei $\mathfrak{p} \triangleleft k[X, Y]$ Primideal, aber nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$ kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise $\mathfrak{p} = (f(X, Y))$ für $f \in k[X, Y]$ irreduzibel, so liegen alle $(\alpha, \beta) \in k^2$ mit $f(\alpha, \beta) = 0$ auf der entsprechenden Menge in k^2 , d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X, Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} := (X - \alpha, Y - \beta) \Rightarrow \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

Lemma 2.27. Ist A ein Ring, $\mathfrak{a} \in \text{Spec } A$ und $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ die Projektion, so ist

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \text{Spec } A/\mathfrak{a} &\rightarrow \text{Spec } A \\ \bar{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec } A.$$

Beweis.

Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).

Ein topologischer Raum X heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist $X = \bigcap_{i \in I} U_i$ mit U_i offen, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset I$ mit $X = \bigcap_{i \in F} U_i$.

X heißt *kompakt*, wenn X hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

Satz 2.29.

Ist A ein Ring, so ist $\text{Spec } A$ quasi-kompakt.

Beweis. Wir zeigen: Ist $\emptyset = \bigcap_{i \in I} Z_i$ für abgeschlossene Z_i , so existiert $F \subset I$ endlich mit $\emptyset = \bigcap_{i \in F} Z_i$.

Sei also $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$, $\mathfrak{a}_i \triangleleft A$ und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i},$$

also insbesondere $1 \in \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i}$ und $1 \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. Ergo

$$1 = a_{i_1} + \dots + a_{i_r},$$

für $F := \{i_1, \dots, i_r\} \subset I$. Nun ist $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}$, also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^r V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

2.2 Spec A als lokal geringter Raum

Wir wollen $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ als die „guten Funktionen“ auf $\text{Spec } A$ auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei A ein Ring, dann heißt $S \subseteq A$ *multiplikative Teilmenge*, wenn $1 \in S$ ist und aus $a, b \in S$ auch $ab \in S$ folgt.

Die *Lokalisierung* A_S oder $A[S^{-1}]$ von A bezüglich S ist der Ring

$$A_S := (A \times S) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

Schreibe $\frac{a}{s} := [(a, s)]$ und definiere eine Ringstruktur auf A_S durch Bruchrechnen.

Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist $S \subseteq A$ wie in Definition 2.30, $\varphi : A \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(S) \subseteq R^\times$, so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \\ & & R \end{array}$$

kommutativ macht, wobei $\iota : A \rightarrow A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$.

Beweis. Klar, weil dieses $\psi : A_S \rightarrow R$ durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

Beispiel 2.32. • $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $f \in A$ fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Satz 2.33.

Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Dann existiert auf X eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe \mathcal{O}_X mit:

- i) Es existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$.
- ii) Für $f \in A$ betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \rightarrow & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)|_{D(f)}. \end{array}$$

Dann ist $\varphi(f)|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$ eine Einheit und der eindeutig durch

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_f \\ \cong \downarrow \varphi & \searrow & \downarrow \varphi_f \exists! \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\cdot|_{D(f)}} & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{array}$$

gegebene Ringhomomorphismus φ_f ist ein Isomorphismus.

- iii) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array}$$

und $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ ist ein Isomorphismus.

2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

Definition 2.34 (\mathfrak{B} -(Prä)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$ heißt \mathfrak{B} -Prägarbe auf $X = \operatorname{Spec} A$, wenn \mathcal{F} eine Prägarbe auf

$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$

ist.

\mathcal{F} heißt \mathfrak{B} -Garbe, wenn \mathcal{F} eine \mathfrak{B} -Prägarbe ist und die Garbenbedingungen für die $D(f)$ erfüllt sind.

Hilfslemma 2.35. Es gilt:

1. $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$ ist eine \mathfrak{B} -Garbe.
2. Ist \mathcal{F} eine \mathfrak{B} -Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe $\bar{\mathcal{F}}$ auf X mit $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$ für alle $D(f) \in \mathfrak{B}$.

Beweis. 1.

TODO

Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , der zu einem $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ ist ein affines Schema.

Bemerkung 2.37. Beachte dabei: Ist X ein topologischer Raum, \mathcal{F} eine Garbe auf X , $U \subseteq X$ offen, so ist durch

$$\mathcal{F}|_U : V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe $\mathcal{F}|_U$ auf U definiert.

Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

mit $f : X \rightarrow Y$ stetig und $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ Garbenmorphismus auf Y so dass $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ lokaler Ringhomomorphismus

Bemerkung 2.39. Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ring} & \rightarrow & \mathbf{Sch}^{\text{aff}} \\ A & \mapsto & (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{ccc} f : \text{Spec } B & \rightarrow & \text{Spec } A, \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B}.$$

Letzterer ist für $g \in A$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{D(g)} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(g)) = A_g & \rightarrow & (f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B})(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{a}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei wir • durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{q}} \\ \frac{a}{\gamma} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\gamma \notin \mathfrak{p}$ (also $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Beispiele

3

3.1 Spec \mathbb{Z}

Jeder Ring A hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ 1 &\mapsto 1 \\ z &\mapsto \begin{cases} 1 + 1 + \dots + 1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 - 1 - \dots - 1 & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

\mathbb{Z} ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ von affinen Schemata. $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ist somit ein *finales Objekt* in der Kategorie **Sch^{aff}**.

Ferner können wir zusammenfassen

Offene Mengen $\emptyset \neq U \subseteq \text{Spec } \mathbb{Z} \text{ offen} \Leftrightarrow U = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\} \quad , r \in \mathbb{N}_0$
 \emptyset

Basisoffene Mengen $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z} \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für $f = p_1^{\nu_1} \dots p_r^{\nu_r}$.

Strukturgarbe

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(D(f)) &= \mathbb{Z}_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{Z} \right\} \\ \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}, (p)} &= \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \nmid b, a \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

3.2 Spec k für einen Körper k

Als topologischer Raum $\text{Spec } k = \{(0)\}$.

Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\text{Spec } k}(\{(0)\}) = k$.

Bemerkung 3.1. Sei A ein Ring. Angenommen wir haben $\text{Spec } A \xrightarrow{(f, f^\#)} \text{Spec } k$ für einen Körper k , so haben wir

$$f_{\text{Spec } k}^\# : k = \mathcal{O}_{\text{Spec } k} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } k) = A,$$

wobei aus $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(f^{-1}(\{(0)\})) = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A)$ resultiert. Insgesamt ist A also eine k -Algebra (d.h. ein Ring zusammen mit $k \rightarrow A$).

Bemerke hierbei „Grothendiecks Gesamtphilosophie“:

Alles relativ lesen!

Definition 3.2 (S -Schema).

Sei S ein Schema. Dann ist ein S -Schema ein Schema X zusammen mit einem Strukturmorphismus $X \xrightarrow{\varphi} S$. Dies ergibt die Kategorie \mathbf{Sch}_S , wenn man

$$\mathrm{Hom}(X \xrightarrow{\varphi} S, Y \xrightarrow{\varphi} S) := \left\{ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & S & \end{array} \right\}$$

setzt.

Beispiel 3.3. $\mathbf{Sch}_k := \mathbf{Sch}_{\mathrm{Spec} k}$ sind die sog. k -Schemata. Ein Beispiel hierfür ist $\mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathrm{Spec} k$ via $k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$.

Bemerkung 3.4. Sei X ein Schema und $x \in X$ und weiter $\mathfrak{m}_x \triangleleft \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal. Dann ist

$$\kappa(x) := k(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$$

der Restklassenkörper von x .

Betrachte nun $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$ mit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathrm{Spec} k(x) & \rightarrow & X \\ \eta_x & \mapsto & x, \end{array}$$

wobei topologisch gesehen $\eta_x \in \mathrm{Spec} k(x)$ der einzige Punkt dieses Schemas ist. Für $U \subseteq X$ offen haben wir:

$$f_U^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k(x)}(U) = \begin{cases} 0 & x \notin U \\ k(x) & x \in U. \end{cases}$$

Im Fall $x \in U$ geht dies via

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = k(x).$$

Ist umgekehrt $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$ ein Schemamorphismus, so setze $x := f((0)) \in X$ und $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k}$ liefert einen Ringhomomorphismus der Halme:

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k, (0)} = k.$$

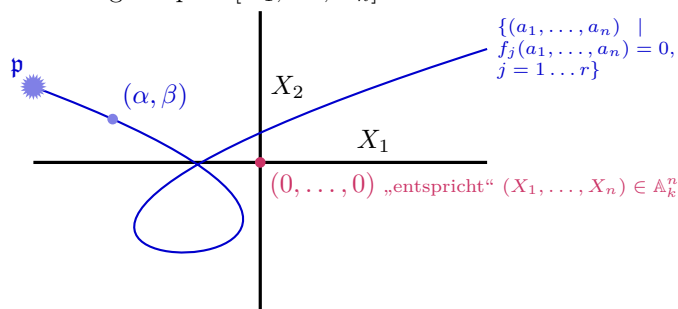
Dieser ist lokal (also $f_x^\#(\mathfrak{m}_x) = (0)$). Damit ist

$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x \xrightarrow{f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x} f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x k$$

wohldefiniert und somit ist $k \mid k(x)$ eine Körpererweiterung.

Zusammengefasst haben wir:

Einen Punkt $x \in X$ wählen mit Restklassenkörper $k(x)$ und eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$.	\Longleftrightarrow	Einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec} k \rightarrow X$ wählen für eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$.
--	-----------------------	--

Abbildung 3: $\text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ 

3.3 Der Affine n -dimensionale Raum über k

Sei k wieder ein Körper. Der affine n -dimensionale Raum über k ist $\mathbb{A}_k^n := \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$.

Wir erinnern an den Hilbertschen Nullstellensatz:

Satz 3.5 (Hilbertscher Nullstellensatz).

Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann ist jedes maximale Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ von der Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

Beweis. ohne Beweis. □

Wir haben bereits gezeigt:

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n, \quad \text{via } (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Sei $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$ ein nicht maximales Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ (die Darstellung ist nach Satz 3.5) möglich, so gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \Leftrightarrow f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Wir können dies in Abbildung 3 „sehen“.

3.4 Weiteres Beispiel

Betrachte $k[[X_1, \dots, X_n]] = k[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$ mit $R[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in R\}$.

Bemerkung 3.6. $g \in k[[X_1, \dots, X_n]] \setminus (X_1, \dots, X_n)$ ist eine Einheit.

Beweis. Idee: Ansatz für eine Variable: $g(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$. Dann

$$1 = g(X)h(X) = \underbrace{a_0 b_0}_{=1} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{=0} X + \dots$$

□

Funktor Spec Wir haben den Funktor Spec: Die Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Lokalisierung an } \mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n) & & k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} & \longrightarrow & k[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow k \\
 & & & & \uparrow f & & \\
 & & & & \frac{f}{1} & & \\
 & & & & \downarrow \frac{f}{g} & & \\
 & & & & \frac{f}{g} & \longrightarrow & fg^{-1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & h \longrightarrow h(0)
 \end{array}$$

induzieren

$$\mathrm{Spec} k \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} \longrightarrow \mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$$

topologisch: $(0) \longmapsto (X_1, \dots, X_n) \longmapsto (X_1, \dots, X_n) \longmapsto (X_1, \dots, X_n).$

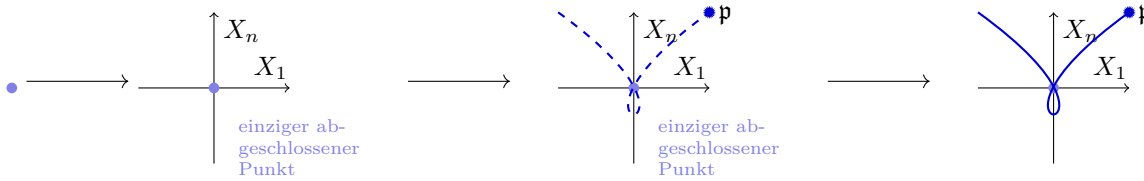
einzigster
abgeschlossener
Punkt

einzigster
abgeschlossener
Punkt

entspricht dem
abgeschlossenen
Punkt
 $(0, \dots, 0) \in k^n$

Dies ist ein Homöomorphismus auf $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^n \mid \mathfrak{p} \subseteq (X_1, \dots, X_n)\} = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq \mathbb{A}_k^n$.

Was passiert aber auf Schemaniveau?



Betrachte dazu

$$\mathrm{Spec} k \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}/\mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p} \approx V(\mathfrak{p})$$

Nehmen wir das explizite Beispiel $\mathfrak{p} = (Y^2 - X^2(X+1))$. Es ist \mathfrak{p} ein Primideal und $V(\mathfrak{p})$ irreduzibel.

Beachte: $1 + X \in k[[X]]$ hat eine Wurzel, wie man durch folgenden Ansatz mit $h(X) = a_0 + a_1X + \dots$ sieht:

$$1 + X = (h(X))^2 = a_0^2 + 2a_0a_1X + \dots$$

Setze $a_0 := 1$ oder -1 und löse sukzessiv auf. Demnach ist $Y^2 - X^2(X+1) = (Y - Xh(X))(Y + Xh(X))$ nicht mehr prim, also $V(\mathfrak{p}) \subseteq k[[X, Y]]$ nicht mehr irreduzibel!

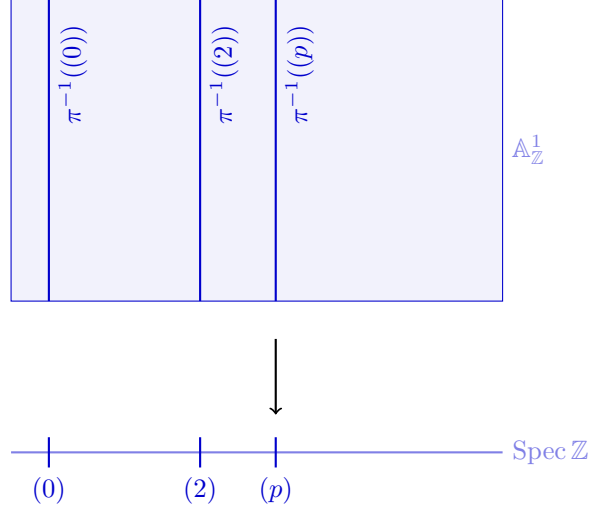
Betrachte genauer

$$\begin{aligned} k[[u, v]]/(uv) &\xrightarrow{\cong} k[[z, w]]/(z^2 - w^2) \xrightarrow{\cong} k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(h(X))^2) \\ u &\longmapsto z + w & z &\longmapsto Y \\ v &\longmapsto z - w & w &\longmapsto Xh(X) \end{aligned}$$

In Bildern:

$$\mathrm{Spec} k[[u, v]]/(uv) \longrightarrow \mathrm{Spec} k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(X+1))$$



Abbildung 4: Veranschaulichung von $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 

3.5 Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$

Wir haben $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Topologisch ist

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \bigcup_{p \text{ prim}} \pi^{-1}((p)) \cup \pi^{-1}((0)).$$

Abbildung 4 verdeutlicht dies.

Zu $\pi^{-1}((0))$ Betrachte nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$, so gilt $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$.

Betrachte $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ und die Lokalisierung $g : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]_S$. Es ist klar: $\mathbb{Z}[X]_S = \mathbb{Q}[X]$

Ferner gilt $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[X] \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild:

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \mid \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)\} = \pi^{-1}(0),$$

Zu $\pi^{-1}((p))$ Es ist $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p)) \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$. Dann betrachte $\rho : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{F}_p[X]$ und $\rho^* : \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[X] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$. Wegen $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X] / \ker \rho$ ist ρ^* ein Homöomorphismus auf

$$V(\ker \rho) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \ker \rho \subseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1}((p)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1.$$

Zusammengefasst ist:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}((0)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \\ \pi^{-1}((p)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, \end{aligned}$$

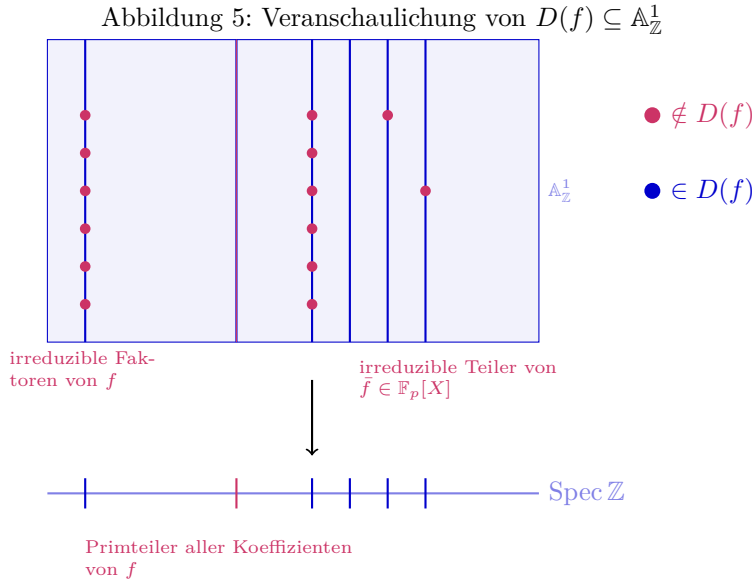
wobei die Gleichheiten topologisch zu lesen sind.

Betrachte $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$

1. Fall. $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, also

$$\mathfrak{p} = (\mu(X))$$

mit $\mu(X) \in \mathbb{Z}[X]$ einem primitiven, irreduziblen Polynom.



2. Fall. $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$, so ist $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$ für ein $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathbb{F}_p[X]$, also $\mathfrak{p} = \rho^{-1}((q(X)))$ für ein irreduzibles $q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ oder (0) . Dann ist

$$\mathfrak{p} = (r(X), p)$$

mit $r(X) \in \mathbb{Z}[X]$ und $r(X) \equiv q(X) \pmod{p}$.

