Vorlesungszusammenfassung

# Schematheorie

erstellt von

**Stefan Hackenberg** **Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

**Prof. Dr. Marco Hien**

Stand

**7. Juni 2013**

# Inhaltsverzeichnis

# Lokal geringte Räume 1

## 1.1 Garben

**Definition 1.1 (Prägarbe).** Sei $X$ ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf $X$ ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)\,,$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{UW}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\rho_{VW}"] & \mathcal{F}(W) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wir nennen $\rho_{UV}$ *Restriktion*, schreiben meist $s\big|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über* $U$.

Bei mir steht hier im Skript $s\big|_U$. Offenbar ein Fehler!?

**Beispiel 1.2.**

$$\mathcal{C}^\circ_X : U \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}^\circ_X(V) \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U)$, $f \mapsto f\big|_U$.

**Bemerkung 1.3.** Ist $\mathbf{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \to V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (U \to V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (V \to U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

**Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).**

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf $X$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U) \\ \mathcal{F}(V) \arrow[u] \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

**Definition 1.5 (Garbe).**

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $X$ heißt *Garbe* (engl. sheaf), falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s\big|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit
$$s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j} \qquad \forall i, j,$$
so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit
$$s_i = s\big|_{U_i} \qquad \forall i.$$

**Bemerkung 1.6.** $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto \left(s\big|_{U_i}\right)_{i\in I}$$

$$(s_i)_{i\in I} \longmapsto \left(s_i\big|_{U_i\cap U_j} - s_j\big|_{U_i\cap U_j}\right)_{(i,j)\in I^2}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1 und Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

**Beispiel 1.7.** Sei $M$ eine $\mathrm{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}^\infty_M : U \mapsto \mathcal{C}^\infty_M(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in \mathrm{C}^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

**Beispiel 1.8.** Sei $M$ eine $\mathbb{C}$ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}} : U \mapsto \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}}(U) := \{f : U \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times_C, \ f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

$$\mathcal{H} := \mathrm{im}^{\mathrm{naiv}}(\exp) : U \mapsto \mathrm{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \to \mathbb{C} \mid f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Warum steht hier naiv??

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \tfrac{1}{2} < |z| < \tfrac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$
$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \to \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden $U_i$ problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \to \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

**Definition 1.9 (Kategorie der (Prä-)garben).**

Für einen topologischen Raum $X$ bezeichne

$$\mathbf{PSh}_X := \text{die Kategorie der Prägarben auf } X,$$
$$\mathbf{Sh}_X := \text{die Kategorie der Garben auf } X, \text{ wobei } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

**Bemerkung 1.10.** Man hat den Inklusionsfunktor

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{PSh}_X, \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

**Definition 1.11 (Halm, Keim).**

Ist $\mathcal{F}$ eine (Prä)Garbe auf $X$ und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim$$

mit

$$s \sim t \ :\Leftrightarrow \ \exists W \subset X \text{ offen}: \ x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s\big|_W = t\big|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von* $\mathcal{F}$ *bei* $x_0$.

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei* $x_0$.

**Beispiel 1.12.** $(\mathcal{C}^\infty_M)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f\big|_W = g\big|_W\}$

**Beispiel 1.13.**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C},x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius}\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).**

1. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einen topologischen Raum $X$. Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Für $r \in \mathcal{F}(U)$, $x_0 \in U$ bezeichne $r_{x_0}$ den Keim $[r]$ von $\mathcal{F}$ bei $x_0$. Es seien nun $s, t \in \mathcal{F}(U)$, für die $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$ gelte. Zeige, dass $s = t$.
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

**Definition 1.14 (push-forward).**

Ist $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $X$, so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward von* $\mathcal{F}$.

## 1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

$$\mathbf{Ring} := \text{ Kategorie der kommuativen Ringe mit 1}$$

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ring}.$$

**Definition 1.15 (lokaler Ring).**

Sei $R$ ein Ring. Dann heißt $R$ *lokal*, wenn $R$ genau ein maximales Ideal besitzt.

**Beispiel 1.16.** $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\} \underset{\text{Unterring}}{\subset} \mathbb{Q}$

**Bemerkung 1.17.** Ist $R$ lokaler Ring und $\mathfrak{m} \lhd R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).**

1. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $R^\times$ seine Einheitengruppe. Zeige, dass $R$ genau dann lokal ist, wenn $R \setminus R^\times \lhd R$ gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ein Ideal in $R$ bilden.
2. Es sei $R$ ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu $R$ bezeichen wir mit $\mathrm{Quot}(R)$. Lokalisieren wir $R$ nach $\mathfrak{p}$, so erhalten wir den Ring $R_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R) \mid a \in R,\ b \notin \mathfrak{p}\}$. Zeige, dass $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist.

**Beispiel 1.18.** Sei $M$ eine $C^\infty$ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$ ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}^\infty_{M,x_0} \setminus \left(\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}\right)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt

$$\left[\frac{1}{f} : W \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}\right] \in \mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$$

ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal.

**Definition 1.19 (lokal geringter Raum).**

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus:

- einem topologischen Raum $X$ und
- einer Garbe $\mathcal{O}_X$ auf $X$ von Ringen,

so dass $\mathcal{O}_{X,x_0}$ für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt $\mathcal{O}_X$ die *Strukturgarbe von* $(X, \mathcal{O}_X)$. Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \lhd \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von* $x_0$ *in* $(X, \mathcal{O}_X)$.

**Beispiel 1.20.** Sei $M$ eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).**

1. Zeige, dass das Tupel $(\mathbb{R}, C^\infty_\mathbb{R})$ bestehend aus $\mathbb{R}$ und der Garbe der $C^\infty$-Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass $C^\infty_{\mathbb{R},x_0}$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal $\mathfrak{m}_{x_0}$ angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C^\infty_{\mathbb{R},x_0} / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$.
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass $\mathbb{C}$ mit der Garbe der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ eine lokal gerinter Raum ist und dass $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt.

**Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).**

Sind $R, S$ lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \lhd R$, $\mathfrak{m}_S \lhd S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

**Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).**

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned} f &: X \to Y \text{ stetig}, \\ f^\# &: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f^\#_{x_0} : \quad \mathcal{O}_{Y,y_0} &\to \mathcal{O}_{X,x_0} \\ [s] &\mapsto [f^\#_U(s)] \end{aligned}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

**Bemerkung 1.23.** In Definition 1.22 ist $f^\#_{x_0}$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s\big|_W = t\big|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f^\#_U(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, $U \subset Y$, $y_0 \in U$ und analog $f^\#_V(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V)$,

$V \subset Y$, $y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f_U^\#"] \arrow[d, "\big|_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "\big|_{f^{-1}(W)}"] & \ni & f_U^\#(s) \arrow[d, mapsto] \\
s\big|_W = t\big|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "f_W^\#"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f_U^\#(s)\big|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)\big|_{f^{-1}(W)} \\
t \arrow[u, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f_W^\#"] \arrow[u, "\big|_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[u, "\big|_{f^{-1}(W)}"'] & \ni & f_V^\#(t) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

# Affine Schemata 2

## 2.1 $\operatorname{Spec} A$ als topologischer Raum

Sei im Folgenden $A$ ein kommutativer Ring mit 1 und $\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \lhd A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

**Definition 2.1 (Zariski Topologie).**

Ist $\mathfrak{a} \lhd A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec} A\,.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \operatorname{Spec} A \mid \exists\ \mathfrak{a} \lhd A:\ U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

**Bemerkung 2.2.** Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \operatorname{Spec} A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \lhd A$.

**Beispiel 2.3 ($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$).** Für $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für $p$ Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \Leftrightarrow (a) \subseteq (p) \Leftrightarrow p \mid a \Leftrightarrow p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

**Lemma 2.4.** *Sei $x \in \operatorname{Spec} A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\operatorname{Spec} A$ gleich*

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

**Bemerkung 2.5.** Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

**Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei $X$ ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

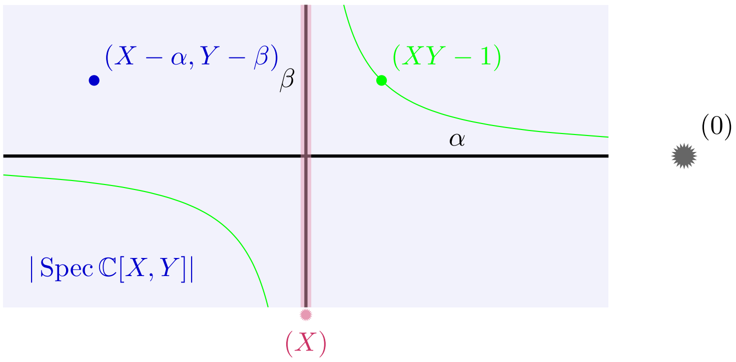
Er heißt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

**Beispiel 2.7.** Sei $A = \mathbb{C}[X, Y]$.

- $x = (0) \in \operatorname{Spec} A$ ist generisch.

Abbildung 1: $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y]$




- $x = (X-\alpha, Y-\beta) \lhd A$ ist abgeschlossen, da aus $x \lhd A$ maximal $V(x) = \{x\}$ und somit $x$ abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \lhd A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.
- $x = (XY-1) \lhd A$ ist ebenfalls weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

**Definition 2.8 (basisoffene Menge).**

Für $f \in A$ nennt man

$$D(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die *zu $f$ gehörige basisoffene Menge.*

**Lemma 2.9.** *Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ ist eine Vereinigung von $D(f) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.*

**Lemma 2.10.** *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

**Definition 2.11 (Radikal).**

Für $\mathfrak{a} \lhd A$ heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ f^n \in \mathfrak{a}\}$$

*Radikal* von $\mathfrak{a}$.

**Lemma 2.12.** $\sqrt{a} \lhd A$.

**Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).**

Ein Ideal $\mathfrak{b} \lhd A$ heißt *Radikalideal (radiziell)*, falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

**Bemerkung 2.14.** Es gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

**Lemma 2.15.** *Für $\mathfrak{a} \lhd A$ gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

**Satz 2.16.**

*Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

*Insbesondere gilt sogar*

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

**Definition 2.17 (irreduzibel).**

Ein topologischer Raum $X$ heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = A_1 \cup A_2$ mit $A_{1,2} \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X = A_1$ oder $X = A_2$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn $Z$ mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

**Beispiel 2.18.** $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist irreduzibel. Ist nämlich $A_1 \subsetneq \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ abgeschlossen, so ist $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für irgendwelche Primzahlen $p_i$.

**Lemma 2.19.** *In* $\operatorname{Spec} A$ *gilt:*

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

**Definition 2.20 (Nilradikal).**

$$\operatorname{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von $A$.

**Korollar 2.21.** *Es gilt*

$$\operatorname{Spec} A \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

**Definition 2.22 (noethersch).** Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlosser Teilmengen, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$.

**Lemma 2.23.** *Ist $A$ noethersch, so ist auch* $\operatorname{Spec} A$ *noethersch.*

**Satz 2.24.** *Ist $X$ noetherschscher topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen, so zerlegt sich*

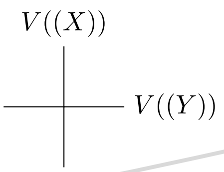
$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$$

*in abgeschlosse irreduzible Teilmengen $A_i \subseteq A$. Nimmt man $A_i \not\subseteq A_j$ für $i \neq j$, so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.*

*Die $A_i$ heißen* (irreduzible) Komponenten *von $A$.*

**Beispiel 2.25.** In $\operatorname{Spec} k[X,Y]$ zerfüllt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$

Im Bild 


Quelle suchen!

**Beispiel 2.26.** Sei $k$ algebraisch abgeschlossen. Betrachte $\operatorname{Spec} k[X,Y]$. Die maximalen Ideale sind gerade $\mathfrak{m} = (X-\alpha, Y-\beta)$ für $\alpha, \beta \in k$. Ein abgeschlosser Punkt $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} k[X,Y]$ wird eindeutig durch $(\alpha,\beta) \in k^2$ gegeben.

$\mathbb{A}_k^2 := \operatorname{Spec} k[X,Y]$ wird der *2 dimensionale affine Raum über $k$* genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ liefert

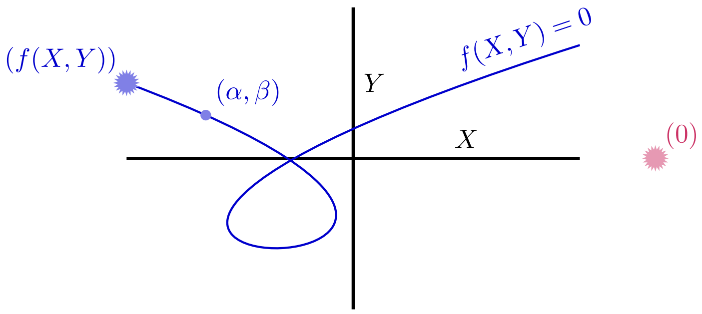
„$\Rightarrow$“ ist klar. Also zu „$\Leftarrow$“. Es ist $f(\alpha,\beta)=0$, also $f(X,Y) = (X-\beta)h(X,Y)$ für gewisses $h$. Es ist $f(X,Y) - f(\alpha,Y) = (X-\alpha)g(X,Y)$, da die linke Seite $X=\alpha$ als Nullstelle hat.

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_\phi \{(\alpha,\beta) \in k^2 \mid f(\alpha,\beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned}
A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\
&= \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} k[X,Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X-\alpha, Y-\beta) \lhd k[X,Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X-\alpha, Y-\beta)\} \\
&= \{(X-\alpha, Y-\beta) \mid f(X,Y) \in \alpha \ \Rightarrow\ f(X,Y) \in (X-\alpha, Y-\beta)\} \\
&= \{(X-\alpha, Y-\beta) \mid f(X,Y) \in \alpha \ \Rightarrow\ f(X,Y) = (X-\alpha)g(X,Y) + (Y-\beta)h(X,Y)\} \\
&= \{(X-\alpha, Y-\beta) \mid f(\alpha,\beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\
&\xrightarrow{\phi} \{(\alpha,\beta) \in k^2 \mid f(\alpha,\beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.
\end{aligned}$$

Abbildung 2: Spec $k[X,Y]$




In $\mathbb{A}_k^2$ hat man aber noch mehr Punkte: Sei $\mathfrak{p} \lhd k[X,Y]$ Primideal, aber nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$ kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise $\mathfrak{p} = (f(X,Y))$ für $f \in k[X,Y]$ irreduzibel, so liegen alle $(\alpha,\beta) \in k^2$ mit $f(\alpha,\beta) = 0$ auf der entsprechenden Menge in $k^2$, d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X,Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} := (X-\alpha, Y-\beta) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

**Lemma 2.27.** *Ist $A$ ein Ring, $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$ und $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ die Projektion, so ist*

$$\varphi := \pi^{-1} : \begin{array}{rcl} \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} & \to & \operatorname{Spec} A \\ \overline{\mathfrak{p}} & \mapsto & \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{p}}) \end{array}$$

*ein Homöomorphismus auf sein Bild*

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A.$$

**Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).**

Ein topologischer Raum $X$ heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist $X = \bigcap_{i\in I} U_i$ mit $U_i$ offen, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset I$ mit $X = \bigcap_{i \in F} U_i$.

$X$ heißt *kompakt*, wenn $X$ hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

**Satz 2.29.**

*Ist $A$ ein Ring, so ist* $\operatorname{Spec} A$ *quasi-kompakt.*

## 2.2 Spec $A$ als lokal geringter Raum

Wir wollen $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ als die „guten Funktionen“ auf $\operatorname{Spec} A$ auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

**Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).**

Sei $A$ ein Ring, dann heißt $S \subseteq A$ *multiplikative Teilmenge*, wenn $1 \in S$ ist und aus $a, b \in S$ auch $ab \in S$ folgt.

Die *Lokalisierung* $A_S$ oder $A[S^{-1}]$ von $A$ bezüglich $S$ ist der Ring

$$A_S := \left(A \times S\right) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in S : \; u(at - bs) = 0.$$

Schreibe $\frac{a}{s} := [(a, s)]$ und definiere eine Ringstruktur auf $A_S$ durch Bruchrechnen.

**Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).** *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist $S \subseteq A$ wie in Definition 2.30, $\varphi : A \to R$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(S) \subseteq R^\times$, so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A_S \arrow[d, "\exists!"] \\ & R \end{tikzcd}$$

*kommutativ macht, wobei $\iota : A \to A_S, \; a \mapsto \frac{a}{1}$.*

**Beispiel 2.32.**

- $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $f \in A$ fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

$$A_\mathfrak{p} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, \; b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

  ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$.

**Satz 2.33.**

*Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Dann existiert auf $X$ eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ mit:*

*i) Es existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$.*

*ii) Für $f \in A$ betrachte*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(X) & \to & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)\big|_{D(f)}. \end{array}$$

*Dann ist $\varphi(f)\big|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$ eine Einheit und der eindeutig durch*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] \arrow[dr] & A_f \arrow[d, "\varphi_f"', "\exists!"] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\cdot|_{D(f)}"] & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{tikzcd}$$

*gegebene Ringhomomorphismus $\varphi_f$ ist ein Isomorphismus.*

*iii) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ hat man das koanonische Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi_\mathfrak{p}"] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

*und $\varphi_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ ist ein Isomorphismus.*

### 2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

**Definition 2.34 ($\mathfrak{B}$-(Prä)Garbe).**

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$ heißt $\mathfrak{B}$-*Prügarbe* auf $X = \operatorname{Spec} A$, wenn $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf

$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$

ist.

$\mathcal{F}$ heißt $\mathfrak{B}$-*Garbe*, wenn $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Prägarbe ist und die Garbenbedingungen für die $D(f)$ erfüllt sind.

**Hilfslemma 2.35.** Es gilt:

1. $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe.
2. Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe $\bar{\mathcal{F}}$ auf $X$ mit $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$ für alle $D(f) \in \mathfrak{B}$.

TODO

**Definition 2.36 ((affines) Schema).**

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der zu einem $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $(U_i, \mathcal{O}_X\big|_{U_i})$ ist ein affines Schema.

**Bemerkung 2.37.** Beachte dabei: Ist $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $X$, $U \subseteq X$ offen, so ist durch

$$\mathcal{F}\big|_U : \ V \mapsto \mathcal{F}\big|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe $\mathcal{F}\big|_U$ auf $U$ definiert.

**Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).**

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y).$$

mit $f : X \to Y$ stetig und $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ Garbenmorphismus auf $Y$ so dass $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ lokaler Ringhomomorphismus

**Bemerkung 2.39.** Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ring} & \to & \mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}} \\ A & \mapsto & (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{rrcl} f : & \operatorname{Spec} B & \to & \operatorname{Spec} A \ , \\ & \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}.$$

Letzterer ist für $g \in A$ gegeben durch

$$\begin{array}{rrcl} f^\#_{D(g)} : & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) = A_g & \to & \big(f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}\big)(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ & \dfrac{a}{g^n} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei wir durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

$$\begin{array}{rrcl} f^\#_{\mathfrak{p}} : & A_{\mathfrak{p}} & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{q}} \\ & \dfrac{a}{\gamma} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\gamma \notin \mathfrak{p}$ (also $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

# Beispiele 3

## 3.1 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$

Jeder Ring $A$ hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & A \\ 1 & \mapsto & 1 \\ z & \mapsto & \begin{cases} 1+1+\ldots+1 & z>0 \\ 0 & z=0 \\ -1-1-\ldots-1 & z<0 \end{cases}. \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ von affinen Schemata. $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist somit ein *finales Objekt* in der Kategorie $\mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}}$.

Ferner können wir zusammenfassen

**Offene Mengen** $\emptyset \neq U \subseteq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ offen $\Leftrightarrow U = \begin{cases} \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \{(p_1),\ldots,(p_r)\} & , r\in\mathbb{N}_0 \\ \emptyset \end{cases}$

**Basisoffene Mengen** $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\{(p_1),\ldots,(p_r)\}$ für $f = p_1^{\nu_1}\ldots p_r^{\nu_r}$.

**Strukturgarbe**

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(D(f)) = \mathbb{Z}_f = \left\{\frac{a}{f^n} \mid n\in\mathbb{N}_0, a\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z},(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \mid p\nmid b, a\in\mathbb{Z}\right\}$$

## 3.2 $\operatorname{Spec} k$ für einen Körper $k$

**Als topologischer Raum** $\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$.

**Strukturgarbe** $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\{(0)\}) = k$.

**Bemerkung 3.1.** Sei $A$ ein Ring. Angenommen wir haben $\operatorname{Spec} A \xrightarrow{(f,f^\#)} \operatorname{Spec} k$ für einen Körper $k$, so haben wir

$$f^\#_{\operatorname{Spec} k} : k = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} k) {=} A,$$

wobei aus $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(f^{-1}(\{(0)\})) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ resultiert. Insgesamt ist $A$ also eine $k$-Algebra (d.h. ein Ring zusammen mit $k \to A$).

Bemerke hierbei „Grothendiecks Gesamtphilosophie“:

> *Alles relativ lesen!*

**Definition 3.2 ($S$-Schema).**

Sei $S$ ein Schema. Dann ist ein *$S$-Schema* ein Schema $X$ zusammen mit einem Strukturmorphismus $X \xrightarrow{\varphi} S$. Dies ergibt die Kategorie $\mathbf{Sch}_S$, wenn man

$$\operatorname{Hom}(X \xrightarrow{\varphi} S, Y \xrightarrow{\varphi} S) := \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd} \right\}$$

setzt.

**Beispiel 3.3.** $\mathbf{Sch}_k := \mathbf{Sch}_{\operatorname{Spec} k}$ sind die sog. *$k$-Schemata*. Ein Beispiel hierfür ist $\operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \to \operatorname{Spec} k$ via $k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$.

**Bemerkung 3.4.** Sei $X$ ein Schema und $x \in X$ und weiter $\mathfrak{m}_x \lhd \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal. Dann ist

$$\kappa(x) := k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

der *Restklassenkörper von $x$*.

Betrachte nun $(f, f^\#) : \operatorname{Spec} k \to X$ mit

$$\begin{array}{rccc} f: & \operatorname{Spec} k(x) & \to & X \\ & \eta_x & \mapsto & x, \end{array}$$

wobei topologisch gesehen $\eta_x \in \operatorname{Spec} k(x)$ der einzige Punkt dieses Schemas ist. Für $U \subseteq X$ offen haben wir:

$$f_U^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k(x)}(U) = \begin{cases} 0 & x \notin U \\ k(x) & x \in U. \end{cases}$$

Im Fall $x \in U$ geht dies via

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x).$$

Ist umgekehrt $(f, f^\#) : \operatorname{Spec} k \to X$ ein Schemamorphismus, so setze $x := f((0)) \in X$ und $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}$ liefert einen Ringhomomorphismus der Halme:

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k,(0)} = k.$$

Dieser ist lokal (also $f_x^\#(\mathfrak{m}_x) = (0)$). Damit ist

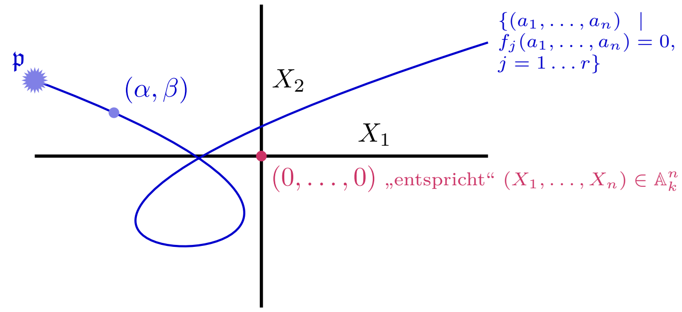
$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \xhookrightarrow{f_x^\# \mod \mathfrak{m}_x} f_x^\# \mod \mathfrak{m}_x k$$

wohldefiniert und somit ist $k \mid k(x)$ eine Körpererweiterung.

Zusammengefasst haben wir:

$$\boxed{\text{Einen Punkt } x \in X \text{ wählen mit Restklassenkörper } k(x) \text{ und eine Körpererweiterung } k \mid k(x).} \iff \boxed{\text{Einen Schemamorphismus } \operatorname{Spec} k \to X \text{ wählen für eine Körpererweiterung } k \mid k(x).}$$

Abbildung 3: $\operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$




## 3.3 Der Affine $n$-dimensionale Raum über $k$

Sei $k$ wieder ein Körper. Der affine $n$-dimensionale Raum über $k$ ist $\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$.

Wir erinnern an den Hilbertschen Nullstellensatz:

**Satz 3.5 (Hilbertscher Nullstellensatz).**

*Sei $k$ algebraisch abgeschlossen. Dann ist jedes maximale Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ von der Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.*

Wir haben bereits gezeigt:

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n, \qquad \text{via } (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Sei $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$ ein nicht maximales Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ (die Darstellung ist nach Satz 3.5) möglich, so gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Wir können dies in Abbildung 3 „sehen“.

## 3.4 Weiteres Beispiel

Betrachte $k[\![X_1, \dots, X_n]\!] = k[\![X_1, \dots, X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$ mit $R[\![X]\!] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in R\}$.

**Bemerkung 3.6.** $g \in k[\![X_1, \dots, X_n]\!] \setminus (X_1, \dots, X_n)$ ist eine Einheit.

**Funktor Spec** Wir haben den Funktor Spec: Die Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc}
k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_N]_{(X_1, \dots, X_n)} & \longrightarrow & k[\![X_1, \dots, X_n]\!] & \longrightarrow & k \\
f & \longmapsto & \frac{f}{1} & & & & \\
 & & \frac{f}{g} & \longmapsto & fg^{-1} & & \\
 & & & & h & \longmapsto & h(0)
\end{array}$$

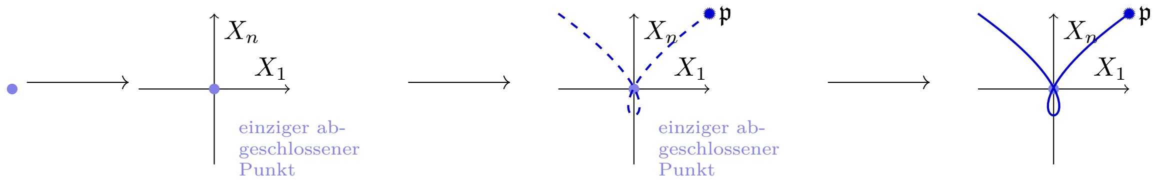
Lokalisierung an $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$

induzieren

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \operatorname{Spec} k & \longrightarrow & k[\![X_1,\dots,X_n]\!] & \longrightarrow & k[X_1,\dots,X_n]_{(X_1,\dots,X_n)} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n] \\
\text{topologisch:} & (0) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n) & \longmapsto & (X_1,\dots,X_n). \\
 & & & \substack{\text{einziger}\\ \text{abgeschlossener}\\ \text{Punkt}} & & \substack{\text{einziger}\\ \text{abgeschlossener}\\ \text{Punkt}} & & \substack{\text{entspricht dem}\\ \text{abgeschlossenen}\\ \text{Punkt}\\ (0,\dots,0)\in k^n}
\end{array}$$

Dies ist ein Homöomorphismus auf $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^n_k \mid \mathfrak{p} \subseteq (X_1,\dots,X_n)\} = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq \mathbb{A}^n_k$.

Was passiert aber auf Schemaniveau?




Betrachte dazu

$$\operatorname{Spec} k \longrightarrow k[\![X_1,\dots,X_n]\!]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[X_1,\dots,X_N]_{(X_1,\dots,X_n)}/\mathfrak{p} \longrightarrow \operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{p} \quad \approx \quad V(\mathfrak{p})$$

Nehmen wir das explizite Beispiel $\mathfrak{p} = (Y^2 - X^2(X+1))$. Es ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $V(\mathfrak{p})$ irreduzibel.

Beachte: $1 + X \in k[\![X]\!]$ hat eine Wurzel, wie man durch folgenden Ansatz mit $h(X) = a_0 + a_1 X + \dots$ sieht:

$$1 + X = (h(X))^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 X + \dots$$

Setze $a_0 := 1$ oder $-1$ und löse sukzessizve auf. Demnach ist $Y^2 - X^2(X+1) = (Y - Xh(X))(Y + Xh(X))$ nicht mehr prim, also $V(\mathfrak{p}) \subseteq k[\![X,Y]\!]$ nicht mehr irreduziebel!

Betrachte genauer

$$\begin{array}{ccccc}
k[\![u,v]\!]/(uv) & \xrightarrow{\cong} & k[\![z,w]\!]/(z^2-w^2) & \xrightarrow{\cong} & k[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^2(h(X))^2) \\
u \longmapsto z + w & & z \longmapsto Y & & \\
v \longmapsto z - w & & w \longmapsto Xh(X) & &
\end{array}$$

In Bildern:

$$\operatorname{Spec} k[\![u,v]\!]/(uv) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^2(X+1))$$

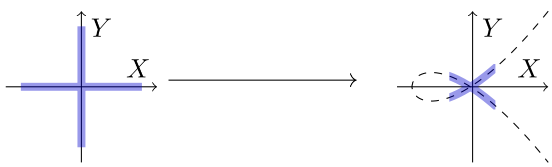
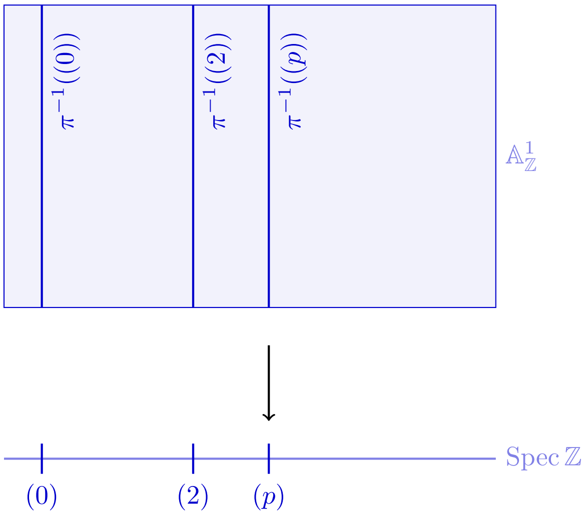


Abbildung 4: Veranschaulichung von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$




## 3.5 Spezielles Beispiel $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$

Wir haben $\pi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Topologisch ist

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{p \text{ prim}} \pi^{-1}((p)) \cup \pi^{-1}((0)).$$

Abbildung 4 verdeutlicht dies.

**Zu $\pi^{-1}((0))$** Betrachte nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$, so gilt $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$.

Betrachte $S := \mathbb{Z}\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$ und die Lokalisierung $g : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]_S$. Es ist klar: $\mathbb{Z}[X]_S = \mathbb{Q}[X]$

Ferner gilt $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[X] \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild:

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \mid \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)\} = \pi^{-1}(0),$$

**Zu $\pi^{-1}((p))$** Es ist $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p)) \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$. Dann betrachte $\rho : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$ und $\rho^* : \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$. Wegen $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X] / \ker\rho$ ist $\rho^*$ ein Homöomorphismus auf

$$V(\ker\rho) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X] \mid \ker\rho \subseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1}((p)) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

Zusammengefasst ist:

$$\pi^{-1}((0)) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$$
$$\pi^{-1}((p)) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p},$$

wobei die Gleichheiten topologisch zu lesen sind.

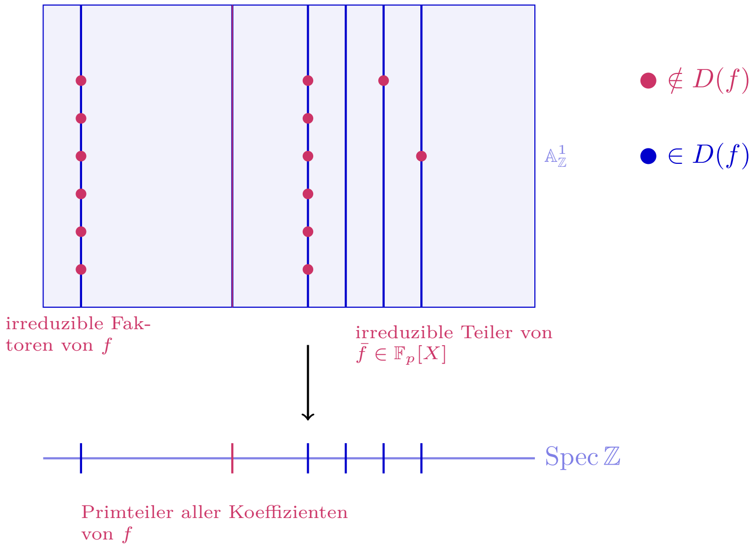
**Betrachte $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$**

**1. Fall.** $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$, also

$$\mathfrak{p} = (\mu(X))$$

mit $\mu(X) \in \mathbb{Z}[X]$ einem primitiven, irreduziblen Polynom.

Abbildung 5: Veranschaulichung von $D(f) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$




**2. Fall.** $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$, so ist $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$ für ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[X]$, also $\mathfrak{p} = \rho^{-1}((q(X)))$ für ein irreduzibles $q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ oder $(0)$. Dann ist

$$\mathfrak{p} = (r(X), p)$$

mit $r(X) \in \mathbb{Z}[X]$ und $r(X) \equiv q(X) \bmod p$.

Es stellt sich die Frage, wie für $f \in \mathbb{Z}[X]$ die $D(f) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ aussehen. Dazu

**1. Fall** $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0))$. Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dann $f(X) = \xi q_1(X)^{\nu_1} \ldots q_r(X)^{\nu_r}$ und es gilt

$$f \notin \mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} = (q(X))$$

mit $q \neq q_1, \ldots, q_r$.

**2. Fall** $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$. $f(X) \notin (r(X), p)$ mit $r(X) \mod p \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel. Für eine Primzahl $p$, betrachte $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$. Ist $\bar{f}(X) = 0$, so ist $f(X) \in (r(X), p)$ für alle $r(X)$. Für $\bar{f}(X) = \bar{q}_1(X)^{\nu_1} \ldots \bar{q}_s(X)^{\nu_s}$, ist $f(X) \in (q_i(X), p)$ für diese $i$.

Dargestellt ist dies wieder in Abbildung 5.

## 3.6 Diskrete Bewertungsringe

**Definition 3.7 (Diskrete Bewertung).**

Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper $k$ ist eine Abbildung

$$v : k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

so dass

1. $v(0) = \infty$, $v(x) \in \mathbb{Z}$ für $x \neq 0$,
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle $x, y$ und
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y$.

**Bemerkung 3.8.** Wählt man $q > 1$ (in $\mathbb{R}$), so ist

$$|\cdot| : k \to \mathbb{R}, \ x \mapsto |x| := q^{-v(x)}$$

eine Betragsfunktion mit

1. $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$. Die erste Ungleichung wird auch nicht-archimedische Dreiecksungleichung genannt.

**Definition 3.9 (Bewertungsring).**

Ist $(k, v)$ ein diskret bewerteter Körper, so ist

$$\mathcal{O} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$$

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := \{x \in k \mid v(x) > 0\} = \{x \in k \mid |x| < 1\} \lhd \mathcal{O},$$

der *Bewertungsring* zu $k$.

Ein *diskreter Bewertungsring (dvr)* ist ein Integritätsbereich $R$, zusammen mit diskreter Bewertung $v : K = \mathrm{Quot}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass $R = \mathcal{O}$ gilt.

Ferner gilt $\mathcal{O}$ ist ein Hauptidealbereich (PID), $k = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$.

Ist $\pi \in \mathcal{O}$ mit $v(\pi) = 1$, so ist $\mathfrak{m} = (\pi)$ und $\mathcal{O}$ hat genau die Ideale $(\pi^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

**Bemerkung 3.10.** Der Wertebereich $v(k \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe, also $v(k \setminus \{0\}) = d\mathbb{Z}$ für ein $d$. Wir können meistens oBdA $d = 1$ annehmen.

**Bemerkung 3.11.** Beachte: Für $x \in \mathcal{O}$ gilt

$$v(x) = n \ \Leftrightarrow \ x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Für $\xi = \frac{x}{y} \in K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$ ist $v(\xi) = v(x) - v(y)$.

**Bemerkung 3.12.**

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O} = \{(0), (\pi) = \mathfrak{m}\},$$

da in Hauptidealbereichen jedes Primideal $\neq (0)$ auch maximal ist.

**Definition 3.13 (Restklassenkörper eines dvr).**

Ist $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring, so heißt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$$

der *Restklassenkörper* von $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ heißt

- von *verschiedener Charakteristik*, wenn für $K = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$, $\mathrm{char}\, K = 0$ und $\mathrm{char}\, k \neq 0$ ist und
- von *gleicher Charakteristik*, wenn $\mathrm{char}\, K = \mathrm{char}\, k$.

### 3.6.1 Beispiele

**1.** Sei $k$ ein Körper,

$$K := k(\!(t)\!) := \operatorname{Quot} k[\![t]\!] = \left\{ f(t) = \sum_{l=-N}^{\infty} a_t t^l \mid a_l \in k \right\}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} v: & k[\![t]\!] & \to & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ & f(t) = \sum a_l t^l & \mapsto & \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid t^{-k} f(t) \in k[\![t]\!]\} = \min\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{array}$$

Auf $k(\!(t)\!)$ Dies ist eine diskrete Bewertung mit $\mathcal{O} = k[\![t]\!]$:

$$\begin{array}{rrcl} v: & k(\!(t)\!) & \to & \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\} \\ & f(t) = \sum a_l t^l & \mapsto & = \min\{l \in \mathbb{Z}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{array}$$

$k(\!(t)\!)$ trägt damit $|\cdot| := q^{-v(\cdot)}$, also ist $k(\!(t)\!)$ ein metrischer Raum mit $d(x,y) := |x-y|$, dieser ist vollständig.

Für den Restklassenkörper gilt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k[\![t]\!]/tk(\!(t)\!) \cong k,$$

da $\mathfrak{m} = tk[\![t]\!] = (t)$. $t$ heißt dabei *Uniformierende.*

**2.** Betrachte

$$\begin{array}{rrcl} \nu_p: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & \frac{a}{b} & \mapsto & v(a) - v(b) \end{array}$$

mit $v(a) = \max\{k: \ p^k \mid a\}$ für eine Primzahl $p$.

$\nu_p$ ist eine diskrete Bewertung, die *$p$-adische Bewertung.* Ferner ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form} \mid p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

und $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$ und

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_p.$$

$|\cdot|_p := p^{-\nu_p(\cdot)} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *$p$-adischer Betrag.* $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ ist jedoch nicht vollständig, da z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ ein Cauchyfolge bildet.

Man erhält die Vervollständigungen

$$(\mathbb{Q}, |\cdot|) \rightsquigarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p) \rightsquigarrow \mathbb{Q}_p.$$

**Zurück zu Schemata** Sei $\mathcal{O}$ ein dvr, so ist $\operatorname{Spec} \mathcal{O} = \{(0), (\pi)\}$. Dabei ist $(0)$ der generische Punkt mit $\overline{\{(0)\}} = V((0)) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ und $(\pi)$ ein abgeschlossener Punkt, genannt der *spezielle Punkt* in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$.

**Beispiel 3.14.** Sei $k$ ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ und $k$ algebraisch abgeschlossen. Wir betrachten

$$E := \operatorname{Spec} A \quad \text{mit } A := k[X,Y]/(Y^2 - (X^3 + aX + b)).$$

Dies ist der affine Teil einer *elliptischen Kurve*, wenn $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \in k$.

Wir haben

$$|E| \cong \{(x_0, y_0) \in k^2 \mid y_0^2 - (x_0^3 + ax_0 + b) = 0\}.$$

Sei $(x_0, y_0) \in |E|$, oder besser $\mathfrak{p} := (X - x_0, Y - y_0) \in E$. Es ist $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ ein dvr.

Dazu:

**1. Fall** $y_0 \neq 0$**.** , so ist $\mathcal{O}_{E,y} = A_\mathfrak{p}$. Betrachten wir $\frac{\bar{f}(X,Y)}{\bar{g}(X,Y)} \in A_\mathfrak{p}$, also $\bar{f}, \bar{g} \in A$ und $\bar{g} \notin (X - x_0, Y - y_0)$, d.h. $\bar{g}(x_0, y_0) \neq 0$. Ferner ist

$$Y^2 - (X^3 + aX + b) = (Y + y_0)(Y - y_0) + (X^2 x_0 X + (x + x_0^2))(X - x_0)$$

und wenn $y_0 \neq 0$, so ist $(Y + y_0) \notin (X - x_0, Y - y_0)$. Demnach ist $Y + y_0 \in A_\mathfrak{p}^\times$, also gilt in $A_\mathfrak{p}$:

$$Y - y_0 = \frac{X^2 + x_0 X + (a + x_0^2)}{Y + y_0}(X - x_0)$$

und $(X - x_0, Y - y_0)A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = (X - x_0)A_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptideal.

Also ist

$$\begin{array}{rccl} v: & A_\mathfrak{p} & \to & \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ & a & \mapsto & \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in (X - x_0)^k\} \end{array}$$

eine diskrete Bewertung!

**2. Fall** $y_0 = 0$**.** Dies geht analog und man sieht, dass

$$X^2 + x_0 X + (a + x_0^2) \notin (X - x_0, Y),$$

da nach Voraussetzung $4a^2 + 27b^2 \neq 0$. Also ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = (Y - y_0)A_\mathfrak{p}$.

**Bemerkung 3.15.** Sei $K(E) := \mathcal{O}_{E,(0)} = \mathrm{Quot}(A) = A_{(0)}$ der *Funktionenkörper* von $E$. Für $\mathfrak{p} \in E$ hat man die *Null-/Polstellenordnung*

$$v_\mathfrak{p} : K(E) \to \mathrm{Quot}(A_\mathfrak{p}) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

# Projektive Schemata 4

## 4.1 Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie

Sei $k$ ein Körper. So ist

$$\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1}) := \{L \subset k^{n+1}\text{UVR} \mid \dim_k L = 1\}$$

der n-dimensionale projektive Raum.

**Homogene Koordinaten** $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ mit $0 \neq (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ definiert als

$$[x_0 : \dots : x_n] := \operatorname{span}_k \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $[x_0 : \dots : x_n] = [y_0, \dots, y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times$ mit $x_i = \lambda y_i \forall i$. Damit gilt dann, dass $\mathbb{P}^n(k) = k^{n+1}/\sim$, wobei $\sim$ die gerade eben definierte Äquivalenzrelation bezeichnet.

**Überdeckung** $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[d, "h_i"', "b_{ij}"] & = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} & \ni & {[x_0 : \dots : x_0]} \arrow[d, mapsto] \\ k^n & & \ni & \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{tikzcd}$$

als “Karten“.

**Beachte** $\mathbb{P}^n(k) \backslash U_i = \{[x_0 : \dots : 0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, \cancel{1}, \dots, x_n) \neq 0\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}^{n-1}(k)$

**Bemerkung 4.1.**

- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
- $\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
- $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$

## 4.2 $\mathbb{P}^n(k)$ als Schema

Statt einem Körper $k$ können wir einen Ring $A$ betrachten.

### 4.2.1 1. Variante

Betrachte $U_i := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{i}, \dots, x_n] = \mathbb{A}^n_A$.

In $\mathbb{RP}^n$ würden wir diese mit dem Kartenwechsel verkleben:

$$\begin{tikzcd}
 & {[y_0, \dots, \underset{i\text{-te}}{1}, \dots, y_n]} & & U_i \cap U_j & \\
(y_0, \dots, \cancel{i}, \dots, y_n) \arrow[ur, mapsto] & & h_i(U_i \cap U_j) \arrow[ur] \arrow[rr, "\text{Kartenwechsel}"] \arrow[d, equal] & & h_j(U_i \cap U_j) \arrow[ul] \arrow[d, equal] \\
 & & \{(y_0, \dots, \cancel{i}, \dots, y_n) \mid y_j \neq 0\} \arrow[rr] & & \{(z_0, \dots, \cancel{j}, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\}
\end{tikzcd}$$

$$(y_0, \dots, \cancel{i}, \dots, y_n) \longmapsto \left( \frac{y_0}{y_j}, \dots, \underset{i\text{-te}}{\frac{1}{y_j}}, \dots, \cancel{j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

Betrachte also

$$\begin{aligned}
U_{ij} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{i}, \dots, x_n][x_j^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{i}, \dots, x_n] = U_i \\
U_{ji} &:= \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{j}, \dots, x_n][x_i^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \cancel{j}, \dots, x_n] = U_j
\end{aligned}$$

und wähle einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rrcll}
\phi_{ij}: & U_{ij} & \to & U_{ji} & \\
 & x_k & \mapsto & \dfrac{x_k}{x_i} & \text{für } k \neq j \\
 & x_j & \mapsto & \dfrac{1}{x_i}. &
\end{array}$$

Es gilt nun $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, denn

$$\begin{aligned}
U_{ij} \cap U_{ik} &= D(x_j x_k) \subseteq U_i \\
U_{ji} \cap U_{jk} &= D(x_i x_k) \subseteq U_j
\end{aligned}$$

sowie

$$\phi_{ik}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$$

**Wir haben also** eine Familie $(U_i)_{i=0,\dots,n}$ von (affinen) Schemata. Für jedes Paar $(i,j)$ eine offene Imersion $U_{ij} \hookrightarrow U_i$ mit (affinen) Schemata und Isomorphismen $\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$, so dass $\phi_{ik}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}\big|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$.

Bleibt zur Übung lediglich zu zeigen, dass ein (bist auf Isomorphie) eindeutiges Schema $\mathbb{P}^n_A$ mit Überdeckung $\mathbb{P}^n_A = \bigcup_{i=0}^n V_i$ für $V_i \subseteq \mathbb{P}^n_A$ offen und Isomorphismen $V_i \xrightarrow{\cong} U_i$ von (affinen) Schemata existiert.

### 4.2.2 2. Variante (Die Proj-Konstruktion)

**Definition 4.2 (graduierte $A$-Algebra).**

Sei $A$ ein Ring, dann heißt
$$S := \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$$
eine *graduierte $A$-Algebra*, wenn

- $S$ ein Ring,
- $S_n \subset S$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul,
- $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$ ist,
- wir einen Ringhomomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} S$ haben und
- die $S_n$ $A$-Untermoduln sind.

Ein $s \in S_n$ heißt *homogen vom Grad $n$*.

**Definition 4.3 (homogenes Ideal).**

Ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd S$ heißt *homogen*, wenn
$$\mathfrak{a} = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a} \cap S_n.$$

**Lemma 4.4.** *Es ist äquivalent*

- $\mathfrak{a}$ *homogen,*
- $\mathfrak{a}$ *wird von homogenen Elementen erzeugt*
- *Aus $a \in \mathfrak{a}$ mit $a = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$ für $a_n \in S_n$ folgt $a_n \in \mathfrak{a}$.*

**Beispiel 4.5.** $S = A[x_0, \ldots, x_n] = \oplus_{m\geq 0} S_m$ mit
$$S_m = \{f(x_0, \ldots, x_n) \mid f \text{ homogen von Grad } m\},$$
d.h.
$$f \in S_m \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0^{n+1}} \alpha_\nu X_0^{\nu_0} \ldots X_n^{\nu_n} \quad \text{mit } \nu_0 + \ldots + \nu_n = m.$$

**Definition 4.6 ($\mathrm{Proj}(S)$).**

Setze $S_+ := \oplus_{n\geq 1} S_n$, dann ist das *projektive Spektrum* $\mathrm{Proj}\, S$ *von* $S$ definiert als
$$\mathrm{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, S \text{ homogen} \mid S_+ \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

**Definition 4.7 (Zariski Topologie auf $\mathrm{Proj}(S)$).**

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \lhd S$ setze
$$V_+(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \mathrm{Proj}(S).$$
Dann bilden diese $V_+(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der *Zariski-Topologie auf* $\mathrm{Proj}(S)$.

**Bemerkung 4.8.** Ein homogenes $\mathfrak{a} \lhd S$, $\mathfrak{a} \neq S$, ist prim genau dann, wenn gilt:

$$xy \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathfrak{a} \text{ oder } y \in \mathfrak{a}$$

für alle homogenen $x, y$.

**Definition 4.9 (basisoffenen Mengen auf $\mathrm{Proj}(S)$).**

Analog zu $\operatorname{Spec} A$ bilden für $f \in S$ die *basisoffenen Mengen in* $\mathrm{Proj}(S)$

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \subseteq \mathrm{Proj}(S)$$

eine Basis der Topologie auf $\mathrm{Proj}(S)$.

**Definition 4.10 (homogene Lokalisierung).**

- Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ heißt

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{\frac{s}{t} \mid s, t \in S,\ t \notin \mathfrak{p},\ s, t \text{ homogen von gleichem Grad}\right\}$$

*homogene Lokalisierung von* $\mathfrak{p}$.

- Für $f \in S$ homogen von Grad $m$ heißt

$$S_{(f)} := \left\{\frac{s}{f^k} \mid s \in S,\ k \in \mathbb{N}_0,\ s \text{ homogen von Grad } k \deg f\right\}$$

*homogene Lokalisierung bezüglich* $f$.

**Lemma 4.11.** *Es gilt: $S_{(\mathfrak{p})}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal*

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} := \left\{\frac{s}{t} \mid s \in \mathfrak{p}\right\}.$$

**Satz 4.12.**

*Auf $\mathrm{Proj}(S)$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$ mit:*

1. *Für alle homogenen $f \in S_+$ hat man den Isomorphismus*

$$(\varphi, \varphi^{\#}) : \left(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}|_{D_+(f)}\right) \to \mathrm{Spec}(S_{(f)}, \mathcal{O}_{S_{(f)}})$$

2. *Diese induzieren Isomorphismen*

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S),\mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} S_{(\mathfrak{p})}.$$

*Damit wird $(\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ zu einem Schema.*

**Lemma 4.13.** *Ist $f \in S_+$ homogen, so ist*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & D_+(f) & \to & \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

*ein Homöomorphismus.*

**Hilfslemma 4.14.** $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$ ist homogenes Primideal in $S$.

wir definieren $\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj}(A[X_0, \ldots, X_n])$ als Schema. Dabei stellen sich aber die Fragen, was dabei $D_+(X_i)$ sein soll und ob die beiden Varianten übereinstimmen.

**Lemma 4.15.** *Die beiden Varianten der Definition von $\mathbb{P}^n_A$ stimmen überein und es gilt*

$$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} S_{(X_i)} \cong \mathbb{A}^n_A.$$

## 4.3 Immersionen und projektive $A$-Schemata

**Definition 4.16 (offene und abgeschlossene Immersion).**

Ein Morphismus $f : Y \to X$ von Schemata heißt

1. *offene Immersion*, wenn es $U \subseteq^\circ X$ gibt, so dass

$$f : (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\cong} (U, \mathcal{O}_X\big|_U) \xhookrightarrow{(\iota, \iota^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$$

2. *abgeschlossene Immerson*, wenn gilt:
   - $f$ ist topologisch ein Homöomorphismus auf $\operatorname{im} f := Z \subset X$ abgeschlossen,
   - $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ ist ein surjektiver Garbenmorphismus, d.h. für alle $y \in Y$ ist

$$f^\#_{(f(y))} : \mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

   surjektiv.

   Wir schreiben dann auch $Y \hookrightarrow\!\!\!\!\to X \to Y$.

**Beispiel 4.17.** Ist $A$ ein Ring, $a \lhd A$, so induziert

$$A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{a}$$

eine abgeschlossene Immersion

$$f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$$

**Bemerkung 4.18.** Es ist $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. Aber es folgt nicht notwendigerweise $A/\mathfrak{a} \overset{?}{\cong} A/\mathfrak{b}$!

Dazu betrachte einen Ring $A$ mit nilpotenten Elementen, d.h. $\operatorname{Nil} A := \sqrt{(0)} \neq (0)$ und

$$f : \operatorname{Spec} A/\operatorname{Nil}(A) \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$$

ist eine abgeschlossene Immersion mit

$$\operatorname{im} f = V(\operatorname{Nil}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \operatorname{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} A.$$

Jedoch ist dies *kein* Isomorphismus.

**Definition 4.19 (abgeschlossenes Unterschema).**

Ist $f : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so nennen wir $Y$ ein *(bzgl. $f$) abgeschlossenes Unterschema von $X$.*

**Definition 4.20 (projektives Schema über $A$).**

Sei $A$ ein Ring. Ein *projektives Schema über $A$* ist ein $A$-Schema $X$ mit einer abgeschlossenen Immersion, so dass

$$\begin{tikzcd} \iota : X \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_A \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert.

**Bemerkung 4.21.** **Leider noch nicht fertig :-(**

### 4.3.1 Beispiele

Zunächst ein etwas abstrakteres Beispiel.

**Satz 4.22.**

*Sei $S := A[X_0, \dots, X_n]$. Ist $\mathfrak{b} \lhd S$ ein homogenes Ideal, so ist $B := S/\mathfrak{b}$ in natürlicher Weise eine graduierte $A$-Algebra und $\operatorname{Proj}(B)$ ein projektives $A$-Schema.*

Und nun einige konkrete!

**1. $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k)$ und $\mathbb{P}^n_k$.** Sei $k$ ein Körper. Wir haben $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k) := k^{n+1} \backslash \{0\}/\sim$ und dagegen $\mathbb{P}^n_k := \operatorname{Proj} k[T_0, \dots, T_n]$. Eine algebraische Menge in $\mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k)$ ist per definitionem

$$Z := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\text{klass}}(k) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

für $f_1(T_0, \dots, T_n), \dots, f_r(T_0, \dots, T_n) \in k[T_0, \dots, T_n]$ homogen.

**Satz 4.23.**

*Die Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \rho : & \mathbb{P}^n_{klass}(k) & \to & \mathbb{P}^n_k \\ & [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & \langle x_i T_j - x_j T_i \mid i, j \rangle \end{array}$$

*ist eine Bijektion auf*

$$\mathbb{P}^n_k(k) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}^n_k \mid \mathfrak{p} \textit{ ist } k\textit{-rational}\} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}_k}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{P}^n_k).$$

**Bemerkung 4.24.** Wir haben dies auch schon affin gesehen:

$$\begin{array}{rcl} k^n = \mathbb{A}^n_{\text{klass}}(k) & \to & \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) \end{array}.$$

**Bemerkung 4.25.** Sei $X$ ein Schema. Wir erinnern daran, dass

$$X(K) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} k, X) = \{(\varphi, \varphi^{\#}) : \operatorname{Spec} k \to X\}$$

mit

$$\varphi_\eta : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, \eta} = k$$

Wir folgern eine Seite später dass $k(x) \cong k$ kanonisch. Das ist mir nicht klar :-(

mit $x = \varphi(\eta)$, wobei topologisch $\operatorname{Spec} k = \{\eta\}$. Damit haben wir

$$\overline{\varphi_\eta^n} : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x) \hookrightarrow k$$

(Körperhomomorphismen sind immer injektiv) und wir erhalten folgende 1-1 Beziehung:

$$X(k) \overset{1\text{-}1}{=} \{x \in X \text{ zusammen mit Inklusionen } \iota : k(x) \hookrightarrow k\}.$$

Beachte dabei:

$$X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sch}) \quad \rightsquigarrow \quad X(k) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} k, X)$$

$$Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sch}|_k) \quad \rightsquigarrow \quad Y(k) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}|_k}(\operatorname{Spec} k, X) = \left\{ \begin{tikzcd} \varphi : \operatorname{Spec} k \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd} \right\}$$

In diesem Sinne ist $\mathbb{P}^n_k$ als $k$-Schema zu lesen mit $\mathbb{P}^n_k \to \operatorname{Spec} k$.

**2. Projektiver Abschluss** Sei $\mathfrak{a} \lhd k[Y_1, \ldots, Y_n]$, so hat man die abgeschlossene Immersion

$$\operatorname{Spec} k[Y_1, \ldots, Y_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$$

mit Bild $V(\mathfrak{a})$.

Betrachte die Homogenisierung von $\mathfrak{a}$ in $k[T_0, \ldots, T_n]$: Sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_1)$. Definiere

$$f_i^{\text{homo}}(T_0, \ldots, T_n) := T_0^{\deg f_i} f_i\left(\tfrac{T_1}{T_0}, \ldots, \tfrac{T_n}{T_0}\right) \in k[T_0, \ldots, T_n].$$

Damit können wir nun folgenden Satz formulieren.

**Satz 4.26.**

*Ist $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ eine abgeschlossene Immersion, $X = \operatorname{Spec} k[Y_1, \ldots, Y_n]/\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$, so nennen wir*

$$\bar{X} := \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}^{homo} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

*mit $\mathfrak{a}^{homo} := (f_1^{homo}, \ldots, f_r^{homo})$ den* projektiven Abschluss *von $X$ in $\mathbb{P}^n_k$. Es gilt*

Bei mir steht „offene Inklusion", soll wohl aber offene Immersion gemeint sein !?

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{p}^{homo} & \ni & D_+(T_0) \cap \bar{X} \arrow[r, hook, "\circ"] & \bar{X} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n_k \\ \mathfrak{p} \arrow[u] & \ni & X \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec} k[Y_1, \ldots, Y_n] = \mathbb{A}^n_k \cong D_+(T_0) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*wobei die Isomorphie an dieser Stelle durch die Definition der homogenen Polynome herrührt.*

None

**Beispiel 4.27.** Sei $E = \operatorname{Spec} k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - aX - b) \subseteq \mathbb{A}^2_k$, so ist

$$\bar{E} = \operatorname{Proj} k[X, Y, Z]/(Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3) \subseteq \mathbb{P}^2_k.$$

Als Übung überlege man sich was $\bar{E} \cap (\mathbb{P}^2_k \setminus D_+(T_0))$ ist.

# Eigenschaften von Schemata 5

## 5.1 Noethersch

**Definition 5.1 ((lokal) noethersch).**

$X$ heißt *noethersch*, wenn es eine endliche affine offene Überdeckung gibt, d.h.

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} A_i$$

mit noetherschen Ringen $A_i$.

$X$ heißt *lokal noethersch*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine affine offene Umgebung $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ hat mit $A$ noethersch.

**Bemerkung 5.2.** Aus $X$ lokal noethersch folgt $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch (Übungsaufgabe). Die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht.

## 5.2 $k$-Varietäten

**Definition 5.3 (algebraische/projektive $k$-Varietät).**

Sei $k$ ein Körper. Eine *algebraische $k$-Varietät* ist ein $k$-Schema $X$, das eine endliche offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} A_i$$

mit endlich erzeugten $k$-Algebren $A_i$ besitzt.

Eine *projektive $k$-Varietät* ist ein projektives $k$-Schema.

**Bemerkung 5.4.**

- Eine projektive $k$-Varietät ist eine algebraische $k$-Varietät, da wir die abgeschlossene Immersion

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^{n} D_+(T_i) \cong \operatorname{Spec} k[Y_0, \ldots, \cancel{1}, \ldots, Y_n]$$

haben.

- Eine $k$-Alegbra $A$ ist *endlich erzeugt*, wenn es $n \in \mathbb{N}$ gibt und surjektive $k$-Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{rcl} k[Y_1, \ldots, Y_n] & \twoheadrightarrow & A \\ Y_i & \mapsto & a_i. \end{array}$$

Die $a_i$ sind dabei die Erzeuger von $A$.

## 5.3 Reduzierte Schemata

**Definition 5.5 (reduzierte Ringe).**

Ein Ring $A$ heißt *reduziert*, wenn

$$\sqrt{(0)} =: \mathrm{Nil}(A) = (0),$$

also wenn $A$ keine nilpotenten Elemente hat.

**Definition 5.6 (reduzierte lokal geringte Räume).**

$X$ heißt *reduziert*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für jedes $x \in X$ reduziert ist.

