

Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg

Maximilian Huber

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

19. März 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Lokal geringte Räume	4
1.1	Garben	4

Lokal geringte Räume

1

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* \mathcal{F} auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über U* .

Bei mir steht hier
im Skript $s|_U$.
Offenbar ein Fehler!?

Beispiel 1.1.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U), f \mapsto f|_U$.

Bemerkung 1.2. Ist **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbf{Top}_X &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ (U \rightarrow V) &\mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{aligned}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbf{Top}_X^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ (V \rightarrow U) &\mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.2 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren \mathcal{F} und \mathcal{G} , d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Definition 1.3 (Garbe).

Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X heißt *Garbe*, falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

Bemerkung 1.3. \mathcal{F} ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s \longmapsto & & (s|_{U_i})_{i \in I} & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & (s_i)_{i \in I} \longmapsto & & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.4. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.5. Sei M eine \mathbb{C} Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier
naiv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: