

Vorlesungszusammenfassung

---

# Schematheorie

---

erstellt von

**Stefan Hackenberg**

**Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

**Prof. Dr. Marco Hien**

Stand

**9. April 2013**



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Lokal geringte Räume</b>	<b>4</b>
1.1	Garben . . . . .	4
1.2	Lokal geringte Räume . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Affine Schemata</b>	<b>10</b>
2.1	$\text{Spec } A$ als topologischer Raum . . . . .	10
2.2	$\text{Spec } A$ als lokal geringter Raum . . . . .	17
2.2.1	Beweis von Satz 2.33 . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Beispiele</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Eigenschaften von Schemata</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Tensorprodukt</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Glatt, regulär &amp; normal</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b><math>k</math>-Varietät</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Der Punkteffunktor</b>	<b>25</b>

# Lokal geringte Räume

## 1.1 Garben

### Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe*  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen  $U \subset X$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar  $V \subset U$ , so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen  $\rho_{UV}$  *Restriktion*, schreiben meist  $s|_V := \rho_{UV}(s)$ .

Man nennt  $s \in \mathcal{F}(U)$  auch *Schnitt über  $U$* .

Bei mir steht hier  
im Skript  $s|_U$ . Of-  
fenbar ein Fehler!?

### Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit  $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U)$ ,  $f \mapsto f|_U$ .

**Bemerkung 1.3.** Ist  $\mathbf{Ab}$  die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (U \rightarrow V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (V \rightarrow U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

**Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).**

Ein *Morphismus von Prägarben*  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  auf  $X$  ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , d.h. für alle  $U \subset X$  offen gibt es einen Morphismus  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$ , so dass für  $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

**Definition 1.5 (Garbe).**

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt *Garbe*, falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  für offene  $U_i \subset X$ , so gilt

1. Ist  $s \in \mathcal{F}(U)$  und  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ .

2. Sind  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

**Bemerkung 1.6.**  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s \mapsto (s|_{U_i})_{i \in I} & & (s_i)_{i \in I} \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} & & \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

**Beispiel 1.7.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

**Beispiel 1.8.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{C}$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für  $M = \mathbb{C}$  haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_\mathbb{C}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier  
naiv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit  $U = U_1 \cup U_2$  für ein  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $i = 1, 2$  ist  $(z : U_i \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$ , da sich der komplexe Logarithmus auf beiden  $U_i$  problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \rightarrow \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

### Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne

$\mathbf{PSh}_X :=$  die Kategorie der Prägarben auf  $X$ ,

$\mathbf{Sh}_X :=$  die Kategorie der Garben auf  $X$ , wobei  $\text{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

**Bemerkung 1.10.** Man hat den Inklusionsfunktork

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

### Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist  $\mathcal{F}$  eine (Prä)Garbe auf  $X$  und  $x_0 \in X$ , so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) / \sim$$

mit

$$s \sim t :\Leftrightarrow \exists W \subset X \text{ offen} : x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s|_W = t|_W$$

für  $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(U')$  der *Halm von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$* .

Die Elemente  $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$  heißen *Keime von Schnitten bei  $x_0$* .

**Beispiel 1.12.**  $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f|_W = g|_W\}$

**Beispiel 1.13.**

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{C}, x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius} \right\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).**

1. Es sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf einem topologischen Raum  $X$ . Es sei  $U \subset X$  eine offene Teilmenge. Für  $r \in \mathcal{F}(U)$ ,  $x_0 \in U$  bezeichne  $r_{x_0}$  den Keim  $[r]$  von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$ . Es seien nun  $s, t \in \mathcal{F}(U)$ , für die  $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$  gelte. Zeige, dass  $s = t$ .
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

**Beweis.** 1. Für alle  $x_0 \in U$  existieren offene  $U_{x_0}$  mit  $s|_{U_{x_0} \cap U} = t|_{U_{x_0} \cap U}$  nach Definition der Keime. Es ist  $U = \bigcap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$ , also folgt nach erster Garbenbedingung  $s = t$ .

