

Vorlesungszusammenfassung

---

# Schematheorie

---

erstellt von

**Stefan Hackenberg**

**Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

**Prof. Dr. Marco Hien**

Stand

**13. April 2013**



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Lokal geringte Räume</b>	<b>4</b>
1.1	Garben . . . . .	4
1.2	Lokal geringte Räume . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Affine Schemata</b>	<b>10</b>
2.1	$\text{Spec } A$ als topologischer Raum . . . . .	10
2.2	$\text{Spec } A$ als lokal geringter Raum . . . . .	17
2.2.1	Beweis von Satz 2.33 . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Beispiele</b>	<b>20</b>
3.1	$\text{Spec } \mathbb{Z}$ . . . . .	20
3.2	$\text{Spec } k$ für einen Körper $k$ . . . . .	20
3.3	Der Affine $n$ -dimensionale Raum über $k$ . . . . .	22
3.4	Ohne Titel . . . . .	22
3.5	Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$ . . . . .	24
3.6	Diskrete Bewertungsringe . . . . .	25
3.6.1	Beispiele . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Projektive Schemata</b>	<b>29</b>
4.1	Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie . . . . .	29
4.2	$\mathbb{P}^n(k)$ als Schema . . . . .	29
4.2.1	1. Variante . . . . .	29
4.2.2	2. Variante (Die Proj-Konstruktion) . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Eigenschaften von Schemata</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>Tensorprodukt</b>	<b>34</b>
<b>7</b>	<b>Glatt, regulär &amp; normal</b>	<b>35</b>
<b>8</b>	<b><math>k</math>-Varietät</b>	<b>36</b>
<b>9</b>	<b>Der Punkteffektor</b>	<b>37</b>

# Lokal geringte Räume

## 1.1 Garben

### Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe*  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen  $U \subset X$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar  $V \subset U$ , so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen  $\rho_{UV}$  *Restriktion*, schreiben meist  $s|_V := \rho_{UV}(s)$ .

Man nennt  $s \in \mathcal{F}(U)$  auch *Schnitt über  $U$* .

Bei mir steht hier  
im Skript  $s|_U$ . Of-  
fenbar ein Fehler!?

### Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit  $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U)$ ,  $f \mapsto f|_U$ .

**Bemerkung 1.3.** Ist  $\mathbf{Ab}$  die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ & (U \rightarrow V) & \mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ & (V \rightarrow U) & \mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

**Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).**

Ein *Morphismus von Prägarben*  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  auf  $X$  ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , d.h. für alle  $U \subset X$  offen gibt es einen Morphismus  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$ , so dass für  $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

**Definition 1.5 (Garbe).**

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt *Garbe* (engl. sheaf), falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  für offene  $U_i \subset X$ , so gilt

1. Ist  $s \in \mathcal{F}(U)$  und  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ .

2. Sind  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

**Bemerkung 1.6.**  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s & \longmapsto & (s|_{U_i})_{i \in I} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & (s_i)_{i \in I} & \longmapsto & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1 und Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

**Beispiel 1.7.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

**Beispiel 1.8.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{C}$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für  $M = \mathbb{C}$  haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times, \quad f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier  
naïv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naïv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit  $U = U_1 \cup U_2$  für ein  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $i = 1, 2$  ist  $(z : U_i \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$ , da sich der komplexe Logarithmus auf beiden  $U_i$  problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \rightarrow \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

### Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne

$\mathbf{PSh}_X$  := die Kategorie der Prägarben auf  $X$ ,

$\mathbf{Sh}_X$  := die Kategorie der Garben auf  $X$ , wobei  $\text{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

**Bemerkung 1.10.** Man hat den Inklusionsfunktork

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

### Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist  $\mathcal{F}$  eine (Prä)Garbe auf  $X$  und  $x_0 \in X$ , so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) / \sim$$

mit

$$s \sim t \Leftrightarrow \exists W \subset X \text{ offen} : x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s|_W = t|_W$$

für  $s \in \mathcal{F}(U)$ ,  $t \in \mathcal{F}(U')$  der *Halm von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$* .

Die Elemente  $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$  heißen *Keime von Schnitten bei  $x_0$* .

**Beispiel 1.12.**  $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f|_W = g|_W\}$

**Beispiel 1.13.**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}, x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius} \right\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).**

1. Es sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf einem topologischen Raum  $X$ . Es sei  $U \subset X$  eine offene Teilmenge. Für  $r \in \mathcal{F}(U)$ ,  $x_0 \in U$  bezeichne  $r_{x_0}$  den Keim  $[r]$  von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$ . Es seien nun  $s, t \in \mathcal{F}(U)$ , für die  $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$  gelte. Zeige, dass  $s = t$ .
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

**Beweis.** 1. Für alle  $x_0 \in U$  existieren offene  $U_{x_0}$  mit  $s|_{U_{x_0} \cap U} = t|_{U_{x_0} \cap U}$  nach Definition der Keime. Es ist  $U = \bigcap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$ , also folgt nach erster Garbenbedingung  $s = t$ .

2. Wähle  $X = \{0, 1\}$  mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \quad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2|_{\{0\}} &= 5|_{\{0\}} \\ 2|_{\{1\}} &= 5|_{\{1\}} \end{aligned}$$

aber  $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$ . □

**Definition 1.14 (push-forward).**

Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ , so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für  $V \subset Y$  offen eine Garbe definiert, der *push-forward* von  $\mathcal{F}$ .

**1.2 Lokal geringte Räume**

Betrachte nun

**Ring** := Kategorie der kommutativen Ringe mit 1

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ring}.$$

**Definition 1.15 (lokaler Ring).**

Sei  $R$  ein Ring. Dann heißt  $R$  *lokal*, wenn  $R$  genau ein maximales Ideal besitzt.

**Beispiel 1.16.**  $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\} \subset_{\text{Unterring}} \mathbb{Q}$

**Bemerkung 1.17.** Ist  $R$  lokaler Ring und  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  das maximale Ideal, so ist  $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$ .

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).**

1. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $R^\times$  seine Einheitengruppe. Zeige, dass  $R$  genau dann lokal ist, wenn  $R \setminus R^\times \triangleleft R$  gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten  $R \setminus R^\times$  ein Ideal in  $R$  bilden.
2. Es sei  $R$  ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu  $R$  bezeichnen wir mit  $\text{Quot}(R)$ . Lokalisieren wir  $R$  nach  $\mathfrak{p}$ , so erhalten wir den Ring  $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \text{Quot}(R) \mid a \in R, b \notin \mathfrak{p} \right\}$ . Zeige, dass  $R_{\mathfrak{p}}$  ein lokaler Ring ist.

**Beweis.** 1. „ $\Rightarrow$ “ Ist  $R$  lokal, so ist  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $R$ .

„ $\Leftarrow$ “ Ist  $R \setminus R^\times$  ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ .

2. Wir zeigen  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , dann folgt die Behauptung mit 1.

„ $\subseteq$ “ Es sei

$$h = p_1 \frac{s_1}{t_1} + \dots + p_n \frac{s_n}{t_n}.$$

Setze

$$z_1 := p_1 s_1 t_2 \dots t_n + p_2 s_2 t_1 t_3 \dots t_n + p_n s_n t_1 \dots t_{n-1}$$

$$z_0 := t_1 \dots t_n,$$

so ist  $h = \frac{z_1}{z_0}$ . Wäre  $h \in R_{\mathfrak{p}}^\times$ , sagen wir  $\frac{s}{t}$  sein Inverses, so müsste gelten  $z_1 s = z_0 t$ . Die linke Seite jedoch ist in  $\mathfrak{p}$ , die rechte nicht. Damit ist  $h \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ .

„ $\supseteq$ “ Sei  $\frac{s}{t} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , so ist  $s \frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ . □

**Beispiel 1.18.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . Dann ist  $\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$  ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty \setminus (\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da  $[f]$  eine Einheit ist, genau dann, wenn  $f(x_0) \neq 0$ : Ist  $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) \neq 0$ , so existiert  $W \subset U$  offen,  $x_0 \in W$  mit  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in W$ . Damit folgt

$$\left[ \frac{1}{f} : W \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} \right] \in \mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$$

ist Inverses zu  $[f]$ . Zudem ist  $\mathfrak{m}$  ein Ideal.

### Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O}_X)$  bestehend aus:

- einem topologischen Raum  $X$  und
- einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  auf  $X$  von Ringen,

so dass  $\mathcal{O}_{X,x_0}$  für alle  $x_0 \in X$  ein lokaler Ring ist.

Man nennt  $\mathcal{O}_X$  die *Strukturgarbe von*  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Ist  $x_0 \in X$ , so hat man das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0} \triangleleft \mathcal{O}_{X,x_0}$ .

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von*  $x_0$  *in*  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

**Beispiel 1.20.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ , so ist  $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$ .

### Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel  $(\mathbb{R}, C_{\mathbb{R}}^\infty)$  bestehend aus  $\mathbb{R}$  und der Garbe der  $C^\infty$ -Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass  $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty$  für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0}$  angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$ .
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass  $\mathbb{C}$  mit der Garbe der holomorphen Funktionen  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  eine lokal geringter Raum ist und dass  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt.



*Beweis.* 1. Es gilt

$$\begin{aligned} [f : U \rightarrow \mathbb{R}] \in (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times &\Leftrightarrow \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit } f|_{U \cap V} \neq 0 \quad \forall x \in U \cap V \\ &\Leftrightarrow f(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Also  $[f] \in C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ . Damit ist  $C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times$  ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto f(x_0), \end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

### Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind  $R, S$  lokale Ringe mit den maximalen Idealen  $\mathfrak{m}_R \triangleleft R, \mathfrak{m}_S \triangleleft S$ , so heißt der Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

### Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus*  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  *lokal geringter Räume* ist ein Paar  $(f, f^\#)$  bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von  $f^\#$  induzierte Ringhomomorphismus für  $x_0 \in X, y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\# : \mathcal{O}_{Y, y_0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X, x_0} \\ [s] &\mapsto [f_U^\#(s)] \end{aligned}$$

für  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$  und  $y_0 \in U$  ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

**Bemerkung 1.23.** In Definition 1.22 ist  $f_{x_0}^\#$  wohldefiniert:

Sei  $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y, y_0}$ , d.h. es existiert  $W \subset Y$  offen mit  $y_0 \in W$  und  $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$ . Betrachte nun  $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$  für  $s \in \mathcal{O}_Y(U), U \subset Y, y_0 \in U$  und analog  $f_V^\#(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  für  $t \in \mathcal{O}_Y(V), V \subset Y, y_0 \in V$ . Da  $f^\#$  ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} s & \in & \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) & \ni & f_U^\#(s) \\ \downarrow & & \downarrow |_W & & \downarrow |_{f^{-1}(W)} & & \downarrow \\ s|_W = t|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{f_W^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \\ \uparrow & & \uparrow |_W & & \uparrow |_{f^{-1}(W)} & & \uparrow \\ t & \in & \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) & \ni & f_V^\#(t) \end{array}$$

# Affine Schemata

## 2.1 Spec $A$ als topologischer Raum

Sei im Folgenden  $A$  ein kommutativer Ring mit 1 und  $\text{Spec } A := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ .

### Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec } A.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \text{Spec } A \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft A : U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf  $\text{Spec } A$  definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

**Beweis (der Topologie-Eigenschaften).** 1. Zeige:  $\emptyset, \text{Spec } A$  offen  $\iff \text{Spec } A, \emptyset$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(A) = \emptyset, V((0)) = \text{Spec } A$

2. Zeige:  $U_1, U_2$  offen  $\Rightarrow U_1 \cap U_2$  offen  $\iff M_1, M_2$  abgeschlossen  $\Rightarrow M_1 \cup M_2$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

3.  $(U_i)_{i \in I}$  offen  $\Rightarrow \cup_{i \in I} U_i$  offen  $\iff (M_i)_{i \in I}$  abgeschlossen  $\Rightarrow \cap_{i \in I} M_i$  abgeschlossen.

Dazu:  $\cap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

□

**Bemerkung 2.2.** Die abgeschlossenen Teilmengen  $M \subset \text{Spec } A$  sind genau die  $M = V(\mathfrak{a})$  für ein  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ .

**Beispiel 2.3 (Spec  $\mathbb{Z}$ ).** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$  ist  $\mathfrak{a} = (a)$ . Falls  $a \neq 0, 1, -1$  sei  $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$  die Primfaktorzerlegung. Für  $p$  Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \iff (a) \subseteq (p) \iff p \mid a \iff p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  sind genau die Mengen  $\emptyset, \text{Spec } \mathbb{Z}$  und  $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

**Lemma 2.4.** Sei  $x \in \text{Spec } A$ , so ist der Abschluss  $\overline{\{x\}}$  der Menge  $\{x\}$  in  $\text{Spec } A$  gleich

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

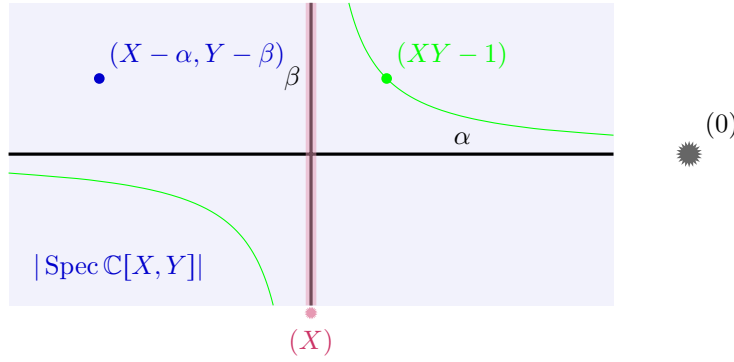
**Beweis.**

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \text{Spec } A \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \triangleleft A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} B = V(x)$$

□

**Bemerkung 2.5.** Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: Spec  $\mathbb{C}[X, Y]$ **Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $x \in X$  heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ .

Er heißt *generischer Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = X$  gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit  $|X|$ .

**Beispiel 2.7.** Sei  $A = \mathbb{C}[X, Y]$ .

- $x = (0) \in \text{Spec } A$  ist generisch.
- $x = (X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft A$  ist abgeschlossen, da aus  $x \triangleleft A$  maximal  $V(x) = \{x\}$  und somit  $x$  abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \triangleleft A$  ist weder abgeschlossen noch generisch.
- $x = (XY - 1) \triangleleft A$  ist ebenfalls weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

**Definition 2.8 (basisoffene Menge).**

Für  $f \in A$  nennt man

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die zu  $f$  gehörige *basisoffene Menge*.

**Lemma 2.9.** Die Menge  $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$  ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene  $U \subseteq \text{Spec } A$  ist eine Vereinigung von  $D(f) \in \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})$  offen und  $\mathfrak{p} \in U$ , so ist  $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ , also  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ . Damit existiert  $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  mit  $f \notin \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{p} \in D(f)$  und  $f \in \mathfrak{a}$ . Also  $(f) \subseteq \mathfrak{a}$  und  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$ . Damit folgt  $D(f) \subseteq U$ .

Zusammenfassend gilt für  $U \subseteq \text{Spec } A$  offen:  $\forall \mathfrak{p} \in U \exists f \in A: \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$ . Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f_{\mathfrak{p}})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ . □

**Lemma 2.10.** Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

*Beweis.* Es ist  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ . Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ , d.h.  $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus (V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$ , also  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  aber nicht  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also existiert  $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  und  $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Damit ist  $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette.  $\square$

**Definition 2.11 (Radikal).**

Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von  $\mathfrak{a}$ .

**Lemma 2.12.**  $\sqrt{\mathfrak{a}} \triangleleft A$ .

*Beweis.* •  $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  ✓

- Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in A$ . Dann  $f^n \in \mathfrak{a}, r \in A$ . Also  $(rf)^n \in \mathfrak{a}$  und damit  $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  mit  $f^n \in \mathfrak{a}, g^m \in \mathfrak{a}$ .

$$\begin{aligned} (f + g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i} \right) g^m + \left( \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i} \right) f^n \end{aligned}$$

Da  $g^m$  und  $f^n$  jeweils in  $\mathfrak{a}$  liegen, ist auch die Summe dort.  $\square$

**Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).**

Ein Ideal  $\mathfrak{b} \triangleleft A$  heißt Radikalideal (radiziell), falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

**Bemerkung 2.14.** Es gilt  $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

**Lemma 2.15.** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “ Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, f^n \in \mathfrak{a}$ . Ist  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ , d.h.  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also  $f^n \in \mathfrak{p}$  und da  $\mathfrak{p}$  prim, folgt  $f \in \mathfrak{p}$ .

„ $\supseteq$ “ Ist  $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so zu zeigen, dass  $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ . Sei also  $f^n \notin \mathfrak{a}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \triangleleft A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$ ,
- $M$  ist angeordnet durch „ $\subseteq$ “,
- ist  $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$  eine total geordnete Teilmenge, so ist  $\mathfrak{b} := \cup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \triangleleft A$  mit  $\mathfrak{b} \in M$ .

Damit hat  $M$  mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element  $\mathfrak{b}_{\max} \in M$ .

Nun sei behauptet, dass  $\mathfrak{b}_{\max} \triangleleft A$  ein Primideal ist. Dazu sei  $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$ , wobei wir annehmen, dass  $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . Betrachte  $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$ , was ein Ideal in  $A$  ist, aber nicht in  $M$  liegt. Analog können wir dies von  $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$  sagen. Damit existieren  $n, m \in \mathbb{N}$  mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \quad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von  $\mathfrak{b}_{\max}$  ist und wir folgern  $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$ , wodurch man den Widerspruch erhält.

Damit ist  $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$  und  $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . □

### Satz 2.16.

Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt sogar

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Aus  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$  folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt  $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$ .

„ $\Rightarrow$ “ Aus  $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , d.h.  $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ , folgt  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . Also  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . □

### Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist  $X = A_1 \cup A_2$  mit  $A_{1,2} \subseteq X$  abgeschlossen, so ist  $X = A_1$  oder  $X = A_2$ .

Eine Teilmenge  $Z \subseteq X$  heißt *irreduzibel*, wenn  $Z$  mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

**Beispiel 2.18.**  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist irreduzibel. Ist nämlich  $A_1 \subsetneq \text{Spec } \mathbb{Z}$  abgeschlossen, so ist  $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für irgendwelche Primzahlen  $p_i$ .

**Lemma 2.19.** In  $\text{Spec } A$  gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so ist  $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und mit Satz 2.16  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ .

Für  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ , gilt: Ist  $xy \in \mathfrak{p}$ , so folgt  $x \in \mathfrak{p}$  oder  $y \in \mathfrak{p}$ . Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y))).$$

Da  $V(\mathfrak{a})$  irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$ . Wieder mit Satz 2.16 folgt  $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und damit  $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

„ $\Leftarrow$ “ Schreibe  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ . Dann folgt wiederum mit Satz 2.16  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$ .

Ist  $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$ , also  $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$ , also  $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$ , so existiert  $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Für  $y \in \mathfrak{c}$ , ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  Primideal, also nach Wahl von  $x$  ist  $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Insgesamt ist  $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$  und damit  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$ .  $\square$

### Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\text{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von  $A$ .

**Korollar 2.21.** *Es gilt*

$$\text{Spec } A \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* Lemma 2.19 mit  $\mathfrak{a} = (0)$ .  $\square$

### Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, so existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_i = A_{i+1}$  für alle  $i \geq n_0$ .

**Lemma 2.23.** *Ist  $A$  noethersch, so ist auch  $\text{Spec } A$  noethersch.*

*Beweis.* Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit  $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$  für geeignete  $\mathfrak{a}_i \in \text{Spec } A$ , so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in  $A$ .  $\square$

### Satz 2.24.

*Ist  $X$  noetherscher topologischer Raum und  $\emptyset \neq A \subseteq X$  abgeschlossen, so zerlegt sich*

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

*in abgeschlossene irreduzible Teilmengen  $A_i \subseteq A$ . Nimmt man  $A_i \not\subseteq A_j$  für  $i \neq j$ , so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.*

*Die  $A_i$  heißen Komponenten von  $A$ .*

**Beweis.** Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ , so hätte man ein inklusionsminimales  $A \in \mathcal{V}$ , denn falls nicht gäbe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit  $A_i \in \mathcal{V}$ . Da  $X$  noethersch, müsste diese Folge stationär werden, wodurch man einen Widerspruch erhält.

Dieses  $A \in \mathcal{V}$  hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da  $A \in \mathcal{V}$  minimal sind  $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$ . Aber damit ist  $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$ . Ein Widerspruch, der wie gewünscht  $\mathcal{V} = \emptyset$  liefert.

**Eindeutigkeit.** Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist  $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$ , also  $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$ . Da  $A_1$  irreduzibel können wir oBdA  $A_1 = A'_1 \cap A_1$  annehmen. Also ist  $A_1 \subseteq A'_1$ .

Analog ist  $A'_1 \subseteq A_k$  für ein  $k = 1, \dots, r$ . Zusammenfassend gilt

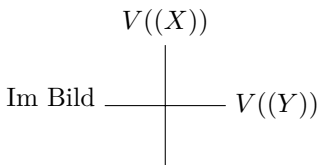
$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

was nach Voraussetzung  $k = 1$  impliziert. Also  $A_1 = A'_1$ .

Nun sukzessive weiter. □

**Beispiel 2.25.** In  $\text{Spec } k[X, Y]$  zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$



**Beispiel 2.26.** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Betrachte  $\text{Spec } k[X, Y]$ . Die maximalen Ideale sind gerade  $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$  für  $\alpha, \beta \in k$ . Ein abgeschlossener Punkt  $\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y]$  wird eindeutig durch  $(\alpha, \beta) \in k^2$  gegeben.

Quelle suchen!

$\mathbb{A}_k^2 := \text{Spec } k[X, Y]$  wird der 2 dimensionale affine Raum über  $k$  genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

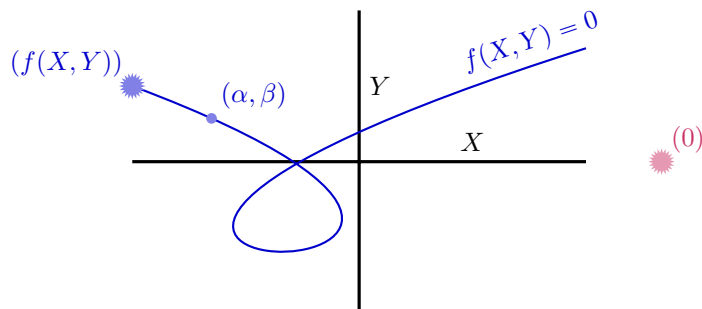
Eine abgeschlossene Teilmenge  $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$  liefert

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned} A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\ &= \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \in k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\ &\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ ist klar. Also zu „ $\Leftarrow$ “:  
Es ist  $f(\alpha, \beta) = 0$ , also  $f(X, Y) = (X - \alpha)h(X, Y) + (Y - \beta)g(X, Y)$  für gewisses  $h$ . Es ist  $f(X, Y) - f(\alpha, \beta) = (X - \alpha)g(X, Y)$ , da die linke Seite  $X - \alpha$  als Nullstelle hat.

Abbildung 2:  $\text{Spec } k[X, Y]$ 

In  $\mathbb{A}_k^2$  hat man aber noch mehr Punkte: Sei  $\mathfrak{p} \triangleleft k[X, Y]$  Primideal, aber nicht maximal, so ist  $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$  kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise  $\mathfrak{p} = (f(X, Y))$  für  $f \in k[X, Y]$  irreduzibel, so liegen alle  $(\alpha, \beta) \in k^2$  mit  $f(\alpha, \beta) = 0$  auf der entsprechenden Menge in  $k^2$ , d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X, Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} := (X - \alpha, Y - \beta) \Rightarrow \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

**Lemma 2.27.** Ist  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \in \text{Spec } A$  und  $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$  die Projektion, so ist

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \text{Spec } A/\mathfrak{a} &\rightarrow \text{Spec } A \\ \bar{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec } A.$$

*Beweis.*

**Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist  $X = \bigcap_{i \in I} U_i$ ,  $U_i$  offen, so existiert eine endliche Teilmenge  $F \subset I$  mit  $X = \bigcap_{i \in F} U_i$ .

$X$  heißt *kompakt*, wenn  $X$  hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

**Satz 2.29.**

Ist  $A$  ein Ring, so ist  $\text{Spec } A$  quasi-kompakt.

*Beweis.* Wir zeigen: Ist  $\emptyset = \bigcap_{i \in I} Z_i$  für abgeschlossene  $Z_i$ , so existiert  $F \subset I$  endlich mit  $\emptyset = \bigcap_{i \in F} Z_i$ .

Sei also  $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$ ,  $\mathfrak{a}_i \triangleleft A$  und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i},$$



also insbesondere  $1 \in \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i}$  und  $1 \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ . Ergo

$$1 = a_{i_1} + \dots + a_{i_r},$$

für  $F := \{i_1, \dots, i_r\} \subset I$ . Nun ist  $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}$ , also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^r V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

## 2.2 Spec $A$ als lokal geringter Raum

Wir wollen  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  als die „guten Funktionen“ auf  $\text{Spec } A$  auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

### Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei  $A$  ein Ring, dann heißt  $S \subseteq A$  *multiplikative Teilmenge*, wenn  $1 \in S$  und aus  $a, b \in S$  auch  $ab \in S$  folgt.

Die *Lokalisierung*  $A_S$  oder  $A[S^{-1}]$  von  $A$  bezüglich  $S$  ist der Ring

$$A_S := (A \times S) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

Schreibe  $\frac{a}{s} := [(a, s)]$  und definiere eine Ringstruktur auf  $A_S$  durch Bruchrechnen.

**Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).** *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $S \subseteq A$  wie in Definition 2.30,  $\varphi : A \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so dass  $\varphi(S) \subseteq R^\times$ , so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \\ & & R \end{array}$$

*kommutativ macht, wobei  $\iota : A \rightarrow A_S$ ,  $a \mapsto \frac{a}{1}$ .*

**Beweis.** Klar, weil dieses  $\psi : A_S \rightarrow R$  durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

**Beispiel 2.32.** •  $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $f \in A$  fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ .

$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ .

### Satz 2.33.

Sei  $X = \text{Spec } A$ . Dann existiert auf  $X$  eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe  $\mathcal{O}_X$  mit:

- i) Es existiert ein Ringhomomorphismus  $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$ .
- ii) Für  $f \in A$  betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \rightarrow & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)|_{D(f)}. \end{array}$$

Dann ist  $\varphi(f)|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$  eine Einheit und der eindeutig durch

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_f \\ \cong \downarrow \varphi & \searrow & \downarrow \varphi_f \exists! \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\cdot|_{D(f)}} & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{array}$$

gegebene Ringhomomorphismus  $\varphi_f$  ist ein Isomorphismus.

- iii) Für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array}$$

und  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$  ist ein Isomorphismus.

### 2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

#### Definition 2.34 ( $\mathfrak{B}$ -(Prü)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Prügarbe auf  $X = \text{Spec } A$ , wenn  $\mathcal{F}$  eine Prügarbe auf

$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$

ist.

$\mathcal{F}$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Garbe, wenn  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Prügarbe ist und die Garbenbedingungen für die  $D(f)$  erfüllt sind.

**Hilfslemma 2.35.** Es gilt:

1.  $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$  ist eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe.
2. Ist  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe  $\bar{\mathcal{F}}$  auf  $X$  mit  $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$  für alle  $D(f) \in \mathfrak{B}$ .

*Beweis.* 1.

TODO

### Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der zu einem  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h.  $X = \cup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \subseteq X$  offen und  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  ist ein affines Schema.

**Bemerkung 2.37.** Beachte dabei: Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ ,  $U \subseteq X$  offen, so ist durch

$$\mathcal{F}|_U : V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe  $\mathcal{F}|_U$  auf  $U$  definiert.

### Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus der lokal geringten Räume

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

**Bemerkung 2.39.** Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ring} & \rightarrow & \mathbf{Sch}^{\text{aff}} \\ A & \mapsto & (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{ccc} f : \text{Spec } B & \rightarrow & \text{Spec } A, \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B}.$$

Letzterer ist für  $g \in A$  gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{D(g)} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(g)) = A_g & \rightarrow & (f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B})(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{a}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\subseteq g\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \not\subseteq \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{q}} \\ \frac{a}{\gamma} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ,  $\gamma \notin \mathfrak{p}$  (also  $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$ ) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

# Beispiele

## 3.1 Spec $\mathbb{Z}$

Jeder Ring  $A$  hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ 1 &\mapsto 1 \\ z &\mapsto \begin{cases} 1 + 1 + \dots + 1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 - 1 - \dots - 1 & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$  ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  von affinen Schemata.  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist ein *finales Objekt* in der Kategorie **Sch<sup>aff</sup>**.

Ferner können wir zusammenfassen

**Offene Mengen**  $\emptyset \neq U \subseteq \text{Spec } \mathbb{Z}$  offen  $\Leftrightarrow U = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\}$

**Basisoffene Mengen**  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z} \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für  $f = p_1^{\nu_1} \dots p_r^{\nu_r}$ .

**Strukturgarbe**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(D(f)) &= \mathbb{Z}_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{Z} \right\} \\ \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}, (p)} &= \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \nmid b, a \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

## 3.2 Spec $k$ für einen Körper $k$

**Als topologischer Raum**  $\text{Spec } k = \{(0)\}$ .

**Strukturgarbe**  $\mathcal{O}_{\text{Spec } k}(\{(0)\}) = k$ .

**Bemerkung 3.1.** Sei  $A$  ein Ring. Angenommen wir haben  $\text{Spec } A \xrightarrow{(f, f^\#)} \text{Spec } k$  für einen Körper  $k$ , so haben wir

$$f_{\text{Spec } k}^\# : k = \mathcal{O}_{\text{Spec } k} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } k) = A,$$

wobei aus  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(f^{-1}(\{(0)\})) = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A)$  resultiert. Insgesamt ist  $A$  also eine  $k$ -Algebra (d.h. ein Ring zusammen mit  $k \rightarrow A$ ).