Es stellt sich die Frage, wie für $f \in \mathbb{Z}[X]$ die $D(f) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ aussehen. Dazu

1. Fall $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0))$. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dann $f(X) = \xi q_1(X)^{\nu_1} \dots q_r(X)^{\nu_r}$ und es gilt

$$f \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} = (q(X))$$

mit $q \neq q_1, \dots, q_r$.

2. Fall $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$. $f(X) \notin (r(X), p)$ mit $r(X) \pmod{p} \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel. Für eine Primzahl p , betrachte $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$. Ist $\bar{f}(X) = 0$, so ist $f(X) \in (r(X), p)$ für alle $r(X)$. Für $\bar{f}(X) = \bar{q}_1(X)^{\nu_1} \dots \bar{q}_s(X)^{\nu_s}$, ist $f(X) \in (q_i(X), p)$ für diese i .

Dargestellt ist dies wieder in Abbildung 5.

3.6 Diskrete Bewertungsringe

Definition 3.7 (Diskrete Bewertung).

Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper k ist eine Abbildung

$$v : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

so dass

1. $v(0) = \infty$, $v(x) \in \mathbb{Z}$ für $x \neq 0$,
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle x, y und
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle x, y .

Bemerkung 3.8. Wählt man $q > 1$ (in \mathbb{R}), so ist

$$|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| := q^{-v(x)}$$

eine Betragsfunktion mit

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$. Die erste Ungleichung wird auch nicht-archimedische Dreiecksungleichung genannt.

Definition 3.9 (Bewertungsring).

Ist (k, v) ein diskret bewerteter Körper, so ist

$$\mathcal{O} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$$

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := \{x \in k \mid v(x) > 0\} = \{x \in k \mid |x| < 1\} \triangleleft \mathcal{O},$$

der *Bewertungsring* zu k .

Ein *diskreter Bewertungsring (dvr)* ist ein Integritätsbereich R , zusammen mit diskreter Bewertung $v : K = \text{Quot}(R) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass $R = \mathcal{O}$ gilt.

Ferner gilt \mathcal{O} ist ein Hauptidealbereich (PID), $k = \text{Quot}(\mathcal{O})$.

Ist $\pi \in \mathcal{O}$ mit $v(\pi) = 1$, so ist $\mathfrak{m} = (\pi)$ und \mathcal{O} hat genau die Ideale (π^k) für $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.10. Der Wertebereich $v(k \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe, also $v(k \setminus \{0\}) = d\mathbb{Z}$ für ein d . Wir können meistens oBdA $d = 1$ annehmen.

Bemerkung 3.11. Beachte: Für $x \in \mathcal{O}$ gilt

$$v(x) = n \Leftrightarrow x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Für $\xi = \frac{x}{y} \in K = \text{Quot}(\mathcal{O})$ ist $v(\xi) = v(x) - v(y)$.

Beweis (von Definition 3.9). TODO. □

Bemerkung 3.12.

$$\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi) = \mathfrak{m}\},$$

da in Hauptidealbereichen jedes Primideal $\neq (0)$ auch maximal ist.

Definition 3.13.

Ist \mathcal{O} ein diskreter Bewertungsring, so heißt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$$

der *Restklassenkörper* von \mathcal{O} .

\mathcal{O} heißt

- von *verschiedener Charakteristik*, wenn für $K = \text{Quot}(\mathcal{O})$, $\text{char } K = 0$ und $\text{char } k \neq 0$ ist und
- von *gleicher Charakteristik*, wenn $\text{char } K = \text{char } k$.

3.6.1 Beispiele

1. Sei k ein Körper,

$$K := k((t)) := \text{Quot } k[[t]] = \left\{ f(t) = \sum_{l=-N}^{\infty} a_l t^l \mid a_l \in k \right\}$$

und

$$\begin{aligned} v : k[[t]] &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid t^{-k} f(t) \in k[[t]]\} = \min\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

Auf $k((t))$ Dies ist eine diskrete Bewertung mit $\mathcal{O} = k[[t]]$:

$$\begin{aligned} v : k((t)) &\rightarrow \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \min\{l \in \mathbb{Z}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

$k((t))$ trägt damit $|\cdot| := q^{-v(\cdot)}$, also ist $k((t))$ ein metrischer Raum mit $d(x, y) := |x - y|$, dieser ist vollständig.

Für den Restklassenkörper gilt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k[[t]]/tk((t)) \cong k,$$

da $\mathfrak{m} = tk[[t]] = (t)$. t heißt dabei *Uniformierende*.

2. Betrachte

$$\begin{aligned} \nu_p : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \frac{a}{b} &\mapsto v(a) - v(b) \end{aligned}$$

mit $v(a) = \max\{k : p^k \mid a\}$ für eine Primzahl p .

ν_p ist eine diskrete Bewertung, die *p-adische Bewertung*. Ferner ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form} \mid p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

und $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$ und

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_p.$$

$|\cdot|_p := p^{-\nu_p(\cdot)} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *p-adischer Betrag*. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ist jedoch nicht vollständig, da z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ eine Cauchyfolge bildet.

Man erhält die Vervollständigungen

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, |\cdot|) &\rightsquigarrow \mathbb{R} \\ (\mathbb{Q}, |\cdot|_p) &\rightsquigarrow \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

Zurück zu Schemata Sei \mathcal{O} ein dvr, so ist $\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi)\}$. Dabei ist (0) der generische Punkt mit $\overline{\{(0)\}} = V((0)) = \text{Spec } \mathcal{O}$ und (π) ein abgeschlossener Punkt, genannt der *spezielle Punkt* in $\text{Spec } \mathcal{O}$.

Beispiel 3.14. Sei k ein Körper mit $\text{char } k \neq 2, 3$ und k algebraisch abgeschlossen. Wir betrachten

$$E := \text{Spec } A \quad \text{mit } A := k[X, Y]/(Y^2 - (X^3 + aX + b)).$$

Dies ist der affine Teil einer *elliptischen Kurve*, wenn $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \in k$.