2. Wähle  $X = \{0, 1\}$  mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \quad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2|_{\{0\}} &= 5|_{\{0\}} \\ 2|_{\{1\}} &= 5|_{\{1\}} \end{aligned}$$

aber  $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$ . □

**Definition 1.14 (push-forward).**

Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ , so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für  $V \subset Y$  offen eine Garbe definiert, der *push-forward* von  $\mathcal{F}$ .

**1.2 Lokal geringte Räume**

Betrachte nun

**Ring** := Kategorie der kommutativen Ringe mit 1

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ring}.$$

**Definition 1.15 (lokaler Ring).**

Sei  $R$  ein Ring. Dann heißt  $R$  *lokal*, wenn  $R$  genau ein maximales Ideal besitzt.

**Beispiel 1.16.**  $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$

**Bemerkung 1.17.** Ist  $R$  lokaler Ring und  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  das maximale Ideal, so ist  $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$ .

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).**

1. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $R^\times$  seine Einheitengruppe. Zeige, dass  $R$  genau dann lokal ist, wenn  $R \setminus R^\times \triangleleft R$  gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten  $R \setminus R^\times$  ein Ideal in  $R$  bilden.
2. Es sei  $R$  ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu  $R$  bezeichnen wir mit  $\text{Quot}(R)$ . Lokalisieren wir  $R$  nach  $\mathfrak{p}$ , so erhalten wir den Ring  $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \text{Quot}(R) \mid a \in R, b \notin \mathfrak{p} \right\}$ . Zeige, dass  $R_{\mathfrak{p}}$  ein lokaler Ring ist.

**Beweis.** 1. „ $\Rightarrow$ “ Ist  $R$  lokal, so ist  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $R$ .

„ $\Leftarrow$ “ Ist  $R \setminus R^\times$  ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ .

2. Wir zeigen  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , dann folgt die Behauptung mit 1.

„ $\subseteq$ “ Es sei

$$h = p_1 \frac{s_1}{t_1} + \dots + p_n \frac{s_n}{t_n}.$$

Setze

$$\begin{aligned} z_1 &:= p_1 s_1 t_2 \dots t_n + p_2 s_2 t_1 t_3 \dots t_n + p_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \\ z_0 &:= t_1 \dots t_n, \end{aligned}$$

so ist  $h = \frac{z_1}{z_0}$ . Wäre  $h \in R_{\mathfrak{p}}^\times$ , sagen wir  $\frac{s}{t}$  sein Inverses, so müsste gelten  $z_1 s = z_0 t$ . Die linke Seite jedoch ist in  $\mathfrak{p}$ , die rechte nicht. Damit ist  $h \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ .

„ $\supseteq$ “ Sei  $\frac{s}{t} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , so ist  $s \frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ . □

**Beispiel 1.18.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . Dann ist  $\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$  ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty \setminus (\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da  $[f]$  eine Einheit ist, genau dann, wenn  $f(x_0) \neq 0$ : Ist  $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) \neq 0$ , so existiert  $W \subset U$  offen,  $x_0 \in W$  mit  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in W$ . Damit folgt

$$\left[ \frac{1}{f} : W \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} \right] \in \mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$$

ist Inverses zu  $[f]$ . Zudem ist  $\mathfrak{m}$  ein Ideal.

### Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O}_X)$  bestehend aus:

- einem topologischen Raum  $X$  und
- einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  auf  $X$  von Ringen,

so dass  $\mathcal{O}_{X,x_0}$  für alle  $x_0 \in X$  ein lokaler Ring ist.

Man nennt  $\mathcal{O}_X$  die *Strukturgarbe von*  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Ist  $x_0 \in X$ , so hat man das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0} \triangleleft \mathcal{O}_{X,x_0}$ .

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von*  $x_0$  *in*  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

**Beispiel 1.20.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ , so ist  $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$ .

### Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel  $(\mathbb{R}, C_{\mathbb{R}}^\infty)$  bestehend aus  $\mathbb{R}$  und der Garbe der  $C^\infty$ -Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass  $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty$  für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0}$  angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$ .
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass  $\mathbb{C}$  mit der Garbe der holomorphen Funktionen  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  eine lokal geringter Raum ist und dass  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt.



*Beweis.* 1. Es gilt

$$\begin{aligned} [f : U \rightarrow \mathbb{R}] \in (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times &\Leftrightarrow \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit } f|_{U \cap V} \neq 0 \forall x \in U \cap V \\ &\Leftrightarrow f(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Also  $[f] \in C_{\mathbb{R},x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ . Damit ist  $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R},x_0}^\infty)^\times$  ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto f(x_0), \end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

### Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind  $R, S$  lokale Ringe mit den maximalen Idealen  $\mathfrak{m}_R \triangleleft R, \mathfrak{m}_S \triangleleft S$ , so heißt der Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

### Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus*  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  *lokal geringter Räume* ist ein Paar  $(f, f^\#)$  bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von  $f^\#$  induzierte Ringhomomorphismus für  $x_0 \in X, y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\# : \mathcal{O}_{Y,y_0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X,x_0} \\ [s] &\mapsto [f_U^\#(s)] \end{aligned}$$

für  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$  und  $y_0 \in U$  ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

**Bemerkung 1.23.** In Definition 1.22 ist  $f_{x_0}^\#$  wohldefiniert:

Sei  $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$ , d.h. es existiert  $W \subset Y$  offen mit  $y_0 \in W$  und  $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$ . Betrachte nun  $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$  für  $s \in \mathcal{O}_Y(U), U \subset Y, y_0 \in U$  und analog  $f_V^\#(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  für  $t \in \mathcal{O}_Y(V), V \subset Y, y_0 \in V$ . Da  $f^\#$  ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} s \in \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) & \ni & f_U^\#(s) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{f_W^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ t \in \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) & \ni & f_V^\#(t) \end{array}$$

# Affine Schemata

## 2.1 Spec $A$ als topologischer Raum

Sei im Folgenden  $A$  ein kommutativer Ring mit 1 und  $\text{Spec } A := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ .

### Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec } A.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \text{Spec } A \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft A : U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf  $\text{Spec } A$  definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

**Beweis (der Topologie-Eigenschaften).** 1. Zeige:  $\emptyset, \text{Spec } A$  offen  $\iff \text{Spec } A, \emptyset$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(A) = \emptyset, V((0)) = \text{Spec } A$

2. Zeige:  $U_1, U_2$  offen  $\Rightarrow U_1 \cap U_2$  offen  $\iff M_1, M_2$  abgeschlossen  $\Rightarrow M_1 \cup M_2$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

3.  $(U_i)_{i \in I}$  offen  $\Rightarrow \cup_{i \in I} U_i$  offen  $\iff (M_i)_{i \in I}$  abgeschlossen  $\Rightarrow \cap_{i \in I} M_i$  abgeschlossen.

Dazu:  $\cap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

□

**Bemerkung 2.2.** Die abgeschlossenen Teilmengen  $M \subset \text{Spec } A$  sind genau die  $M = V(\mathfrak{a})$  für ein  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ .

**Beispiel 2.3 (Spec  $\mathbb{Z}$ ).** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$  ist  $\mathfrak{a} = (a)$ . Falls  $a \neq 0, 1, -1$  sei  $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$  die Primfaktorzerlegung. Für  $p$  Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \iff (a) \subseteq (p) \iff p \mid a \iff p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  sind genau die Mengen  $\emptyset, \text{Spec } \mathbb{Z}$  und  $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

**Lemma 2.4.** Sei  $x \in \text{Spec } A$ , so ist der Abschluss  $\overline{\{x\}}$  der Menge  $\{x\}$  in  $\text{Spec } A$  gleich

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

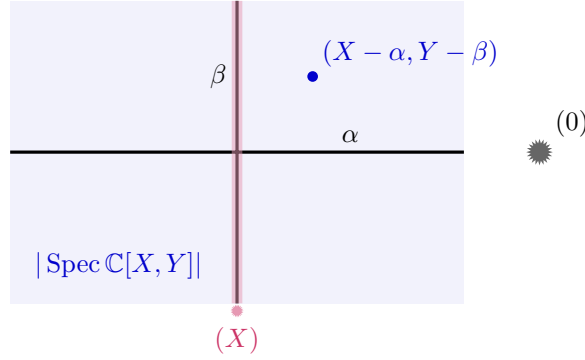
**Beweis.**

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \text{Spec } A \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \triangleleft A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} B = V(x)$$

□

**Bemerkung 2.5.** Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: Spec  $\mathbb{C}[X, Y]$ **Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $x \in X$  heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ .

Er heißt *generischer Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = X$  gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit  $|X|$ .

**Beispiel 2.7.** Sei  $A = \mathbb{C}[X, Y]$ .

- $x = (0) \in \text{Spec } A$  ist generisch.
- $x = (X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft A$  ist abgeschlossen, da aus  $x \triangleleft A$  maximal  $V(x) = \{x\}$  und somit  $x$  abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \triangleleft A$  ist weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

**Definition 2.8 (basisoffene Menge).**

Für  $f \in A$  nennt man

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die zu  $f$  gehörige *basisoffene Menge*.

**Lemma 2.9.** Die Menge  $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$  ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene  $U \subseteq \text{Spec } A$  ist eine Vereinigung von  $D(f) \in \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})$  offen und  $\mathfrak{p} \in U$ , so ist  $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ , also  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ . Damit existiert  $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  mit  $f \notin \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{p} \in D(f)$  und  $f \in \mathfrak{a}$ . Also  $(f) \subseteq \mathfrak{a}$  und  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$ . Damit folgt  $D(f) \subseteq U$ .

Zusammenfassend gilt für  $U \subseteq \text{Spec } A$  offen:  $\forall \mathfrak{p} \in U \exists f \mathfrak{p} \in A: \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$ . Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f_{\mathfrak{p}})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ . □

**Lemma 2.10.** Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

*Beweis.* Es ist  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ . Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ , d.h.  $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus (V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$ , also  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  aber nicht  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also existiert  $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  und  $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Damit ist  $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette.  $\square$

### Definition 2.11 (Radikal).

Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von  $\mathfrak{a}$ .

### Lemma 2.12. $\sqrt{\mathfrak{a}} \triangleleft A$ .

*Beweis.* •  $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  ✓

- Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in A$ . Dann  $f^n \in \mathfrak{a}, r \in A$ . Also  $(rf)^n \in \mathfrak{a}$  und damit  $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  mit  $f^n \in \mathfrak{a}, g^m \in \mathfrak{a}$ .

$$\begin{aligned} (f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i} \right) g^m + \left( \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i} \right) f^n \end{aligned}$$

Da  $g^m$  und  $f^n$  jeweils in  $\mathfrak{a}$  liegen, ist auch die Summe dort.  $\square$

### Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).

Ein Ideal  $\mathfrak{b} \triangleleft A$  heißt Radikalideal (radiziell), falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

**Bemerkung 2.14.** Es gilt  $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

**Lemma 2.15.** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “ Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, f^n \in \mathfrak{a}$ . Ist  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ , d.h.  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also  $f^n \in \mathfrak{p}$  und da  $\mathfrak{p}$  prim, folgt  $f \in \mathfrak{p}$ .

„ $\supseteq$ “ Ist  $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so zu zeigen, dass  $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ . Sei also  $f^n \notin \mathfrak{a}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \triangleleft A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$ ,
- $M$  ist angeordnet durch „ $\subseteq$ “,

– ist  $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$  eine total geordnete Teilmenge, so ist  $\mathfrak{b} := \cup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \triangleleft A$  mit  $\mathfrak{b} \in M$ .

Damit hat  $M$  mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element  $\mathfrak{b}_{\max} \in M$ .

Nun sei behauptet, dass  $\mathfrak{b}_{\max} \triangleleft A$  ein Primideal ist. Dazu sei  $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$ , wobei wir annehmen, dass  $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . Betrachte  $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$ , was ein Ideal in  $A$  ist, aber nicht in  $M$  liegt. Analog können wir dies von  $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$  sagen. Damit existieren  $n, m \in \mathbb{N}$  mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \quad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von  $\mathfrak{b}_{\max}$  ist und wir folgern  $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$ , wodurch man den Widerspruch erhält.

Damit ist  $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$  und  $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . □

### Satz 2.16.

Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Aus  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$  folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt  $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$ .

„ $\Rightarrow$ “ Aus  $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , d.h.  $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ , folgt  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . Also  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . □

### Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist  $X = A_1 \cup A_2$ ,  $A_{1,2} \subseteq X$  abgeschlossen, so ist  $X = A_1$  oder  $X = A_2$ .

Eine Teilmenge  $Z \subseteq X$  heißt *irreduzibel*, wenn  $Z$  mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

**Beispiel 2.18.**  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist irreduzibel. Ist nämlich  $A_1 \subsetneq \text{Spec } \mathbb{Z}$  abgeschlossen, so ist  $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für irgendwelche Primzahlen  $p_i$ .

**Lemma 2.19.** In  $\text{Spec } A$  gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so ist  $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und mit Satz 2.16  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ .

Für  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ , gilt: Ist  $xy \in \mathfrak{p}$ , so folgt  $x \in \mathfrak{p}$  oder  $y \in \mathfrak{p}$ . Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y))).$$

Da  $V(\mathfrak{a})$  irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$ . Wieder mit Satz 2.16 folgt  $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und damit  $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

„ $\Leftarrow$ “ Schreibe  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ . Dann folgt wiederum mit Satz 2.16  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$ .

Ist  $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$ , also  $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$ , also  $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$ , so existiert  $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Für  $y \in \mathfrak{c}$ , ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  Primideal, also nach Wahl von  $x$  ist  $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Insgesamt ist  $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$  und damit  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$ .  $\square$

### Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\text{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von  $A$ .

**Korollar 2.21.** *Es gilt*

$$\text{Spec } A \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* Lemma 2.19 mit  $\mathfrak{a} = (0)$ .  $\square$

### Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, so existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_i = A_{i+1}$  für alle  $i \geq n_0$ .

**Lemma 2.23.** *Ist  $A$  noethersch, so ist auch  $\text{Spec } A$  noethersch.*

*Beweis.* Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit  $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$  für geeignete  $\mathfrak{a}_i \in \text{Spec } A$ , so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in  $A$ .  $\square$

### Satz 2.24.

*Ist  $X$  noethersch topologischer Raum und  $\emptyset \neq A \subseteq X$  abgeschlossen, so zerlegt sich*

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

*in abgeschlossene irreduzible Teilmengen  $A_i \subseteq A$ . Nimmt man  $A_i \not\subseteq A_j$  für  $i \neq j$ , so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.*

*Die  $A_i$  heißen Komponenten von  $A$ .*

**Beweis.** Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ , so hätte man ein inklusionsminimales  $A \in \mathcal{V}$ , denn falls nicht gäbe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit  $A_i \in \mathcal{V}$ . Da  $X$  noethersch, müsste diese Folge stationär werden, wodurch man einen Widerspruch erhält.

Dieses  $A \in \mathcal{V}$  hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da  $A \in \mathcal{V}$  minimal sind  $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$ . Aber damit ist  $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$ . Ein Widerspruch, der wie gewünscht  $\mathcal{V} = \emptyset$  liefert.

**Eindeutigkeit.** Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist  $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$ , also  $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$ . Da  $A_1$  irreduzibel können wir oBdA  $A_1 = A_1 \cap A'_1$  annehmen. Also ist  $A_1 \subseteq A'_1$ .

