

Vorlesungszusammenfassung

---

# Schematheorie

---

erstellt von

**Stefan Hackenberg**

**Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

**Prof. Dr. Marco Hien**

Stand

**25. Mai 2013**



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Lokal geringte Räume</b>	<b>5</b>
1.1	Garben . . . . .	5
1.2	Lokal geringte Räume . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Affine Schemata</b>	<b>11</b>
2.1	$\text{Spec } A$ als topologischer Raum . . . . .	11
2.2	$\text{Spec } A$ als lokal geringter Raum . . . . .	18
2.2.1	Beweis von Satz 2.33 . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Beispiele</b>	<b>21</b>
3.1	$\text{Spec } \mathbb{Z}$ . . . . .	21
3.2	$\text{Spec } k$ für einen Körper $k$ . . . . .	21
3.3	Der Affine $n$ -dimensionale Raum über $k$ . . . . .	23
3.4	Weiteres Beispiel . . . . .	23
3.5	Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$ . . . . .	25
3.6	Diskrete Bewertungsringe . . . . .	26
3.6.1	Beispiele . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Projektive Schemata</b>	<b>30</b>
4.1	Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie . . . . .	30
4.2	$\mathbb{P}^n(k)$ als Schema . . . . .	30
4.2.1	1. Variante . . . . .	31
4.2.2	2. Variante (Die Proj-Konstruktion) . . . . .	32
4.3	Immersionen und projektive $A$ -Schemata . . . . .	35
4.3.1	Beispiele . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Eigenschaften von Schemata</b>	<b>38</b>
5.1	Noethersch . . . . .	38
5.2	$k$ -Varietäten . . . . .	38
5.3	Reduzierte Schemata . . . . .	39
5.4	Garbifizierung . . . . .	39
5.5	Sequenzen von Garben und der Homomorphiesatz . . . . .	40
5.6	Reduzierte Schemata II . . . . .	41
5.7	Integere Schemata . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Faserprodukt</b>	<b>42</b>
6.1	Anwendungen . . . . .	42
6.1.1	Faser eines Morphismus . . . . .	42
6.1.2	Basiswechsel . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Glatt, regulär &amp; normal</b>	<b>44</b>
<b>8</b>	<b><math>k</math>-Varietät</b>	<b>45</b>
<b>9</b>	<b>Der Punkteffektor</b>	<b>46</b>
<b>10</b>	<b><math>\mathcal{O}_X</math>-Moduln</b>	<b>47</b>
10.1	$\mathcal{O}_X$ -Moduln . . . . .	47
10.2	Exkurs: Vektorbündel in der Topologie . . . . .	47
10.3	Quasi-Kohärenz . . . . .	48



10.4	Quasikohärente Garben auf $\text{Spec } A$ . . . . .	49
10.5	Der Čech-Komplex . . . . .	54
10.6	Kohärenz . . . . .	55
10.7	Direktes und inverses Bild . . . . .	57
	10.7.1 Inverses Bild . . . . .	57
10.8	Abgeschlossene Unterschemata . . . . .	57
10.9	Quasikohärente Moduln auf projektiven Schemata . . . . .	58
	10.9.1 Wichtigstes Beispiel: Der Twist . . . . .	59
	10.9.2 Wiederholung Geradenbündel . . . . .	59
	<b>Definitionen</b>	<b>62</b>

# Lokal geringte Räume

1

## 1.1 Garben

### Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe*  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen  $U \subset X$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar  $V \subset U$ , so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen  $\rho_{UV}$  *Restriktion*, schreiben meist  $s|_V := \rho_{UV}(s)$ .

Man nennt  $s \in \mathcal{F}(U)$  auch *Schnitt über  $U$* .

Bei mir steht hier  
im Skript  $s|_U$ . Of-  
fenbar ein Fehler!?

### Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit  $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U)$ ,  $f \mapsto f|_U$ .

**Bemerkung 1.3.** Ist  $\mathbf{Ab}$  die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ & (U \rightarrow V) & \mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ & (V \rightarrow U) & \mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

### Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben*  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  auf  $X$  ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , d.h. für alle  $U \subset X$  offen gibt es einen Morphismus  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$ , so dass für  $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

**Definition 1.5 (Garbe).**

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt *Garbe* (engl. sheaf), falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  für offene  $U_i \subset X$ , so gilt

1. Ist  $s \in \mathcal{F}(U)$  und  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ .
2. Sind  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

**Bemerkung 1.6.**  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\
 \uparrow s \longmapsto \left( s|_{U_i} \right)_{i \in I} \\
 \left( s_i \right)_{i \in I} \longmapsto \left( s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} \right)_{(i,j) \in I^2}
 \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1 und Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

**Beispiel 1.7.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

**Beispiel 1.8.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{C}$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für  $M = \mathbb{C}$  haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\times} : U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\times}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^{\times} \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Warum steht hier naiv??

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit  $U = U_1 \cup U_2$  für ein  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für  $i = 1, 2$  ist  $(z : U_i \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$ , da sich der komplexe Logarithmus auf beiden  $U_i$  problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \rightarrow \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

### Definition 1.9 (Kategorie der (Prä-)garben).

Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne

$\mathbf{PSh}_X$  := die Kategorie der Prägarben auf  $X$ ,

$\mathbf{Sh}_X$  := die Kategorie der Garben auf  $X$ , wobei  $\text{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

**Bemerkung 1.10.** Man hat den Inklusionsfunktor

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

### Definition 1.11 (Halm, Keim).

Ist  $\mathcal{F}$  eine (Prä)Garbe auf  $X$  und  $x_0 \in X$ , so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) / \sim$$

mit

$$s \sim t :\Leftrightarrow \exists W \subset X \text{ offen} : x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s|_W = t|_W$$

für  $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(U')$  der *Halm von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$* .

Die Elemente  $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$  heißen *Keime von Schnitten bei  $x_0$* .

**Beispiel 1.12.**  $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f|_W = g|_W\}$

**Beispiel 1.13.**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}, x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius} \right\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 3).**

1. Es sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf einem topologischen Raum  $X$ . Es sei  $U \subset X$  eine offene Teilmenge. Für  $r \in \mathcal{F}(U)$ ,  $x_0 \in U$  bezeichne  $r_{x_0}$  den Keim  $[r]$  von  $\mathcal{F}$  bei  $x_0$ . Es seien nun  $s, t \in \mathcal{F}(U)$ , für die  $\forall x_0 \in U : s_{x_0} = t_{x_0}$  gelte. Zeige, dass  $s = t$ .
2. Gib ein Beispiel einer Prägarbe an, die nicht separiert ist, die also nicht die erste Garbenbedingung erfüllt.

**Beweis.** 1. Für alle  $x_0 \in U$  existieren offene  $U_{x_0}$  mit  $s|_{U_{x_0} \cap U} = t|_{U_{x_0} \cap U}$  nach Definition der Keime. Es ist  $U = \bigcap_{x_0 \in U} U_{x_0} \cap U$ , also folgt nach erster Garbenbedingung  $s = t$ .

2. Wähle  $X = \{0, 1\}$  mit diskreter Topologie. Definiere die Prägarbe

$$\mathcal{F}(X) := \mathbb{Z} \quad \mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{F}(\{1\}) = \mathcal{F}(\{0\}) := 1$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2|_{\{0\}} &= 5|_{\{0\}} \\ 2|_{\{1\}} &= 5|_{\{1\}} \end{aligned}$$

aber  $2 \neq 5 \in \mathbb{Z}$ . □

**Definition 1.14 (push-forward).**

Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ , so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für  $V \subset Y$  offen eine Garbe definiert, der *push-forward* von  $\mathcal{F}$ .

**1.2 Lokal geringte Räume**

Betrachte nun

**Ring** := Kategorie der kommutativen Ringe mit 1

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ring}.$$

**Definition 1.15 (lokaler Ring).**

Sei  $R$  ein Ring. Dann heißt  $R$  *lokal*, wenn  $R$  genau ein maximales Ideal besitzt.

**Beispiel 1.16.**  $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\} \subset_{\text{Unterring}} \mathbb{Q}$

**Bemerkung 1.17.** Ist  $R$  lokaler Ring und  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  das maximale Ideal, so ist  $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$ .

**Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 1).**

1. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $R^\times$  seine Einheitengruppe. Zeige, dass  $R$  genau dann lokal ist, wenn  $R \setminus R^\times \triangleleft R$  gilt, d.h. wenn die Nichteinheiten  $R \setminus R^\times$  ein Ideal in  $R$  bilden.
2. Es sei  $R$  ein kommutativer nullteilerfreier Ring. Den Quotientenkörper zu  $R$  bezeichnen wir mit  $\text{Quot}(R)$ . Lokalisieren wir  $R$  nach  $\mathfrak{p}$ , so erhalten wir den Ring  $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \text{Quot}(R) \mid a \in R, b \notin \mathfrak{p} \right\}$ . Zeige, dass  $R_{\mathfrak{p}}$  ein lokaler Ring ist.



**Beweis.** 1. „ $\Rightarrow$ “. Ist  $R$  lokal, so ist  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $R$ .

„ $\Leftarrow$ “. Ist  $R \setminus R^\times$  ein Ideal, so ist dies maximal (klar). Sei  $\mathfrak{m} \triangleleft R$  ein maximales Ideal, so gilt offenbar schon  $R \setminus R^\times = \mathfrak{m}$ .

2. Wir zeigen  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , dann folgt die Behauptung mit 1.

„ $\subseteq$ “. Es sei

$$h = p_1 \frac{s_1}{t_1} + \dots + p_n \frac{s_n}{t_n}.$$

Setze

$$\begin{aligned} z_1 &:= p_1 s_1 t_2 \dots t_n + p_2 s_2 t_1 t_3 \dots t_n + p_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \\ z_0 &:= t_1 \dots t_n, \end{aligned}$$

so ist  $h = \frac{z_1}{z_0}$ . Wäre  $h \in R_{\mathfrak{p}}^\times$ , sagen wir  $\frac{s}{t}$  sein Inverses, so müsste gelten  $z_1 s = z_0 t$ . Die linke Seite jedoch ist in  $\mathfrak{p}$ , die rechte nicht. Damit ist  $h \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ .

„ $\supseteq$ “. Sei  $\frac{s}{t} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus R_{\mathfrak{p}}^\times$ , so ist  $s \frac{1}{t} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ . □

**Beispiel 1.18.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . Dann ist  $\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$  ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty \setminus (\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da  $[f]$  eine Einheit ist, genau dann, wenn  $f(x_0) \neq 0$ : Ist  $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) \neq 0$ , so existiert  $W \subset U$  offen,  $x_0 \in W$  mit  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in W$ . Damit folgt

$$\left[ \frac{1}{f} : W \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} \right] \in \mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$$

ist Inverses zu  $[f]$ . Zudem ist  $\mathfrak{m}$  ein Ideal.

### Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{O}_X)$  bestehend aus:

- einem topologischen Raum  $X$  und
- einer Garbe  $\mathcal{O}_X$  auf  $X$  von Ringen,

so dass  $\mathcal{O}_{X,x_0}$  für alle  $x_0 \in X$  ein lokaler Ring ist.

Man nennt  $\mathcal{O}_X$  die *Strukturgarbe von  $(X, \mathcal{O}_X)$* . Ist  $x_0 \in X$ , so hat man das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0} \triangleleft \mathcal{O}_{X,x_0}$ .

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper von  $x_0$  in  $(X, \mathcal{O}_X)$* .

**Beispiel 1.20.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ , so ist  $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$ .

### Übung (Übungsblatt 1 Aufgabe 2).

1. Zeige, dass das Tupel  $(\mathbb{R}, C_{\mathbb{R}}^\infty)$  bestehend aus  $\mathbb{R}$  und der Garbe der  $C^\infty$ -Funktionen einen lokal geringten Raum bilden. Zeige also, dass  $C_{\mathbb{R},x_0}^\infty$  für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein lokaler Ring ist, indem Du sein maximales Ideal  $\mathfrak{m}_{x_0}$  angiebst. Warum ist es das einzige maximale Ideal?
2. Zeige, dass  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : C_{\mathbb{R},x_0}^\infty / \mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{R}$ .
3. Zeige nun auf gleiche Weise, dass  $\mathbb{C}$  mit der Garbe der holomorphen Funktionen  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  eine lokal geringter Raum ist und dass  $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0} / \mathfrak{m}_{z_0} \cong \mathbb{C}$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt.

**Beweis.** 1. Es gilt

$$\begin{aligned} [f : U \rightarrow \mathbb{R}] \in (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times &\Leftrightarrow \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ um } x_0 \text{ mit } f|_{U \cap V} \neq 0 \forall x \in U \cap V \\ &\Leftrightarrow f(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Also  $[f] \in C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ . Damit ist  $C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty \setminus (C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty)^\times$  ein Ideal. Es ist klar, dass dies das einzige maximale ist.

2. Wir definieren den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : C_{\mathbb{R}, x_0}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto f(x_0), \end{aligned}$$

so folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz.

3. Analog zu den vorherigen beiden. □

### Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind  $R, S$  lokale Ringe mit den maximalen Idealen  $\mathfrak{m}_R \triangleleft R, \mathfrak{m}_S \triangleleft S$ , so heißt der Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

### Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus*  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  *lokal geringter Räume* ist ein Paar  $(f, f^\#)$  bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von  $f^\#$  induzierte Ringhomomorphismus für  $x_0 \in X, y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\# : \mathcal{O}_{Y, y_0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X, x_0} \\ [s] &\mapsto [f_U^\#(s)] \end{aligned}$$

für  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$  und  $y_0 \in U$  ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

**Bemerkung 1.23.** In Definition 1.22 ist  $f_{x_0}^\#$  wohldefiniert:

Sei  $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y, y_0}$ , d.h. es existiert  $W \subset Y$  offen mit  $y_0 \in W$  und  $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$ . Betrachte nun  $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$  für  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ ,  $U \subset Y, y_0 \in U$  und analog  $f_V^\#(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  für  $t \in \mathcal{O}_Y(V)$ ,  $V \subset Y, y_0 \in V$ . Da  $f^\#$  ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} s & \in & \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \downarrow & & \downarrow |_W & & \downarrow |_{f^{-1}(W)} \\ s|_W = t|_W & \in & \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{f_W^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\ \uparrow & & \uparrow |_W & & \uparrow |_{f^{-1}(W)} \\ t & \in & \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists \\ \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{c} f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \end{array}$$

# Affine Schemata

# 2

## 2.1 Spec A als topologischer Raum

Sei im Folgenden  $A$  ein kommutativer Ring mit 1 und  $\text{Spec } A := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ .

### Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec } A.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \text{Spec } A \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft A : U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf  $\text{Spec } A$  definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

**Beweis (der Topologie-Eigenschaften).** 1. Zeige:  $\emptyset, \text{Spec } A$  offen  $\iff \text{Spec } A, \emptyset$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(A) = \emptyset, V((0)) = \text{Spec } A$

2. Zeige:  $U_1, U_2$  offen  $\Rightarrow U_1 \cap U_2$  offen  $\iff M_1, M_2$  abgeschlossen  $\Rightarrow M_1 \cup M_2$  abgeschlossen.

Dazu:  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

3.  $(U_i)_{i \in I}$  offen  $\Rightarrow \cup_{i \in I} U_i$  offen  $\iff (M_i)_{i \in I}$  abgeschlossen  $\Rightarrow \cap_{i \in I} M_i$  abgeschlossen.

Dazu:  $\cap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

□

**Bemerkung 2.2.** Die abgeschlossenen Teilmengen  $M \subset \text{Spec } A$  sind genau die  $M = V(\mathfrak{a})$  für ein  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ .

**Beispiel 2.3 (Spec  $\mathbb{Z}$ ).** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$  ist  $\mathfrak{a} = (a)$ . Falls  $a \neq 0, 1, -1$  sei  $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$  die Primfaktorzerlegung. Für  $p$  Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \iff (a) \subseteq (p) \iff p \mid a \iff p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  sind genau die Mengen  $\emptyset, \text{Spec } \mathbb{Z}$  und  $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

**Lemma 2.4.** Sei  $x \in \text{Spec } A$ , so ist der Abschluss  $\overline{\{x\}}$  der Menge  $\{x\}$  in  $\text{Spec } A$  gleich

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

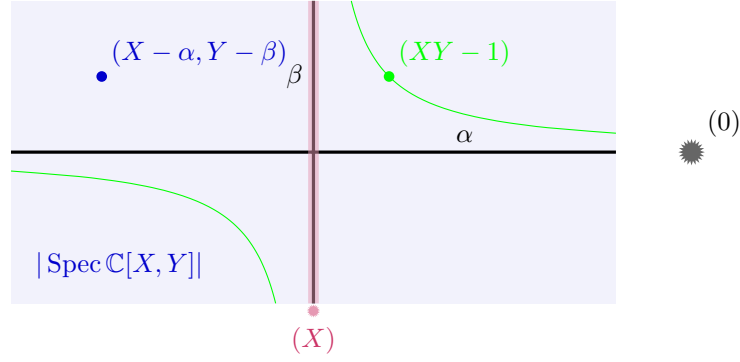
**Beweis.**

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \text{Spec } A \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \triangleleft A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} V(\mathfrak{a}) = V(x)$$

□

**Bemerkung 2.5.** Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1:  $\text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$ **Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $x \in X$  heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ .

Er heißt *generischer Punkt*, wenn  $\overline{\{x\}} = X$  gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit  $|X|$ .

**Beispiel 2.7.** Sei  $A = \mathbb{C}[X, Y]$ .

- $x = (0) \in \text{Spec } A$  ist generisch.
- $x = (X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft A$  ist abgeschlossen, da aus  $x \triangleleft A$  maximal  $V(x) = \{x\}$  und somit  $x$  abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \triangleleft A$  ist weder abgeschlossen noch generisch.
- $x = (XY - 1) \triangleleft A$  ist ebenfalls weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in 1 zusammenfassen.

**Definition 2.8 (basisoffene Menge).**

Für  $f \in A$  nennt man

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die zu  $f$  gehörige *basisoffene Menge*.

**Lemma 2.9.** Die Menge  $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$  ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene  $U \subseteq \text{Spec } A$  ist eine Vereinigung von  $D(f) \in \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})$  offen und  $\mathfrak{p} \in U$ , so ist  $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ , also  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ . Damit existiert  $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  mit  $f \notin \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{p} \in D(f)$  und  $f \in \mathfrak{a}$ . Also  $(f) \subseteq \mathfrak{a}$  und  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$ . Damit folgt  $D(f) \subseteq U$ .

Zusammenfassend gilt für  $U \subseteq \text{Spec } A$  offen:  $\forall \mathfrak{p} \in U \exists f \in A: \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$ . Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f_{\mathfrak{p}})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ . □

**Lemma 2.10.** Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

*Beweis.* Es ist  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ . Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ , d.h.  $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus (V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$ , also  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  aber nicht  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also existiert  $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$  und  $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Damit ist  $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette.  $\square$

**Definition 2.11 (Radikal).**

Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von  $\mathfrak{a}$ .

**Lemma 2.12.**  $\sqrt{\mathfrak{a}} \triangleleft A$ .

*Beweis.* •  $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  ✓

- Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in A$ . Dann  $f^n \in \mathfrak{a}, r \in A$ . Also  $(rf)^n \in \mathfrak{a}$  und damit  $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$  mit  $f^n \in \mathfrak{a}, g^m \in \mathfrak{a}$ .

$$\begin{aligned} (f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i} \right) g^m + \left( \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i} \right) f^n \end{aligned}$$

Da  $g^m$  und  $f^n$  jeweils in  $\mathfrak{a}$  liegen, ist auch die Summe dort.  $\square$

**Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).**

Ein Ideal  $\mathfrak{b} \triangleleft A$  heißt *Radikalideal (radiziell)*, falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

**Bemerkung 2.14.** Es gilt  $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

**Lemma 2.15.** Für  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “ Sei  $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, f^n \in \mathfrak{a}$ . Ist  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ , d.h.  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ . Also  $f^n \in \mathfrak{p}$  und da  $\mathfrak{p}$  prim, folgt  $f \in \mathfrak{p}$ .

„ $\supseteq$ “ Ist  $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so zu zeigen, dass  $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ . Sei also  $f^n \notin \mathfrak{a}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \triangleleft A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$ ,
- $M$  ist angeordnet durch „ $\subseteq$ “,
- ist  $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$  eine total geordnete Teilmenge, so ist  $\mathfrak{b} := \cup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \triangleleft A$  mit  $\mathfrak{b} \in M$ .

Damit hat  $M$  mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element  $\mathfrak{b}_{\max} \in M$ .

Nun sei behauptet, dass  $\mathfrak{b}_{\max} \triangleleft A$  ein Primideal ist. Dazu sei  $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$ , wobei wir annehmen, dass  $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . Betrachte  $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$ , was ein Ideal in  $A$  ist, aber nicht in  $M$  liegt. Analog können wir dies von  $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$  sagen. Damit existieren  $n, m \in \mathbb{N}$  mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \quad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von  $\mathfrak{b}_{\max}$  ist und wir folgern  $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$ , wodurch man den Widerspruch erhält.

Damit ist  $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$  und  $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$ . □

### Satz 2.16.

Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$  gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt sogar

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Aus  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$  folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt  $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$ .

„ $\Rightarrow$ “ Aus  $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , d.h.  $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$ , folgt  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . Also  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . □

### Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist  $X = A_1 \cup A_2$  mit  $A_{1,2} \subseteq X$  abgeschlossen, so ist  $X = A_1$  oder  $X = A_2$ .

Eine Teilmenge  $Z \subseteq X$  heißt *irreduzibel*, wenn  $Z$  mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

**Beispiel 2.18.**  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist irreduzibel. Ist nämlich  $A_1 \subsetneq \text{Spec } \mathbb{Z}$  abgeschlossen, so ist  $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für irgendwelche Primzahlen  $p_i$ .

**Lemma 2.19.** In  $\text{Spec } A$  gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ , so ist  $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und mit Satz 2.16  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ .

Für  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$ , gilt: Ist  $xy \in \mathfrak{p}$ , so folgt  $x \in \mathfrak{p}$  oder  $y \in \mathfrak{p}$ . Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y))).$$

Da  $V(\mathfrak{a})$  irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$ . Wieder mit Satz 2.16 folgt  $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$  und damit  $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ .

„ $\Leftarrow$ “ Schreibe  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ . Dann folgt wiederum mit Satz 2.16  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$ .

Ist  $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$ , also  $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$ , also  $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$ , so existiert  $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Für  $y \in \mathfrak{c}$ , ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  Primideal, also nach Wahl von  $x$  ist  $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Insgesamt ist  $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , also  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$  und damit  $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$ .  $\square$

### Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\text{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von  $A$ .

### Korollar 2.21. Es gilt

$$\text{Spec } A \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

*Beweis.* Lemma 2.19 mit  $\mathfrak{a} = (0)$ .  $\square$

### Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, so existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $A_i = A_{i+1}$  für alle  $i \geq n_0$ .

### Lemma 2.23. Ist $A$ noethersch, so ist auch $\text{Spec } A$ noethersch.

*Beweis.* Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit  $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$  für geeignete  $\mathfrak{a}_i \in \text{Spec } A$ , so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in  $A$ .  $\square$

### Satz 2.24.

Ist  $X$  noetherscher topologischer Raum und  $\emptyset \neq A \subseteq X$  abgeschlossen, so zerlegt sich

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

in abgeschlossene irreduzible Teilmengen  $A_i \subseteq A$ . Nimmt man  $A_i \not\subseteq A_j$  für  $i \neq j$ , so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.

Die  $A_i$  heißen (irreduzible) Komponenten von  $A$ .

**Beweis.** Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen  $\mathcal{V} \neq \emptyset$ , so hütte man ein inklusionsminimales  $A \in \mathcal{V}$ , denn falls nicht gäbe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit  $A_i \in \mathcal{V}$ . Da  $X$  noethersch, müsste diese Folge stationär werden, wodurch man einen Widerspruch erhält.

Dieses  $A \in \mathcal{V}$  hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da  $A \in \mathcal{V}$  minimal sind  $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$ . Aber damit ist  $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$ . Ein Widerspruch, der wie gewünscht  $\mathcal{V} = \emptyset$  liefert.

Eindeutigkeit. Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist  $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$ , also  $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$ . Da  $A_1$  irreduzibel können wir oBdA  $A_1 = A_1 \cap A'_1$  annehmen. Also ist  $A_1 \subseteq A'_1$ .

Analog ist  $A'_1 \subseteq A_k$  für ein  $k = 1, \dots, r$ . Zusammenfassend gilt

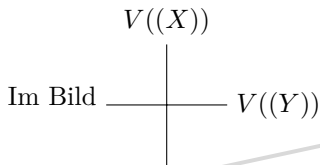
$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

was nach Voraussetzung  $k = 1$  impliziert. Also  $A_1 = A'_1$ .

Nun sukzessive weiter. □

**Beispiel 2.25.** In  $\text{Spec } k[X, Y]$  zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$



**Beispiel 2.26.** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Betrachte  $\text{Spec } k[X, Y]$ . Die maximalen Ideale sind gerade  $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$  für  $\alpha, \beta \in k$ . Ein abgeschlossener Punkt  $\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y]$  wird eindeutig durch  $(\alpha, \beta) \in k^2$  gegeben.

$\mathbb{A}_k^2 := \text{Spec } k[X, Y]$  wird der 2 dimensionale affine Raum über  $k$  genannt. Man hat die Bijektion

$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

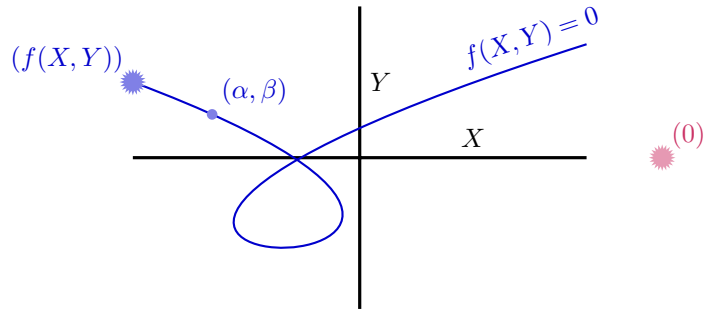
Eine abgeschlossene Teilmenge  $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$  liefert

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned} A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\ &= \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\ &\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$



Abbildung 2: Spec  $k[X, Y]$ 

In  $\mathbb{A}_k^2$  hat man aber noch mehr Punkte: Sei  $\mathfrak{p} \triangleleft k[X, Y]$  Primideal, aber nicht maximal, so ist  $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$  kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise  $\mathfrak{p} = (f(X, Y))$  für  $f \in k[X, Y]$  irreduzibel, so liegen alle  $(\alpha, \beta) \in k^2$  mit  $f(\alpha, \beta) = 0$  auf der entsprechenden Menge in  $k^2$ , d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X, Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} := (X - \alpha, Y - \beta) \Rightarrow \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

2 verdeutlicht dies.

**Lemma 2.27.** Ist  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \in \text{Spec } A$  und  $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$  die Projektion, so ist

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \text{Spec } A/\mathfrak{a} &\rightarrow \text{Spec } A \\ \bar{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec } A.$$

*Beweis.*

**Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist  $X = \bigcap_{i \in I} U_i$  mit  $U_i$  offen, so existiert eine endliche Teilmenge  $F \subset I$  mit  $X = \bigcap_{i \in F} U_i$ .

$X$  heißt *kompakt*, wenn  $X$  hausdorffsch und quasi-kompakt ist.

**Satz 2.29.**

Ist  $A$  ein Ring, so ist  $\text{Spec } A$  quasi-kompakt.

*Beweis.* Wir zeigen: Ist  $\emptyset = \bigcap_{i \in I} Z_i$  für abgeschlossene  $Z_i$ , so existiert  $F \subset I$  endlich mit  $\emptyset = \bigcap_{i \in F} Z_i$ .

Sei also  $Z_i = V(\mathfrak{a}_i)$ ,  $\mathfrak{a}_i \triangleleft A$  und

$$V(A) = \emptyset = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

Nach Satz 2.16 ist damit

$$A = \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i},$$

also insbesondere  $1 \in \sqrt{\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i}$  und  $1 \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ . Ergo

$$1 = a_{i_1} + \dots + a_{i_r},$$

für  $F := \{i_1, \dots, i_r\} \subset I$ . Nun ist  $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}$ , also

$$(1) = A \subseteq \mathfrak{a}_{i_1} + \dots + \mathfrak{a}_{i_r}.$$

Wiederum mit Satz 2.16 ist

$$\emptyset = V(A) \supseteq \bigcap_{k=1}^r V(\mathfrak{a}_{i_k}).$$

□

## 2.2 Spec $A$ als lokal geringter Raum

Wir wollen  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  als die „guten Funktionen“ auf  $\text{Spec } A$  auffassen, aber dazu müssen wir es besser verstehen.

### Definition 2.30 (multiplikative Teilmenge, Lokalisierung).

Sei  $A$  ein Ring, dann heißt  $S \subseteq A$  *multiplikative Teilmenge*, wenn  $1 \in S$  ist und aus  $a, b \in S$  auch  $ab \in S$  folgt.

Die *Lokalisierung*  $A_S$  oder  $A[S^{-1}]$  von  $A$  bezüglich  $S$  ist der Ring

$$A_S := (A \times S) / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

Schreibe  $\frac{a}{s} := [(a, s)]$  und definiere eine Ringstruktur auf  $A_S$  durch Bruchrechnen.

**Lemma 2.31 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung).** *Wir haben die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $S \subseteq A$  wie in Definition 2.30,  $\varphi : A \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus, so dass  $\varphi(S) \subseteq R^\times$ , so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_S \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \\ & & R \end{array}$$

*kommutativ macht, wobei  $\iota : A \rightarrow A_S$ ,  $a \mapsto \frac{a}{1}$ .*

**Beweis.** Klar, weil dieses  $\psi : A_S \rightarrow R$  durch

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) \psi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$$

eindeutig festgelegt ist. □

**Beispiel 2.32.** •  $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $f \in A$  fest.

$$A_S =: A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ .

$$A_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ .

### Satz 2.33.

Sei  $X = \text{Spec } A$ . Dann existiert auf  $X$  eine bis auf Isomorphie eindeutige Ringgarbe  $\mathcal{O}_X$  mit:

- i) Es existiert ein Ringhomomorphismus  $\varphi : A \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(X)$ .
- ii) Für  $f \in A$  betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \rightarrow & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)|_{D(f)}. \end{array}$$

Dann ist  $\varphi(f)|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))^\times$  eine Einheit und der eindeutig durch

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & A_f \\ \cong \downarrow \varphi & \searrow & \downarrow \varphi_f \exists! \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\cdot|_{D(f)}} & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{array}$$

gegebene Ringhomomorphismus  $\varphi_f$  ist ein Isomorphismus.

- iii) Für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \end{array}$$

und  $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$  ist ein Isomorphismus.

#### 2.2.1 Beweis von Satz 2.33

Für den Beweis benötigen wir noch eine Definition.

#### Definition 2.34 ( $\mathfrak{B}$ -(Prä)Garbe).

$\mathcal{F} : D(f) \mapsto A_f$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Prägarbe auf  $X = \text{Spec } A$ , wenn  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf

$$\mathfrak{B} := \{D(f) \subset X \mid f \in A\}$$

ist.

$\mathcal{F}$  heißt  $\mathfrak{B}$ -Garbe, wenn  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Prägarbe ist und die Garbenbedingungen für die  $D(f)$  erfüllt sind.

**Hilfslemma 2.35.** Es gilt:

1.  $\mathcal{O}_X : D(f) \mapsto A_f$  ist eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe.
2. Ist  $\mathcal{F}$  eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe, so existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige Garbe  $\bar{\mathcal{F}}$  auf  $X$  mit  $\bar{\mathcal{F}}(D(f)) = \mathcal{F}(D(f))$  für alle  $D(f) \in \mathfrak{B}$ .

*Beweis.* 1.

TODO

### Definition 2.36 ((affines) Schema).

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der zu einem  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  als lokal geringter Raum isomorph ist.

Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der eine offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt, d.h.  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \subseteq X$  offen und  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  ist ein affines Schema.

**Bemerkung 2.37.** Beachte dabei: Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$ ,  $U \subseteq X$  offen, so ist durch

$$\mathcal{F}|_U : V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$$

eine Garbe  $\mathcal{F}|_U$  auf  $U$  definiert.

### Definition 2.38 (Morphismus von Schemata).

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

mit  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  Garbenmorphismus auf  $Y$  so dass  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  lokaler Ringhomomorphismus

**Bemerkung 2.39.** Man hat einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ring} & \rightarrow & \mathbf{Sch}^{\text{aff}} \\ A & \mapsto & (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \\ A \xrightarrow{\varphi} B & \mapsto & (f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{ccc} f : \text{Spec } B & \rightarrow & \text{Spec } A, \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

wobei die Stetigkeit hier klar ist, und

$$f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B}.$$

Letzterer ist für  $g \in A$  gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{D(g)} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(g)) = A_g & \rightarrow & (f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } B})(D(g)) = B_{\varphi(g)} \\ \frac{a}{g^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^n} \end{array}$$

wobei wir • durch

$$f^{-1}(D(g)) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid f(\mathfrak{q}) \in D(g)\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni g\} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B \mid \mathfrak{q} \not\ni \varphi(g)\}$$

erhalten. Diese Abbildung ist funktoriell und lokal, da für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$

$$\begin{array}{ccc} f^\#_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } B, \mathfrak{q}} \\ \frac{a}{\gamma} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(\gamma)} \end{array}$$

für  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ,  $\gamma \notin \mathfrak{p}$  (also  $\varphi(\gamma) \notin \mathfrak{q}$ ) ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

# Beispiele

# 3

## 3.1 Spec $\mathbb{Z}$

Jeder Ring  $A$  hat einen eindeutigen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ 1 &\mapsto 1 \\ z &\mapsto \begin{cases} 1 + 1 + \dots + 1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 - 1 - \dots - 1 & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$  ist daher ein *initiales Objekt* in der Kategorie **Ring**.

Wir haben daher einen eindeutigen Morphismus  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  von affinen Schemata.  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  ist somit ein *finales Objekt* in der Kategorie **Sch<sup>aff</sup>**.

Ferner können wir zusammenfassen

**Offene Mengen**  $\emptyset \neq U \subseteq \text{Spec } \mathbb{Z} \text{ offen} \Leftrightarrow U = \left\{ \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\} \mid r \in \mathbb{N}_0 \right\}$

**Basisoffene Mengen**  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z} \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_r)\}$  für  $f = p_1^{\nu_1} \dots p_r^{\nu_r}$ .

**Strukturgarbe**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(D(f)) &= \mathbb{Z}_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{Z} \right\} \\ \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}, (p)} &= \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid p \nmid b, a \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

## 3.2 Spec $k$ für einen Körper $k$

**Als topologischer Raum**  $\text{Spec } k = \{(0)\}$ .

**Strukturgarbe**  $\mathcal{O}_{\text{Spec } k}(\{(0)\}) = k$ .

**Bemerkung 3.1.** Sei  $A$  ein Ring. Angenommen wir haben  $\text{Spec } A \xrightarrow{(f, f^\#)} \text{Spec } k$  für einen Körper  $k$ , so haben wir

$$f_{\text{Spec } k}^\# : k = \mathcal{O}_{\text{Spec } k} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } k) = A,$$

wobei  $f_{\text{Spec } k}^\#$  aus  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(f^{-1}(\{(0)\})) = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } A)$  resultiert. Insgesamt ist  $A$  also eine  $k$ -Algebra (d.h. ein Ring zusammen mit  $k \rightarrow A$ ).

Bemerke hierbei „Grothendiecks Gesamtphilosophie“:

*Alles relativ lesen!*

**Definition 3.2 ( $S$ -Schema).**

Sei  $S$  ein Schema. Dann ist ein  $S$ -Schema ein Schema  $X$  zusammen mit einem Strukturmorphismus  $X \xrightarrow{\varphi} S$ . Dies ergibt die Kategorie  $\mathbf{Sch}_S$ , wenn man

$$\mathrm{Hom}(X \xrightarrow{\varphi} S, Y \xrightarrow{\varphi} S) := \left\{ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & S & \end{array} \right\}$$

setzt.

**Beispiel 3.3.**  $\mathbf{Sch}_k := \mathbf{Sch}_{\mathrm{Spec} k}$  sind die sog.  $k$ -Schemata. Ein Beispiel hierfür ist  $\mathrm{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathrm{Spec} k$  via  $k \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ .

**Bemerkung 3.4.** Sei  $X$  ein Schema und  $x \in X$  und weiter  $\mathfrak{m}_x \triangleleft \mathcal{O}_{X,x}$  das maximale Ideal. Dann ist

$$\kappa(x) := k(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$$

der Restklassenkörper von  $x$ .

Betrachte nun  $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$  mit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathrm{Spec} k(x) & \rightarrow & X \\ \eta_x & \mapsto & x, \end{array}$$

wobei topologisch gesehen  $\eta_x \in \mathrm{Spec} k(x)$  der einzige Punkt dieses Schemas ist. Für  $U \subseteq X$  offen haben wir:

$$f_U^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k(x)}(U) = \begin{cases} 0 & x \notin U \\ k(x) & x \in U. \end{cases}$$

Im Fall  $x \in U$  geht dies via

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = k(x).$$

Ist umgekehrt  $(f, f^\#) : \mathrm{Spec} k \rightarrow X$  ein Schemamorphismus, so setze  $x := f((0)) \in X$  und  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k}$  liefert einen Ringhomomorphismus der Halme:

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k, (0)} = k.$$

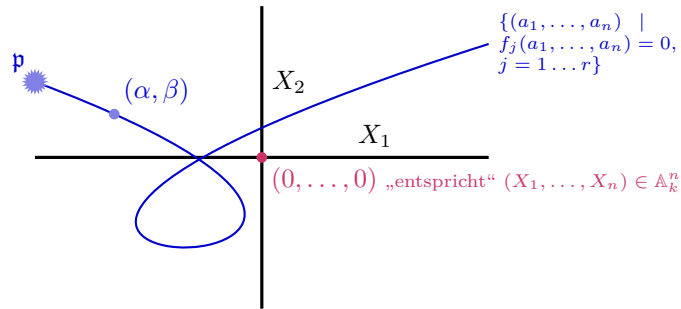
Dieser ist lokal (also  $f_x^\#(\mathfrak{m}_x) = (0)$ ). Damit ist

$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x \xrightarrow{f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x} f_x^\# \bmod \mathfrak{m}_x k$$

wohldefiniert und somit ist  $k \mid k(x)$  eine Körpererweiterung.

Zusammengefasst haben wir:

Einen Punkt $x \in X$ wählen mit Restklassenkörper $k(x)$ und eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$ .	$\iff$	Einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec} k \rightarrow X$ wählen für eine Körpererweiterung $k \mid k(x)$ .
--	--------	--

Abbildung 3:  $\text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ 

### 3.3 Der Affine $n$ -dimensionale Raum über $k$

Sei  $k$  wieder ein Körper. Der affine  $n$ -dimensionale Raum über  $k$  ist  $\mathbb{A}_k^n := \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]$ .

Wir erinnern an den Hilbertschen Nullstellensatz:

#### Satz 3.5 (Hilbertscher Nullstellensatz).

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Dann ist jedes maximale Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  von der Form  $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ .

*Beweis.* ohne Beweis. □

Wir haben bereits gezeigt:

$$|\mathbb{A}_k^n| = k^n, \quad \text{via } (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Sei  $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_r)$  ein nicht maximales Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  (die Darstellung ist nach Satz 3.5) möglich, so gilt

$$\mathfrak{p} \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \Leftrightarrow f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_r(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Wir können dies in Abbildung 3 „sehen“.

### 3.4 Weiteres Beispiel

Betrachte  $k[[X_1, \dots, X_n]] = k[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]]$  mit  $R[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in R\}$ .

**Bemerkung 3.6.**  $g \in k[[X_1, \dots, X_n]] \setminus (X_1, \dots, X_n)$  ist eine Einheit.

*Beweis.* Idee: Ansatz für eine Variable:  $g(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$ . Dann

$$1 = g(X)h(X) = \underbrace{a_0 b_0}_{=1} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{=0} X + \dots$$

□

**Funktor Spec** Wir haben den Funktor Spec: Die Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccc}
 k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} & \longrightarrow & k[[X_1, \dots, X_n]] & \longrightarrow & k \\
 f & \longmapsto & \frac{f}{1} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \frac{f}{g} & \longmapsto & f g^{-1} & & \\
 & & & & h & \longmapsto & h(0)
 \end{array}$$

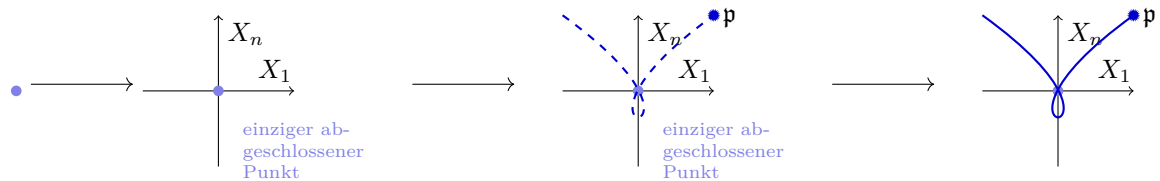
Lokalisierung an  $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$

induzieren

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Spec } k & \longrightarrow & k[[X_1, \dots, X_n]] & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} & \longrightarrow & \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n] \\ \text{topologisch:} & & (0) & \longmapsto & (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & (X_1, \dots, X_n). \\ & & \text{einziger} & & \text{einziger} & & \text{entspricht dem} \\ & & \text{abgeschlossener} & & \text{abgeschlossener} & & \text{abgeschlossenen} \\ & & \text{Punkt} & & \text{Punkt} & & \text{Punkt} \\ & & & & & & (0, \dots, 0) \in k^n \end{array}$$

Dies ist ein Homöomorphismus auf  $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^n \mid \mathfrak{p} \subseteq (X_1, \dots, X_n)\} = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \subseteq \mathbb{A}_k^n$ .

Was passiert aber auf Schemaniveau?



Betrachte dazu

$$\text{Spec } k \longrightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]/\mathfrak{p} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}/\mathfrak{p} \longrightarrow \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p} \approx V(\mathfrak{p})$$

Nehmen wir das explizite Beispiel  $\mathfrak{p} = (Y^2 - X^2(X + 1))$ . Es ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal und  $V(\mathfrak{p})$  irreduzibel.

Beachte:  $1 + X \in k[[X]]$  hat eine Wurzel, wie man durch folgenden Ansatz mit  $h(X) = a_0 + a_1X + \dots$  sieht:

$$1 + X = (h(X))^2 = a_0^2 + 2a_0a_1X + \dots$$

Setze  $a_0 := 1$  oder  $-1$  und löse sukzessiv auf. Demnach ist  $Y^2 - X^2(X + 1) = (Y - Xh(X))(Y + Xh(X))$  nicht mehr prim, also  $V(\mathfrak{p}) \subseteq k[[X, Y]]$  nicht mehr irreduzibel!

Betrachte genauer

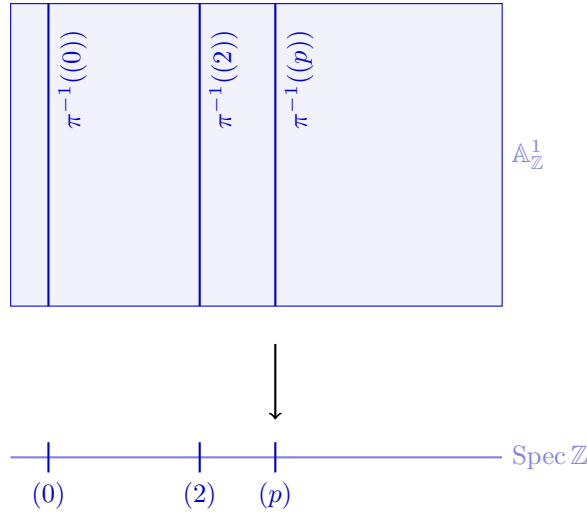
$$\begin{array}{ccc} k[[u, v]]/(uv) & \xrightarrow{\cong} & k[[z, w]]/(z^2 - w^2) \xrightarrow{\cong} k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(h(X))^2) \\ u & \longmapsto & z + w & z & \longmapsto & Y \\ v & \longmapsto & z - w & w & \longmapsto & Xh(X) \end{array}$$

In Bildern:

$$\text{Spec } k[[u, v]]/(uv) \longrightarrow \text{Spec } k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(X + 1))$$





Abbildung 4: Veranschaulichung von  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ 

### 3.5 Spezielles Beispiel $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$

Wir haben  $\pi : \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ . Topologisch ist

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \bigcup_{p \text{ prim}} \pi^{-1}((p)) \cup \pi^{-1}((0)).$$

Abbildung 4 verdeutlicht dies.

**Zu  $\pi^{-1}((0))$**  Betrachte nun  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$ , so gilt  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$ .

Betrachte  $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$  und die Lokalisierung  $g : \mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]_S$ . Es ist klar:  $\mathbb{Z}[X]_S = \mathbb{Q}[X]$

Ferner gilt  $\text{Spec } \mathbb{Q}[X] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$  ist ein Homöomorphismus auf sein Bild:

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X] \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \mid \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)\} = \pi^{-1}(0),$$

**Zu  $\pi^{-1}((p))$**  Es ist  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p)) \Leftrightarrow p \in \mathfrak{p}$ . Dann betrachte  $\rho : \mathbb{Z}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p[X]$  und  $\rho^* : \text{Spec } \mathbb{F}_p[X] \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ . Wegen  $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X] / \ker \rho$  ist  $\rho^*$  ein Homöomorphismus auf

$$V(\ker \rho) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X] \mid \ker \rho \subseteq \mathfrak{p}\} = \pi^{-1}((p)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1.$$

Zusammengefasst ist:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}((0)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \\ \pi^{-1}((p)) &= \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, \end{aligned}$$

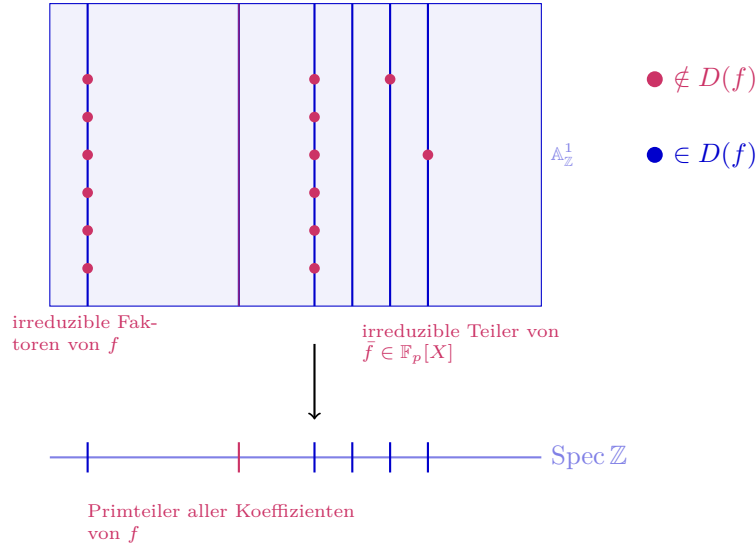
wobei die Gleichheiten topologisch zu lesen sind.

**Betrachte  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$**

**1. Fall.**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0)) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0)$ , also

$$\mathfrak{p} = (\mu(X))$$

mit  $\mu(X) \in \mathbb{Z}[X]$  einem primitiven, irreduziblen Polynom.

Abbildung 5: Veranschaulichung von  $D(f) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ 

- 2. Fall.**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$ , so ist  $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$  für ein  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathbb{F}_p[X]$ , also  $\mathfrak{p} = \rho^{-1}((q(X)))$  für ein irreduzibles  $q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$  oder  $(0)$ . Dann ist

$$\mathfrak{p} = (r(X), p)$$

mit  $r(X) \in \mathbb{Z}[X]$  und  $r(X) \equiv q(X) \pmod{p}$ .

Es stellt sich die Frage, wie für  $f \in \mathbb{Z}[X]$  die  $D(f) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  aussehen. Dazu

- 1. Fall**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((0))$ . Sei  $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ . Dann  $f(X) = \xi q_1(X)^{\nu_1} \dots q_r(X)^{\nu_r}$  und es gilt

$$f \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} = (q(X))$$

mit  $q \neq q_1, \dots, q_r$ .

- 2. Fall**  $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}((p))$ .  $f(X) \notin (r(X), p)$  mit  $r(X) \pmod{p} \in \mathbb{F}_p[X]$  irreduzibel. Für eine Primzahl  $p$ , betrachte  $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ . Ist  $\bar{f}(X) = 0$ , so ist  $f(X) \in (r(X), p)$  für alle  $r(X)$ . Für  $\bar{f}(X) = \bar{q}_1(X)^{\nu_1} \dots \bar{q}_s(X)^{\nu_s}$ , ist  $f(X) \in (q_i(X), p)$  für diese  $i$ .

Dargestellt ist dies wieder in Abbildung 5.

## 3.6 Diskrete Bewertungsringe

### Definition 3.7 (Diskrete Bewertung).

Eine *diskrete Bewertung* auf einem Körper  $k$  ist eine Abbildung

$$v : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

so dass

1.  $v(0) = \infty$ ,  $v(x) \in \mathbb{Z}$  für  $x \neq 0$ ,
2.  $v(xy) = v(x) + v(y)$  für alle  $x, y$  und
3.  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$  für alle  $x, y$ .

**Bemerkung 3.8.** Wählt man  $q > 1$  (in  $\mathbb{R}$ ), so ist

$$|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| := q^{-v(x)}$$

eine Betragsfunktion mit

1.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $|xy| = |x||y|$ .
3.  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$ . Die erste Ungleichung wird auch nicht-archimedische Dreiecksungleichung genannt.

**Definition 3.9 (Bewertungsring).**

Ist  $(k, v)$  ein diskret bewerteter Körper, so ist

$$\mathcal{O} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in k \mid |x| \leq 1\}$$

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := \{x \in k \mid v(x) > 0\} = \{x \in k \mid |x| < 1\} \triangleleft \mathcal{O},$$

der *Bewertungsring* zu  $k$ .

Ein *diskreter Bewertungsring* (*dvr*) ist ein Integritätsbereich  $R$ , zusammen mit diskreter Bewertung  $v : K = \text{Quot}(R) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , so dass  $R = \mathcal{O}$  gilt.

Ferner gilt  $\mathcal{O}$  ist ein Hauptidealbereich (PID),  $k = \text{Quot}(\mathcal{O})$ .

Ist  $\pi \in \mathcal{O}$  mit  $v(\pi) = 1$ , so ist  $\mathfrak{m} = (\pi)$  und  $\mathcal{O}$  hat genau die Ideale  $(\pi^k)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Bemerkung 3.10.** Der Wertebereich  $v(k \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Z}$  ist eine Untergruppe, also  $v(k \setminus \{0\}) = d\mathbb{Z}$  für ein  $d$ . Wir können meistens oBdA  $d = 1$  annehmen.

**Bemerkung 3.11.** Beachte: Für  $x \in \mathcal{O}$  gilt

$$v(x) = n \Leftrightarrow x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Für  $\xi = \frac{x}{y} \in K = \text{Quot}(\mathcal{O})$  ist  $v(\xi) = v(x) - v(y)$ .

*Beweis (von Definition 3.9).* TODO. □

**Bemerkung 3.12.**

$$\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi) = \mathfrak{m}\},$$

da in Hauptidealbereichen jedes Primideal  $\neq (0)$  auch maximal ist.

**Definition 3.13 (Restklassenkörper eines dvr).**

Ist  $\mathcal{O}$  ein diskreter Bewertungsring, so heißt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$$

der *Restklassenkörper* von  $\mathcal{O}$ .

$\mathcal{O}$  heißt

- von *verschiedener Charakteristik*, wenn für  $K = \text{Quot}(\mathcal{O})$ ,  $\text{char } K = 0$  und  $\text{char } k \neq 0$  ist und
- von *gleicher Charakteristik*, wenn  $\text{char } K = \text{char } k$ .

### 3.6.1 Beispiele

1. Sei  $k$  ein Körper,

$$K := k((t)) := \text{Quot } k[[t]] = \left\{ f(t) = \sum_{l=-N}^{\infty} a_l t^l \mid a_l \in k \right\}$$

und

$$\begin{aligned} v : k[[t]] &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid t^{-k} f(t) \in k[[t]]\} = \min\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

Auf  $k((t))$  Dies ist eine diskrete Bewertung mit  $\mathcal{O} = k[[t]]$ :

$$\begin{aligned} v : k((t)) &\rightarrow \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\} \\ f(t) = \sum a_l t^l &\mapsto \min\{l \in \mathbb{Z}_0 \mid a_l \neq 0\}. \end{aligned}$$

$k((t))$  trägt damit  $|\cdot| := q^{-v(\cdot)}$ , also ist  $k((t))$  ein metrischer Raum mit  $d(x, y) := |x - y|$ , dieser ist vollständig.

Für den Restklassenkörper gilt

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k[[t]]/tk((t)) \cong k,$$

da  $\mathfrak{m} = tk[[t]] = (t)$ .  $t$  heißt dabei *Uniformierende*.

2. Betrachte

$$\begin{aligned} \nu_p : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \frac{a}{b} &\mapsto v(a) - v(b) \end{aligned}$$

mit  $v(a) = \max\{k : p^k \mid a\}$  für eine Primzahl  $p$ .

$\nu_p$  ist eine diskrete Bewertung, die *p-adische Bewertung*. Ferner ist

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form} \mid p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

und  $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$  und

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathfrak{F}_p.$$

$|\cdot|_p := p^{-\nu_p(\cdot)} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt *p-adischer Betrag*.  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  ist jedoch nicht vollständig, da z.B.  $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$  ein Cauchyfolge bildet.

Man erhält die Vervollständigungen

$$\begin{aligned} (\mathbb{Q}, |\cdot|) &\rightsquigarrow \mathbb{R} \\ (\mathbb{Q}, |\cdot|_p) &\rightsquigarrow \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

**Zurück zu Schemata** Sei  $\mathcal{O}$  ein dvr, so ist  $\text{Spec } \mathcal{O} = \{(0), (\pi)\}$ . Dabei ist  $(0)$  der generische Punkt mit  $\{(0)\} = V((0)) = \text{Spec } \mathcal{O}$  und  $(\pi)$  ein abgeschlossener Punkt, genannt der *spezielle Punkt* in  $\text{Spec } \mathcal{O}$ .

**Beispiel 3.14.** Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char } k \neq 2, 3$  und  $k$  algebraisch abgeschlossen. Wir betrachten

$$E := \text{Spec } A \quad \text{mit } A := k[X, Y]/(Y^2 - (X^3 + aX + b)).$$

Dies ist der affine Teil einer *elliptischen Kurve*, wenn  $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \in k$ .

Wir haben

$$|E| \cong \{(x_0, y_0) \in k^2 \mid y_0^2 - (x_0^3 + ax_0 + b) = 0\}.$$

Sei  $(x_0, y_0) \in |E|$ , oder besser  $\mathfrak{p} := (X - x_0, Y - y_0) \in E$ . Es ist  $\mathcal{O}_{E, \mathfrak{p}}$  ein dvr.

Dazu:

**1. Fall**  $y_0 \neq 0$ . , so ist  $\mathcal{O}_{E,y} = A_{\mathfrak{p}}$ . Betrachten wir  $\frac{\bar{f}(X,Y)}{\bar{g}(X,Y)} \in A_{\mathfrak{p}}$ , also  $\bar{f}, \bar{g} \in A$  und  $\bar{g} \notin (X - x_0, Y - y_0)$ , d.h.  $\bar{g}(x_0, y_0) \neq 0$ . Ferner ist

$$Y^2 - (X^3 + aX + b) = (Y + y_0)(Y - y_0) + (X^2x_0X + (x + x_0^2))(X - x_0)$$

und wenn  $y_0 \neq 0$ , so ist  $(Y + y_0) \notin (X - x_0, Y - y_0)$ . Demnach ist  $Y + y_0 \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$ , also gilt in  $A_{\mathfrak{p}}$ :

$$Y - y_0 = \frac{X^2 + x_0X + (a + x_0^2)}{Y + y_0}(X - x_0)$$

und  $(X - x_0, Y - y_0)A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (X - x_0)A_{\mathfrak{p}}$  ist ein Hauptideal.

Also ist

$$\begin{aligned} v : A_{\mathfrak{p}} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ a &\mapsto \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a \in (X - x_0)^k\} \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung!

**2. Fall**  $y_0 = 0$ . Dies geht analog und man sieht, dass

$$X^2 + x_0X + (a + x_0^2) \notin (X - x_0, Y),$$

da nach Voraussetzung  $4a^2 + 27b^2 \neq 0$ . Also ist  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (Y - y_0)A_{\mathfrak{p}}$ .

**Bemerkung 3.15.** Sei  $K(E) := \mathcal{O}_{E,(0)} = \text{Quot}(A) = A_{(0)}$  der *Funktionenkörper* von  $E$ . Für  $\mathfrak{p} \in E$  hat man die *Null-/Polstellenordnung*

$$v_{\mathfrak{p}} : K(E) \rightarrow \text{Quot}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

# Projektive Schemata

## 4.1 Eine kurze Einführung in klassische projektive Geometrie

Sei  $k$  ein Körper. So ist

$$\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1}) := \{L \subset k^{n+1} \text{ UVR} \mid \dim_k L = 1\}$$

der  $n$ -dimensionale projektive Raum.

**Homogene Koordinaten**  $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$  mit  $0 \neq (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$  definiert als

$$[x_0 : \dots : x_n] := \text{span}_k \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit  $[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times$  mit  $x_i = \lambda y_i \forall i$ . Damit gilt dann, dass  $\mathbb{P}^n(k) = k^{n+1} / \sim$ , wobei  $\sim$  die gerade eben definierte Äquivalenzrelation bezeichnet.

**Überdeckung**  $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$  mit

$$\begin{array}{ccc} U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} & \ni & [x_0 : \dots : x_n] \\ \downarrow h_i \quad b_{i,j} & & \downarrow \\ k^n & \ni & \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

als "Karten".

**Beachte**  $\mathbb{P}^n(k) \setminus U_i = \{[x_0 : \dots : 0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \neq 0\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}^{n-1}(k)$

**Bemerkung 4.1.** •  $\mathbb{RP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

- $\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
- $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$

## 4.2 $\mathbb{P}^n(k)$ als Schema

Statt einem Körper  $k$  können wir einen Ring  $A$  betrachten.

## 4.2.1 1. Variante

Betrachte  $U_i := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] = \mathbb{A}_A^n$ .

In  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  würden wir diese mit dem Kartenwechsel verkleben:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \swarrow \quad \searrow \\
 & \begin{array}{c} 0, \dots, \frac{1}{x_i}, \dots, y_n \\ \downarrow \\ (y_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, y_n) \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{i \cap U_j} \\ h_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\text{Kartenwechsel}} h_j(U_i \cap U_j) \end{array} \\
 & \parallel & \parallel \\
 & \{(y_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, y_n) \mid y_j \neq 0\} & \rightarrow \{(z_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\} \\
 & & \\
 & (y_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, y_n) & \longrightarrow \left( \frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{1}{\underset{i\text{-te}}{y_j}}, \dots, \hat{x}_j, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)
 \end{array}$$

Betrachte also

$$U_{ij} := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n][x_j^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] = U_i$$

$$U_{ji} := \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n][x_i^{-1}] \hookrightarrow \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n] = U_j$$

und wähle einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_{ij} : U_{ij} & \rightarrow & U_{ji} \\
 x_k & \mapsto & \frac{x_k}{x_j} \quad \text{für } k \neq i \\
 x_i & \mapsto & \frac{1}{x_j}.
 \end{array}$$

Es gilt nun  $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ , denn

$$U_{ij} \cap U_{ik} = D(x_j x_k) \subseteq U_i$$

$$U_{ji} \cap U_{jk} = D(x_i x_k) \subseteq U_j$$

sowie

$$\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$$

**Wir haben also** eine Familie  $(U_i)_{i=0, \dots, n}$  von (affinen) Schemata. Für jedes Paar  $(i, j)$  eine offene Immersion  $U_{ij} \hookrightarrow U_i$  mit (affinen) Schemata und Isomorphismen  $\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$ , so dass  $\phi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ .

Bleibt zur Übung lediglich zu zeigen, dass ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Schema  $\mathbb{P}_A^n$  mit Überdeckung  $\mathbb{P}_A^n = \bigcup_{i=0}^n V_i$  für  $V_i \subseteq \mathbb{P}_A^n$  offen und Isomorphismen  $V_i \xrightarrow{\cong} U_i$  von (affinen) Schemata existiert.

### 4.2.2 2. Variante (Die Proj-Konstruktion)

#### Definition 4.2 (graduierter $A$ -Algebra).

Sei  $A$  ein Ring, dann heißt

$$S := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$$

eine *graduierter  $A$ -Algebra*, wenn

- $S$  ein Ring,
- $S_n \subset S$  ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul,
- $S_n S_m \subseteq S_{n+m}$  ist,
- wir einen Ringhomomorphismus  $A \xrightarrow{\varphi} S$  haben und
- die  $S_n$   $A$ -Untermoduln sind.

Ein  $s \in S_n$  heißt *homogen vom Grad  $n$* .

#### Definition 4.3 (homogenes Ideal).

Ein Ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft S$  heißt *homogen*, wenn

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{a} \cap S_n.$$

**Lemma 4.4.** *Es ist äquivalent*

- $\mathfrak{a}$  *homogen*,
- $\mathfrak{a}$  *wird von homogenen Elementen erzeugt*
- *Aus  $a \in \mathfrak{a}$  mit  $a = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$  für  $a_n \in S_n$  folgt  $a_n \in \mathfrak{a}$ .*

*Beweis.* leicht. □

**Beispiel 4.5.**  $S = A[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{m \geq 0} S_m$  mit

$$S_m = \{f(x_0, \dots, x_n) \mid f \text{ homogen vom Grad } m\},$$

d.h.

$$f \in S_m \iff f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1}} \alpha_\nu X_0^{\nu_0} \dots X_n^{\nu_n} \quad \text{mit } \nu_0 + \dots + \nu_n = m.$$

#### Definition 4.6 ( $\text{Proj}(S)$ ).

Setze  $S_+ := \bigoplus_{n \geq 1} S_n$ , dann ist das *projektive Spektrum*  $\text{Proj } S$  von  $S$  definiert als

$$\text{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } S \text{ homogen} \mid S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

#### Definition 4.7 (Zariski Topologie auf $\text{Proj}(S)$ ).

Für ein homogenes Ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft S$  setze

$$V_+(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S).$$

Dann bilden diese  $V_+(\mathfrak{a})$  die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der *Zariski-Topologie auf  $\text{Proj}(S)$* .



*Beweis.* Wie im inhomogenen Fall. □

**Bemerkung 4.8.** Ein homogenes  $\mathfrak{a} \triangleleft S$ ,  $\mathfrak{a} \neq S$ , ist prim genau dann, wenn gilt:

$$xy \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \mathfrak{a} \text{ oder } y \in \mathfrak{a}$$

für alle homogenen  $x, y$ .

**Definition 4.9 (basisoffenen Mengen auf  $\text{Proj}(S)$ ).**

Analog zu  $\text{Spec } A$  bilden für  $f \in S$  die *basisoffenen Mengen in  $\text{Proj}(S)$*

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Proj}(S)$$

eine Basis der Topologie auf  $\text{Proj}(S)$ .

**Definition 4.10 (homogene Lokalisierung).**

- Für  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$  heißt

$$S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s, t \in S, t \notin \mathfrak{p}, s, t \text{ homogen von gleichem Grad} \right\}$$

*homogene Lokalisierung von  $\mathfrak{p}$ .*

- Für  $f \in S$  homogen von Grad  $m$  heißt

$$S_{(f)} := \left\{ \frac{s}{f^k} \mid s \in S, k \in \mathbb{N}_0, s \text{ homogen von Grad } k \deg f \right\}$$

*homogene Lokalisierung bezüglich  $f$ .*

**Lemma 4.11.** Es gilt:  $S_{(\mathfrak{p})}$  ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{s}{t} \mid s \in \mathfrak{p} \right\}.$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Satz 4.12.**

Auf  $\text{Proj}(S)$  gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Ringgarbe  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$  mit:

1. Für alle homogenen  $f \in S_+$  hat man den Isomorphismus

$$(\varphi, \varphi^\#) : (D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}|_{D_+(f)}) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)}, \mathcal{O}_{S_{(f)}})$$

2. Diese induzieren Isomorphismen

$$\mathcal{O}_{\text{Proj}(S), \mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} S_{(\mathfrak{p})}.$$

Damit wird  $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$  zu einem Schema.

*Beweis.* „analog“ zum Beweis für  $\text{Spec}$  mit nachfolgendem Lemma. □

**Lemma 4.13.** *Ist  $f \in S_+$  homogen, so ist*

$$\begin{aligned} \phi : D_+(f) &\rightarrow \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{aligned}$$

*ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $S \xrightarrow{\lambda} S_f \xleftarrow{\iota} S_{(f)}$ , so haben wir

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S & \xleftarrow{\lambda^*} & \operatorname{Spec} S_f \\ & \nearrow \lambda^* & \downarrow \iota^* \\ D(f) & & \\ \uparrow \text{stetig} & \nearrow \phi & \downarrow \\ D_+(f) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow f \\ \mathfrak{p} \\ \downarrow \\ \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

Die Stetigkeit im linken Diagramm folgt aus der Tatsache, dass  $V_+(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Proj}(S)$  und  $\operatorname{Proj}(S)$  trägt die Teilraumtopologie von  $\operatorname{Spec} S$ . Damit ist  $\phi$  stetig.

Wir wollen die Umkehrabbildung von  $\phi$  angeben:

$$\begin{aligned} D_+(f) &\xrightarrow{\phi} \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \\ \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f}) &\xleftarrow{\quad} \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Den Rest zeigen nachstehende Hilfslemmata. □

**Hilfslemma 4.14.**  $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}S_f})$  ist homogenes Primideal in  $S$ .

*Beweis.*

$$\mathfrak{q}S_f = \left\{ \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n} \in S_f \mid \begin{array}{l} b \text{ homogen, } \deg b = l \deg f \\ \frac{b}{f^l} \in \mathfrak{q}, c \in S, n \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

Bemerke, dass  $\mathfrak{p}$  ein homogenes Ideal ist, weil  $\mathfrak{q}S_f$  es ist. Genauer:  $S_f = \bigoplus_{n \geq 0} S_{f,n}$  mit

$$S_{f,n} := \left\{ \frac{c}{f^m} \mid c \text{ homogen, } \deg c - m \deg f = n \right\}.$$

Es bleibt also zu zeigen: Sind  $a, a' \in S$  homogen und  $aa' \in \mathfrak{p}$ , so folgt  $a \in \mathfrak{p}$  oder  $a' \in \mathfrak{p}$ .

Sei dazu  $r = \deg a$ ,  $s = \deg a'$ . Aus  $aa' \in \mathfrak{p}$  folgt  $\lambda(aa') = \frac{aa'}{1} \in \sqrt{\mathfrak{q}S_f}$ . Also existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k \in \mathfrak{q}S_f$ , also  $\left(\frac{aa'}{1}\right)^k = \frac{b}{f^l} \frac{c}{f^n}$  wie oben. Potenzieren mit  $\deg f$  ergibt

$$\frac{a^{k \deg f} a'^{k \deg f}}{f^{kr} f^{ks}} = \frac{b^{\deg f}}{f^{l \deg f}} \frac{c^{\deg f}}{f^{n \deg f}} \frac{1}{f^{kr} f^{ks}} \in S_f.$$

□

**Leider noch nicht fertig :- (**

wir definieren  $\mathbb{P}_A^n := \operatorname{Proj}(A[X_0, \dots, X_n])$  als Schema. Dabei stellen sich aber die Fragen, was dabei  $D_+(X_i)$  sein soll und ob die beiden Varianten übereinstimmen.

**Lemma 4.15.** *Die beiden Varianten der Definition von  $\mathbb{P}_A^n$  stimmen überein und es gilt*

$$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} S_{(X_i)} \cong \mathbb{A}_A^n.$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :- (**

## 4.3 Immersionen und projektive $A$ -Schemata

### Definition 4.16 (offene und abgeschlossene Immersion).

Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  von Schemata heißt

1. *offene Immersion*, wenn es  $U \subseteq^\circ X$  gibt, so dass

$$f : (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\cong} (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{(\iota, \iota^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$$

2. *abgeschlossene Immersion*, wenn gilt:

- $f$  ist topologisch ein Homöomorphismus auf  $\text{im } f := Z \subset X$  abgeschlossen,
- $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$  ist ein surjektiver Garbenmorphismus, d.h. für alle  $y \in Y$  ist

$$f_{(f(y))}^\# : \mathcal{O}_{X, f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$$

surjektiv.

Wir schreiben dann auch  $Y \hookrightarrow X \rightarrow Y$ .

**Beispiel 4.17.** Ist  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , so induziert

$$A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{a}$$

eine abgeschlossene Immersion

$$f : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$$

*Beweis. Leider noch nicht fertig :-)*

**Bemerkung 4.18.** Es ist  $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{b})$  genau dann, wenn  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ . Aber es folgt nicht notwendigerweise  $A/\mathfrak{a} \stackrel{?}{\cong} A/\mathfrak{b}$ !

Dazu betrachte einen Ring  $A$  mit nilpotenten Elementen, d.h.  $\text{Nil } A := \sqrt{(0)} \neq (0)$  und

$$f : \text{Spec } A/\text{Nil}(A) \hookrightarrow \text{Spec } A$$

ist eine abgeschlossene Immersion mit

$$\text{im } f = V(\text{Nil}(A)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \text{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}\} = \text{Spec } A.$$

Jedoch ist dies *kein* Isomorphismus.

### Definition 4.19 (abgeschlossenes Unterschema).

Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine abgeschlossene Immersion, so nennen wir  $Y$  ein (bzgl.  $f$ ) *abgeschlossenes Unterschema* von  $X$ .

### Definition 4.20 (projektives Schema über $A$ ).

Sei  $A$  ein Ring. Ein *projektives Schema über  $A$*  ist ein  $A$ -Schema  $X$  mit einer abgeschlossenen Immersion, so dass

$$\begin{array}{ccc} \iota : X & \xhookrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_A^n \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } A & \end{array}$$

für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  kommutiert.

**Bemerkung 4.21.** Leider noch nicht fertig :-)

### 4.3.1 Beispiele

Zunächst ein etwas abstrakteres Beispiel.

#### Satz 4.22.

Sei  $S := A[X_0, \dots, X_n]$ . Ist  $\mathfrak{b} \triangleleft S$  ein homogenes Ideal, so ist  $B := S/\mathfrak{b}$  in natürlicher Weise eine graduierte  $A$ -Algebra und  $\text{Proj}(B)$  ein projektives  $A$ -Schema.

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

Und nun einige konkrete!

**1.  $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k)$  und  $\mathbb{P}_k^n$ .** Sei  $k$  ein Körper. Wir haben  $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) := k^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  und dagegen  $\mathbb{P}_k^n := \text{Proj } k[T_0, \dots, T_n]$ .

Eine algebraische Menge in  $\mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k)$  ist per definitionem

$$Z := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

für  $f_1(T_0, \dots, T_n), \dots, f_r(T_0, \dots, T_n) \in k[T_0, \dots, T_n]$  homogen.

#### Satz 4.23.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{P}_{\text{klass}}^n(k) &\rightarrow \mathbb{P}_k^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto \langle x_i T_j - x_j T_i \mid i, j \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion auf

$$\mathbb{P}_k^n(k) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^n \mid \mathfrak{p} \text{ ist } k\text{-rational}\} = \text{Hom}_{\text{Sch}_k}(\text{Spec } k, \mathbb{P}_k^n).$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Bemerkung 4.24.** Wir haben dies auch schon affin gesehen:

$$\begin{aligned} k^n = \mathbb{A}_{\text{klass}}^n(k) &\rightarrow \mathbb{A}_k^n = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n] \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.25.** Sei  $X$  ein Schema. Wir erinnern daran, dass

$$X(K) := \text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } k, X) = \{(\varphi, \varphi^\#) : \text{Spec } k \rightarrow X\}$$

mit

$$\varphi_\eta : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } k, \eta} = k$$

mit  $x = \varphi(\eta)$ , wobei topologisch  $\text{Spec } k = \{\eta\}$ . Damit haben wir

$$\overline{\varphi_\eta} : \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = k(x) \hookrightarrow k$$

(Körperhomomorphismen sind immer injektiv) und wir erhalten folgende 1-1 Beziehung:

$$X(k) \stackrel{1-1}{=} \{x \in X \text{ zusammen mit Inklusionen } \iota : k(x) \hookrightarrow k\}.$$

Beachte dabei:

$$X \in \text{Obj}(\text{Sch}) \rightsquigarrow X(k) := \text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } k, X)$$

$$Y \in \text{Obj}(\text{Sch}|_k) \rightsquigarrow Y(k) := \text{Hom}_{\text{Sch}|_k}(\text{Spec } k, Y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Spec } k & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \text{id} & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array} \right\}$$

In diesem Sinne ist  $\mathbb{P}_k^n$  als  $k$ -Schema zu lesen mit  $\mathbb{P}_k^n \rightarrow \text{Spec } k$ .

**2. Projektiver Abschluss** Sei  $\mathfrak{a} \triangleleft k[Y_1, \dots, Y_n]$ , so hat man die abgeschlossene Immersion

$$\mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

mit Bild  $V(\mathfrak{a})$ .

Betrachte die Homogenisierung von  $\mathfrak{a}$  in  $k[T_0, \dots, T_n]$ : Sei  $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ . Definiere

$$f_i^{\mathrm{homo}}(T_0, \dots, T_n) := T_0^{\deg f_i} f_i\left(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}\right) \in k[T_0, \dots, T_n].$$

Damit können wir nun folgenden Satz formulieren.

**Satz 4.26.**

Ist  $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$  eine abgeschlossene Immersion,  $X = \mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n]/\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ , so nennen wir

$$\bar{X} := \mathrm{Proj} k[T_0, \dots, T_n]/\mathfrak{a}^{\mathrm{homo}} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

mit  $\mathfrak{a}^{\mathrm{homo}} := (f_1^{\mathrm{homo}}, \dots, f_r^{\mathrm{homo}})$  den projektiven Abschluss von  $X$  in  $\mathbb{P}_k^n$ . Es gilt

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{p}^{\mathrm{homo}} & \ni & D_+(T_0) \cap \bar{X} & \hookrightarrow & \bar{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^n \\ \uparrow & & \cong \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathfrak{p} & \ni & X & \hookrightarrow & \mathrm{Spec} k[Y_1, \dots, Y_n] = \mathbb{A}_k^n & \cong & D_+(T_0) \end{array}$$

wobei die Isomorphie an dieser Stelle durch die Definition der homogenen Polynome herrührt.