Wir haben

$$|E| \cong \{(x_0, y_0) \in k^2 \mid y_0^2 - (x_0^3 + ax_0 + b) = 0\}.$$

Sei $(x_0, y_0) \in |E|$, oder besser $\mathfrak{p} := (X - x_0, Y - y_0) \in E$. Es ist $\mathcal{O}_{E, \mathfrak{p}}$ ein dvr.

Dazu:

- 1. Fall** $y_0 \neq 0$, so ist $\mathcal{O}_{E,y} = A_{\mathfrak{p}}$. Betrachten wir $\frac{\bar{f}(X,Y)}{\bar{g}(X,Y)} \in A_{\mathfrak{p}}$, also $\bar{f}, \bar{g} \in A$ und $\bar{g} \notin (X - x_0, Y - y_0)$, d.h. $\bar{g}(x_0, y_0) \neq 0$. Ferner ist

$$Y^2 - (X^3 + aX + b) = (Y + y_0)(Y - y_0) + (X^2x_0X + (x + x_0^2))(X - x_0)$$

und wenn $y_0 \neq 0$, so ist $(Y + y_0) \notin (X - x_0, Y - y_0)$. Demnach ist $Y + y_0 \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$, also gilt in $A_{\mathfrak{p}}$:

$$Y - y_0 = \frac{X^2 + x_0X + (a + x_0^2)}{Y + y_0}(X - x_0)$$

und $(X - x_0, Y - y_0)A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (X - x_0)A_{\mathfrak{p}}$ ist ein Hauptideal.

Also ist

$$\begin{aligned} v : A_{\mathfrak{p}} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ a &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in (X - x_0)^k\} \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung!

- 2. Fall** $y_0 = 0$. Dies geht analog und man sieht, dass

$$X^2 + x_0X + (a + x_0^2) \notin (X - x_0, Y),$$

da nach Voraussetzung $4a^2 + 27b^2 \neq 0$. Also ist $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (Y - y_0)A_{\mathfrak{p}}$.

Bemerkung 3.15. Sei $K(E) := \mathcal{O}_{E,(0)} = \text{Quot}(A) = A_{(0)}$ der *Funktionenkörper* von E . Für $\mathfrak{p} \in E$ hat man die *Null-/Polstellenordnung*

$$v_{\mathfrak{p}} : K(E) \rightarrow \text{Quot}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Projektive Schemata

4

4.1 Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie

Sei k ein Körper. So ist

$$\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1}) := \{L \subset k^{n+1} \text{ UVR} \mid \dim_k L = 1\}$$

der n -dimensionale projektive Raum.

Homogene Koordinaten $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ mit $0 \neq (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ definiert als

$$[x_0 : \dots : x_n] := \text{span}_k \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times$ mit $x_i = \lambda y_i \forall i$. Damit gilt dann, dass $\mathbb{P}^n(k) = k^{n+1} / \sim$, wobei \sim die gerade eben definierte Äquivalenzrelation bezeichnet.

Überdeckung $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit

$$\begin{array}{ccc} U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} & \ni & [x_0 : \dots : x_n] \\ \downarrow h_i & & \downarrow \\ k^n & & \ni \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

als "Karten".

Beachte $\mathbb{P}^n(k) \setminus U_i = \{[x_0 : \dots : 0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \neq 0\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}^{n-1}(k)$

Bemerkung 4.1. • $\mathbb{RP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

- $\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
- $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$

4.2 $\mathbb{P}^n(k)$ als Schema

Statt einem Körper k können wir einen Ring A betrachten.

4.2.1 1. Variante

Betrachte $U_i := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n] = \mathbb{A}_A^n$.

In \mathbb{RP}^n würden wir diese mit dem Kartenwechsel verkleben:

$$\begin{array}{ccccc}
 & [y_0, \dots, \underset{i\text{-te}}{1}, \dots, y_n] & & U_i \cap U_j & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \nwarrow \\
 (y_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, y_n) & & h_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\text{Kartenwechsel}} & h_j(U_i \cap U_j) \\
 & \parallel & & & \parallel \\
 & \{(y_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, y_n) \mid y_j \neq 0\} & \longrightarrow & \{(z_0, \dots, \cancel{x_j}, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\} & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 (y_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, y_n) & \longmapsto & \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \underset{i\text{-te}}{\frac{1}{y_j}}, \dots, \cancel{x_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)
 \end{array}$$

Betrachte also

$$\begin{aligned}
 U_{ij} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n][x_j^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n] = U_i \\
 U_{ji} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n][x_i^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{x_j}, \dots, x_n] = U_j
 \end{aligned}$$

und wähle einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
 \phi_{ij} : U_{ij} &\rightarrow U_{ji} \\
 x_k &\mapsto \frac{x_k}{x_j} \quad \text{für } k \neq i \\
 x_i &\mapsto \frac{1}{x_j}.
 \end{aligned}$$

Es gilt nun $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, denn

$$\begin{aligned}
 U_{ij} \cap U_{ik} &= D(x_j x_k) \subseteq U_i \\
 U_{ji} \cap U_{jk} &= D(x_i x_k) \subseteq U_j
 \end{aligned}$$

sowie

$$\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$$

Wir haben also eine Familie $(U_i)_{i=0, \dots, n}$ von (affinen) Schemata. Für jedes Paar (i, j) eine offene Imerision $U_{ij} \hookrightarrow U_i$ mit (affinen) Schemata und Isomorphismen $\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$, so dass $\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$.

Bleibt zur Übung lediglich zu zeigen, dass ein (bist auf Isomorphie) eindeutiges Schema \mathbb{P}_A^n mit Überdeckung $\mathbb{P}_A^n = \bigcup_{i=0}^n V_i$ für $V_i \subseteq \mathbb{P}_A^n$ offen und Isomorphismen $V_i \xrightarrow{\cong} U_i$ von (affinen) Schemata existiert.

4.2.2 2. Variante (Die Proj-Konstruktion)

Definition 4.2 (graduierte A -Algebra).

Sei A ein Ring, dann heißt

$$S := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$$

eine *graduierte A -Algebra*, wenn

- S ein Ring,
- $S_n \subset S$ ein \mathbb{Z} -Untermodul,
- $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$ ist,
- wir einen Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} S$ haben und
- die S_n A -Untermoduln sind.

Ein $s \in S_n$ heißt *homogen vom Grad n* .

Definition 4.3 (homogenes Ideal).

Ein Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft S$ heißt *homogen*, wenn

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{a} \cap S_n.$$

Lemma 4.4. *Es ist äquivalent*

- \mathfrak{a} *homogen*,
- \mathfrak{a} *wird von homogenen Elementen erzeugt*
- *Aus $a \in \mathfrak{a}$ mit $a = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$ für $a_n \in S_n$ folgt $a_n \in \mathfrak{a}$.*

Beweis. leicht. □

Beispiel 4.5. $S = A[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{m \geq 0} S_m$ mit

$$S_m = \{f(x_0, \dots, x_n) \mid f \text{ homogen von Grad } m\},$$

d.h.

$$f \in S_m \Leftrightarrow f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1}} \alpha_\nu X_0^{\nu_0} \dots X_n^{\nu_n} \quad \text{mit } \nu_0 + \dots + \nu_n = m.$$

Definition 4.6 ($\text{Proj}(S)$).

Setze $S_+ := \bigoplus_{n \geq 1} S_n$, dann ist das *projektive Spektrum* $\text{Proj } S$ von S definiert als

$$\text{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } S \text{ homogen} \mid S_+ \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

Definition 4.7 (Zariski Topologie auf $\text{Proj}(S)$).

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft S$ setze

$$V_+(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S).$$

Dann bilden diese $V_+(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der *Zariski-Topologie auf $\text{Proj}(S)$* .

Beweis. Wie im inhomogenen Fall. □

Bemerkung 4.8. Ein homogenes $\mathfrak{a} \triangleleft S$, $\mathfrak{a} \neq S$, ist prim genau dann, wenn gilt:

$$xy \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathfrak{a} \text{ oder } y \in \mathfrak{a}$$

für alle homogenen x, y .

Definition 4.9 (basisoffenen Mengen auf $\text{Proj}(S)$).

Analog zu $\text{Spec } A$ bilden für $f \in S$ die *basisoffenen Mengen in $\text{Proj}(S)$*

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S)$$

eine Basis der Topologie auf $\text{Proj}(S)$.

Definition 4.10 (homogene Lokalisierung).

- Für $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$ heißt

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s, t \in S, t \notin \mathfrak{p}, s, t \text{ homogen von gleichem Grad} \right\}$$

homogene Lokalisierung von \mathfrak{p} .

- Für $f \in S$ homogen von Grad m heißt

$$S_{(f)} := \left\{ \frac{s}{f^k} \mid s \in S, k \in \mathbb{N}_0, s \text{ homogen von Grad } k \deg f \right\}$$

homogene Lokalisierung bezüglich f .

Lemma 4.11. *Es gilt: $S_{(\mathfrak{p})}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal*

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s \in \mathfrak{p} \right\}.$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

Satz 4.12.

Auf $\text{Proj}(S)$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$ mit:

1. *Für alle homogenen $f \in S_+$ hat man den Isomorphismus*

$$(\varphi, \varphi^\#) : (D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}|_{D_+(f)}) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)}, \mathcal{O}_{S_{(f)}})$$

2. *Diese induzieren Isomorphismen*

$$\mathcal{O}_{\text{Proj}(S), \mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Damit wird $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$ zu einem Schema.

Beweis. „analog“ zum Beweis für Spec mit nachfolgendem Lemma. □

Lemma 4.13. Ist $f \in S_+$ homogen, so ist

$$\begin{aligned} \phi: D_+(f) &\rightarrow \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $S \xrightarrow{\lambda} S_f \xleftarrow{\iota} S_{(f)}$, so haben wir

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S & \xleftarrow{\lambda^*} & \operatorname{Spec} S_f \\ & \nearrow \lambda^* \approx & \downarrow \iota^* \\ D(f) & & \mathfrak{p}S_f \\ \uparrow \text{stetig} & & \uparrow \mathfrak{p} \\ D_+(f) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

Die Stetigkeit im linken Diagramm folgt aus der Tatsache, dass $V_+(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Proj}(S)$ und $\operatorname{Proj}(S)$ trägt die Teilraumtopologie von $\operatorname{Spec} S$. Damit ist ϕ stetig.

Wir wollen die Umkehrabbildung von ϕ angeben:

$$\begin{aligned} D_+(f) &\xrightarrow{\phi} \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f}) &\longleftarrow \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Den Rest zeigen nachstehende Hilfslemmata. □

Hilfslemma 4.14. $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$ ist homogenes Primideal in S .

Beweis.

$$\mathfrak{q}S_f = \left\{ \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n} \in S_f \mid \begin{array}{l} b \text{ homogen, } \deg b = l \deg f \\ \frac{b}{f^l} \in \mathfrak{q}, \ c \in S, n \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

Bemerke, dass \mathfrak{p} ein homogenes Ideal ist, weil $\mathfrak{q}S_f$ es ist. Genauer: $S_f = \bigoplus_{n \geq 0} S_{f,n}$ mit

$$S_{f,n} := \left\{ \frac{c}{f^m} \mid c \text{ homogen, } \deg c - m \deg f = n \right\}.$$

Es bleibt also zu zeigen: Sind $a, a' \in S$ homogen und $aa' \in \mathfrak{p}$, so folgt $a \in \mathfrak{p}$ oder $a' \in \mathfrak{p}$.

Sei dazu $r = \deg a$, $s = \deg a'$. Aus $aa' \in \mathfrak{p}$ folgt $\lambda(aa') = \frac{aa'}{1} \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k \in \mathfrak{q}S_f$, also $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k = \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n}$ wie oben. Potenzieren mit $\deg f$ ergibt

$$\frac{a^{k \deg f} a'^{k \deg f}}{f^{kr} f^{ks}} = \frac{b^{\deg f}}{f^{l \deg f}} \frac{c^{\deg f}}{f^{n \deg f}} \frac{1}{f^{kr} f^{ks}} \in S_f. \quad \square$$

Leider noch nicht fertig :-)

wir definieren $\mathbb{P}_A^n := \operatorname{Proj}(A[X_0, \dots, X_n])$ als Schema. Dabei stellen sich aber die Fragen, was dabei $D_+(X_i)$ sein soll und ob die beiden Varianten übereinstimmen.

Lemma 4.15. Die beiden Varianten der Definition von \mathbb{P}_A^n stimmen überein und es gilt

$$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} S_{(X_i)} \cong \mathbb{A}_A^n.$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

4.3 Immersionen und projektive A -Schemata

Definition 4.16 (offene und abgeschlossene Immersion).

Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ von Schemata heißt

1. *offene Immersion*, wenn es $U \subseteq^\circ X$ gibt, so dass

$$f : (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\cong} (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{(\iota, \iota^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$$

2. *abgeschlossene Immersion*, wenn gilt:

- f ist topologisch ein Homöomorphismus auf $\text{im } f := Z \subset X$ abgeschlossen,
- $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$ ist ein surjektiver Garbenmorphismus, d.h. für alle $y \in Y$ ist

$$f_{(f(y))}^\# : \mathcal{O}_{X, f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$$

surjektiv.

Wir schreiben dann auch $Y \hookrightarrow X \rightarrow Y$.

Beispiel 4.17. Ist A ein Ring, $\mathfrak{a} \triangleleft A$, so induziert

$$A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{a}$$

eine abgeschlossene Immersion

$$f : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

Bemerkung 4.18. Es ist $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$. Aber es folgt nicht notwendigerweise $A/\mathfrak{a} \stackrel{?}{\cong} A/\mathfrak{b}$!

Dazu betrachte einen Ring A mit nilpotenten Elementen, d.h. $\text{Nil } A := \sqrt{(0)} \neq (0)$ und

$$f : \text{Spec } A/\text{Nil}(A) \hookrightarrow \text{Spec } A$$

ist eine abgeschlossene Immersion mit

$$\text{im } f = V(\text{Nil}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \text{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}\} = \text{Spec } A.$$

Jedoch ist dies *kein* Isomorphismus.

Definition 4.19 (abgeschlossenes Unterschema).

Ist $f : Y \rightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, so nennen wir Y ein (bzgl. f) *abgeschlossenes Unterschema* von X .

Definition 4.20 (projektives Schema über A).

Sei A ein Ring. Ein *projektives Schema über A* ist ein A -Schema X mit einer abgeschlossenen Immersion, so dass

$$\begin{array}{ccc} \iota : X & \xhookrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_A^n \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } A & \end{array}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert.

Bemerkung 4.21. **Leider noch nicht fertig :-)**

4.3.1 Beispiele

Zunächst ein etwas abstrakteres Beispiel.

Satz 4.22.

Sei $S := A[X_0, \dots, X_n]$. Ist $\mathfrak{b} \triangleleft S$ ein homogenes Ideal, so ist $B := S/\mathfrak{b}$ in natürlicher Weise eine graduierte A -Algebra und $\text{Proj}(B)$ ein projektives A -Schema.

Beweis. Leider noch nicht fertig :-)

Und nun einige konkrete!

1. $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k)$ und \mathbb{P}_k^n . Sei k ein Körper. Wir haben $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) := k^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ und dagegen $\mathbb{P}_k^n := \text{Proj } k[T_0, \dots, T_n]$.

Eine algebraische Menge in $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k)$ ist per definitionem

$$Z := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

für $f_1(T_0, \dots, T_n), \dots, f_r(T_0, \dots, T_n) \in k[T_0, \dots, T_n]$ homogen.

Satz 4.23.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) &\rightarrow \mathbb{P}_k^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto \langle x_i T_j - x_j T_i \mid i, j \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion auf

$$\mathbb{P}_k^n(k) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^n \mid \mathfrak{p} \text{ ist } k\text{-rational}\} = \text{Hom}_{\text{Sch}_k}(\text{Spec } k, \mathbb{P}_k^n).$$

Beweis. Leider noch nicht fertig :-)

Bemerkung 4.24. Wir haben dies auch schon affin gesehen:

$$\begin{aligned} k^n = \mathbb{A}_{\text{klass}}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}_k^n = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n] \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) \end{aligned}$$

Bemerkung 4.25. Sei X ein Schema. Wir erinnern daran, dass

$$X(K) := \text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } k, X) = \{(\varphi, \varphi^\#) : \text{Spec } k \rightarrow X\}$$

mit

$$\varphi_\eta : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } k, \eta} = k$$

mit $x = \varphi(\eta)$, wobei topologisch $\text{Spec } k = \{\eta\}$. Damit haben wir

$$\overline{\varphi}_\eta^n : \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = k(x) \hookrightarrow k$$

(Körperhomomorphismen sind immer injektiv) und wir erhalten folgende 1-1 Beziehung:

$$X(k) \stackrel{1-1}{=} \{x \in X \text{ zusammen mit Inklusionen } \iota : k(x) \hookrightarrow k\}.$$

Beachte dabei:

$$X \in \text{Obj}(\text{Sch}) \rightsquigarrow X(k) := \text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } k, X)$$

$$Y \in \text{Obj}(\text{Sch}|_k) \rightsquigarrow Y(k) := \text{Hom}_{\text{Sch}|_k}(\text{Spec } k, Y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi : \text{Spec } k & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow \text{id} & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array} \right\}$$

In diesem Sinne ist \mathbb{P}_k^n als k -Schema zu lesen mit $\mathbb{P}_k^n \rightarrow \text{Spec } k$.

Wir folgern eine Seite später dass $k(x) \cong k$ kanonisch. Das ist mir nicht klar :-)

2. Projektiver Abschluss Sei $\mathfrak{a} \triangleleft k[Y_1, \dots, Y_n]$, so hat man die abgeschlossene Immersion

$$\mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

mit Bild $V(\mathfrak{a})$.

Betrachte die Homogenisierung von \mathfrak{a} in $k[T_0, \dots, T_n]$: Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Definiere

$$f_i^{\mathrm{homo}}(T_0, \dots, T_n) := T_0^{\deg f_i} f_i\left(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}\right) \in k[T_0, \dots, T_n].$$

Damit können wir nun folgenden Satz formulieren.

Satz 4.26.

Ist $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ eine abgeschlossene Immersion, $X = \mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$, so nennen wir

$$\bar{X} := \mathrm{Proj} k[T_0, \dots, T_n]/\mathfrak{a}^{\mathrm{homo}} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

mit $\mathfrak{a}^{\mathrm{homo}} := (f_1^{\mathrm{homo}}, \dots, f_r^{\mathrm{homo}})$ den projektiven Abschluss von X in \mathbb{P}_k^n . Es gilt

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{p}^{\mathrm{homo}} & \ni & D_+(T_0) \cap \bar{X} & \hookrightarrow & \bar{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^n \\ \uparrow & & \cong \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathfrak{p} & \ni & X & \hookrightarrow & \mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n] & = & \mathbb{A}_k^n \cong D_+(T_0) \end{array}$$

wobei die Isomorphie an dieser Stelle durch die Definition der homogenen Polynome herrührt.

Beweis. klar. □

Beispiel 4.27. Sei $E = \mathrm{Spec} k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - aX - b) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, so ist

$$\bar{E} = \mathrm{Proj} k[X, Y, Z]/(Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3) \subseteq \mathbb{P}_k^2.$$

Als Übung überlege man sich was $\bar{E} \cap (\mathbb{P}_k^2 \setminus D_+(T_0))$ ist.

Eigenschaften von Schemata

5

Tensorprodukt

6

Glatt, regulär & normal

7

k-Varietät

8

Der Punkteffunktor

9

\mathcal{O}_X -Moduln

10

10.1 \mathcal{O}_X -Moduln

Definition 10.1 (\mathcal{O}_X -Modul).

Ein \mathcal{O}_X -Modul (oder eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe) ist eine Garbe \mathcal{M} zusammen mit einer $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulstruktur auf $\mathcal{M}(U)$ für jedes offene $U \subseteq^\circ X$, so dass für $V \subseteq^\circ U \subseteq^\circ X$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow \cdot|_V \times \cdot|_V & & \downarrow \cdot|_V \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

Ein Morphismus $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ von solchen ist ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, so dass für jedes $U \subseteq^\circ X$ $\alpha(U) : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}'(U)$ $\mathcal{O}_X(U)$ -linear ist.

Bemerkung 10.2. Man hat einige Konstruktionen aus der kommutativen Algebra auch für \mathcal{O}_X -Moduln, wie z.B.

- $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' : U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$.
- $\oplus_{i \in I} \mathcal{M}_i$ von \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{M}_i .
- Für $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ \mathcal{O}_X -Modul-Morphismus haben wir $\ker \alpha$ und $\operatorname{im} \alpha$, wobei Kern und Bild in \mathbf{Sh}_X zu lesen sind.

Definition 10.3 (frei, lokal frei).

Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} heißt

- *frei*, wenn es eine Menge I und einen \mathcal{O}_X -Modul-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$$

gibt,

- *lokal frei* oder *Vektorbündel von Rang r* , wenn es zu jedem $x \in X$ ein $U \subseteq^\circ X$ und einen \mathcal{O}_U -Modul-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_U^r \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}|_U$$

gibt.

10.2 Exkurs: Vektorbündel in der Topologie

Sei X ein topologischer Raum. Dann ist ein \mathbb{R} -Vektorbündel vom Rang r eine stetige Abbildung $\pi : E \rightarrow X$ mit einer \mathbb{R} -Vektorraumstruktur auf $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ zusammen mit einem sog Bündelatlant, bestehend aus Karten

$$\psi_U : E|_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

Definition 10.5 (von seinen globalen Schnitten erzeugt).

Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} wird *von seinen globalen Schnitten erzeugt*, wenn für jedes $x \in X$ der Morphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$ -Moduln

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{M}_x$$

surjektiv ist.

Mit anderen Worten: Jeder Keim $m_x \in \mathcal{M}_x$ lässt sich schreiben als

$$m_x = \sum_{\text{endl. viele } i} \lambda_i [\sigma_i]_x$$

für $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $\sigma_i \in \mathcal{M}(X)$.

Dies gilt nicht für \mathcal{O}_X selbst; betrachte beispielsweise $X = \mathbb{CP}^1$ und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen.

Bemerkung 10.6. Es existiert ein surjektives $\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{M}|_U$ genau dann, wenn $\mathcal{M}|_U$ durch seine auf U globalen Schnitte erzeugt wird.

\mathcal{M} ist quasi-kohärent genau dann, wenn $\mathcal{M}|_U$ durch seine globalen Schnitte erzeugt wird und die Relationen (also $\ker(\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{M})$) auch.

10.4 Quasikohärente Garben auf $\text{Spec } A$

Beachte folgende Konstruktion Ist M ein A -Modul, so betrachte

- für $f \in A$: $M_f = M \otimes_A A_f$ als $A_f = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$ -Modul.
- für $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$: $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ als $A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } A, \mathfrak{p}}$ -Modul.

Dies ist eine \mathfrak{B} -Garbe für $\mathfrak{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ der Basis der Topologie auf $\text{Spec } A$. Dann folgt analog zu Satz 2.33 folgender Satz.

Satz 10.7.

Zu gegebenem A -Modul M existiert (bis auf Isomorphie) genau eine $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -Modulgarbe M^\sim auf $X = \text{Spec } A$ mit

$$\begin{aligned} M^\sim(D(f)) &\cong M_f \\ (M^\sim)_{\mathfrak{p}} &\cong M_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $M^\sim(\text{Spec } A) = M$.