Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg **Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

9. April 2013

Inhaltsverzeichnis

Lokal geringte Räume 1

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe). Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)\,,$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho_{UV}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{UW}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\rho_{VW}"] & \mathcal{F}(W) \end{tikzcd}$$

Bei mir steht hier im Skript $s\big|_U$. Offenbar ein Fehler!?

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s\big|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über* U.

Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}^\circ_X : U \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid \; f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}^\circ_X(V) \mapsto \mathcal{C}^\circ_X(U)$, $f \mapsto f\big|_U$.

Bemerkung 1.3. Ist $\mathbf{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U,V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \to V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (U \to V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \\ & (V \to U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U) \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[u] & \mathcal{G}(V) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.5 (Garbe).

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *Garbe*, falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s\big|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit
$$s_i\big|_{U_i \cap U_j} = s_j\big|_{U_i \cap U_j} \qquad \forall i, j,$$
so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit
$$s_i = s\big|_{U_i} \qquad \forall i.$$

Bemerkung 1.6. $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto \left(s\big|_{U_i}\right)_{i \in I}$$

$$(s_i)_{i \in I} \longmapsto \left(s_i\big|_{U_i \cap U_j} - s_j\big|_{U_i \cap U_j}\right)_{(i,j) \in I^2}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.7. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}^\infty_M : U \mapsto \mathcal{C}^\infty_M(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in \mathrm{C}^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.8. Sei M eine $\mathbb{C}$ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}} : U \mapsto \mathcal{O}^\times_{\mathbb{C}}(U) := \{f : U \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times_C, \; f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier naiv??

$$\mathcal{H} := \mathrm{im}^{\mathrm{naiv}}(\exp) : U \mapsto \mathrm{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \to \mathbb{C} \mid f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \tfrac{1}{2} < |z| < \tfrac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$
$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \to \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden U_i problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \to \mathbb{C})\big|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \to \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum X bezeichne

$$\mathbf{PSh}_X := \text{die Kategorie der Prägarben auf } X,$$
$$\mathbf{Sh}_X := \text{die Kategorie der Garben auf } X, \text{ wobei } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Bemerkung 1.10. Man hat den Inklusionsfunktor

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{PSh}_X, \; \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist $\mathcal{F}$ eine (Prä)Garbe auf X und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim$$

mit

$$s \sim t \;:\Leftrightarrow\; \exists W \subset X \text{ offen}: \; x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s\big|_W = t\big|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von $\mathcal{F}$ bei x_0*.

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei x_0*.

Beispiel 1.12. $(\mathcal{C}^\infty_M)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f\big|_W = g\big|_W\}$

Beispiel 1.13.

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{C},x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius}\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).

1. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einen topologischen Raum X. Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Für $r \in \mathcal{F}(U)$, $x_0 \in U$ bezeichne r_{x_0} den Keim $[r]$ von $\mathcal{F}$ bei x_0. Es seien nun $s, t \in \mathcal{F}(U)$, für die $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$ gelte. Zeige, dass $s = t$.
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

Beweis.

1. Für alle $x_0 \in U$ existieren offene U_{x_0} mit $s\big|_{U_{x_0} \cap U} = t\big|_{U_{x_0} \cap U}$ nach Definition der Keime. Es ist $U = \cap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$, also folgt nach erster Garbenbedingung $s = t$.
2. Wähle $X = \{0, 1\}$ mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$2\big|_{\{0\}} = 5\big|_{\{0\}}$$
$$2\big|_{\{1\}} = 5\big|_{\{1\}}$$

aber $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$. □

Definition 1.14 (push-forward).

Ist $f : X \to Y$ stetig und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward von $\mathcal{F}$*.

1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

$$\mathbf{Ring} := \text{ Kategorie der kommuativen Ringe mit 1}$$

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ring}.$$

Definition 1.15 (lokaler Ring).

Sei R ein Ring. Dann heißt R *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel 1.16. $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$

Bemerkung 1.17. Ist R lokaler Ring und $\mathfrak{m} \lhd R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).

1. Es sei R ein kommutativer Ring und $R^\times$ seine Einheitengruppe. Zeige, dass R genau dann lokal ist, wenn $R \setminus R^\times \lhd R$ gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ein Ideal in R bilden.
2. Es sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu R bezeichen wir mit $\mathrm{Quot}(R)$. Lokalisieren wir R nach $\mathfrak{p}$, so erhalten wir den Ring $R_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R) \mid a \in R,\ b \notin \mathfrak{p}\}$. Zeige, dass $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist.