Bei mir steht „offene Inklusion“, soll wohl aber offene Immersion gemeint sein !?

*Beweis.* klar. □

**Beispiel 4.27.** Sei  $E = \mathrm{Spec} k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - aX - b) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ , so ist

$$\bar{E} = \mathrm{Proj} k[X, Y, Z]/(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3) \subseteq \mathbb{P}_k^2.$$

Als Übung überlege man sich was  $\bar{E} \cap (\mathbb{P}_k^2 \setminus D_+(T_0))$  ist.

# Eigenschaften von Schemata

## 5

## 5.1 Noethersch

### Definition 5.1 ((lokal) noethersch).

$X$  heißt *noethersch*, wenn es eine endliche affine offene Überdeckung gibt, d.h.

$$X = \bigcup_{i=1}^r \operatorname{Spec} A_i$$

mit noetherschen Ringen  $A_i$ .

$X$  heißt *lokal noethersch*, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine affine offene Umgebung  $\operatorname{Spec} A \subseteq X$  hat mit  $A$  noethersch.

**Bemerkung 5.2.** Aus  $X$  lokal noethersch folgt  $\mathcal{O}_{X,x}$  noethersch (Übungsaufgabe). Die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht.

## 5.2 $k$ -Varietäten

### Definition 5.3 (algebraische/projektive $k$ -Varietät).

Sei  $k$  ein Körper. Eine *algebraische  $k$ -Varietät* ist ein  $k$ -Schema  $X$ , das eine endliche offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^r \operatorname{Spec} A_i$$

mit endlich erzeugten  $k$ -Algebren  $A_i$  besitzt.

Eine *projektive  $k$ -Varietät* ist ein projektives  $k$ -Schema.

**Bemerkung 5.4.** • Eine projektive  $k$ -Varietät ist eine algebraische  $k$ -Varietät, da wir die abgeschlossene Immersion

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^n D_+(T_i) \cong \operatorname{Spec} k[Y_0, \dots, Y_n]$$

haben.

- Eine  $k$ -Alegbra  $A$  ist *endlich erzeugt*, wenn es  $n \in \mathbb{N}$  gibt und surjektive  $k$ -Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} k[Y_1, \dots, Y_n] & \twoheadrightarrow & A \\ Y_i & \mapsto & a_i. \end{array}$$

Die  $a_i$  sind dabei die Erzeuger von  $A$ .

## 5.3 Reduzierte Schemata

### Definition 5.5 (reduzierte Ringe).

Ein Ring  $A$  heißt *reduziert*, wenn

$$\sqrt{(0)} =: \text{Nil}(A) = (0),$$

also wenn  $A$  keine nilpotenten Elemente hat.

### Definition 5.6 (reduzierte lokal geringte Räume).

$X$  heißt *reduziert*, wenn  $\mathcal{O}_{X,x}$  für jedes  $x \in X$  reduziert ist.

### Satz 5.7.

*Es ist äquivalent:*

1.  $X$  ist reduziert.
2. Zu jedem  $x \in X$  existiert eine affin offene Umgebung  $U = \text{Spec } A$  um  $x$  mit  $A$  reduziert.
3.  $\mathcal{O}_X(U)$  ist reduziert für alle offenen  $U \subseteq^\circ X$ .

*Beweis. Leider noch nicht fertig :-)*

## 5.4 Garbifizierung

### Definition 5.8 (Garbifizierung).

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{P}$  eine Prägarbe auf  $X$ . Dann ist die *Garbifizierung* von  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}^\dagger := \left( U \mapsto \mathcal{P}^\dagger(U) := \left\{ f : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{P}_x \left| \begin{array}{l} f(x) \in \mathcal{P}_x \ \forall x \in U \\ \forall x \in U \exists V \text{ mit } x \in V \subseteq^\circ U \\ \text{und } \exists s \in \mathcal{P}(V) \text{ mit } \forall z \in V : f(z) = s_z := [s] \in \mathcal{P}_z. \end{array} \right. \right\} \right)$$

### Satz 5.9.

1.  $\mathcal{P}^\dagger$  ist eine Garbe und man hat einen kanonischen Prägarbenmorphismus  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\dagger$ .
2. Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe, so ist  $\mathcal{F}^\dagger \cong \mathcal{F}$  kanonisch via 1.
3. Für alle  $x \in X$  ist  $(\mathcal{P}^\dagger)_x \cong \mathcal{P}_x$  kanonisch via 1.
4.  $\mathcal{P}^\dagger$  erfüllt die offenbare universelle Eigenschaft.

*Beweis. Leider noch nicht fertig :-)*

**Bemerkung 5.10.** Für einen Ring  $A$  und  $\mathfrak{a} \triangleleft A$  ist

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$$

ein Homöomorphismus auf  $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq \text{Spec } A$ .

**Satz 5.11.**

Sei  $X$  ein Schema. Dann existiert eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Immersion eines reduzierten Schemas  $X^{\text{red}}$

$$X^{\text{red}} \hookrightarrow X$$

mit  $\text{topRaum}(X^{\text{red}}) = \text{topRaum}(X)$ .

**Definition 5.12 (Kern- und Bildgarbe).**

Sei  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Garbenmorphismus. Dann heißen

$$\ker \alpha : (U \mapsto \ker(\alpha(U)))$$

$$\text{im } \alpha : (U \mapsto \text{im}(\alpha(U)))^\dagger$$

Kern- und Bildgarbe von  $\alpha$ .

**Bemerkung 5.13.** In der Tat ist  $\ker \alpha$  bereits eine Garbe.

## 5.5 Sequenzen von Garben und der Homomorphiesatz

**Definition 5.14 (Exakte Sequenz von Garben).**

Eine Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

heißt exakt, falls

- $\text{im } \alpha = \ker \beta$
- $\ker \alpha = 0$
- $\text{im } \beta = \mathcal{H}$

im Sinne von Definition 5.12 gilt.

**Satz 5.15.**

Eine Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

ist exakt genau dann, wenn sie halmweise exakt ist, d.h.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} 0$$

für jedes  $x \in X$  exakt ist.

**Beweis.** Zur Übung. □

**Satz 5.16.**

Ist  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Garbenmorphismus. Es ist äquivalent:

1.  $\alpha$  ist ein Garbenisomorphismus ist, d.h. für alle  $U \subseteq^\circ X$  ist  $\alpha(U)$  ein Isomorphismus (von Ringen),
2.  $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  ist ein Isomorphismus.



Beweis. klar. □

### Satz 5.17 (Homomorphiesatz für Garben).

Ist

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben, so induziert  $\alpha$  einen Isomorphismus

$$\bar{\alpha} : \mathcal{F} / \ker \alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}.$$

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

## 5.6 Reduzierte Schemata II

### Satz 5.18.

Sei  $X$  ein Schema,  $Z \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann kann man auf  $Z$  eine Schemastruktur definieren, so dass  $(Z, \mathcal{O}_Z) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  eine abgeschlossene Immersion ist und  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  reduziert ist. Diese ist eindeutig und heißt reduzierte Unterschema-Struktur.

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

## 5.7 Integere Schemata

### Definition 5.19 (integres Schema).

Ein Schema  $X$  heißt *integer*, wenn für jedes  $U \subseteq^\circ X$  offen der Ring  $\mathcal{O}_X(U)$  nullteilerfrei ist.

**Bemerkung 5.20.**  $X = \operatorname{Spec} A$  ist integer genau dann, wenn  $A$  nullteilerfrei.

**Lemma 5.21.** Ist  $A$  nullteilerfrei, so ist für jedes  $U \subseteq^\circ X = \operatorname{Spec} A$  der kanonische Morphismus

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\eta} = \operatorname{Quot}(A)$$

für  $\eta = (0)$  injektiv. Ferner ist für  $V \subseteq^\circ U$  die Restriktion  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  injektiv.

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

### Satz 5.22.

Ein Schema  $X$  ist genau dann integer, wenn  $X$  reduziert und irreduzibel ist.

Beweis. **Leider noch nicht fertig :-)**

# Faserprodukt

## Definition 6.1 (Faserprodukt).

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Z \rightarrow Y$  Schemamorphismen. Dann ist das *Faserprodukt*  $X \times_Y Z$  ein Schema zusammen mit Morphismen  $X \times_Y Z \xrightarrow{\alpha} X$  und  $X \times_Y Z \xrightarrow{\beta} Z$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow \beta & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutiert und  $(X \times_Y Z, \alpha, \beta)$  damit universell ist, d.h.

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \searrow \exists! & & \searrow \\ X \times_Y Z & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow \beta & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

## 6.1 Anwendungen

### 6.1.1 Faser eines Morphismus

#### Definition 6.2 (Faser eines Morphismus).

Ist  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\text{Spec } k \in Y$  ein  $k$ -rationaler Punkt in  $Y$  (beispielsweise  $k := k(y) := \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ ), so heißt

$$X \times_Y \text{Spec } k =: X_y$$

die *Faser von  $f$  über  $y \in Y$* .

### 6.1.2 Basiswechsel

#### Definition 6.3.

Sei  $X$  ein  $S$ -Schema. Ist  $T$  ein weiteres  $S$ -Schema, so heißt

$$X \times_S T =: X_T$$

der *Basiswechsel vom  $S$ -Schema  $X$  zum  $T$ -Schema  $X_T$* .

**Bemerkung 6.4.** In der Tat ist  $X \times_S T$  in natürlicher Weise ein  $T$ -Schema. Seien nämlich  $f : X \rightarrow S$  und  $g : T \rightarrow S$  die Strukturmorphismen, so haben wir

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow \beta & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{g} & S. \end{array}$$

**Bemerkung 6.5.** Man kann die Definition des Basiswechsels auch kategoriell lesen: Zu  $g : T \rightarrow S$  hat man einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sch}_S & \rightarrow & \mathbf{Sch}_T \\ (X \xrightarrow{f} S) & \mapsto & (X \times_S T \xrightarrow{\beta} T). \end{array}$$

**Definition 6.6 (pull-back von Schemata).**

In obiger Situation heißt ein  $A$  mit

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

pull-back, falls  $A = X \times_Y Z$ .

**Satz 6.7.**

In **Sch** existiert zu jedem  $X \xrightarrow{f} Y$ ,  $Z \xrightarrow{g} Y$  ein Faserprodukt  $X \times_Y Z$ . Es ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Für  $X = \operatorname{Spec} A$ ,  $Y = \operatorname{Spec} B$ ,  $Z = \operatorname{Spec} R$  gilt sogar

$$X \times_Y Z = \operatorname{Spec} A \otimes_R B.$$

*Beweis. Leider noch nicht fertig :-)*

**Bemerkung 6.8.** Es gilt:

- $X \times_S S = X$ .
- $X \times_S Y = Y \times_S X$ .
- $(X \times_S Y) \times_S Z = X \times_S (Y \times_S Z)$ .
- Für  $X \rightarrow S$  und  $Z \rightarrow Y \rightarrow S$  gilt

$$(X \times_S Y) \times_Y Z = X \times_S Z.$$

**Lemma 6.9.** Sei  $f : X \rightarrow Y$ .  $y \in Y$  mit Restklassenkörper  $k(Y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ . In

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) & =: & X_y \xrightarrow{p} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} k(y) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ist  $p$  ein Homöomorphismus auf  $f^{-1}(y) \subseteq X$ .

*Beweis. Leider noch nicht fertig :-)*

# Glatt, regulär & normal

---

7

# k-Varietät

---

# 8

# Der Punkteffektor

---

# 9

# $\mathcal{O}_X$ -Moduln

# 10

## 10.1 $\mathcal{O}_X$ -Moduln

### Definition 10.1 ( $\mathcal{O}_X$ -Modul).

Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul (oder eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe) ist eine Garbe  $\mathcal{M}$  zusammen mit einer  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulstruktur auf  $\mathcal{M}(U)$  für jedes offene  $U \subseteq X$ , so dass für  $V \subseteq U \subseteq X$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) \\ \downarrow \cdot|_V \times \cdot|_V & & \downarrow \cdot|_V \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

Ein Morphismus  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  von solchen ist ein Garbenmorphismus  $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ , so dass für jedes  $U \subseteq X$   $\alpha(U) : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}'(U)$   $\mathcal{O}_X(U)$ -linear ist.

**Bemerkung 10.2.** Man hat einige Konstruktionen aus der kommutativen Algebra auch für  $\mathcal{O}_X$ -Moduln, wie z.B.

- $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' : U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$ .
- $\oplus_{i \in I} \mathcal{M}_i$  von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln  $\mathcal{M}_i$ .
- Für  $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$   $\mathcal{O}_X$ -Modul-Morphismus haben wir  $\ker \alpha$  und  $\operatorname{im} \alpha$ , wobei Kern und Bild in  $\mathbf{Sh}_X$  zu lesen sind.

### Definition 10.3 (frei, lokal frei).

Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{M}$  heißt

- *frei*, wenn es eine Menge  $I$  und einen  $\mathcal{O}_X$ -Modul-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$$

gibt,

- *lokal frei* oder *Vektorbündel von Rang  $r$* , wenn es zu jedem  $x \in X$  ein  $U \subseteq X$  und einen  $\mathcal{O}_U$ -Modul-Isomorphismus

$$\mathcal{O}_U^r \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}|_U$$

gibt.

## 10.2 Exkurs: Vektorbündel in der Topologie

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel vom Rang  $r$  eine stetige Abbildung  $\pi : E \rightarrow X$  mit einer  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur auf  $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$  zusammen mit einem sog Bündelatlas, bestehend aus Karten

$$\psi_U : E|_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

mit  $\text{pr}_U \circ \psi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ , d.h.

$$\begin{array}{ccc} E|_U = \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\approx} & U \times \mathbb{R} \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

kommutiert und die Karten sind

- Homöomorphismen und so, dass
- $\psi_x : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$  ein linearer Isomorphismus ist.

**Wie verstehen wir das als Garbe von Moduln?** Setze  $\mathcal{O}_X := U \mapsto \mathcal{O}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ , also die Garbe der stetigen Funktionen. Dann ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum. Weiter haben wir  $E \xrightarrow{\pi} X$  stetig. Setze

$$\mathcal{E} : U \mapsto \mathcal{E}(U) := \{\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq E \mid \sigma \text{ stetig}, \pi \circ \sigma = \text{id}_U\}.$$

Dies ist eine Garbe.  $\mathcal{E}$  ist sogar eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe: Für  $U \subseteq^\circ X$  gilt

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), (f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma.$$

wobei

$$\begin{array}{ccc} f \cdot \sigma : U & \rightarrow & \pi^{-1}(U) \\ x & \mapsto & \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sigma(x)}_{\in E_x} \end{array}$$

und  $E_x$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

Bleibt nur noch zu klären, wie die Bündelkarten  $\psi_U : E|_U = \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^r$  eingehen:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad} & U \times \mathbb{R}^r \\ \swarrow \pi & \searrow \psi_U \circ \sigma & \uparrow \cong \\ \mathcal{E}(U) \ni \sigma & \xrightarrow{\quad} & U \end{array}$$

$\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^r$  ist eine stetige Abbildung, also  $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)^r$ . Weiter liefert  $\psi_U$  einen  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul-Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(U) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_X(U)^r \\ \sigma & \mapsto & \text{pr}_{\mathbb{R}^r} \circ \psi_U \circ \sigma \\ \psi_U^{-1} \circ (\text{id}_U \times \alpha) & \leftarrow & \alpha. \end{array}$$

Schränkt man auf  $V \subseteq^\circ U$  ein, ist dies verträglich. Also

$$\mathcal{E}|_V \cong \mathcal{O}_X(V)$$

als  $\mathcal{O}_X|_U$ -Modulgarben.

### 10.3 Quasi-Kohärenz

#### Definition 10.4 (quasi-kohärent).

Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{M}$  heißt *quasi-kohärent*, wenn es zu jedem  $x \in X$  ein  $U \subseteq^\circ X$  und Mengen  $I, J$  und eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_U$ -Modulgarben

$$\mathcal{O}_X|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{M}|_U \longrightarrow 0$$

gibt.



**Definition 10.5 (von seinen globalen Schnitten erzeugt).**

Ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{M}$  wird *von seinen globalen Schnitten erzeugt*, wenn für jedes  $x \in X$  der Morphismus von  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Moduln

$$\mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{M}_x$$

surjektiv ist.

Mit anderen Worten: Jeder Keim  $m_x \in \mathcal{M}_x$  lässt sich schreiben als

$$m_x = \sum_{\text{endl. viele } i} \lambda_i [\sigma_i]_x$$

für  $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  und  $\sigma_i \in \mathcal{M}(X)$ .

Dies gilt nicht für  $\mathcal{O}_X$  selbst; betrachte beispielsweise  $X = \mathbb{CP}^1$  und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der holomorphen Funktionen.

**Bemerkung 10.6.** Es existiert ein surjektives  $\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{M}|_U$  genau dann, wenn  $\mathcal{M}|_U$  durch seine auf  $U$  globalen Schnitte erzeugt wird.

$\mathcal{M}$  ist quasi-kohärent genau dann, wenn  $\mathcal{M}|_U$  durch seine globalen Schnitte erzeugt wird und die Relationen (also  $\ker(\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{M})$ ) auch.

## 10.4 Quasikohärente Garben auf Spec A

**Beachte folgende Konstruktion** Ist  $M$  ein  $A$ -Modul, so betrachte

- für  $f \in A$ :  $M_f = M \otimes_A A_f$  als  $A_f = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$ -Modul.
- für  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ :  $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$  als  $A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\text{Spec } A, \mathfrak{p}}$ -Modul.

Dies ist eine  $\mathfrak{B}$ -Garbe für  $\mathfrak{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$  der Basis der Topologie auf Spec A. Dann folgt analog zu Satz 2.33 folgender Satz.

**Satz 10.7.**

Zu gegebenem  $A$ -Modul  $M$  existiert (bis auf Isomorphie) genau eine  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -Modulgarbe  $M^\sim$  auf  $X = \text{Spec } A$  mit

$$\begin{aligned} M^\sim(D(f)) &\cong M_f \\ (M^\sim)_{\mathfrak{p}} &\cong M_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $M^\sim(\text{Spec } A) = M$ .

**Satz 10.8.**

Der Funktor

$$\begin{aligned} \sim : \quad A\text{-}\mathbf{Mod} &\rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A}\text{-}\mathbf{Mod} \\ M &\mapsto M^\sim \\ (M \xrightarrow{\varphi} N) &\mapsto (M^\sim \xrightarrow{\varphi^\sim} N^\sim) \end{aligned}$$

ist exakt.

*Beweis.* Es ist zu zeigen: Ist

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

eine exakte Sequenz in  $A\text{-Mod}$ , so ist

$$(M')^\sim \xrightarrow{\alpha^\sim} M^\sim \xrightarrow{\beta^\sim} (M'')^\sim$$

eine exakte Sequenz in  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}\text{-Mod}$ . Letzteres ist aber äquivalent dazu, dass

$$(M')_{\mathfrak{p}}^\sim \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}^\sim} M_{\mathfrak{p}}^\sim \xrightarrow{\beta_{\mathfrak{p}}^\sim} (M'')_{\mathfrak{p}}^\sim$$

eine exakte Halmsequenz für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  ist. Dies ist aber klar, weil  $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$  flach über  $A$  ist ([2, Example 9.1.1] oder [1, Abschnitt 7 Satz 8]) und  $M_{\mathfrak{p}}^\sim = M_{\mathfrak{p}} \cong M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ .  $\square$

**Korollar 10.9.** Für einen  $A$ -Modul  $M$  ist  $M^\sim$  quasi-kohärent.

*Beweis.* Für  $M$  hat man

$$A^{(J)} \rightarrow A^{(I)} \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0.$$

Nun wähle beispielsweise  $I := M$  und  $J := \ker \varphi$ . Ferner ist

$$(A^{(J)})^\sim = (\oplus_{j \in J} A)^\sim = \oplus_{j \in J} A^\sim = \oplus_{j \in J} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{(J)}$$

und da  $\sim$  exakt ist, folgt die Exaktheit von

$$\mathcal{O}_X^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow M^\sim \rightarrow 0.$$

$\square$

**Bemerkung 10.10.** Sind  $M$  und  $N$   $A$ -Moduln, so ist

$$(M \otimes_A N)^\sim = M^\sim \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec } A}} N^\sim.$$

**Satz 10.11.**

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Dann ist eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{M}$  genau dann quasi-kohärent, wenn für jede affin offene Teilmenge  $U$  ein Isomorphismus

$$\mathcal{M}|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$$

existiert.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “. Folgt aus Korollar 10.9.

„ $\Rightarrow$ “. Aus nachstehenden Hilfslemmas haben wir die Behauptung, da  $\mathcal{M}(U)^\sim$  durch die Eigenschaft auf den  $D(f)$ s festgelegt ist.  $\square$

**Hilfslemma 10.12.** In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für jedes  $x \in X$  existiert ein affin offenes  $x \in U \subseteq^\circ X$  mit  $\mathcal{M}|_U \cong (\mathcal{M}(U))^\sim$ .

*Beweis.* Man hat den kanonischen Garbenmorphismus

$$(\mathcal{M}(U))^\sim \rightarrow \mathcal{M}|_U.$$

Dieser rührt her von

$$(\mathcal{M}(U))^\sim(D(f)) = \mathcal{M}(U)_f \xrightarrow{e} \mathcal{M}(D(f)),$$

welcher induziert wird von den beiden Restriktionen  $\text{res}^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(D(f))$  und  $\text{res}^{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$ , da wird  $\mathcal{M}(U)$  als einen  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul und  $\mathcal{M}(D(f))$  als einen  $\mathcal{O}_X(D(f))$ -Modul auffassen wollen. Demnach haben wir für  $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$  und  $m \in \mathcal{M}(U)$

$$\text{res}^{\mathcal{M}}(\lambda m) = \text{res}^{\mathcal{O}}(\lambda) \text{res}(m).$$

Weiter ist  $f \in A_f^\times = (\mathcal{O}_U(D(f)))^\times$ , also dort invertierbar und wir können setzen

$$\rho\left(\frac{m}{f^n}\right) := \text{res}(m)f^{-n}.$$

Da  $\mathcal{M}$  quasi-kohärent existiert für alle  $x \in X$  ein affin offenes  $x \in U \subseteq^\circ X$ , so dass

$$\mathcal{O}_X|_U^{(J)} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X|_U^{(I)} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}|_U \rightarrow 0$$

exakt ist. Insbesondere haben wir

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \rightarrow \mathcal{M}(U).$$

Setze nun  $N := \text{im}(\alpha(U)) \subseteq \mathcal{M}(U)$ .  $N$  ist ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Untermodule. Damit ist

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \rightarrow N \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X(U)$ -Moduln. Wir wenden  $\sim$  an und da  $\sim$  exakt (Satz 10.8) erhalten wir

$$\mathcal{O}_X|_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_X|_U^{(I)} \rightarrow N^\sim \rightarrow 0.$$

Mit dem Homomorphiesatz folgt dann  $\mathcal{M}|_U \cong N^\sim$ .  $\square$

**Hilfslemma 10.13.** In der Situation von Satz 10.11 gilt: Für beliebiges  $U = \text{Spec } A \subseteq^\circ X$  und  $f \in A = \mathcal{O}_X(U)$  gilt

$$\mathcal{M}(U)_f \cong \mathcal{M}(D(f)).$$

*Beweis.* Wir überdecken  $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$  durch endlich viele affin offene  $U_i$  (es reichen endlich viele, da  $\text{Spec } A$  quasi-kompakt!). Die  $U_i$  wählen wir dabei so, dass sie die Eigenschaften im ersten Hilfslemma genügen und setzen  $V_i = U_i \cap D(f) = D(f|_{U_i})$ . Dann haben wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(U)_f & \longrightarrow & \oplus_i \mathcal{M}(U_i)_f & \longrightarrow & \oplus_{(i,j)} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)_f \\ & & \text{kanonisch} \downarrow \alpha & & \beta \downarrow \cong & & \gamma \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(D(f)) & \longrightarrow & \oplus_i \mathcal{M}(V_i) & \longrightarrow & \oplus_{(i,j)} \mathcal{M}(V_i \cap V_j), \end{array}$$

wobei die Zeilen jeweils exakt sind und die Isomorphismen sich aus dem ersten Hilfslemma ergeben. Man erjagt sich aus  $\beta$  ein Isomorphismus, dass  $\alpha$  injektiv ist und zusammen mit  $\gamma$  einem Isomorphismus, kann man erneut auf Jagd gehen und die Surjektivität von  $\alpha$  erlegen.  $\square$

#### Satz 10.14.

Ist  $X = \text{Spec } A$  affin und

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben und ist  $\mathcal{M}'$  quasikohärent, so ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{M}''(X) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von  $A$ -Moduln.

Bevor wir den Beweis des Satzes angeben, wollen wir in folgendem Lemma und anschließendem Beispiel sehen, dass die Bedingung der Quasikohärenz wirklich notwendig ist, um Rechtsexaktheit zu garantieren.

**Lemma 10.15.** Für jeden topologischen Raum  $X$  ist

$$\Gamma(X, \_) : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{Ab}, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X) =: \Gamma(X, \mathcal{F})$$

linksexakt, d.h. ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in  $\mathbf{Sh}_X$ , so ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X)$$

eine exakte Sequenz in  $\mathbf{Ab}$ .

**Beweis.** Zeigen wir zunächst die Injektivität von  $\alpha(X)$ : Sei  $\sigma \in \mathcal{F}(X)$  mit  $\alpha(X)\sigma = 0 \in \mathcal{G}(X)$ , so ist  $[\alpha(X)\sigma]_x = 0 \in \mathcal{G}_x$  für alle  $x \in X$ , also ist  $\alpha_x([\sigma]_x) = 0$  mit  $[\sigma]_x \in \mathcal{F}_x$  und da  $\alpha_x$  injektiv nach Voraussetzung, folgt  $[\sigma]_x = 0$ , ergo  $\sigma = 0$ .

Als zweites folgern wir  $\ker \beta(X) = \operatorname{im} \alpha(X)$ : Da  $\beta \circ \alpha = 0$ , folgt  $\beta(X) \circ \alpha(X) = 0$ , also  $\operatorname{im} \alpha(X) \subseteq \ker \beta(X)$ . Sei nun  $\sigma \in \ker \beta(X)$ . Insbesondere gilt für jedes  $U \subseteq^\circ X$ , dass  $\beta(U)\sigma|_U = 0 \in \mathcal{H}(U)$ . Da  $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$  nach Voraussetzung, existiert eine offene Überdeckung  $X = \cup_{i \in I} U_i$  mit  $\ker \beta(U_i) = \operatorname{im} \alpha(U_i)$ . Also finden wir zu jedem  $i \in I$  ein  $\tau_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $\alpha(U_i)\tau_i = \sigma|_{U_i}$ . Wir müssen nur noch sehen, dass diese geeignet verkleben: Es gilt

$$\alpha(U_i \cap U_j)\tau_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma|_{U_i \cap U_j} = \alpha(U_i \cap U_j)\tau_j|_{U_i \cap U_j}$$

und mit der Injektivität von  $\alpha(U_i \cap U_j)$  folgt

$$\tau_i|_{U_i \cap U_j} = \tau_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Also verkleben die  $(\tau_i)_{i \in I}$  zu  $\tau \in \mathcal{F}(X)$  mit  $\alpha(X)\tau = \sigma$ . □

**Beispiel 10.16.** In Lemma 10.15 ist die Rechtsexaktheit im Allgemeinen nicht gegeben, wie man am Beispiel  $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sieht: Setze  $\mathcal{G} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}$  die Garbe der holomorphen Funktionen und  $\mathcal{H} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}^\times$  die Garbe der nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen, so ist

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\exp} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, aber

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \xrightarrow{\exp} \mathcal{H}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\times}^\times(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

ist alles, da die letzte Abbildung nicht surjektiv ist (es gibt keinen komplexen Logarithmus auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

**Beweis (von Satz 10.14).** Nach Lemma 10.15 bleibt noch zu zeigen, dass  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}''(X)$  surjektiv ist. Wir wählen eine Überdeckung  $X = \cup_i U_i$ , von offenen  $\mathcal{U} = (U_i)_i$ , so dass auf den  $U_i$  die Sequenz exakt ist. Nun können wir oBdA annehmen, dass

1.  $U_i$  basisoffen sind, also  $U_i = D(f_i)$  für geeignete  $f_i \in A$
2. und  $\#I < \infty$ , da  $X = \operatorname{Spec} A$  quasikompakt ist.

Mir ist noch nicht ganz klar, warum das geht.

Sei  $\sigma \in M''(X)$  beliebige. Zu jedem  $i \in I$  wähle  $\tau_i \in \mathcal{M}(U_i)$ , so dass  $\beta(U_i)(\tau_i) = \sigma|_{U_i}$ . Wir führen die Schreibweise  $U_{ij} := U_i \cap U_j$  ein und damit ist  $\beta(U_{ij})(\tau_i|_{U_{ij}}) = \sigma|_{U_{ij}} = \beta(U_{ij})(\tau_j|_{U_{ij}})$ , also

$$\tau_i|_{U_{ij}} - \tau_j|_{U_{ij}} \in \ker \beta(U_{ij}) = \operatorname{im} \alpha(U_{ij}),$$

wobei wir die letzte Gleichheit aus der Linksexaktheit haben. Damit können wir oBdA  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$  als untergarbe ansehen, also  $\mathcal{M}'(U) \subseteq \mathcal{M}(U)$  als Untermodul. Setze nun  $\eta_{ij} := \tau_i|_{U_{ij}} - \tau_j|_{U_{ij}} \in \mathcal{M}'(U_{ij})$  für jedes Paar  $(i, j)$ .