**Satz 5.7.**

*Es ist äquivalent:*

1. *$X$ ist reduziert.*
2. *Zu jedem $x \in X$ existiert eine affin offene Umgebung $U = \operatorname{Spec} A$ um $x$ mit $A$ reduziert.*
3. *$O_X(U)$ ist reduziert für alle offenen $U \subseteq^\circ X$.*

## 5.4 Garbifizierung

**Definition 5.8 (Garbifizierung).**

Sei $X$ ein topologischer Raum und $\mathcal{P}$ eine Prägarbe auf $X$. Dann ist die *Garbifizierung* von $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}^\dagger := \left( U \mapsto \mathcal{P}^\dagger(U) := \left\{ f : U \to \coprod_{x \in U} \mathcal{P}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x) \in \mathcal{P}_x \ \forall x \in U \\ \forall x \in U \exists V \text{ mit } x \in V \subseteq^\circ U \\ \text{ und } \exists s \in \mathcal{P}(V) \text{ mit } \forall z \in V: \ f(z) = s_z := [s] \in \mathcal{P}_z. \end{array} \right\} \right)$$

**Satz 5.9.**

1. *$\mathcal{P}^\dagger$ ist eine Garbe und man hat einen kanonischen Prägarbenmorphismus $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^\dagger$.*
2. *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist $\mathcal{F}^\dagger \cong \mathcal{F}$ kanonisch via 1.*
3. *Für alle $x \in X$ ist $(\mathcal{P}^\dagger)_x \cong \mathcal{P}_x$ kanonisch via 1.*
4. *$\mathcal{P}^\dagger$ erfüllt die offenbare universelle Eigenschaft.*

**Bemerkung 5.10.** Für einen Ring $A$ und $\mathfrak{a} \lhd A$ ist

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$$

ein Homöomorphismus auf $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq \operatorname{Spec} A$.

**Satz 5.11.**

*Sei $X$ ein Schema. Dann existiert eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Immersion eines reduzierten Schemas $X^{red}$*

$$X^{red} \hookrightarrow X$$

*mit* $\operatorname{topRaum}(X^{red}) = \operatorname{topRaum}(X)$.

**Definition 5.12 (Kern- und Bildgarbe).**

Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann heißen

$$\ker \alpha : \big(U \mapsto \ker(\alpha(U))\big)$$
$$\operatorname{im} \alpha : \big(U \mapsto \operatorname{im}(\alpha(U))\big)^{\dagger}$$

*Kern-* und *Bildgarbe* von $\alpha$.

**Bemerkung 5.13.** In der Tat ist $\ker \alpha$ bereits eine Garbe.

## 5.5 Sequenzen von Garben und der Homomorphiesatz

**Definition 5.14 (Exakte Sequenz von Garben).**

Eine Sequenz von Garben

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

heißt exakt, falls

- $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$
- $\ker \alpha = 0$
- $\operatorname{im} \beta = \mathcal{H}$

im Sinne von Definition 5.12 gilt.

**Satz 5.15.**

*Eine Sequenz von Garben*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

*ist exakt genau dann, wenn sie halmweise exakt ist, d.h.*

$$0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \to 0$$

*für jedes $x \in X$ exakt ist.*

**Satz 5.16.**

*Ist $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Es ist äquivalent:*

1. *$\alpha$ ist ein Garbenisomorphismus ist, d.h. für alle $U \subseteq^\circ X$ ist $\alpha(U)$ ein Isomorphismus (von Ringen),*
2. *$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist ein Isomorphismus.*

**Satz 5.17 (Homomorphiesatz für Garben).**

*Ist*

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von Garben, so induziert $\alpha$ einen Isomorphismus*

$$\bar{\alpha} : \mathcal{F} \big/ \ker \alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}.$$

## 5.6 Reduzierte Schemata II

**Satz 5.18.**

*Sei $X$ ein Schema, $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann kann man auf $Z$ eine Schemastruktur definieren, so dass $(Z, \mathcal{O}_Z) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ eine abgeschlossene Immersion ist und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ reduziert ist. Diese ist eindeutig und heißt* reduzierte Unterschema-Strukur.

## 5.7 Integere Schemata

**Definition 5.19 (integeres Schema).**

Ein Schema $X$ heißt *integer*, wenn für jedes $U \subseteq^\circ X$ offen der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei ist.

**Bemerkung 5.20.** $X = \operatorname{Spec} A$ ist integer genau dann, wenn $A$ nullteilerfrei.

**Lemma 5.21.** *Ist $A$ nullteilerfrei, so ist für jedes $U \subseteq^\circ X = \operatorname{Spec} A$ der kanonische Morphismus*

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta} = \operatorname{Quot}(A)$$

*für $\eta = (0)$ injektiv. Ferner ist für $V \subseteq^\circ U$ die Restriktion $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ injektiv.*

**Satz 5.22.**

*Ein Schema $X$ ist genau dann integer, wenn $X$ reduziert und irreduzibel ist.*

# Faserprodukt 6

**Definition 6.1 (Faserprodukt).**

Seien $f : X \to Y$ und $g : Z \to Y$ Schemamorphismen. Dann ist das *Faserprodukt* $X \times_Y Z$ ein Schema zusammen mit Morphismen $X \times_Y Z \xrightarrow{\alpha} X$ und $X \times_Y Z \xrightarrow{\beta} Z$, so dass

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert und $(X \times_Y Z, \alpha, \beta)$ damit universell ist, d.h.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Y Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[d, "X"] \\
& Z \arrow[r, "g"] & Y.
\end{tikzcd}$$

## 6.1 Anwendungen

### 6.1.1 Faser eines Morphismus

**Definition 6.2 (Faser eines Morphismus).**

Ist $f : X \to Y$, $\operatorname{Spec} k \varnothing Y$ ein $k$-rationaler Punkt in $Y$ (beispielsweise $k := k(y) := \mathcal{O}_{Y,y} / \mathfrak{m}_y$), so heißt

$$X \times_Y \operatorname{Spec} k =: X_y$$

die *Faser von $f$ über $y \in Y$.*

### 6.1.2 Basiswechsel

**Definition 6.3.**

Sei $X$ ein $S$-Schema. Ist $T$ ein weiteres $S$-Schema, so heißt

$$X \times_S T =: X_T$$

der *Basiswechsel vom $S$-Schema $X$ zum $T$-Schema $X_T$.*

**Bemerkung 6.4.** In der Tat ist $X \times_S T$ in natürlicher Weise ein $T$-Schema. Seien nämlich $f : X \to S$ und $g : T \to S$ die Strukturmorphismen, so haben wir

$$\begin{tikzcd} X \times_S T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "g"] & S. \end{tikzcd}$$

**Bemerkung 6.5.** Man kann die Definition des Basiswechsels auch kategoriell lesen: Zu $g : T \to S$ hat man einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Sch}_S & \to & \mathbf{Sch}_T \\ (X \xrightarrow{f} S) & \mapsto & (X \times_S T \xrightarrow{\beta} T). \end{array}$$

**Definition 6.6 (pull-back von Schemata).**

In obiger Situation heißt ein $A$ mit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

*pull-back*, falls $A = X \times_Y Z$.

**Satz 6.7.**

*In* **Sch** *existiert zu jedem $X \xrightarrow{f} Y$, $Z \xrightarrow{g} Y$ ein Faserprodukt $X \times_Y Z$. Es ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

*Für $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Z = \operatorname{Spec} R$ gilt sogar*

$$X \times_Y Z = \operatorname{Spec} A \otimes_R B.$$

**Bemerkung 6.8.** Es gilt:

- $X \times_S S = X$.
- $X \times_S Y = Y \times_S X$.
- $(X \times_S Y) \times_S Z = X \times_S (Y \times_S Z)$.
- Für $X \to S$ und $Z \to Y \to S$ gilt

$$(X \times_S Y) \times_Y Z = X \times_S Z.$$

**Lemma 6.9.** *Sei $f : X \to Y$. $y \in Y$ mit Restklassenkörper $k(Y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$. In*

$$\begin{tikzcd} X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) =: X_y \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k(y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

*ist $p$ ein Homöomorphismus auf $f^{-1}(y) \subseteq X$.*

**Beispiel 6.10.** Sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $X := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_1, T_2]/(T_1T_2^2 - a) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Die Fasern zu Punkten in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind:

- $(p) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $p$ Primzahl. Haben

$$\begin{tikzcd} X_p \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{F}_p \arrow[r, "\iota_p"] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

  mit
$$X_p = \operatorname{Spec} \left(\mathcal{F}_p[T_1, T_2/(T_1T_2^2 - \bar{a}\right)$$

  **1. Fall:** $p \nmid a$. Dann ist
$$X_p \cong \operatorname{Spec} \mathcal{F}_p[T, T^{-1}].$$

  **2. Fall:** $p \mid a$. Dann hat $\mathcal{F}_p[T_1, T_2]/(T_1T_2^2)$ nilpotente Elemente, also ist $X_p$ nicht reduziert und nicht irreduzibel.

  Man nennt $X_p$ auch oft die *Reduktion von* $X \mod p$.

- $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, so hat man

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{Q}} := X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

  und $X_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T_1, T_2]/(T_1T_2^2 - a)) \cong \mathcal{G}_{m,\mathbb{Q}}$.

**Definition 6.11 (multiplikative Gruppe von $k$).**

Ist $k$ ein Körper, so heißt
$$\mathbb{G}_{m,k} := \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]$$
die *multiplikative Gruppe von* $k$ als $k$-SChema. Man definiert auch
$$\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T, T^{-1}].$$

**Bemerkung 6.12.** Man hat
$$\mathbb{G}_{m,k} = \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}] \to \operatorname{Spec} k[T] = \mathbb{A}_k^1$$
einen Homöomorphismus auf $D(T) \subseteq^\circ \mathbb{A}_k^1$.

### 6.1.3 Basiswechsel und projektive Schemata

**Satz 6.13.**

*Sei $A$ ein Ring, $S = \oplus_{d \geq 0} S_d$ eine graduierte $A$-Algebra. Sei $B$ eine $A$-Algebra via $\varphi : A \to B$ und*
$$T := S \otimes_A B = \oplus_{d \geq 0}(S_d \otimes_A B)$$
*eine graduierte $B$-Algebra. Dann gilt:*
$$\operatorname{Proj}(T) \cong \operatorname{Proj}(S) \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B.$$

**Definition 6.14 ($n$-dimensionale projektive Raum über $S$).**

Ist $S$ ein Schema, so heißt

$$\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} S$$

der *$n$-dimensionale projektive Raum über $S$.*

**Bemerkung 6.15.** Ist $S = \operatorname{Spec} A$, so stimmen die Definitionen von $\mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} A}$ überein.

# Glatt, regulär & normal 7

**Definition 7.1 (Zariski-Tangentialraum).**

Der *Zariski-Tangentialraum von $X$ bei $x_0$* ist

$$T_{x_0}X := \mathrm{Hom}_{k(x_0)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k(x_0)).$$

## 7.1 Dimensionsbegriff

**Definition 7.2 (Krull-Dimension, lokale Dimension, Kodimension).**

(i) Sei $X$ ein topologischer Raum. Die *Krull-Dimension von $X$* ist

$$\dim X := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \text{ von irreduziblen Teilmengen von } X\}$$

(ii) Sei $X$ ein topologischer Raum. $x_0 \in X$. Die *lokale Dimension bei $x_0$* ist

$$\dim_{x_0} X := \inf\{\dim U \mid x_0 \in U \subseteq^\circ X\}.$$

(iii) Sei $X$ ein topologischer Raum. $Y \subset X$ irreduzibel und abgeschlossen.

$$\operatorname{codim}(Y, X) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists Y = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \text{ von irreduziblen Teilmengen von } X\}$$

heißt *Kodimension von $Y$ in $X$*.

(iv) Sei $X$ ein topologischer Raum. Sei $Y \subset X$ abgeschlossen.

$$\operatorname{codim}(Y, X) := \inf\{\operatorname{codim}(Z, X) \mid Z \subset Y \text{ abgeschlossen, irreduzibel}\}$$

heißt *Kodimension von $Y$ in $X$*.

**Bemerkung 7.3.** Speziell für $X = \operatorname{Spec} A$ hat man für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

$$\dim_{\mathfrak{p}} A := \inf\{\dim A_f \mid f \in A, f \notin \mathfrak{p}\}.$$

**Lemma 7.4.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Ist $Z \subseteq X$ abgeschlossener Teilraum. Dann gilt*

$$\operatorname{codim}(Z, X) + \dim Z \leq \dim X.$$

**Definition 7.5 (Höhe, Krull-Dimension von Ringen).**

Sei $A$ ein Ring.

(i) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ heißt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \lhd A \text{ Primideale}\}$$

die *Höhe von* $\mathfrak{p}$.

(ii) Für $\mathfrak{a} \lhd A$ heißt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) := \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}$$

die *Höhe von* $\mathfrak{a}$.

(iii) Die *Krull-Dimension von* $A$ ist

$$\begin{aligned}\dim A &:= \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\} \\ &= \sup\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}\end{aligned}$$

**Satz 7.6.**

*Für einen Ring $A$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt:*

$$\begin{aligned}\dim A &= \dim \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{codim}(V(\mathfrak{p}), \operatorname{Spec} A) &= \operatorname{ht}(\mathfrak{p})\end{aligned}$$

**Lemma 7.7.** *(i) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}.$$

*(ii)*

$$\dim A = \sup\{\dim A_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \lhd A \textit{ maximal}\}.$$

**Bemerkung 7.8.** Ist $A$ nullteilerfrei, so beginnt eine aufsteigende Kette von Primidealen bei $\mathfrak{p}_0 = (0)$. Hat $A$ Nullteiler, so ist $(0)$ kein Primideal.

**Beispiel 7.9.**

- Ist $k$ ein Körper, so ist $\dim k = 0$.
- Ist $A$ ein nullteilerfreier Hauptidealring, so ist $\dim A = 1$.
- Ist $K \mid \mathbb{Q}$ ein Zahlkörper, $\mathcal{O}_K \subseteq K$ der Ring der ganzen Zahlen, so ist $\dim \mathcal{O}_K = 1$.

**Bemerkung 7.10.** In der Tat gilt für einen nullteilerfreien Ring $A$:

$$\dim A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Jedes Primideal } \mathfrak{p} \neq (0) \text{ ist maximal.}$$

**Satz 7.11 (Krulls-Hauptidealsatz).**

*Sei $A$ noethersch und $f \in A \setminus A^\times$. Ferner sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $f \in \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1.$$

Zum Beweis benötigt man:

**Lemma 7.12 (Nakajomas Lemma).** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul mit $M = \mathfrak{m}M$. Dann gilt*

$$M = (0)$$

**Korollar 7.13.** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Sei $N \subseteq M$ ein $A$-Untermodul mit $M \subseteq N + \mathfrak{m}M$. Dann gilt*

$$N = M$$

**Lemma 7.14.** *Sei $A$ noethersch und nullteilerfrei und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Ist ferner $\mathfrak{q} \lhd A$ ein echtes Ideal, so gilt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{q}^n M = 0.$$

Ein Beispiel zu Krulls-Hauptidealsatz:

**Beispiel 7.15.** Sei $A = k[X_1, \dots, X_n]$, $f = f(X_1, \dots, X_n)$ und $\mathfrak{p}$ wie in Krulls-Hauptidealsatz, so ist $V((f)) \supseteq V(\mathfrak{p})$, d.h. $V(\mathfrak{p})$ ist maximal unter den abgeschlossenen Teilmengen von $V((f))$.