Analog ist  $A'_1 \subseteq A_k$  für ein  $k = 1, \dots, r$ . Zusammenfassend gilt

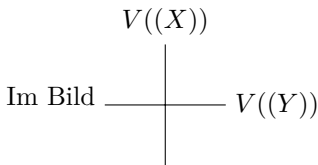
$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

was nach Voraussetzung  $k = 1$  impliziert. Also  $A_1 = A'_1$ .

Nun sukzessive weiter. □

**Beispiel 2.25.** In  $\text{Spec } k[X, Y]$  zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$



**Beispiel 2.26.** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Betrachte  $\text{Spec } k[X, Y]$ . Die maximalen Ideale sind gerade  $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$  für  $\alpha, \beta \in k$ . Ein abgeschlossener Punkt  $\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y]$  wird eindeutig durch  $(\alpha, \beta) \in k^2$  gegeben.

Quelle suchen!

$\mathbb{A}_k^2 := \text{Spec } k[X, Y]$  wird der 2 dimensionale affine Raum über  $k$  genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

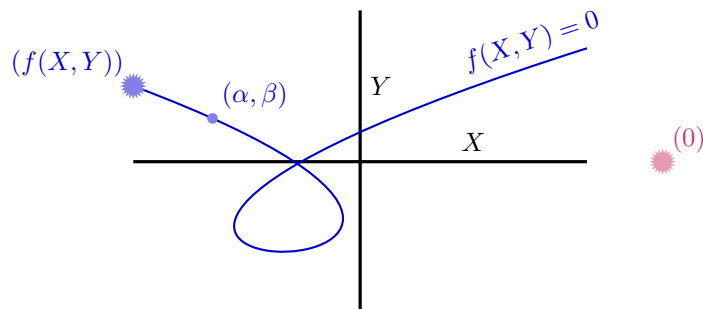
Eine abgeschlossene Teilmenge  $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$  liefert

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned} A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\ &= \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\} \\ &\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ ist klar. Also zu „ $\Leftarrow$ “:  
Es ist  $f(\alpha, \beta) = 0$ , also  $f(X, Y) = (X - \beta)h(X, Y)$  für gewisses  $h$ . Es ist  $f(X, Y) - f(\alpha, Y) = (X - \alpha)g(X, Y)$ , da die linke Seite  $X - \alpha$  als Nullstelle hat.

Abbildung 2:  $\text{Spec } k[X, Y]$ 

In  $\mathbb{A}_k^2$  hat man aber noch mehr Punkte: Sei  $\mathfrak{p} \triangleleft k[X, Y]$  Primideal, aber nicht maximal, so ist  $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$  kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise  $\mathfrak{p} = (f(X, Y))$  für  $f \in k[X, Y]$  irreduzibel, so liegen alle  $(\alpha, \beta) \in k^2$  mit  $f(\alpha, \beta) = 0$  auf der entsprechenden Menge in  $k^2$ , d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X, Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} := (X - \alpha, Y - \beta) \Rightarrow \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

**Lemma 2.27.** Ist  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \in \text{Spec } A$  und  $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  die Projektion, so ist

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \text{Spec } A/\mathfrak{a} &\rightarrow \text{Spec } A \\ \bar{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\cong]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec } A.$$

*Beweis.*

**Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist  $X = \bigcap_{i \in I} U_i$ ,  $U_i$  offen, so existiert eine endliche Teilmenge  $F \subset I$  mit  $X = \bigcap_{i \in F} U_i$ .

$X$  heißt *kompakt*, wenn  $X$  hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

**Satz 2.29.**

Ist  $A$  ein Ring, so ist  $\text{Spec } A$  quasi-kompakt.

*Beweis.* Wir zeigen: Ist  $\emptyset = \bigcap_{i \in I} Z_i$  für abgeschlossene  $Z_i$ , so existiert  $F \subset I$  endlich mit  $\emptyset = \bigcap_{i \in F} Z_i$ .