Beweis. 1. „$\Rightarrow$“ Ist R lokal, so ist $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R.

„$\Leftarrow$“ Ist $R \setminus R^\times$ ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei $\mathfrak{m} \lhd R$ ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$.

2. Wir zeigen $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$, dann folgt die Behauptung mit 1.

„$\subseteq$“ Es sei
$$h = p_1\frac{s_1}{t_1} + \ldots + p_n\frac{s_n}{t_n}.$$
Setze
$$\begin{aligned} z_1 &:= p_1s_1t_2\ldots t_n + p_2s_2t_1t_3\ldots t_n + p_ns_nt_1\ldots t_{n-1} \\ z_0 &:= t_1\ldots t_n, \end{aligned}$$
so ist $h = \frac{z_1}{z_0}$. Wäre $h \in R_\mathfrak{p}^\times$, sagen wir $\frac{s}{t}$ sein Inverses, so müsste gelten $z_1s = z_0t$. Die linke Seite jedoch ist in $\mathfrak{p}$, die rechte nicht. Damit ist $h \in R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$.

„$\supseteq$“ Sei $\frac{s}{t} \in R_\mathfrak{p} \setminus R_\mathfrak{p}^\times$, so ist $s\frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. □

Beispiel 1.18. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$ ein lokaler Ring, denn
$$\mathcal{C}^\infty_{M,x_0} \setminus \left(\mathcal{C}^\infty_{M,x_0}\right)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$
da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt
$$\left[\frac{1}{f} : W \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}\right] \in \mathcal{C}^\infty_{M,x_0}$$
ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal.

Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus:

- einem topologischen Raum X und
- einer Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X von Ringen,

so dass $\mathcal{O}_{X,x_0}$ für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt $\mathcal{O}_X$ die *Strukturgarbe von* $(X, \mathcal{O}_X)$. Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \lhd \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper
$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}$$
heißt *Restklassenkörper von* x_0 *in* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Beispiel 1.20. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel $(\mathbb{R}, C^\infty_\mathbb{R})$ bestehend aus $\mathbb{R}$ und der Garbe der C^∞-Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass $C^\infty_{\mathbb{R},x_0}$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal $\mathfrak{m}_{x_0}$ angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C^\infty_{\mathbb{R},x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$.
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass $\mathbb{C}$ mit der Garbe der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ eine lokal gerinter Raum ist und dass $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0}/\mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis. 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
[f : U \to \mathbb{R}] \in (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit} f\big|_{U \cap V} \neq 0 \ \forall x \in U \cap V \\
&\Leftrightarrow \quad f(x_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

Also $[f] \in C^\infty_{\mathbb{R},x_0} \setminus (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times$ genau dann, wenn $f(x_0) = 0$. Damit ist $C^\infty_{\mathbb{R},x_0} \setminus (C^\infty_{\mathbb{R},x_0})^\times$ ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}
\varphi : \ C^\infty_{\mathbb{R},x_0} &\to \mathbb{R} \\
[f] &\mapsto f(x_0),
\end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind R, S lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \lhd R$, $\mathfrak{m}_S \lhd S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned}
f : X \to Y &\text{ stetig,} \\
f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X &\text{ Morphismus von Garben auf } Y,
\end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned}
f^\#_{x_0} : \ \mathcal{O}_{Y,y_0} &\to \mathcal{O}_{X,x_0} \\
[s] &\mapsto [f^\#_U(s)]
\end{aligned}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 1.23. In Definition 1.22 ist $f^\#_{x_0}$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y,y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s\big|_W = t\big|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f^\#_U(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, $U \subset Y$, $y_0 \in U$ und analog $f^\#_V(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V)$, $V \subset Y$, $y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^\#_U"] \arrow[d, "|_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "|_{f^{-1}(W)}"] & \ni & f^\#_U(s) \arrow[d, mapsto] \\
s\big|_W = t\big|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "f^\#_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \ni & f^\#_U(s)\big|_{f^{-1}(W)} = f^\#_V(t)\big|_{f^{-1}(W)} \\
t \arrow[u, mapsto] & \in & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^\#_W"] \arrow[u, "|_W"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[u, "|_{f^{-1}(W)}"'] & \ni & f^\#_V(t) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Affine Schemata 2

2.1 $\operatorname{Spec} A$ als topologischer Raum

Sei im Folgenden A ein kommutativer Ring mit 1 und $\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \lhd A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist $\mathfrak{a} \lhd A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \operatorname{Spec} A\,.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \operatorname{Spec} A \mid \exists\, \mathfrak{a} \lhd A: \; U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definiert. Sie heiüt *Zariski-Topologie*.

Beweis (der Topologie-Eigenschaften).

1. Zeige: $\emptyset$, $\operatorname{Spec} A$ offen $\iff$ $\operatorname{Spec} A$, $\emptyset$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$
2. Zeige: U_1, U_2 offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen $\iff M_1, M_2$ abgeschlossen $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ abgeschlossen.
   Dazu: $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$
3. $(U_i)_{i\in I}$ offen $\Rightarrow \cup_{i\in I} U_i$ offen $\iff (M_i)_{i\in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \cap_{i\in I} M_i$ abgeschlossen.
   Dazu: $\cap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i)$

□

Bemerkung 2.2. Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \operatorname{Spec} A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \lhd A$.

Beispiel 2.3 ($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$). Für $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für p Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \Leftrightarrow (a) \subseteq (p) \Leftrightarrow p \mid a \Leftrightarrow p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

Lemma 2.4. *Sei $x \in \operatorname{Spec} A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\operatorname{Spec} A$ gleich*

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

Beweis.

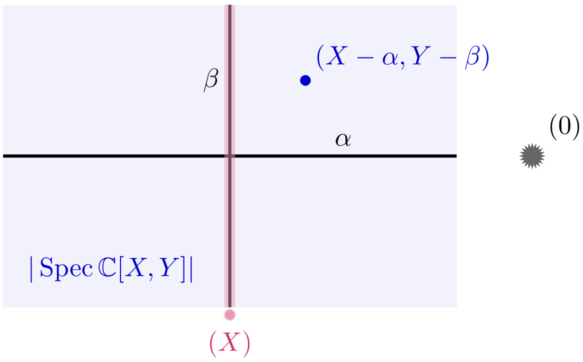
$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \operatorname{Spec} A \text{ abg.} \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \lhd A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} = V(x)$$

□

Bemerkung 2.5. Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: Spec $\mathbb{C}[X, Y]$



Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).

Sei X ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heiüt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Er heiüt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

Beispiel 2.7. Sei $A = \mathbb{C}[X, Y]$.

- $x = (0) \in \operatorname{Spec} A$ ist generisch.
- $x = (X-\alpha, Y-\beta) \lhd A$ ist abgeschlossen, da aus $x \lhd A$ maximal $V(x) = \{x\}$ und somit x abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \lhd A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.

Wir künnen die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

Definition 2.8 (basisoffene Menge).

Für $f \in A$ nennt man
$$D(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$
die *zu f gehürige basisoffene Menge*.

Lemma 2.9. *Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ ist eine Vereinigung von $D(f) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ offen und $\mathfrak{p} \in U$, so ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Damit existiert $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$ und $f \in \mathfrak{a}$. Also $(f) \subseteq \mathfrak{a}$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. Damit folgt $D(f) \subseteq U$.

Zusammenfassend gilt für $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ offen: $\forall \mathfrak{p} \in U\ \exists f\mathfrak{p} \in A$: $\mathfrak{p} \in D(f\mathfrak{p}) \subseteq U$. Also
$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f\mathfrak{p})$$
Ferner folgt mit Lemma 2.10 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. $\square$

Lemma 2.10. *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ gilt*
$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, d.h. $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus \big(V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})\big)$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ aber nicht $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Also existiert $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Damit ist $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette. □

Definition 2.11 (Radikal).

Für $\mathfrak{a} \lhd A$ heiüt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von $\mathfrak{a}$.

Lemma 2.12. $\sqrt{a} \lhd A.$

Beweis.
- $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ ✓
- Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $r \in A$. Dann $f^n \in \mathfrak{a}$, $r \in A$. Also $(rf)^n \in \mathfrak{a}$ und damit $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}$, $g^m \in \mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned}(f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i}\right) g^m + \left(\sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i}\right) f^n\end{aligned}$$

Da g^m und f^n jeweils in $\mathfrak{a}$ liegen, ist auch die Summe dort. □

Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).

Ein Ideal $\mathfrak{b} \lhd A$ heiüt *Radikalideal (radiziell)*, falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

Bemerkung 2.14. Es gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 2.15. *Für $\mathfrak{a} \lhd A$ gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

Beweis. „$\subseteq$“ Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $f^n \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also $f^n \in \mathfrak{p}$ und da $\mathfrak{p}$ prim, folgt $f \in \mathfrak{p}$.

„$\supseteq$“ Ist $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, so zu zeigen, dass $f \notin \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. Sei also $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \lhd A \mid a \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$,
- M ist angeordnet durch „$\subseteq$“,

– ist $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $\mathfrak{b} := \cup_{i\in I}\mathfrak{b}_i \lhd A$ mit $\mathfrak{b} \in M$.

Damit hat M mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\mathfrak{b}_{\max} \in M$.

Nun sei behauptet, dass $\mathfrak{b}_{\max} \lhd A$ ein Primideal ist. Dazu sei $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$, wobei wir annehmen, dass $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$. Betrachte $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$, was ein Ideal in A ist, aber nicht in M liegt. Analog können wir dies von $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$ sagen. Damit existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \qquad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von $\mathfrak{b}_{\max}$ ist und wir folgern $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$, wodurch man den Widerspruch erhült.

Damit ist $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$ und $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$. □

Satz 2.16.

Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd A$ *gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. „$\Leftarrow$“ Aus $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$.

„$\Rightarrow$“ Aus $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, d.h. $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})}\mathfrak{p}$, folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. □

Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum X heiüt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = A_1 \cup A_2$, $A_{1,2} \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X = A_1$ oder $X = A_2$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heiüt *irreduzibel*, wenn Z mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

Beispiel 2.18. Spec $\mathbb{Z}$ ist irreduzibel. Ist nümlich $A_1 \subsetneq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ abgeschlossen, so ist $A_1 = \{(p_1), \ldots, (p_r)\}$ für irgendwelche Primzahlen p_i.

Lemma 2.19. *In* Spec A *gilt:*

$$V(\mathfrak{a}) \textit{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \textit{ Primideal.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und mit Satz 2.16 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$.

Für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$, gilt: Ist $xy \in \mathfrak{p}$, so folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \;\Rightarrow\; V(\mathfrak{a}) = \big(V(\mathfrak{a}) \cap V((x))\big) \cup \big(V(\mathfrak{a}) \cap V((y))\big).$$

Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$. Wieder mit Satz 2.16 folgt $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und damit $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

„⇐“ Schreibe $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$. Dann folgt wiederum mit Satz 2.16 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$.

Ist $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$, also $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$, also $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$, so existiert $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für $y \in \mathfrak{c}$, ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ Primideal, also nach Wahl von x ist $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Insgesamt ist $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$ und damit $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$. □

Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heiüt *Nilradikal* von A.

Korollar 2.21. *Es gilt*

$$\operatorname{Spec} A \textit{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Nil}(A) \textit{ Primideal.}$$

Beweis. Lemma 2.19 mit $\mathfrak{a} = (0)$. □

Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heiüt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlosser Teilmengen, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$.

Lemma 2.23. *Ist A noethersch, so ist auch* $\operatorname{Spec} A$ *noethersch.*

Beweis. Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für geeignete $\mathfrak{a}_i \in \operatorname{Spec} A$, so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in A. □

Satz 2.24.

Ist X noetherschscher topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen, so zerlegt sich

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$$

in abgeschlosse irreduzible Teilmengen $A_i \subseteq A$. Nimmt man $A_i \not\subseteq A_j$ für $i \neq j$, so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.

Die A_i heiüen Komponenten *von A.*

Beweis. Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen $\mathcal{V} \neq \emptyset$, so hütte man ein inklusionsminimales $A \in \mathcal{V}$, denn falls nicht gübe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit $A_i \in \mathcal{V}$. Da X noethersch, müsste diese Folge stationür werden, wodurch man einen Widerspruch erhült.

Dieses $A \in \mathcal{V}$ hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da $A \in \mathcal{V}$ minimal sind $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$. Aber damit ist $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$. Ein Widerspruch, der wie gewünscht $\mathcal{V} = \emptyset$ liefert.

Eindeutigkeit. Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$, also $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$. Da A_1 irreduzibel künnen wir oBdA $A_1 = A_1 \cap A'_1$ annehmen. Also ist $A_1 \subseteq A'_1$.

Analog ist $A'_1 \subseteq A_k$ für ein $k = 1, \dots, r$. Zusammenfassend gilt

$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

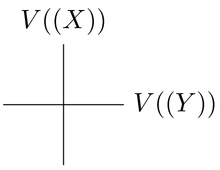
was nach Voraussetzung $k = 1$ impliziert. Also $A_1 = A'_1$.

Nun sukzessive weiter. □

Beispiel 2.25. In $\operatorname{Spec} k[X, Y]$ zerfüllt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$

Im Bild



Beispiel 2.26. Sei k algebraisch abgeschlossen. Betrachte $\operatorname{Spec} k[X, Y]$. Die maximalen Ideale sind gerade $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$ für $\alpha, \beta \in k$. Ein abgeschlosser Punkt $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} k[X, Y]$ wird eindeutig durch $(\alpha, \beta) \in k^2$ gegeben. Quelle suchen!

$\mathbb{A}^2_k := \operatorname{Spec} k[X, Y]$ wird der *2 dimensionale affine Raum über k* genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}^2_k| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ liefert

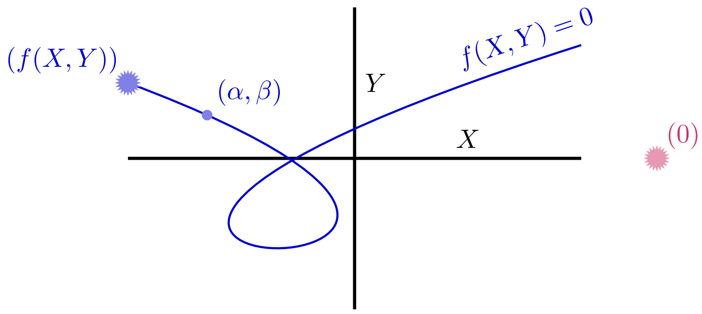
$$A \cap |\mathbb{A}^2_k| \cong_\phi \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

„⇒“ ist klar. Also zu „⇐“. Es ist $f(\alpha, \beta) = 0$, also $f(X, Y) = (X - \beta)h(X, Y)$ für gewisses h. Es ist $f(X, Y) - f(\alpha, Y) = (X - \alpha)g(X, Y)$, da die linke Seite $X = \alpha$ als Nullstelle hat.

$$\begin{aligned}
A \cap |\mathbb{A}^2_k| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}^2_k| = |V(\mathfrak{a})| \\
&= \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \ \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \lhd k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \alpha \ \Rightarrow \ f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \alpha \ \Rightarrow \ f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\
&= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\
&\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.
\end{aligned}$$

Abbildung 2: Spec $k[X,Y]$



In $\mathbb{A}_k^2$ hat man aber noch mehr Punkte: Sei $\mathfrak{p} \lhd k[X,Y]$ Primideal, aber nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$ kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise $\mathfrak{p} = (f(X,Y))$ für $f \in k[X,Y]$ irreduzibel, so liegen alle $(\alpha,\beta) \in k^2$ mit $f(\alpha,\beta) = 0$ auf der entsprechenden Menge in k^2, d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X,Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} := (X-\alpha, Y-\beta) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

Lemma 2.27. *Ist A ein Ring, $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$ und $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ die Projektion, so ist*

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} &\to \operatorname{Spec} A \\ \overline{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homüomorphismus auf sein Bild

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A.$$

Beweis.

Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).

Ein topologischer Raum X heiüt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist $X = \cap_{i\in I} U_i$, U_i offen, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset I$ mit $X = \cap_{i\in F} U_i$.

X heiüt *kompakt*, wenn X hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

Satz 2.29.

Ist A ein Ring, so ist $\operatorname{Spec} A$ *quasi-kompakt.*

Beweis. Wir zeigen: Ist $\emptyset = \cap_{i\in I} Z_i$ für abgeschlossene Z_i, so existiert $F \subset I$ endlich mit $\emptyset = \cap_{i\in F} Z_i$.

Sei also $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$, $\mathfrak{a}_i \lhd A$ und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i},$$

also insbesondere $1 \in \sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i}$ und $1 \in \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$. Ergo

$$1 = a_{i_1} + \ldots + a_{i_r},$$

für $F := \{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$. Nun ist $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{i_r}$, also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^{r} V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

2.2 Spec A als lokal geringter Raum

Wir wollen $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ als die „guten Funktionen“ auf Spec A auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei A ein Ring, dann heiüt $S \subseteq A$ *multiplikative Teilmenge*, wenn $1 \in S$ und aus $a, b \in S$ auch $ab \in S$ folgt.

Die *Lokalisierung* A_S oder $A[S^{-1}]$ von A bezüglich S ist der Ring

$$A_S := (A \times S)/\sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in S: \; u(at - bs) = 0.$$

Schreibe $\frac{a}{s} := [(a, s)]$ und definiere eine Ringstruktur auf A_S durch Bruchrechnen.

Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist $S \subseteq A$ wie in Definition 2.30, $\varphi : A \to R$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(S) \subseteq R^\times$, so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A_S \arrow[d, "\exists!"] \\ & R \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wobei $\iota : A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$.

Beweis. Klar, weil dieses $\psi : A_S \to R$ durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right)\psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

Beispiel 2.32.

- $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $f \in A$ fest.

$$A_S =: A_f := \left\{\frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A,\ b \notin \mathfrak{p} \right\}$$
ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Satz 2.33.

Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Dann existiert auf X eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ mit:

i) Es existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$.

ii) Für $f \in A$ betrachte
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(X) & \to & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)\big|_{D(f)}. \end{array}$$
Dann ist $\varphi(f)\big|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$ eine Einheit und der eindeutig durch
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] \arrow[dr] & A_f \arrow[d, "\varphi_f"', "\exists!"] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\cdot|_{D(f)}"] & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{tikzcd}$$
gegebene Ringhomomorphismus φ_f ist ein Isomorphismus.

iii) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ hat man das koanonische Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$
und $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ ist ein Isomorphismus.

2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benütigen wir noch eine Definition.

Definition 2.34 ($\mathcal{B}$-(Prü)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$ heiüt $\mathfrak{B}$-*Prügarbe* auf $X = \operatorname{Spec} A$, wenn $\mathcal{F}$ eine Prügarbe auf
$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$
ist.

$\mathcal{F}$ heiüt $\mathfrak{B}$-*Garbe*, wenn $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Prügarbe ist und die Garbenbedingungen für die $D(f)$ erfüllt sind.

Hilfslemma 2.35. Es gilt:

1. $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe.
2. Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{B}$-Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe $\bar{\mathcal{F}}$ auf X mit $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$ für alle $D(f) \in \mathfrak{B}$.

Beweis. 1.

TODO

Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der zu einem $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h. $X = \cup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $(U_i, \mathcal{O}_X\big|_{U_i})$ ist ein affines Schema.

Bemerkung 2.37. Beachte dabei: Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ offen, so ist durch

$$\mathcal{F}\big|_U : \; V \mapsto \mathcal{F}\big|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe $\mathcal{F}\big|_U$ auf U definiert.

Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus der lokal geringten Rüume

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Bemerkung 2.39. Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ring} & \to & \mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}} \\ A & \mapsto & (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{rrcl} f: & \operatorname{Spec} B & \to & \operatorname{Spec} A \\ & \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array},$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}.$$

Letzterer ist für $g \in A$ gegeben durch

$$\begin{array}{rrcl} f^{\#}_{D(g)}: & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) = A_g & \to & \big(f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}\big)(D(g)) {=} B_{\varphi(g)} \\ & \dfrac{a}{g^n} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

$$\begin{array}{rrcl} f^{\#}_{\mathfrak{p}}: & A_{\mathfrak{p}} & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{q}} \\ & \dfrac{a}{\gamma} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\gamma \notin \mathfrak{p}$ (also $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Beispiele 3

3.1 Spec $\mathbb{Z}$

Jeder Ring A hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & A \\ 1 & \mapsto & 1 \\ z & \mapsto & \begin{cases} 1+1+\ldots+1 & z>0 \\ 0 & z=0\,. \\ -1-1-\ldots-1 & z<0 \end{cases} \end{array}$$

$\mathbb{Z}$ ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ von affinen Schemata. $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist ein *finales Objekt* in der Kategorie $\mathbf{Sch}^{\mathbf{aff}}$.

Ferner können wir zusammenfassen

Offene Mengen $\emptyset \neq U \subseteq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ offen $\Leftrightarrow U = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\{(p_1),\ldots,(p_r)\}$

Basisoffene Mengen $D(f) = \{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid f\notin\mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\{(p_1),\ldots,(p_r)\}$ für $f = p_1^{\nu_1}\ldots p_r^{\nu_r}$.

Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(D(f)) = \mathbb{Z}_f = \left\{\frac{a}{f^n} \mid n\in\mathbb{N}_0, a\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z},(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \mid p\nmid b, a\in\mathbb{Z}\right\}$$

3.2 Spec k für einen Körper k

Beispiele 4

5 Eigenschaften von Schemata

Tensorprodukt 6

7 Glatt, regulär & normal

k-Varietät 8

Der Punktefunktor 9