Ein Korollar zu Krulls-Hauptidealsatz:

**Korollar 7.16.** *Sei $A$ noethersch, $f \in A$ und*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

*eine Primidealkette mit $f \in \mathfrak{p}$. Dann existiert eine Primidealkette*

$$\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}$$

*mit $f \in \mathfrak{q}_1$.*

**Korollar 7.17.** *Sei $A$ noethersch, $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_r) \lhd A$. Dann gilt: Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ minimal mit $a \subseteq \mathfrak{p}$, so ist*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq r.$$

*Insbesondere ist also*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq r.$$

**Korollar 7.18.** *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring, so ist $\dim A < \infty$ und*

$$\dim A \leq \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

**Bemerkung 7.19.** Erinnern wir an den Tangentialraum, so haben wir in obigem Fall

$$T_{\mathfrak{m}} \operatorname{Spec} A = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee$$

wobei $^\vee$ den Dualraum als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum meint.

**Folgerung 7.20.** Ist $X$ ein lokal, noethersches Schema und $x \in X$. Dann gilt

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} \leq \dim_{k(x)} T_x X.$$

## 7.2 Regularität

**Definition 7.21 (regulär).**

(i) Ein lokaler noetherscher Ring $(A, \mathfrak{m})$ heißt *regulär*, wenn $\dim A = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(ii) Ein lokal noethersches Schema $X$ heißt *regulär bei* $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist.

**Lemma 7.22.** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring. Dann gilt*

$$A \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{m} \text{ wird von } \dim A\text{-vielen Elementen erzeugt.}$$

**Bemerkung 7.23.** Im $C^\infty$ Fall haben wir

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)_0 = \{[f] \mid f : U \ni 0 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n\}$$

mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m} = \{[f] \mid f(0) = 0\}.$$

Dann kann man $g \in \mathfrak{m}$ darstellen durch

$$g(y) = \sum_{i=1}^n g_i(y) y_i$$

mit $y_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

**Satz 7.24.**

*Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und $f \in \mathfrak{m}$. Dann gilt:*

*(i)* $\dim A/(f) \geq \dim A - 1$.

*(ii) Ist $f$ nicht in einem minimalen Primideal enthalten, so gilt*

$$\dim A/(f) = \dim A - 1.$$

**Bemerkung 7.25.** Ist in obigem Fall $A$ nullteilerfrei, so gilt insbesondere

$$f \text{ nicht in einem Primideal enthalten} \quad \Leftrightarrow \quad f \neq 0$$

**Lemma 7.26.** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und $\mathfrak{n} \lhd A[T]$ maximal mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$, so gilt*

$$\operatorname{ht}^{A[T]}(\mathfrak{n}) = \dim A + 1$$

**Korollar 7.27.** *Ist $A$ noetherscher Ring, so folgt*

$$\dim A[T_1, \dots, T_n] = \dim A + n.$$

**Korollar 7.28.** *Es gilt*

$$\dim \mathbb{A}_k^n = \dim k[T_1, \dots, T_n] = n.$$

**Satz 7.29.**

*Jeder regulärer, lokaler, noetherscher Ring ist nullteilerfrei.*

**Definition 7.30 (Koordinatensystem).**

Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer, lokaler, noetherscher Ring und $\dim A = d$, dann nennt man ein Erzeugendensystem $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d)$ ein *Koordinatensystem von* $(A, \mathfrak{m})$ oder *System von Parametern*

**Satz 7.31.**

*Sei $k$ ein Körper und*

$$X = \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

*mit $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$, so gilt:*

$$X \text{ regulär bei } x \in X(k) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rk}\left( \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_a \right) = n - \dim \mathcal{O}_{X,x}$$

*wobei $x = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ und $a = (a_1, \dots, a_n)$ ist.*

**Bemerkung 7.32.** In obiger Situation gilt:

$$\begin{aligned} x \in V(\mathfrak{a}) \quad &\Leftrightarrow \quad (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \in V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow \quad f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \forall i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

## 7.3 Glattheit

**Definition 7.33 (glatt).**

Eine $k$-Varietät $X \in \mathbf{Var}_k$ heißt *glatt bei* $x \in X$, wenn die Punkte $\bar{x} \in X_{\bar{k}}$ regulär sind.

**Bemerkung 7.34.** In obiger Situation ist dabei $\bar{k} \mid k$ ein algebraischer Abschluss und

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longmapsto & x \\ X_{\bar{k}} := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k} & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Spec} \bar{k} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

$\bar{x}$ ist dabei nicht eindeutig.

# $k$-Varietät 8

**Beispiel 8.1.** Ein einführendes Beispiel einer $k$-Varietät ist gegeben durch abgeschlossene Unterschemata, wie beispielsweise

$$\operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{A}_k^n.$$

**Definition 8.2 (endlich).**

Ein Ringhomomorphismus $\varphi : B \to A$ heißt *endlich*, wenn $A$ dadurch zu einem endlich erzeugten $B$-Modul wird.

**Satz 8.3 (Noether-Normalisierung).**

*Sei $A$ eine endlich erzeugte $k$-Algebr. Dann existiert $d \geq 0$ und ein endlicher injektiver Ringhomomorphismus*

$$k[T_1, \dots, T_n] \hookrightarrow A.$$

**Korollar 8.4.** *Ist $A$ eine endlich erzeugte $k$-Algebra und $\mathfrak{m} \lhd A$ maximal, dann ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von $k$.*

**Korollar 8.5.** *Sei $X$ eine $k$-Varietät und $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, so ist $k(x) \mid k$ endlich.*

**Satz 8.6 ((schwacher) Hilbertscher Nullstellensatz).**

*Sei $k$ algebraisch abgeschlossen, $\mathfrak{m} \lhd k[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal, so gilt*

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

*für geeignete $a_1, \dots, a_n \in k$.*

**Lemma 8.7.** *Sei $X$ eine irreduzible algebraische $k$-Varietät, dann gilt für $x \in |X|$:*

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X.$$

**Lemma 8.8.** *Ist $\mathfrak{m} \lhd k[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal, so existieren Polynome*

$$f_1(X_1), f_2(X_1, X_2), \dots, f_n(X_1, \dots, X_n)$$

*mit*

$$\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_r).$$

**Folgerung 8.9.** $\mathbb{A}_k^n$ ist regulär bei allen $x \in |\mathbb{A}_k^n|$.

# 9 Der Punktefunktor

Ein wenig Kategorientheorie:

**Definition 9.1 (treu, volltreu).**

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *treu*, falls für alle $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

injektiv ist.

Er heißt *volltreu*, falls für alle $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

eine Bijektion ist.

**Notation 9.2.**

Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien, so definieren wir

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}} := \begin{cases} \mathrm{Obj}: & \text{Funktoren } F : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \\ \mathrm{Morph}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}} = & \text{natürliche Transformationen} \end{cases}$$

**Definition 9.3 (Punktefunktor, darstellbar).**

Zu $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ heißt

$$\begin{array}{rccl} h_X : & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \to & \mathbf{Set} \\ & T & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \end{array}$$

der *Punktefunktor zu* $X$. Es ist $h_X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})$.

Ein Funktor $F \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})$ heißt *darstellbar*, wenn es ein $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ gibt, so dass

$$F \cong h_X$$

in $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ gilt.

**Lemma 9.4 (Yoneda Lemma).** *(i) Ist $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ beliebig, so ist für $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}(h_X, F) & \to & F(X) \\ \tau & \mapsto & \tau_X(\mathrm{id}_X) \end{array}$$

*eine Bijektion, wobei*

$$\tau_X : h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \to F(X).$$

*(ii) Es ist*

$$\begin{array}{rrcl} h : & \mathbb{C} & \to & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \\ & X & \mapsto & h_X \end{array}$$

*eine Äquivalenz von $\mathcal{C}$ zur vollen Unterkategorie der darstellbaren Funktoren, d.h. $h$ ist volltreu und jeder darstellbare Funktor ist insomorph zu einem $h_X$. Insbesondere gilt:*

$$h_X \cong h_{\widetilde{X}} \text{ als Funktoren} \quad \Rightarrow \quad X \cong \widetilde{X} \text{ in } \mathcal{C}$$

**Definition 9.5 (Gruppenschema).**

Ein *Gruppenschema* ist ein Schema $G$, so dass

$$\begin{tikzcd} h_G : \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[dr, "\exists"] & \mathbf{Set} \\ & \mathbf{Gr} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

über $\mathbf{Gr}$ faktorisiert.

**Bemerkung 9.6.** Das bedeutet: Für jedes $T \in \mathbf{Sch}$ ist $G(T) = \mathrm{Hom}(T, G)$ ein Gruppe.

**Beispiel 9.7.** Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $X \in \mathbf{Sch}|_k$ so hat man den Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hilb}_{X|k,n} : & \mathbf{Sch}|_k^{\mathrm{op}} & \to & \mathbf{Set} \\ & T & \mapsto & \left\{ Z \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}\,k} T \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ ist abgeschlossenes Untersche-} \\ \text{ma; } Z \to T \text{ flach; jede Faster } Z_t \\ \text{für einen } k\text{-rationalen Punkt } t \text{ ist} \\ 0\text{-dimensional von Länge } n \end{array} \right\} \end{array}$$

Betrachte nun

$$\mathrm{Hilb}_{X|_k,n}(\mathrm{Spec}\,k) = \{Z \hookrightarrow X \mid Z \text{ abgeschlossenes Unterschema }, \dim Z = 0, \dim_k \mathcal{O}_Z(Z) = n\}$$

so stellt sich die Frage: Gibt es ein Schema $H$ mit

$$H(\mathrm{Spec}\,k) = \mathrm{Hilb}_{X|_k,n}(\mathrm{Spec}\,k).$$

Die Antwort sei vorweg genommen: Ja, falls $X$ gewisse Voraussetzungen erfüllt.

# $\mathcal{O}_X$-Moduln 10

## 10.1 $\mathcal{O}_X$-Moduln

**Definition 10.1 ($\mathcal{O}_X$-Modul).**

Ein $\mathcal{O}_X$-*Modul* (oder eine $\mathcal{O}_X$-*Modulgarbe*) ist eine Garbe $\mathcal{M}$ zusammen mit einer $\mathcal{O}_X(U)$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}(U)$ für jedes offene $U \subseteq^\circ X$, so dass für $V \subseteq^\circ U \subseteq^\circ X$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \big\downarrow \cdot|_V \times \cdot|_V & & \big\downarrow \cdot|_V \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

Ein *Morphismus* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ von solchen ist ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, so dass für jedes $U \subseteq^\circ X$ $\alpha(U) : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}'(U)$ $\mathcal{O}_X(U)$-linear ist.

**Bemerkung 10.2.** Man hat einige Konstruktionen aus der kommutativen Algebra auch für $\mathcal{O}_X$-Moduln, wie z.B.

- $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' : U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$.
- $\oplus_{i\in I}\mathcal{M}_i$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}_i$.
- Für $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ $\mathcal{O}_X$-Modul-Morphismus haben wir $\ker\alpha$ und $\operatorname{im}\alpha$, wobei Kern und Bild in $\mathbf{Sh}_X$ zu lesen sind.

**Definition 10.3 (frei, lokal frei).**

Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ heißt

- *frei*, wenn es eine Menge $I$ und einen $\mathcal{O}_X$-Modul-Isomorphismus
$$\mathcal{O}_X^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$$
gibt,
- *lokal frei* oder *Vektorbündel von Rang* $r$, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $x \in U \subseteq^\circ X$ und einen $\mathcal{O}_U$-Modul-Isomorphismus
$$\mathcal{O}_U^r \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}\big|_U$$
gibt.

## 10.2 Exkurs: Vektorbündel in der Topologie

Sei $X$ ein topologischer Raum. Dann ist ein $\mathbb{R}$-Vektorbündel vom Rang $r$ eine stetige Abbildung $\pi : E \to X$ mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ zusammen mit einem sog Bündelatlas, bestehend aus Karten

$$\psi_U : E\big|_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$$

mit $\mathrm{pr}_U \circ \psi_U = \pi\big|_{\pi^{-1}(U)}$, d.h.

$$\begin{tikzcd}
E\big|_U = \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_U"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und die Karten sind

- Homöomorphismen und so, dass
- $\psi_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^r$ ein linearer Isomorphismus ist.

**Wie verstehen wir das als Garbe von Moduln?** Setze $\mathcal{O}_X := U \mapsto \mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, also die Garbe der stetigen Funktionen. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Weiter haben wir $E \xrightarrow{\pi} X$ stetig. Setze

$$\mathcal{E} : U \mapsto \mathcal{E}(U) := \{\sigma : U \to \pi^{-1}(U) \subseteq E \mid \sigma \text{ stetig}, \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U\}.$$

Dies ist eine Garbe. $\mathcal{E}$ ist sogar eine $\mathcal{O}_X$–Modulgarbe: Für $U \subseteq^\circ X$ gilt

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U),\ (f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma.$$

wobei

$$\begin{array}{rccl} f \cdot \sigma : & U & \to & \pi^{-1}(U) \\ & x & \mapsto & \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sigma(x)}_{\in E_x} \end{array}$$

und $E_x$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Bleibt nur noch zu klären, wie die Bündelkarten $\psi_U : E\big|_U = \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$ eingehen:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "\mathrm{pr}_U"'] & \ni & (x, \alpha(x)) := (x, \pi_{\mathbb{R}^r} \circ \psi_U \circ \sigma(x)) \\
& U \arrow[u, bend right, "\psi_U \circ \sigma"'] \arrow[ul, bend left, "\mathcal{E}(U) \ni \sigma"] & \ni & x \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$\alpha : U \to \mathbb{R}^r$ ist eine stetige Abbildung, also $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)^r$. Weiter liefert $\psi_U$ einen $\mathcal{O}_X(U)$-Modul-Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}(U) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_X(U)^r \\ \sigma & \mapsto & \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r} \circ \psi_U \circ \sigma \\ \psi_U^{-1} \circ (\mathrm{id}_U \times \alpha) & \leftarrow\!\shortmid & \alpha. \end{array}$$

Schränkt man auf $V \subseteq^\circ U$ ein, ist dies verträglich. Also

$$\mathcal{E}\big|_U \cong \mathcal{O}_X(U)$$

als $\mathcal{O}_X\big|_U$-Modulgarben.

## 10.3 Quasi-Kohärenz

**Definition 10.4 (quasi-kohärent).**

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ heißt *quasi-kohärent*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $x \in U \subseteq^\circ X$ und Mengen $I, J$ und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_U$-Modulgarben

$$\mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_X\big|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{M}\big|_U \longrightarrow 0$$

gibt.

**Definition 10.5 (von seinen globalen Schnitten erzeugt).**

Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ wird *von seinen globalen Schnitten erzeugt*, wenn für jedes $x \in X$ der Morphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{M}_x$$

surjektiv ist.

Mit anderen Worten: Jeder Keim $m_x \in \mathcal{M}_x$ lässt sich schreiben als

$$m_x = \sum_{\text{endl. viele } i} \lambda_i [\sigma_i]_x$$

für $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $\sigma_i \in \mathcal{M}(X)$.