Sei also  $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$ ,  $\mathfrak{a}_i \triangleleft A$  und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i},$$



also insbesondere  $1 \in \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i}$  und  $1 \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ . Ergo

$$1 = a_{i_1} + \dots + a_{i_r},$$

für  $F := \{i_1, \dots, i_r\} \subset I$ . Nun ist  $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}$ , also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^r V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

## 2.2 Spec $A$ als lokal geringter Raum

Wir wollen  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  als die „guten Funktionen“ auf  $\text{Spec } A$  auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

### Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei  $A$  ein Ring, dann heißt  $S \subseteq A$  *multiplikative Teilmenge*, wenn  $1 \in S$  und aus  $a, b \in S$  auch  $ab \in S$  folgt.

Die *Lokalisierung*  $A_S$  oder  $A[S^{-1}]$  von  $A$  bezüglich  $S$  ist der Ring

$$A_S := (A \times S) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

Schreibe  $\frac{a}{s} := [(a, s)]$  und definiere eine Ringstruktur auf  $A_S$  durch Bruchrechnen.

**Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).** *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $S \subseteq A$  wie in Definition 2.30,  $\varphi : A \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so dass  $\varphi(S) \subseteq R^\times$ , so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \\ & & R \end{array}$$

*kommutativ macht, wobei  $\iota : A \rightarrow A_S$ ,  $a \mapsto \frac{a}{1}$ .*

**Beweis.** Klar, weil dieses  $\psi : A_S \rightarrow R$  durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

**Beispiel 2.32.** •  $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $f \in A$  fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A.$

$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ .

### Satz 2.33.

Sei  $X = \operatorname{Spec} A$ . Dann existiert auf  $X$  eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe  $\mathcal{O}_X$  mit:

- i) Es existiert ein Ringhomomorphismus  $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X).$
- ii) Für  $f \in A$  betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \rightarrow & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)|_{D(f)}. \end{array}$$

Dann ist  $\varphi(f)|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$  eine Einheit und der eindeutig durch

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_f \\ \cong \downarrow \varphi & \searrow & \downarrow \varphi_f \exists! \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\cdot|_{D(f)}} & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{array}$$

gegebene Ringhomomorphismus  $\varphi_f$  ist ein Isomorphismus.

- iii) Für  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$  hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array}$$

und  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$  ist ein Isomorphismus.

### 2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

#### Definition 2.34 ( $\mathfrak{B}$ -(Prä)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Prägarbe auf  $X = \operatorname{Spec} A$ , wenn  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf

$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$

ist.

$\mathcal{F}$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Garbe, wenn  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Prägarbe ist und die Garbenbedingungen für die  $D(f)$  erfüllt sind.

**Hilfslemma 2.35.** Es gilt:

1.  $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$  ist eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe.
2. Ist  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe  $\bar{\mathcal{F}}$  auf  $X$  mit  $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$  für alle  $D(f) \in \mathfrak{B}$ .

*Beweis.* 1.

TODO

### Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der zu einem  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h.  $X = \cup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \subseteq X$  offen und  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  ist ein affines Schema.

**Bemerkung 2.37.** Beachte dabei: Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ ,  $U \subseteq X$  offen, so ist durch

$$\mathcal{F}|_U : V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe  $\mathcal{F}|_U$  auf  $U$  definiert.

### Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus der lokal geringten Räume

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

**Bemerkung 2.39.** Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ring} & \rightarrow & \mathbf{Sch}^{\text{aff}} \\ A & \mapsto & (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{ccc} f : \text{Spec } B & \rightarrow & \text{Spec } A, \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B}.$$

Letzterer ist für  $g \in A$  gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{D(g)} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(g)) = A_g & \rightarrow & (f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B})(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{a}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{q}} \\ \frac{a}{\gamma} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ,  $\gamma \notin \mathfrak{p}$  (also  $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$ ) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

# Beispiele

---

3

# Eigenschaften von Schemata

---

# 4

# Tensorprodukt

---

# 5

## Glatt, regulär & normal

---

# 6

# k-Varietät

---

7



# Der Punktefunktor

---

# 8