Bemerke hierbei „Grothendiecks Gesamtphilosophie“:

*Alles relativ lesen!*

**Definition 3.2 ( $S$ -Schema).**

Sei  $S$  ein Schema. Dann ist ein  $S$ -Schema ein Schema  $X$  zusammen mit einem Strukturmorphismus  $X \xrightarrow{\varphi} S$ . Dies ergibt die Kategorie  $\mathbf{Sch}_S$ , wenn man

$$\mathrm{Hom}(X \xrightarrow{\varphi} S, Y \xrightarrow{\varphi} S) := \left\{ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & S & \end{array} \right\}$$

setzt.

**Beispiel 3.3.**  $\mathbf{Sch}_k := \mathbf{Sch}_{\mathrm{Spec} k}$  sind die sog.  $k$ -Schemata. Ein Beispiel hierfür ist  $\mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathrm{Spec} k$  via  $k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ .

**Bemerkung 3.4.** Sei  $X$  ein Schema und  $x \in X$  und weiter  $\mathfrak{m}_x \triangleleft \mathcal{O}_{X,x}$  das maximale Ideal. Dann ist

$$\kappa(x) := k(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$$

der Restklassenkörper von  $x$ .

Betrachte nun  $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$  mit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathrm{Spec} k(x) & \rightarrow & X \\ \eta_x & \mapsto & x, \end{array}$$

wobei topologisch gesehen  $\eta_x \in \mathrm{Spec} k(x)$  der einzige Punkt dieses Schemas ist. Für  $U \subseteq X$  offen haben wir:

$$f_U^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k(x)}(U) = \begin{cases} 0 & x \notin U \\ k(x) & x \in U. \end{cases}$$

Im Fall  $x \in U$  geht dies via

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = k(x).$$

Ist umgekehrt  $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$  ein Schemamorphismus, so setze  $x := f((0)) \in X$  und  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k}$  liefert einen Ringhomomorphismus der Halme:

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k, (0)} = k.$$

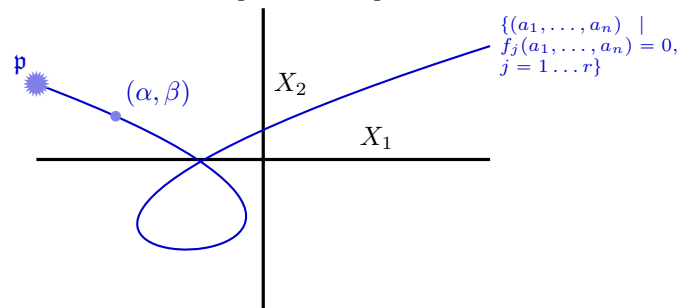
Dieser ist lokal (also  $f_x^\#(\mathfrak{m}_x) = (0)$ ). Damit ist

$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x \xleftarrow{f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x} f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x k$$

wohldefiniert und somit ist  $k \mid k(x)$  eine Körpererweiterung.

Zusammengefasst haben wir:

Einen Punkt $x \in X$ wählen mit Restklassenkörper $k(x)$ und eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$ .	$\Longleftrightarrow$	Einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec} k \rightarrow X$ wählen für eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$ .
--	-----------------------	--

Abbildung 3:  $\text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ 

### 3.3 Der Affine $n$ -dimensionale Raum über $k$

Sei  $k$  wieder ein Körper. Der affine  $n$ -dimensionale Raum über  $k$  ist  $\mathbb{A}_k^n := \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ .

Wir erinnern an den Hilbertschen Nullstellensatz:

#### Satz 3.5 (Hilbertscher Nullstellensatz).

*Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Dann ist jedes maximale Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  von der Form  $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ .*

*Beweis.* ohne Beweis. □

Wir haben bereits gezeigt:

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n, \quad \text{via } (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Sei  $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$  ein nicht maximales Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  (die Darstellung ist nach Satz 3.5) möglich, so gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \Leftrightarrow f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Wir können dies in Abbildung 3 „sehen“.

### 3.4 Ohne Titel

Betrachte  $k[[X_1, \dots, X_n]] = k[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$  mit  $R[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in R\}$ .

**Bemerkung 3.6.**  $g \in k[[X_1, \dots, X_n]] \setminus (X_1, \dots, X_n)$  ist eine Einheit.

*Beweis.* Idee: Ansatz für eine Variable:  $g(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$  Dann

$$1 = g(X)h(X) = \underbrace{a_0 b_0}_{=1} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{=0} X + \dots$$

□

**Funktor Spec** Wir haben den Funktor Spec: Die Ringhomomorphismen

$$k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow k$$

$$f \longmapsto \frac{f}{1}$$

$$\frac{f}{g} \longmapsto f g^{-1}$$

$$h \longmapsto h(0)$$

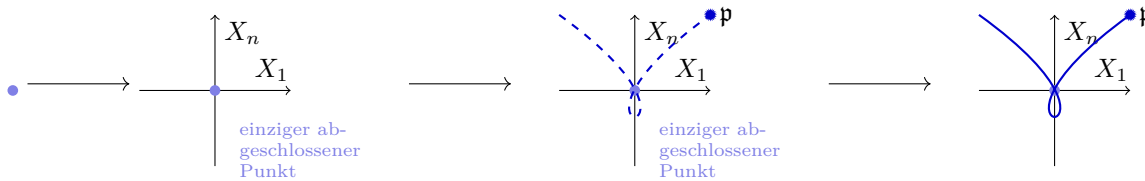
induzieren

$$\mathrm{Spec} k \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} \longrightarrow \mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{topologisch:} & (0) & \longmapsto & (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & (X_1, \dots, X_n). \\ & & & \text{einziger} & & \text{einziger} & & \text{entspricht dem} \\ & & & \text{abgeschlossener} & & \text{abgeschlossener} & & \text{abgeschlossenen} \\ & & & \text{Punkt} & & \text{Punkt} & & \text{Punkt } (0, \dots, 0) \in k^n \end{array}$$

Dies ist ein Homöomorphismus auf  $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^n \mid \mathfrak{p} \subseteq (X_1, \dots, X_n) = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq \mathbb{A}_k^n\}$ .

Was passiert aber auf Schemaniveau?



Betrachte dazu

$$\mathrm{Spec} k \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}/\mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p} \approx V(\mathfrak{p})$$

Nehmen wir das explizite Beispiel  $\mathfrak{p} = (Y^2 - X^2(X+1))$ . Es ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal und  $V(\mathfrak{p})$  irreduzibel.

Beachte:  $1 + X \in k[[X]]$  hat eine Wurzel, wie man durch folgenden Ansatz mit  $h(X) = a_0 + a_1X + \dots$  sieht:

$$1 + X = (h(X))^2 = a_0^2 + 2a_0a_1X + \dots$$

Setze  $a_0 := 1$  oder  $-1$  und löse sukzessiv auf. Demnach ist  $Y^2 - X^2(X+1) = (Y - Xh(X))(Y + Xh(X))$  nicht mehr prim, also  $V(\mathfrak{p}) \subseteq k[[X, Y]]$  nicht mehr irreduzibel!

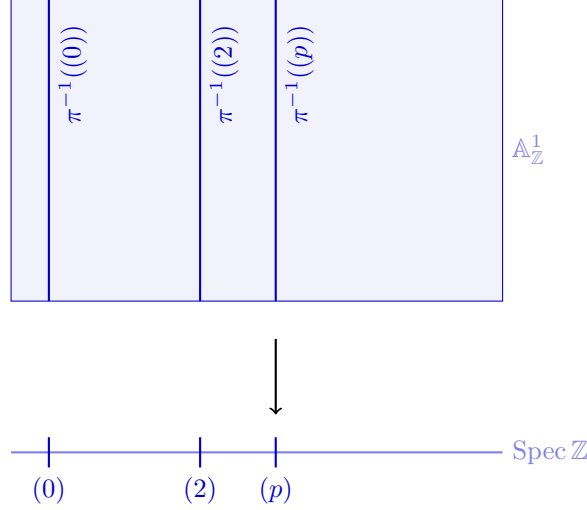
Betrachte genauer

$$\begin{array}{ccc} k[[u, v]]/(uv) & \xrightarrow{\cong} & k[[z, w]]/(z^2 - w^2) & \xrightarrow{\cong} & k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(h(X))^2) \\ u \longmapsto & z + w & & z \longmapsto & Y \\ v \longmapsto & z - w & & wz \longmapsto & Xh(X) \end{array}$$

In Bildern:

$$\mathrm{Spec} k[[u, v]]/(uv) \longrightarrow \mathrm{Spec} k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(X+1))$$



Abbildung 4: Veranschaulichung von  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 

### 3.5 Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$

Wir haben  $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ . Topologisch ist

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \bigcup_{p \text{ prim}} \pi^{-1}((p)) \cup \pi^{-1}((0)).$$

Abbildung 4 verdeutlicht dies.

**Zu  $\pi^{-1}((0))$**  Betrachte nun  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$ , so gilt  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$ .

Betrachte  $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$  und die Lokalisierung  $g : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]_S$ . Es ist klar:  $\mathbb{Z}[X]_S = \mathbb{Q}[X]$

Ferner gilt  $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[X] \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$  ist ein Homöomorphismus auf sein Bild:

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \mid \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)\} = \pi^{-1}(0),$$

**Zu  $\pi^{-1}((p))$**  Es ist  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p)) \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$ . Dann betrachte  $\rho : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$  und  $\rho^* : \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[X] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ . Wegen  $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X]/\ker \rho$  ist  $\rho^*$  ein Homöomorphismus auf

$$V(\ker \rho) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X] \mid \ker \rho \subseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1}((p)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1.$$

Zusammengefasst ist:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}((0)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \\ \pi^{-1}((p)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheiten topologisch zu lesen sind.

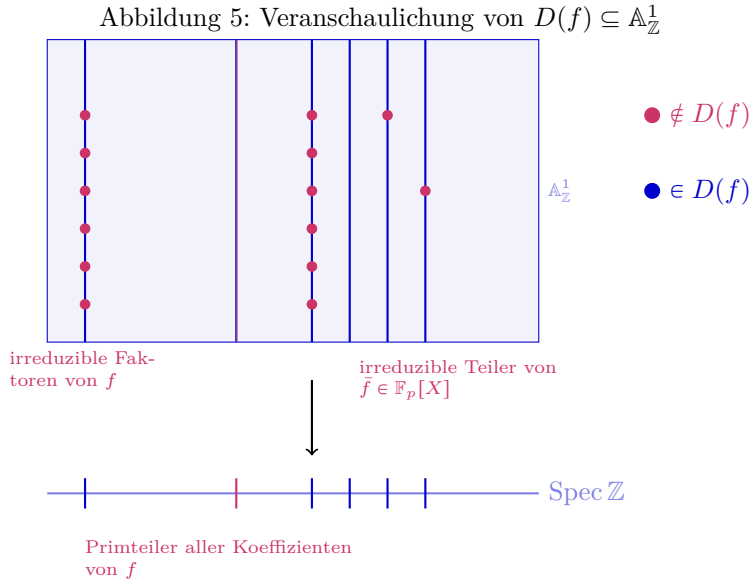
**Betrachte  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$**

**1. Fall.**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$ , also

$$\mathfrak{p} = (\mu(X))$$

mit  $\mu(X) \in \mathbb{Z}[X]$  einem primitiven, irreduziblen Polynom.





**2. Fall.**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$ , so ist  $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$  für ein  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathbb{F}_p[X]$ , also  $\mathfrak{p} = \rho^{-1}((q(X)))$  für ein irreduzibles  $q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$  oder  $(0)$ . Dann ist

$$\mathfrak{p} = (r(X), p)$$

mit  $r(X) \in \mathbb{Z}[X]$  und  $r(X) \equiv q(X) \pmod{p}$ .

Es stellt sich die Frage, wie für  $f \in \mathbb{Z}[X]$  die  $D(f) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  aussehen. Dazu

**1. Fall**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0))$ . Sei  $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ . Dann  $f(X) = \xi q_1(X)^{\nu_1} \dots q_r(X)^{\nu_r}$  und es gilt

$$f \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} = (q(X))$$

mit  $q \neq q_1, \dots, q_r$ .

**2. Fall**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$ .  $f(X) \notin (r(X), p)$  mit  $r(X) \pmod{p} \in \mathbb{F}_p[X]$  irreduzibel. Für eine Primzahl  $p$ , betrachte  $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ . Ist  $\bar{f}(X) = 0$ , so ist  $f(X) \in (r(X), p)$  für alle  $r(X)$ . Für  $\bar{f}(X) = \bar{q}_1(X)^{\nu_1} \dots \bar{q}_s(X)^{\nu_s}$ , ist  $f(X) \in (q_i(X), p)$  für diese  $i$ .

Dargestellt ist dies wieder in Abbildung 5.

## 3.6 Diskrete Bewertungsringe

### Definition 3.7 (Diskrete Bewertung).

Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper  $k$  ist eine Abbildung

$$v : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

so dass

1.  $v(0) = \infty$ ,  $v(x) \in \mathbb{Z}$  für  $x \neq 0$ ,
2.  $v(xy) = v(x) + v(y)$  für alle  $x, y$  und
3.  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$  für alle  $x, y$ .

**Bemerkung 3.8.** Wählt man  $q > 1$  (in  $\mathbb{R}$ ), so ist

$$|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| := q^{-v(x)}$$

eine Betragsfunktion mit

1.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $|xy| = |x||y|$ .
3.  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$ . Die erste Ungleichung wird auch nicht-archimedische Dreiecksungleichung genannt.

**Definition 3.9 (Bewertungsring).**

Ist  $(k, v)$  ein diskret bewerteter Körper, so ist

$$\mathcal{O} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$$

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := \{x \in k \mid v(x) > 0\} = \{x \in k \mid |x| < 1\} \triangleleft \mathcal{O},$$

der *Bewertungsring* zu  $k$ .

Ein diskreter Bewertungsring (dvr) ist ein Integritätsbereich  $R$ , zusammen mit diskreter Bewertung  $v : K = \text{Quot}(R) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , so dass  $R = \mathcal{O}$  gilt.

Ferner gilt  $\mathcal{O}$  ist ein Hauptidealbereich (PID),  $k = \text{Quot}(\mathcal{O})$ .

Ist  $\pi \in \mathcal{O}$  mit  $v(\pi) = 1$ , so ist  $\mathfrak{m} = (\pi)$  und  $\mathcal{O}$  hat genau die Ideale  $(\pi^k)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Bemerkung 3.10.** Der Wertebereich  $v(k \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}$  ist eine Untergruppe, also  $v(k \setminus \{0\}) = d\mathbb{Z}$  für ein  $d$ . Wir können meistens oBdA  $d = 1$  annehmen.

**Bemerkung 3.11.** Beachte: Für  $x \in \mathcal{O}$  gilt

$$v(x) = n \Leftrightarrow x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Für  $\xi = \frac{x}{y} \in K = \text{Quot}(\mathcal{O})$  ist  $v(\xi) = v(x) - v(y)$ .

*Beweis (von Definition 3.9).* TODO. □

**Bemerkung 3.12.**

$$\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi) = \mathfrak{m}\},$$

da in Hauptidealbereichen jedes Primideal  $\neq (0)$  auch maximal ist.

**Definition 3.13.**

Ist  $\mathcal{O}$  ein diskreter Bewertungsring, so heißt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$$

der *Restklassenkörper* von  $\mathcal{O}$ .

$\mathcal{O}$  heißt von *verschiedener Charakteristik*, wenn für  $K = \text{Quot}(\mathcal{O})$ ,  $\text{char } K = 0$  und  $\text{char } k \neq 0$  ist; von *gleicher Charakteristik*, wenn  $\text{char } K = \text{char } k$ .

### 3.6.1 Beispiele

1. Sei  $k$  ein Körper,

$$K := k((t)) := \text{Quot } k[[t]] = \left\{ f(t) = \sum_{l=-N}^{\infty} a_l t^l \mid a_l \in k \right\}$$

und

$$\begin{aligned} v : k[[t]] &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid t^{-k} f(t) \in k[[t]]\} = \min\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

Auf  $k((t))$  Dies ist eine diskrete Bewertung mit  $\mathcal{O} = k[[t]]$ :

$$\begin{aligned} v : k((t)) &\rightarrow \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \min\{l \in \mathbb{Z}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

$k((t))$  trägt damit  $|\cdot| := q^{-v(\cdot)}$ , also ist  $k((t))$  ein metrischer Raum mit  $d(x, y) := |x - y|$ , dieser ist vollständig.

Für den Restklassenkörper gilt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k[[t]]/tk((t)) \cong k,$$

da  $\mathfrak{m} = tk[[t]] = (t)$ .  $t$  heißt dabei *Uniformierende*.

2. Betrachte

$$\begin{aligned} \nu_p : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \frac{a}{b} &\mapsto v(a) - v(b) \end{aligned}$$

mit  $v(a) = \max\{k : p^k \mid a\}$  für eine Primzahl  $p$ .

$\nu_p$  ist eine diskrete Bewertung, die *p-adische Bewertung*. Ferner ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form} \mid p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

und  $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$  und

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_p.$$

$|\cdot|_p := p^{-\nu_p(\cdot)} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt *p-adischer Betrag*.  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  ist jedoch nicht vollständig, da z.B.  $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$  eine Cauchyfolge bildet.

Man erhält die Vervollständigungen

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, |\cdot|) &\rightsquigarrow \mathbb{R} \\ (\mathbb{Q}, |\cdot|_p) &\rightsquigarrow \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

**Zurück zu Schemata** Sei  $\mathcal{O}$  ein dvr, so ist  $\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi)\}$ . Dabei ist  $(0)$  der generische Punkt mit  $\overline{\{(0)\}} = V((0)) = \text{Spec } \mathcal{O}$  und  $(\pi)$  ein abgeschlossener Punkt, genannt der *spezielle Punkt* in  $\text{Spec } \mathcal{O}$ .

**Beispiel 3.14.** Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char } k \neq 2, 3$  und  $k$  algebraisch abgeschlossen. Wir betrachten

$$E := \text{Spec } A \quad \text{mit } A := k[X, Y]/(Y^2 - (X^3 + aX + b)).$$

Dies ist der affine Teil einer *elliptischen Kurve*, wenn  $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \in k$ .

Wir haben

$$|E| \cong \{(x_0, y_0) \in k^2 \mid y_0^2 - (x_0^3 + ax_0 + b) = 0\}.$$

Sei  $(x_0, y_0) \in |E|$ , oder besser  $\mathfrak{p} := (X - x_0, Y - y_0) \in E$ . Es ist  $\mathcal{O}_{E, \mathfrak{p}}$  ein dvr.

Dazu:

- 1. Fall**  $y_0 \neq 0$ , so ist  $\mathcal{O}_{E,y} = A_{\mathfrak{p}}$ . Betrachten wir  $\frac{\bar{f}(X,Y)}{\bar{g}(X,Y)} \in A_{\mathfrak{p}}$ , also  $\bar{f}, \bar{g} \in A$  und  $\bar{g} \notin (X - x_0, Y - y_0)$ , d.h.  $\bar{g}(x_0, y_0) \neq 0$ . Ferner ist

$$Y^2 - (X^3 + aX + b) = (Y + y_0)(Y - y_0) + (X^2x_0X + (x + x_0^2))(X - x_0)$$

und wenn  $y_0 \neq 0$ , so ist  $(Y + y_0) \notin (X - x_0, Y - y_0)$ . Demnach ist  $Y + y_0 \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$ , also gilt in  $A_{\mathfrak{p}}$ :

$$Y - y_0 = \frac{X^2 + x_0X + (a + x_0^2)}{Y + y_0}(X - x_0)$$

und  $(X - x_0, Y - y_0)A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (X - x_0)A_{\mathfrak{p}}$  ist ein Hauptideal.

Also ist

$$\begin{aligned} v : A_{\mathfrak{p}} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ a &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in (X - x_0)^k\} \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung!

- 2. Fall**  $y_0 = 0$ . Dies geht analog und man sieht, dass

$$X^2 + x_0X + (a + x_0^2) \notin (X - x_0, Y),$$

da nach Voraussetzung  $4a^2 + 27b^2 \neq 0$ . Also ist  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (Y - y_0)A_{\mathfrak{p}}$ .

**Bemerkung 3.15.** Sei  $K(E) := \mathcal{O}_{E,(0)} = \text{Quot}(A) = A_{(0)}$  der *Funktionenkörper* von  $E$ . Für  $\mathfrak{p} \in E$  hat man die *Null-/Polstellenordnung*

$$v_{\mathfrak{p}} : K(E) \rightarrow \text{Quot}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

# Projektive Schemata

# 4

## 4.1 Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie

...

## 4.2 $\mathbb{P}^n(k)$ als Schema

Statt einem Körper  $k$  können wir einen Ring  $A$  betrachten.

### 4.2.1 1. Variante

Betrachte  $U_i := \text{Spec } A[x_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, x_n] = \mathbb{A}_A^n$ .

In  $\mathbb{RP}^n$  würden wir diese mit dem Kartenwechsel verkleben:

$$\begin{array}{ccccc}
 & [y_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{1}, \dots, y_n] & & U_i \cap U_j & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \nwarrow \\
 (y_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, y_n) & & h_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\text{Kartenwechsel}} & h_j(U_i \cap U_j) \\
 & \parallel & & & \parallel \\
 & \{(y_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, y_n) \mid y_j \neq 0\} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \{(z_0, \dots, \overset{j\text{-te}}{t}, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\} & \\
 & & & & \\
 & (y_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, y_n) & \longmapsto & \left( \frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{1}{\overset{i\text{-te}}{y_j}}, \dots, \overset{j\text{-te}}{t}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) & 
 \end{array}$$

Betrachte also

$$U_{ij} := \text{Spec } A[x_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, x_n][x_j^{-1}] \hookrightarrow \text{Spec } A[x_0, \dots, \overset{i\text{-te}}{t}, \dots, x_n] = U_i$$

$$U_{ji} := \text{Spec } A[x_0, \dots, \overset{j\text{-te}}{t}, \dots, x_n][x_i^{-1}] \hookrightarrow \text{Spec } A[x_0, \dots, \overset{j\text{-te}}{t}, \dots, x_n] = U_j$$

und wähle einen Isomorphismus

$$\begin{array}{lll}
 \phi_{ij} : U_{ij} & \rightarrow & U_{ji} \\
 x_k & \mapsto & \frac{x_k}{x_j} \quad \text{für } k \neq i \\
 x_i & \mapsto & \frac{1}{x_j}.
 \end{array}$$

Es gilt nun  $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ , denn

$$U_{ij} \cap U_{ik} = D(x_j x_k) \subseteq U_i$$

$$U_{ji} \cap U_{jk} = D(x_i x_k) \subseteq U_j$$

sowie

$$\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$$

**Wir haben also** eine Familie  $(U_i)_{i=0,\dots,n}$  von (affinen) Schemata. Für jedes Paar  $(i, j)$  eine offene Inclusion  $U_{ij} \hookrightarrow U_i$  mit (affinen) Schemata und Isomorphismen  $\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$ , so dass  $\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ .

Bleibt zur Übung lediglich zu zeigen, dass ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Schema  $\mathbb{P}_A^n$  mit Überdeckung  $\mathbb{P}_A^n = \bigcup_{i=0}^n V_i$  für  $V_i \subseteq \mathbb{P}_A^n$  offen und Isomorphismen  $V_i \xrightarrow{\cong} U_i$  von (affinen) Schemata existiert.

## 4.2.2 2. Variante (Die Proj-Konstruktion)

### Definition 4.1 (graduierte $A$ -Algebra).

Sei  $A$  ein Ring, dann heißt

$$S := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$$

eine *graduierte  $A$ -Algebra*, wenn

- $S$  ein Ring,
- $S_n \subset S$  ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul,
- $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$  ist,
- wir einen Ringhomomorphismus  $A \xrightarrow{\varphi} S$  haben und
- die  $S_n$   $A$ -Untermoduln sind.

Ein  $s \in S_n$  heißt *homogen vom Grad  $n$* .

### Definition 4.2 (homogenes Ideal).

Ein Ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft S$  heißt *homogen*, wenn

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{a} \cap S_n.$$

**Lemma 4.3.** *Es ist äquivalent*

- $\mathfrak{a}$  homogen,
- $\mathfrak{a}$  wird von homogenen Elementen erzeugt
- Aus  $a \in \mathfrak{a}$  mit  $a = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$  für  $a_n \in S_n$  folgt  $a_n \in \mathfrak{a}$ .

*Beweis.* leicht. □

**Beispiel 4.4.**  $S = A[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{m \geq 0} S_m$  mit

$$S_m = \{f(x_0, \dots, x_n) \mid f \text{ homogen von Grad } m\},$$

d.h.

$$f \in S_m \iff f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1}} \alpha_\nu X_0^{\nu_0} \dots X_n^{\nu_n} \quad \text{mit } \nu_0 + \dots + \nu_n = m.$$

### Definition 4.5 ( $\text{Proj}(S)$ ).

Setze  $S_+ := \bigoplus_{n \geq 1} S_n$ , dann ist das *projektive Spektrum*  $\text{Proj } S$  von  $S$  definiert als

$$\text{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } S \text{ homogen} \mid S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

**Definition 4.6 (Zariski Topologie auf  $\text{Proj}(S)$ ).**

Für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft S$  setze

$$V_+(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S).$$

Dann bilden diese  $V_+(\mathfrak{a})$  die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der *Zariski-Topologie auf  $\text{Proj}(S)$* .

*Beweis.* Wie im inhomogenen Fall. □

**Bemerkung 4.7.** Ein homogenes  $\mathfrak{a} \triangleleft S$ ,  $\mathfrak{a} \neq S$ , ist prim genau dann, wenn gilt:

$$xy \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathfrak{a} \text{ oder } y \in \mathfrak{a}$$

für alle homogenen  $x, y$ .

**Definition 4.8 (basisoffenen Mengen auf  $\text{Proj}(S)$ ).**

Analog zu  $\text{Spec } A$  bilden für  $f \in S$  die *basisoffenen Mengen in  $\text{Proj}(S)$*

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S)$$

eine Basis der Topologie auf  $\text{Proj}(S)$ .

**Definition 4.9 (homogene Lokalisierung).**

- Für  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$  heißt

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s, t \in S, t \notin \mathfrak{p}, s, t \text{ homogen von gleichem Grad} \right\}$$

*homogene Lokalisierung von  $\mathfrak{p}$ .*

- Für  $f \in S$  homogen von Grad  $m$  heißt

$$S_{(f)} := \left\{ \frac{s}{f^k} \mid s \in S, k \in \mathbb{N}_0, s \text{ homogen von Grad } k \deg f \right\}$$

*homogene Lokalisierung bezüglich  $f$ .*

**Lemma 4.10.** Es gilt:  $S_{(\mathfrak{p})}$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s \in \mathfrak{p} \right\}.$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Satz 4.11.**

Auf  $\text{Proj}(S)$  gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Ringgarbe  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$  mit:

1. Für alle homogenen  $f \in S_+$  hat man den Isomorphismus

$$(\varphi, \varphi^\#) : (D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}|_{D_+(f)}) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)}, \mathcal{O}_{S_{(f)}})$$

2. Diese induzieren Isomorphismen

$$\mathcal{O}_{\text{Proj}(S), \mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Damit wird  $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$  zu einem Schema.

*Beweis.* „analog“ zum Beweis für Spec mit nachfolgendem Lemma. □

**Lemma 4.12.** *Ist  $f \in S_+$  homogen, so ist*

$$\begin{aligned} \phi : D_+(f) &\rightarrow \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{aligned}$$

*ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $S \xrightarrow{\lambda} S_f \xleftarrow{\iota} S_{(f)}$ , so haben wir

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S & \xleftarrow{\lambda^*} & \operatorname{Spec} S_f \\ & \nearrow \lambda^* & \downarrow \iota^* \\ D(f) & & \mathfrak{p}S_f \\ \uparrow \text{stetig} & & \downarrow \\ D_+(f) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathfrak{p}S_f \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{p} & & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

Die Stetigkeit im linken Diagramm folgt aus der Tatsache, dass  $V_+(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Proj}(S)$  und  $\operatorname{Proj}(S)$  trägt die Teilraumtopologie von  $\operatorname{Spec} S$ . Damit ist  $\phi$  stetig.

Wir wollen die Umkehrabbildung von  $\phi$  angeben:

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f}) & \xleftarrow{\quad} & \mathfrak{q}. \end{array}$$

Den Rest zeigen nachstehende Hilfslemmata. □

**Hilfslemma 4.13.**  $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$  ist homogenes Primideal in  $S$ .

*Beweis.*

$$\mathfrak{q}S_f = \left\{ \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n} \in S_f \mid \begin{array}{l} b \text{ homogen, } \deg b = l \deg f \\ \frac{b}{f^n} \in \mathfrak{q}, c \in S, n \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

Bemerke, dass  $\mathfrak{p}$  ein homogenes Ideal ist, weil  $\mathfrak{q}S_f$  es ist. Genauer:  $S_f = \bigoplus_{n \geq 0} S_{f,n}$  mit

$$S_{f,n} := \left\{ \frac{c}{f^m} \mid c \text{ homogen, } \deg c - m \deg f = n \right\}.$$

Es bleibt also zu zeigen: Sind  $a, a' \in S$  homogen und  $aa' \in \mathfrak{p}$ , so folgt  $a \in \mathfrak{p}$  oder  $a' \in \mathfrak{p}$ .

Sei dazu  $r = \deg a$ ,  $s = \deg a'$ . Aus  $aa' \in \mathfrak{p}$  folgt  $\lambda(aa') = \frac{aa'}{1} \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$ . Also existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k \in \mathfrak{q}S_f$ , also  $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k = \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n}$  wie oben. Potenzieren mit  $\deg f$  ergibt

$$\frac{a^{k \deg f} a'^{k \deg f}}{f^{kr} f^{ks}} = \frac{b^{\deg f}}{f^l \deg f} \frac{c^{\deg f}}{f^n \deg f} \frac{1}{f^{kr} f^{ks}} \in S_f.$$

**Leider noch nicht fertig :-)**



# Eigenschaften von Schemata

---

# 5

# Tensorprodukt

---

# 6

# Glatt, regulär & normal

---

7

# k-Varietät

---

# 8

# Der Punkteffunktor

---

# 9