Dies gilt nicht für $\mathcal{O}_X$ selbst; betrachte beispielsweise $X = \mathbb{CP}^1$ und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen.

**Bemerkung 10.6.** Es existiert ein surjektives $\mathcal{O}_X\big|_U^{(I)} \twoheadrightarrow \mathcal{M}\big|_U$ genau dann, wenn $\mathcal{M}\big|_U$ durch seine auf $U$ globalen Schnitte erzeugt wird.

$\mathcal{M}$ ist quasi-kohärent genau dann, wenn $\mathcal{M}\big|_U$ durch seine globalen Schnitte erzeugt wird und die Relationen (also $\ker(\mathcal{O}_X\big|_U^{(I)}) \to \mathcal{M})$) auch.

## 10.4 Quasikohärente Garben auf Spec $A$

**Beachte folgende Konstruktion** Ist $M$ ein $A$-Modul, so betrachte

- für $f \in A$: $M_f = M \otimes_A A_f$ als $A_f = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f))$-Modul.
- für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$: $M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ als $A_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \mathfrak{p}}$-Modul.

Dies ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe für $\mathfrak{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ der Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} A$. Dann folgt analog zu Satz 2.33 folgender Satz.

**Satz 10.7.**

*Zu gegebenem $A$-Modul $M$ existiert (bis auf Isomorphie) genau eine $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-Modulgarbe $M^\sim$ auf $X = \operatorname{Spec} A$ mit*

$$\begin{aligned} M^\sim(D(f)) &\cong M_f \\ (M^\sim)_\mathfrak{p} &\cong M_\mathfrak{p} \end{aligned}$$

*Insbesondere ist $M^\sim(\operatorname{Spec} A) = M$.*

**Satz 10.8.**

*Der Funktor*

$$\begin{array}{rrcl} {}^\sim : & A\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & M & \mapsto & M^\sim \\ & (M \xrightarrow{\varphi} N) & \mapsto & (M^\sim \xrightarrow{\varphi^\sim} N^\sim) \end{array}$$

*ist exakt.*

**Korollar 10.9.** *Für einen $A$-Modul $M$ ist $M^\sim$ quasi-kohärent.*

**Bemerkung 10.10.** Sind $M$ und $N$ $A$-Moduln, so ist

$$(M \otimes_A N)^\sim = M^\sim \otimes_{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}} N^\sim.$$

**Satz 10.11.**

*Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ genau dann quasi-kohärent, wenn für jede affin offene Teilmenge $U$ ein Isomorphismus*

$$\mathcal{M}\big|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$$

*existiert.*

**Hilfslemma 10.12.** In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für jedes $x \in X$ existiert ein affin offenes $x \in U \subseteq^\circ X$ mit $\mathcal{M}\big|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$.

**Hilfslemma 10.13.** In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für beliebiges $U = \operatorname{Spec} A \subseteq^\circ X$ und $f \in A = \mathcal{O}_X(U)$ gilt

$$\mathcal{M}(U)_f \cong \mathcal{M}(D(f)).$$

**Satz 10.14.**

*Ist $X = \operatorname{Spec} A$ affin und*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben und ist $\mathcal{M}'$ quasikohärent, so ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{M}''(X) \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von $A$-Moduln.*

Bevor wir den Beweis des Satzes angeben, wollen wir in folgendem Lemma und anschließendem Beispiel sehen, dass die Bedingung der Quasikohärenz wirklich notwendig ist, um Rechtsexaktheit zu garantieren.

**Lemma 10.15.** *Für jeden topologischen Raum $X$ ist*

$$\Gamma(X, \_) : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Ab}, \; \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) =: \Gamma(X, \mathcal{F})$$

*linksexakt, d.h. ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Sh}_X$, so ist*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X)$$

*eine exakte Sequenz in $\mathbf{Ab}$.*

**Beispiel 10.16.** In Lemma 10.15 ist die Rechtsexaktheit im Allgemeinen nicht gegeben, wie man am Beispiel $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sieht: Setze $\mathcal{G} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}$ die Garbe der holomorphen Funktionen und $\mathcal{H} := \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}^\times}$ die Garbe der nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen, so ist

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\exp} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, aber

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}(X) = \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

ist alles, da die letzte Abbildung nicht surjektiv ist (es gibt keinen komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

## 10.5 Der Čech-Komplex

Wir gehen hier genauer auf die Verwendung des $d$ in vorherigem Beweis ein. Der Beweis liefert nämlich gerade, dass $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}'') = 0$, wie wir mit nachstehender Definition sehen.

**Definition 10.17 (Čech-Komplex, Čech-Kohomologie).**

Sie $X$ ein topologischer Raum. $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$. Betrachte den folgenden Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
\check{\mathrm{C}}^0 & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^1 & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^2 & \longrightarrow & \dots \\
\| & & \| & & \| & & \\
\prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{d} & \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{F}(U_{ij}) & \xrightarrow{d} & \prod_{(i,j,k)\in I^3} \mathcal{F}(U_{ijk}) & \xrightarrow{d} & \dots
\end{array}$$

$$(\eta_i)_i \longmapsto (\eta_i|_{U_{ij}} - \eta_j|_{U_{ij}})_{i,j}$$

$$(y_{ij})_{i,j} \longmapsto (y_{ij}|_{U_{ijk}} - y_{ik}|_{U_{ijk}} + y_{jk}|_{U_{ijk}})_{i,j,k},$$

so heißt

$$\check{\mathrm{H}}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathrm{H}^k(\text{Čech-Komplex}) := \ker(d : \check{\mathrm{C}}^k \to \check{\mathrm{C}}^{k+1}) \big/ \operatorname{im}(d : \check{\mathrm{C}}^{k-1} \to \check{\mathrm{C}}^k)$$

die $k$-te *Čech-Kohomologie von $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathcal{U}$.*

**Bemerkung 10.18.** Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, haben wir $\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$! Ferner gilt $d \circ d = 0$ und für $[(y_{ij})_{i,j}] \in \check{\mathrm{H}}^1$ haben wir $d(y_{ij})_{i,j} = 0$, d.h.

$$(y_{ij}|_{U_{ijk}} - y_{ik}|_{U_{ijk}} + y_{jk}|_{U_{ijk}})_{i,j,k}$$

Diese Bedingung nennen wir *Ko-Zykel-Bedingnung*. Ferner ist $[(y_{ij})_{i,j}] \in \check{\mathrm{H}}^1$ per definitionem, falls ein $(\eta_i)_i \in \check{\mathrm{C}}^0$ existiert, so dass $(y_{ij})_{i,j} = d(\eta_i)_i$, also

$$y_{ij} = \eta_i|_{U_{ij}} - \eta_j|_{U_{ij}}.$$

Daher nennen wir in dieser Situation $(y_{ij})_{i,j}$ einen *Ko-Rand*.

## 10.6 Kohärenz

**Definition 10.19 (endlich erzeugt, kohärent).**

- Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ heißt *endlich erzeugt*, falls es zu jedem $x \in X$ ein offenes $x \in U \subseteq^\circ X$ gibt und eine exakte Sequenz
$$\mathcal{O}_X\big|_U^n \to \mathcal{M}\big|_U \to 0$$
für ein $n \in \mathbb{N}$ gibt.
- $\mathcal{M}$ heißt *kohärent*, falls $\mathcal{M}$ endlich erzeugt ist und wenn für jedes $\alpha$ in
$$\mathcal{O}_X\big|_U^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}\big|_U \to 0$$
der $\ker \alpha$ als $\mathcal{O}_U$-Modulgarbe endlich erzeugt ist.

**Bemerkung 10.20.** Sei $A$ ein Ring, so ist ein endlich erzeugter $A$-Modul $M$ nicht anderes, als dass analog zu oben eine exakte Sequenz $A^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gibt. $M$ ist kohärent (oder endlich präsentierter), falls $M$ endlich erzeugt ist und $\ker \alpha$ endlich erzeugt ist. Letzteres ist bei immer der Fall, falls $A$ noethersch ist.

Der Unterschied zu Ringmoduln wird in nachstehendem Satz deutlich, wo wir die Quasikohärenz fordern müssen, um garantieren zu können, dass $\mathcal{M}(U)$ überhaupt erzeugbar ist.

**Satz 10.21.**

*Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Dann ist äquivalent:*

*(i) $\mathcal{F}$ ist kohärent.*

*(ii) $\mathcal{F}$ ist endlich erzeugt.*

*(iii) $\forall U \subseteq^\circ X$ affin und offen ist $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U)$-Modul.*

**Hilfslemma 10.22.** Ist
$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz $\mathcal{O}_X$-Moduln und sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ quasikohärent, so ist $\mathcal{K}$ quasikohärent.

## 10.7 Direktes und inverses Bild

**Definition 10.23 (direktes Bild).**

$f_* : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Sh}_Y$ ist in natürlicher Weise auch ein Funktor
$$f_* : \mathcal{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-}\mathbf{Mod},$$
denn für $V \subseteq^\circ Y$ ist
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_Y(V) \times (f_*\mathcal{F})(V) \to \quad \mathcal{O}_Y(V) \times \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \to & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ (\lambda, \sigma) & \mapsto & (f^\#(V)(\lambda)) \cdot \sigma \end{array}$$
eine Modulstruktur. $f_*$ heißt *direktes Bild von $\mathcal{O}_X$-Moduln.*

### 10.7.1 Inverses Bild

Man hat

$$(f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_Y}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$$

da $f^{-1}$ nach **??** linksadjungiert zu $f_*$. Damit ist $f^{-1}\mathcal{G}$ ion natürlicher Weise ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul:

$$\begin{tikzcd}
(f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) \times (f^{-1}\mathcal{G})(U) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & (f^{-1}\mathcal{G})(U) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{O}_Y(V) \times \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

$$([\lambda], [\sigma]) \longmapsto [\lambda|_{V\cap W}\sigma|_{V\cap W}]$$

für $\lambda \in \mathcal{O}_Y(V)$ und $\sigma \in \mathcal{G}(W)$. Damit können wir definieren

**Definition 10.24 (inverses Bild).**

Der *inverse Bildfunktor* ist definiert als

$$\begin{array}{rccl} f^*: & \mathcal{O}_Y\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathcal{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \\ & \mathcal{G} & \mapsto & f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \end{array}.$$

## 10.8 Abgeschlossene Unterschemata

Wir wiederholen zunächst ein paar Begriffe: Sei $X$ ein Scheam. $Z \subset X$ mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z$ auf $Z$ heißt abgeschlossenes Unterschema, wenn $i : (Z, \mathcal{O}_Z) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ eine abgeschlossene Immersion ist. Zu bemerken sei, dass $Z \subset X$ als abgeschlossene Teilmgene noch keine Schemastruktur festlegt, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $A$ ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, "\not\cong"] & \\
& V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}} \\
\operatorname{Spec} A/\mathfrak{b} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt nämlich $A/\mathfrak{a} \cong A/\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Das heißt, ein abgeschlossenes Unterschema definieren wir besser wie folgt:

**Definition 10.25 (abgeschlossenes Unterschema).**

Ein *abgeschlossenes Unterschema in* $X$ ist eine Isomorphieklasse von abgeschlossenen Immersionen, wobei $(i : Z \hookrightarrow X) \cong (j : Y \hookrightarrow X)$, falls

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[dd, "\exists", "\cong"'] & \\
& X \\
Y \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

**Satz 10.26.**

*Sei $X$ ein Schema. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{abgeschlossene Unterschemata} \\ \textit{von } X \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{c} \textit{quasikohärente Idealgarben} \\ \textit{auf } X \end{array} \right\} \\ Z \subsetneq^i X & \mapsto & \ker i^\# \end{array}$$

*eine Bijektion.*

## 10.9 Quasikohärente Moduln auf projektiven Schemata

**Satz 10.27.**

*Sei $B = \oplus_{d\geq 0} B_d$ ein graduierter Ring, so dass $B$ von $B_1$ als $B_0$-Algebra erzeugt ist, $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein graduierter $B$-Modul. Dann existiert auf $\operatorname{Proj} B$ eine eindeutige $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}$-Modulgarbe $M^\sim$, die quasikohärent ist und folgende Eigenschaften besitzt:*

- *Ist $f \in B_+$ homogen, nicht nilpotent, so ist*
$$M^\sim\big|_{D_+(f)} \cong (M_{(f)})^\sim.$$
- *Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B$ ist*
$$(M^\sim)_\mathfrak{p} \cong M_{(\mathfrak{p})}.$$

**Lemma 10.28.** *Sei $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein graduierter $B$-Modul. Setze $N := \oplus_{n\geq n_0} M_n \subset M$ einen Untermodul. Dann ist $M^\sim = N^\sim$ auf $\operatorname{Proj} B$.*

**Bemerkung 10.29.** Für das affine $^\sim$ hat man mehr: Ist $X = \operatorname{Spec} A$ affin und $\mathcal{M}$ eine quasikohärente Modulgarbe auf $X$, so ist nach Satz 10.7 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}(X))^\sim$, also ist $\mathcal{M}$ bereits durch seine globalen Schnitte festgelegt. Im projektiven Fall sind diese zu wenig.

### 10.9.1 Wichtigstes Beispiel: Der Twist

**Definition 10.30 ($n$-Twist).**

Sei $B = \oplus_{d\geq 0}$ ein graduierter Ring, so dass $B$ von $B_1$ als $B_0$-Algebra erzeugt wird. Für $n \in \mathbb{Z}$ setze

$$B(n) := \oplus_{d\in\mathbb{Z}} B(n)_d \qquad \text{mit } B(n)_d := B_{n+d}$$

den $n$-*Twist von* $B$.

Damit wird $B(n)$ zu einem graduierten $B$-Modul und induziert eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf $X = \operatorname{Proj} B$, nämlich

$$\mathcal{O}_X(n) := (B(n))^\sim,$$

den $n$-*Twist von* $\mathcal{O}_X$.

**Bemerkung 10.31.** Es ist $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$, denn

$$\mathcal{O}_X\big|_{D_+(f)} = B_{(f)} = \{\tfrac{b}{f^r} \mid b \in B_{r\deg f}$$
$$\mathcal{O}_X(0)\big|_{D_+(f)} = B(0)_{(f)} = \{\tfrac{b}{f^r} \mid b \in B_{r\deg f+0}$$

**Bemerkung 10.32.** Im affinen Fall ist $M$ bereits durch $\mathcal{M}$ festgelegt, da

$$\mathcal{M}(X) = M^{\sim}(X) = M^{\sim}(D(1)) = M_1 = M.$$

Im projektiven Fall geht dies nicht, da sich kein $D_+(f)$ finden lässt, das $X$ überdeckt!

**Satz 10.33.**

*Sei $X = \operatorname{Proj} B$, $B = \oplus_{n\geq 0} B_n$ von $B_1$ als $B_0$-Algebra erzeugt. Dann sind alle $\mathcal{O}_X(n)$ Geradenbündel (d.h. lokal frei von Rang 1).*

### 10.9.2 Wiederholung Geradenbündel

**Definition 10.34 (Geradenbündel).**

Ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ ist eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von Rang 1, d.h.

- es gibt eine Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$, $U_i \subseteq^\circ X$,
- mit Trivialisierungen
$$\mathcal{L}\big|_{U_i} \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathcal{O}_X\big|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$$
- und Basiswechselisomorphismen
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X\big|_{U_i\cap U_j} & \mathcal{L}\big|_{U_i\cap U_j} \arrow[l, "\cong"', "\varphi_i|_{U_i\cap U_j}"] \arrow[r, "\cong", "\varphi_j|_{U_i\cap U_j}"'] & \mathcal{O}_X\big|_{U_i\cap U_j} \arrow[from=1-1, to=1-3, bend left, "\omega_{ij}\in \operatorname{Aut}_{\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}}(\mathcal{O}_X|_{U_i\cap U_j}) = \mathcal{O}_X(U_i\cap U_j)^\times"] \end{tikzcd}$$

**Lemma 10.35.** *Bis auf Verfeinerung von $\mathcal{U}$ gilt: Sind $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ zwei Geradenbündel auf $X$, die über $\mathcal{U}$ trivialisieren, so gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}' \quad &\Leftrightarrow \quad [\gamma_{\mathcal{L}}] = [\gamma_{\mathcal{L}'}] \in \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times) \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma_{\mathcal{L}} - \gamma_{\mathcal{L}'} \in \operatorname{im} d \end{aligned}$$

**Lemma 10.36.** *Sei $B := A[T_0, \dots, T_n]$. Dann gilt auf $X = \operatorname{Proj} B = \mathbb{P}^n_A$*

$$\mathcal{O}_X(m)(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) = \begin{cases} B_m & m \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Korollar 10.37.** *Das tautologische Bündel $\mathcal{O}_X(-1)$ ist nicht trivial (d.h. $\not\cong \mathcal{O}_X$).*

**Definition 10.38 (projektiv, projektives $S$-Schema).**

(i) Sei $S$ ein Basisschema. Definiere
$$\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} S.$$

(ii) Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt *projektiv*, wenn er als

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d, "\pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

faktorisiert.

(iii) Ein $S$-Schema $X$ heißt *projektives $S$-Schema*, wenn der Strukturmorphismus $f : X \to S$ projektiv ist.

**Bemerkung 10.39.** **Zu (i).** Ist $S = \operatorname{Spec} A$, so ist $\mathbb{P}^n_A = \mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} A}$.

**Zu (iii).** Ein Proj $A$-Schema ist ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n]$.

**Beispiel 10.40.** Sei $\mathfrak{a} \lhd A[T_0, \ldots, T_n]$ homogen, dann ist
$$\operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n] = \mathbb{P}^n_A$$
ein projektives $A$-Schema.

**Definition 10.41 (sehr ample Geradenbündel).**

Sei $A$ ein Ring und $X$ ein $A$-Schema mit einer Immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ (d.h. $i : X \hookleftarrow\!\!\to Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$), dann heißt
$$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1) =: \mathcal{O}_X(1)$$
das *zu $i$ gerhörige sehr ample Geradenbündel auf $X$*. Schreibe analog $\mathcal{O}_X(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(m)$.

**Bemerkung 10.42.** Lokal betrachtet, falls $U$ klein genug ist, haben wir $\mathcal{F}(n)\big|_U \cong \mathcal{F}\big|_U$.

## 10.10 Morphismen in den $\mathbb{P}^d_A$ und Geradenbündel

**Bemerkung 10.43.** Idee klassisch: **Leider noch nicht fertig :-(**.

**Definition 10.44 (global von Elementen erzeugt).**

Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt *global von $s_0, \ldots, s_d \in \mathcal{F}(X)$ erzeugt*, wenn für alle $x \in X$ gilt
$$\mathcal{F}_x = \operatorname{span}_{\mathcal{O}_{X,x}}\{[s_0]_x, \ldots, [s_d]_x\} = \sum_{i=0}^{d} \mathcal{O}_{X,x}[s_i]_x.$$

**Notation 10.45.**

Ist $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$ und $s \in \mathcal{L}(X)$, so setze

Die Stellen, wo $\mathcal{L}$ „gut“ ist.

$$X_s := \{x \in X \mid \mathcal{L}_x = \mathcal{O}_{X,x}[s]_x\}$$

**Bemerkung 10.46.** $X_s \subseteq X$ offen.

**Bemerkung 10.47.** $\mathcal{L}$ wird von $s_0, \dots, s_d \in \mathcal{L}(X)$ erzeugt, genau dann, wenn $X = \cup_{i=0}^d X_{s_i}$.

**Satz 10.48.**

*Sei $X$ ein Schema, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel, so dass es eine endliche affin offene Überdeckung von $X$ gibt, $X = \cup_{i=0}^d U_i$, so dass $\mathcal{L}|_{U_i}$ frei ist. Sei $s \in \mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

*(i) Ist $f \in \mathcal{F}(X)$ und $f|_{X_s} = 0$, so existiert $n \geq 1$, so dass*

$$f \otimes s^{\otimes n} = 0 \quad \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})(X).$$

*(ii) Ist $g \in \mathcal{F}(X)$, so existiert $n_0 \geq 1$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt*

$$g \otimes s|_{X_s}^{\otimes n} = \tilde{f}|_{X_s} \quad \text{für ein } \tilde{f} \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})(X).$$

**Satz 10.49.**

*Ist $X$ ein projektives $A$-Schema und $\mathcal{F}$ ein endlich erzeugtes quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann existiert $n_0 \geq 1$, so dass*

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$$

*für alle $n \geq n_0$ von globalen Schnitten erzeugt wird.*

**Korollar 10.50.** *Ist $\mathcal{F}$ endlich erzeugt und quasikohärent auf $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$, dann existiert eine Surjektion $\mathcal{O}_X(m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.*

**Bemerkung 10.51.** Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$. Dann entspricht $\mathcal{O}_X$ den zulässigen Funktionen auf $X$

**Satz 10.52.**

*Sei $X$ ein $A$-Schema.*

*(i) Ist $f : X \to \mathbb{P}^d_A$ ein $A$-Schemamorphismus, so ist $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_A}(1)$ ein Geradenbündel, das von $d+1$ globalen Schnitten erzeugt wird.*

*(ii) Ist $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$, das von $d+1$ globalen Schnitten $s_0, \dots, s_d \in \mathcal{L}(X)$ erzeugt wird, so existiert ein Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^d_A$ mit $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_A}$ und $f^*T_i = s_i$.*

**Definition 10.53 (ampel).**

Sei $X$ quasikohärent und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$. Dann heißt $\mathcal{L}$ *ampel*, wenn gilt: Für jedes quasikohärente $\mathcal{F}$ auf $X$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ von globalen Schnitten erzeugt für $n \geq n_0$.

**Bemerkung 10.54.** Sei $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$ ein projektives $A$-Schema und $\mathcal{L}$ sehr ampel auf $X$. Dann ist $\mathcal{L}$ ampel auf $X$.

Die Definition „sehr ampel“ hängt in der Tat von $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$ ab, die Definition „ampel“ ist in dieser Hinsicht absolut.

**Definition 10.55 (von endlichem Typ).**

Sei $X$ ein $A$-Schema mit Strukturmorphismus $f : X \to \operatorname{Spec} A$. $X$ heißt *von endlichem Typ*, falls für alle affin offenen $U \subseteq^\circ \operatorname{Spec} A$ mit $U = \operatorname{Spec} \tilde{A}$ gilt

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \text{ endl. viele}} \operatorname{Spec} B_i$$

mit endlich erzeugten $\tilde{A}$-Algebren $B_i$.

**Satz 10.56.**

*Sei $X$ ein $A$-Schema von endlichen Typ und noethersch. Ist $\mathcal{L}$ ein amples Geradenbündel auf $X$, so existiert $m \geq 1$, so dass $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel ist. Insbesondere haben wir $X \overset{\circ}{\hookrightarrow} Z \hookrightarrow \mathbb{P}^d_A$.*

**Lemma 10.57.** *Ist $X$ noethersch und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$. Weiter existieren $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{L}(X)$ mit $X_{s_i}$ affin und $X = \cup_{i=1}^r X_{s_i}$. Dann ist $\mathcal{L}$ ampel.*

**Bemerkung 10.58.** Für $X = \mathbb{P}^d_A$ ist $\mathcal{O}_X(1)$ sehr ampel, da wir hier $\mathrm{id} : X \to \mathbb{P}^d_A$ haben.

Ferner ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_A}(n)$ sehr ampel, genau dann, wenn $n \geq 1$. (vgl. Übungsaufgabe)

# Divisoren 11

## 11.1 Cartier-Divisoren

**Definition 11.1 (Garbe der Keime meromorpher Funktionen).**

Die Garbe

$$a(')$$

mit

$$\mathcal{K}_X : U \mapsto \mathcal{O}_X(U)[S(U)^{-1}]$$

für

$$S(U) := \{\sigma \in \mathcal{O}_X(U) \mid [\sigma]_x \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ regulär } \forall x \in X\}$$

heißt *Garbe der meromorphen Funktionen.*

**Bemerkung 11.2.** Ist $X$ ganz, dann ist $\mathcal{K}_X$ die konstante Garbe mit Wert $K(X)$, schreibe $\mathcal{K}_X = \underline{K(X)}$.

**Definition 11.3 (Cartier-Divisor).**

Sei $X$ ein Schema.

(i) Dann heißt $\mathrm{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)$ die Gruppe der *Cartier-Divisoren auf* $X$.

(ii) Das Bild von $\mathrm{div} : \mathcal{K}_X^\times(X) \to \mathrm{Div}(X),\ f \mapsto \mathrm{div}(f)$ sind die *Hauptdivisoren.*

(iii) Zwei Divisoren $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ heißen *linear äquivalent*, falls $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist.

(iv) Die *Cartier-Divisoren-Klassengruppe von* $X$ ist

$$\mathrm{CaCl}(X) := \mathrm{Div}(X)/\sim,$$

wobei $\sim$ lineare Äquivalenz ist.

**Bemerkung 11.4.** Ein

$$D \in \mathrm{Div}(X) = \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times(X) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}_X^\times/^{\mathrm{pre}}\mathcal{O}_X^\times)$$

entspricht einer Familie

$$D = [(U_i, f_i)_{i\in I}]$$

mit $X = \cup_i U_i$ einer offenen Überdeckung und $\mathcal{K}_X^\times(U_i) \ni f_i = \frac{a_i}{b_i}$ mit $a_i, b_i \in \mathcal{O}_X^\times(U_i)$ halmweise regulär.

### 11.1.1 Cartier-Divisoren und Geradenbündel

**Lemma 11.5.** *Es existiert eine eindeutig bestimmte Untergarbe ($\mathcal{O}_X$-Modul-Untergarbe) $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$ mit*

$$\mathcal{O}_X(D) = f_i^{-1}\mathcal{O}_X\big|_{U_i}.$$

*Sie ist unanbhängig von der Darstellung $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$.*

**Satz 11.6.**

*Die Abbildung* $\rho : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X),\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ *ist additiv und induziert einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : \mathrm{CaCl}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

*Es ist* $\mathrm{im}(\rho) = \{[\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}(X) \mid \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_X\}$.

**Satz 11.7.**

*Ist* $X$ *ganz, so ist* $\rho : \mathrm{CaCl}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(X)$ *ein Isomorphismus.*

## 11.2 Weil-Divisoren

**Definition 11.8 (Primzykel, Zykel, Träger eines Zykels, Zykel von Kodimension 1).**

Sei $X$ noethersch.

(i) Ein *Primzykel in* $X$ ist eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge.

(ii) Ein *Zykel in* $X$ ist ein Element der abelschen Gruppe

$$\mathbb{Z}^{(X)} := \{Z = \sum_{x \in X} n_x \overline{\{x\}} \mid n_x \in \mathbb{Z},\ n_x = 0 \text{ für fast alle } x\}.$$

(iii) Für $Z = \sum n_x \overline{\{x\}}$ heißt

$$\operatorname{supp} Z := \bigcup_{\substack{x \in X \\ n_x \neq 0}}$$

der *Träger von* $Z$.

(iv) Ein Zykel $Z$ heißt von *Kodimension 1*, wenn alle $x$ mit $n_x \neq 0$ von Kodimension 1 sind, d.h. $\operatorname{codim}_X \overline{\{x\}} = 1$. Äquivalent dazu ist zu fordern, dass $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$.
$Z^1(X) \subseteq \mathbb{Z}^{(X)}$ bezeichne die Untergruppe dieser.

**Definition 11.9 (Weil-Divisoren).**

Sei $X$ noethersch und integer, so heißt $Z^1(X)$ die Gruppe der *Weil-Divisoren*.

**Satz 11.10.**

*Sei* $X$ *noethersch und integer,* $0 \neq f \in K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$*. Dann gilt* $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ *für fast alle* $x \in X$ *mit* $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$.

### Einschub:

Sei $X$ integer.

**Definition 11.11 (normal, ganzabgeschlossen).**

$X$ heißt *normal*, wenn für jedes $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ in $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$ *ganzabgeschlossen* ist, d.h. ist $\sigma \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$, welches einer Polynomgleichung $f(\sigma) = 0$ mit $f \in \mathcal{O}_{X,x}[X]$, $f$ normiert, genügt, so ist $\sigma \in \mathcal{O}_{X,x}$.

**Bemerkung 11.12.** Ist $X$ lokal noethersch, integer, normal und $x \in X$ ein Punkt mit Kodimension 1, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Dedekindring.

**Lemma 11.13.** *Jeder lokale Dedekindring $(A, \mathfrak{m})$ ist ein Hauptidealring.*

**Folgerung 11.14.** $\mathcal{O}_{X,x}$ trägt die kanonische diskrete Bewertung

$$\begin{array}{rrcl} \nu_x : & \mathcal{O}_{X,x} & \to & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & 0 \neq a = u\pi^r & \mapsto & r = \sup\{k \mid a \in \mathfrak{m}^k\} \\ & 0 & \mapsto & \infty \end{array}$$

wobei das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (\pi)$ sei. Fortgesetzt auf $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$ ergibt sich

$$\nu_x : \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) = K(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Das bedeutet, man hat die diskrete Bewertung

$$\mathrm{mult}_x : K(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

mit

- $\mathrm{mult}_x(f) = \infty \Leftrightarrow f = 0$.
- $\mathrm{mult}_x(fg) = \mathrm{mult}_x(f) + \mathrm{mult}_x(g)$.
- $\mathrm{mult}_x(f+g) \geq \min\{\mathrm{mult}_x(f), \mathrm{mult}_x(g)\}$.

**Definition 11.15 (Hauptdivisor).**

Sei $X$ noethersch und normal. Für $f \in K(X) \setminus \{0\}$ heißt

$$(f) := \sum_{\substack{x \in X \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} \mathrm{mult}_x(f) \cdot \overline{\{x\}} \quad \in Z^1(X)$$

der *Hauptdivisor zu $f$*.

# Literatur


[1] S. Bosch. *Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2009. ISBN: 9783540928126. URL: `http://books.google.de/books?id=dI1p9fh%5C_fV0C`.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449. URL: `http://books.google.de/books?id=3rtX9t-nnvwC`.

[3] Q. Liu und R.Q. Erne. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. OUP Oxford, 2006. ISBN: 9780191547805. URL: `http://books.google.de/books?id=uaLKdA0PxS4C`.

# Definitionen