## Vorlesungszusammenfassung

## **Schematheorie**

erstellt von

### Stefan Hackenberg Maximilian Huber

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

16. März 2013

# **Inhaltsverzeichnis**

| 1 | Loka | al geringt | e | R | äu | m | е |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  | 4 |
|---|------|------------|---|---|----|---|---|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|------|--|---|
|   | 1.1  | Garben     |   |   |    |   |   | <br> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | <br> |  | 4 |

# 1

## Lokal geringte Räume

#### 1.1 Garben

#### Definition 1.1 (Prägarbe). -

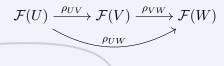
Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F}: U \mapsto \mathcal{F}(U) \,,$$

die jedem offenen  $U\subset X$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar  $V \subset U$ , so dass



Bei mir steht hier im Skript  $s \big|_{U}.$  Offenbar ein Fehler!?

kommutiert.

Wir nennen  $\rho_{UV}$  Restriktion, schreiben meist  $s|_{V} := \rho_{UV}(s)$ .

Man nennt  $s \in \mathcal{F}(U)$  auch Schnitt über U.

#### Beispiel 1.1.

$$\mathcal{C}_X^{\circ}: U \mapsto \mathcal{C}_X^{\circ}(U) := \{f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

 $\mathrm{mit}\ \rho_{VU}:\mathcal{C}_X^\circ(V)\mapsto\mathcal{C}_X^\circ(U),\, f\mapsto f\big|_U.$ 

Bemerkung 1.2. Ist Ab die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \mathrm{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \mathrm{Morph} : \mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \to V & U \subset V, \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathbf{Top}_X & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (U \to V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathbf{Top}_X^{\mathrm{op}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (V \to U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

#### Definition 1.2 (Morphismus von Prägarben).

Ein Morphismus von Prägarben  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , d.h. für alle  $U \subset X$  offen gibt es einen Morphismus  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$ , so dass für  $U \subset V$ 

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(V)$$

kommutiert.

#### Definition 1.3 (Garbe). -

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf X heißt Garbe, falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  für offene  $U_i \subset X$ , so gilt

- 1. Ist  $s \in \mathcal{F}(U)$  und  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ .
- 2. Sind  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

**Bemerkung 1.3.**  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto \left(s|_{U_i}\right)_{i \in I}$$

$$(s_i)_{i \in I} \longmapsto \left(s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}\right)_{(i,j) \in I^2}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.