Diese  $(\eta_{ij})_{i,j}$  sind also das „Hindernis“, dass die  $(\tau_i)_i$  verkleben zu einem  $\tau \in \mathcal{M}(X)$ ! Es ist

$$0 = d(\eta_{ij})_{i,j} = \left( \eta_{ij}|_{U_{ijk}} - \eta_{ik}|_{U_{ijk}} + \eta_{jk}|_{U_{ijk}} \right)_{i,j,k}.$$

Das  $d$  werden wir später erklären! Nach Wahl der  $U_i = D(f_i)$ ,  $U_{ij} = D(f_i f_j)$  ist

$$\eta_{ij} = \frac{a_{ij}}{(f_i f_j)^r} \in \mathcal{M}'(D(f_i f_j)) = \mathcal{M}'(X) \sim (D(f_i f_j)) = \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j}$$

mit  $a_{ij} \in \mathcal{M}'(X)$ , wobei die Gleichheit hier durch die Quasikohärenz von  $\mathcal{M}'$  mit Satz 10.11 gegeben ist. Ferner ist zu bemerken, dass  $r$  nicht von  $i, j$  abhängt. Dies können wir oBdA erreichen, da  $\#I < \infty$ . Damit haben wir:

$$0 = \frac{a_{ij}}{(f_i f_j)^r}|_{U_{ijk}} - \frac{a_{ik}}{(f_i f_k)^r}|_{U_{ijk}} + \frac{a_{jk}}{(f_j f_k)^r}|_{U_{ijk}} \in \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j f_k}.$$

Die Restriktionen sind aber gerade gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'(D(f_i f_j)) & \xrightarrow{-|_{U_{ijk}}} & \mathcal{M}'(D(f_i f_j f_k)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j} & \longrightarrow & \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j f_k} \\ & & \frac{a}{(f_i f_j)^r} \longmapsto \frac{a f_k^r}{(f_i f_j f_k)^r}, \end{array}$$

also haben wir

$$0 = \frac{a_{ij} f_k^r}{(f_i f_j f_k)^r} - \frac{a_{ik} f_j^r}{(f_i f_j f_k)^r} + \frac{a_{jk} f_i^r}{(f_i f_j f_k)^r} \in \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j f_k}.$$

Da aber die Lokalisierung an  $f_i f_j f_k$  gerade die Lokalisierung an  $f_k$  von der Lokalisierung an  $f_i f_j$  ist, existiert  $l \in \mathbb{N}$ , so dass

$$0 = f_k^{l+r} \frac{a_{ij}}{(f_i f_j)^r} - f_k^l f_j^r \frac{a_{ik}}{(f_i f_k)^r} + f_k^l f_i^r \frac{a_{jk}}{(f_j f_k)^r} \in \mathcal{M}'(X)_{f_i f_j} \quad (1)$$

Da es nur endlich viele Indizes gibt, haben wir diese Gleichheit für alle  $k \in I$  und für alle  $(i, j) \in I^2$ .

Nun ist  $D(f_k) = D(f_k^{r+l})$  und  $\operatorname{Spec} A = \cup_{k \in I} D(f_k^{r+l})$ , also

$$\bigcap_{k \in I} V((f_k^{r+l})) = V\left(\sum_{k \in I} f_k^{r+l}\right) = \emptyset = V(A) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \in \sum_{k \in I} (f_k^{r+l}).$$

Damit ist  $1 = \sum_{k \in I} h_k f_k^{r+l}$  für geeignete  $h_k \in A$ . Setzen wir nun

$$g_i := \sum_{k \in I} h_k f_k^l \frac{a_{ik}}{f_i^r} \in \mathcal{M}'(X)_{f_i} = (\mathcal{M}'(X))^{\sim}(D(f_i)) = \mathcal{M}'(U_i),$$

wobei sich letzte Gleichheit wieder aus der Quasikohärenz ergibt, so haben wir

$$g_i|_{U_{ij}} - g_j|_{U_{ij}} = \sum_{k \in I} h_k f_k^l \left( f_j^r \frac{a_{ik}}{(f_i f_j)^r} - f_i^r \frac{a_{jk}}{(f_i f_j)^r} \right) = \underbrace{\sum_{k \in I} h_k f_k^{r+l}}_{=1} \frac{a_{ij}}{(f_i f_j)^r} = \eta_{ij} \in \mathcal{M}'(U_{ij}),$$

wobei wir diesen Schritt durch Umformung von ?? erhalten haben. Definieren wir nun  $\mu_i := \tau_i - g_i \in \mathcal{M}(U_i)$ , so haben wir für alle  $i, j \in I$

$$\mu_i|_{U_{ij}} - \mu_j|_{U_{ij}} = \eta_{ij} - \eta_{ij} = 0$$

Also existiert ein eindeutiger globaler Schnitt  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\mu|_{U_{ij}} = \mu_i$  für alle  $i \in I$ .

Benutzen wir nun alles bisherige, so erhalten wir für alle  $i \in I$

$$\beta(X)(\mu)|_{U_i} = \beta(U_i)(\mu|_{U_i}) = \beta(U_i)(\mu_i) = \beta(U_i)(\tau_i) = \sigma|_{U_i}.$$

Damit stimmen  $\beta(X)(\mu)$  und  $\sigma \in \mathcal{M}''(X)$  auf  $U_i$  überein. Daher sind sie gleich und wir haben die Surjektivität von  $\beta$  gezeigt.  $\square$

## 10.5 Der Čech-Komplex

Wir gehen hier genauer auf die Verwendung des  $d$  in vorherigem Beweis ein. Der Beweis liefert nämlich gerade, dass  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}'') = 0$ , wie wir mit nachstehender Definition sehen.

### Definition 10.17 (Čech-Komplex, Čech-Kohomologie).

Sie  $X$  ein topologischer Raum.  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung,  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$ . Betrachte den folgenden Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \check{C}^0 & \longrightarrow & \check{C}^1 & \longrightarrow & \check{C}^2 & \longrightarrow & \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{d} & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_{ij}) & \xrightarrow{d} & \prod_{(i,j,k) \in I^3} \mathcal{F}(U_{ijk}) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

$$(\eta_i)_i \longmapsto (\eta_i|_{U_{ij}} - \eta_j|_{U_{ij}})_{i,j}$$

$$(y_{ij})_{i,j} \longmapsto (y_{ij}|_{U_{ijk}} - y_{ik}|_{U_{ijk}} + y_{jk}|_{U_{ijk}})_{i,j,k},$$

so heißt

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := H^k(\text{Čech-Komplex}) := \ker(d : \check{C}^k \rightarrow \check{C}^{k+1}) / \text{im}(d : \check{C}^{k-1} \rightarrow \check{C}^k)$$

die  $k$ -te Čech-Kohomologie von  $\mathcal{F}$  bzgl.  $\mathcal{U}$ .

**Bemerkung 10.18.** Da  $\mathcal{F}$  eine Garbe ist, haben wir  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)!$  Ferner gilt  $d \circ d = 0$  und für  $[(y_{ij})_{i,j}] \in \check{H}^1$  haben wir  $d(y_{ij})_{i,j} = 0$ , d.h.

$$(y_{ij}|_{U_{ijk}} - y_{ik}|_{U_{ijk}} + y_{jk}|_{U_{ijk}})_{i,j,k}$$

Diese Bedingung nennen wir *Ko-Zykel-Bedingung*. Ferner ist  $[(y_{ij})_{i,j}] \in \check{H}^1$  per definitionem, falls ein  $(\eta_i)_i \in \check{C}^0$  existiert, so dass  $(y_{ij})_{i,j} = d(\eta_i)_i$ , also

$$y_{ij} = \eta_i|_{U_{ij}} - \eta_j|_{U_{ij}}.$$

Daher nennen wir in dieser Situation  $(y_{ij})_{i,j}$  einen *Ko-Rand*.

## 10.6 Kohärenz

### Definition 10.19 (endlich erzeugt, kohärent).

- Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{M}$  heißt *endlich erzeugt*, falls es zu jedem  $x \in X$  ein offenes  $x \in U \subseteq^\circ X$  gibt und eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_X|_U^n \rightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow 0$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt.

- $\mathcal{M}$  heißt *kohärent*, falls  $\mathcal{M}$  endlich erzeugt ist und wenn für jedes  $\alpha$  in

$$\mathcal{O}_X|_U^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}|_U \rightarrow 0$$

der  $\ker \alpha$  als  $\mathcal{O}_U$ -Modulgarbe endlich erzeugt ist.

**Bemerkung 10.20.** Sei  $A$  ein Ring, so ist ein endlich erzeugter  $A$ -Modul  $M$  nicht anderes, als dass analog zu oben eine exakte Sequenz  $A^n \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt.  $M$  ist kohärent (oder endlich präsentierter), falls  $M$  endlich erzeugt ist und  $\ker \alpha$  endlich erzeugt ist. Letzteres ist bei immer der Fall, falls  $A$  noethersch ist.

Der Unterschied zu Ringmoduln wird in nachstehendem Satz deutlich, wo wir die Quasikohärenz fordern müssen, um garantieren zu können, dass  $\mathcal{M}(U)$  überhaupt erzeugbar ist.

### Satz 10.21.

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal noethersches Schema und  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Dann ist äquivalent:

- (i)  $\mathcal{F}$  ist kohärent.
- (ii)  $\mathcal{F}$  ist endlich erzeugt.
- (iii)  $\forall U \subseteq^\circ X$  affin und offen ist  $\mathcal{F}(U)$  ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul.

**Beweis.** „(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“. Da  $\mathcal{F}$  endlich erzeugt ist, existiert eine offene Überdeckung  $U = \cup_{i \in I} U_i$  für oBdA  $U_i = D(f_i)$  mit  $f_i \in \mathcal{O}_U(U)$ , so dass

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow \mathcal{O}_U|_{U_i}^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz ist. Aus nachstehendem Hilfslemma wissen wir, dass  $\ker \alpha$  ebenfalls quasikohärent ist und diese bleibt mit Satz 10.14 beim Einsetzen von  $U_i$  exakt, also

$$\mathcal{O}_X(U_i)^{n_i} \xrightarrow{\alpha(U_i)} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow 0.$$

Damit ist  $\mathcal{F}(U_i)$  ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -Modul.

Ferner gilt

$$\mathcal{F}(U_i) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U)_{f_i} = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i)$$

und andererseits aufgrund der Quasikohärenz

$$\mathcal{F}(U_i) = \mathcal{F}(U)^\sim(U_i) = \mathcal{F}(U)^\sim(D(f_i)) = \mathcal{F}(U)_{f_i}.$$

Also existiert ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}_X(U)$ -Untermodule  $M_i \subseteq \mathcal{F}(U)$  mit

$$\mathcal{F}(U_i) = M_i \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i),$$

denn: Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i)$  ein Erzeugendensystem über  $\mathcal{O}_X(U_i)$  mit

$$\alpha_k = \sum_{k \text{ endlich}} m_{kj} \otimes \lambda_j$$

mit  $m_{kj} \in \mathcal{F}(U)$  und  $\lambda_j \in \mathcal{O}_X(U_i)$ . Damit erzeugen  $\{m_{kj}\}_{k,j}$  ein solches  $M_i$ .

Da die anfangs gewählte Überdeckung oBdA endlich ist ( $U$  affin, also quasikompakt), existiert ein endlich erzeugtes  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul  $M$  mit

$$M \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_i) \rightarrow 0$$

exakt als Sequenz von  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -Moduln. Betrachte nun Dies ist aber gerade  $M^\sim(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U)^\sim(U_i) \rightarrow 0$ , was die Exaktheit von  $M^\sim \rightarrow \mathcal{F}(U)^\sim \rightarrow 0$  als Sequenz von  $\mathcal{O}_U$ -Modulgarben zur Folge hat. Wir setzen wieder  $U$  ein und erhalten mit Satz 10.14  $M(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow 0$  exakt. Damit ist  $\mathcal{F}(U)$  endlich erzeugt.

„(iii)  $\Rightarrow$  (i)“. Für jedes offene affine  $U$  ist  $\mathcal{F}(U)$  endlich erzeugt, es existiert also eine exakte Sequenz der Form  $\mathcal{O}_X(U)^n \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow 0$ . Da  $\mathcal{F}$  quasikohärent, ist  $\mathcal{F}|_U = \mathcal{F}(U)^\sim$ , wobei  $\sim$  auf  $U = \text{Spec } A$  zu lesen ist. Ergo ist auch  $\mathcal{F}|_U$  endlich erzeugt als  $\mathcal{O}_U$ -Modul. Zu zeigen bleibt: Ist  $\mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$  exakt, so ist  $\ker \alpha$  endlich erzeugt. Dazu sei oBdA  $U = \text{Spec } A$  affin und  $A$  noethersch. Dann ist

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \mathcal{O}_X|_U^n \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

exakt. Mit der Linksexaktheit von  $\Gamma(U, \_)$  ist

$$0 \rightarrow \ker \alpha(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)^n \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

und wieder mit dex Exaktheit von  $\sim$  erhalten wir

$$0 \rightarrow (\ker \alpha(U))^\sim \rightarrow \mathcal{O}_X|_U^n \rightarrow \mathcal{F}|_U.$$

Also ist  $\ker \alpha = (\ker \alpha(U))^\sim$ . Weiter ist  $\ker(\alpha(U)) \subseteq \mathcal{O}_X(U)^n$  ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul, da nach Voraussetzung  $\mathcal{O}_X(U)$  noethersch ist. Folglich ist  $(\ker \alpha(U))^\sim$  eine endlich erzeugte  $\mathcal{O}_X|_U$ -Modulgarbe.  $\square$

**Hilfslemma 10.22.** Ist

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz  $\mathcal{O}_X$ -Moduln und sind  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  quasikohärent, so ist  $\mathcal{K}$  quasikohärent.

*Beweis.* Betrachte  $0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$ . Sei  $U \subseteq^\circ X$  offen, affin. Dann ist

$$0 \rightarrow \ker \alpha(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$$

exakt und nach Satz 10.8 ist auch

$$0 \rightarrow (\ker \alpha(U))^\sim \rightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow \mathcal{N}|_U$$

exakt. Da  $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$  exakt ist, existiert eine offene Überdeckung  $U = \cup D(f_i)$  mit

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(D(f_i)) \rightarrow \mathcal{M}(D(f_i)) \rightarrow \mathcal{N}(D(f_i)) \rightarrow 0$$

exakt. Damit ist

$$\mathcal{K}(D(f_i)) = (\ker \alpha(U))^\sim(D(f_i)) \quad \forall i$$

und folglich  $\mathcal{K}|_{D(f_i)} = (\ker \alpha(U))^\sim|_{D(f_i)}$  für alle  $i$ . Also auch  $\mathcal{K}|_U = (\ker \alpha(U))^\sim$ . Damit ist  $\mathcal{K}|_U$  quasikohärent.  $\square$



## 10.7 Direktes und inverses Bild

### Definition 10.23 (direktes Bild).

$f_* : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{Sh}_Y$  ist in natürlicher Weise auch ein Funktor

$$f_* : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_Y\text{-Mod},$$

denn für  $V \subseteq^\circ Y$  ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(V) \times (f_*\mathcal{F})(V) &\rightarrow \mathcal{O}_Y(V) \times \mathcal{F}(f^{-1}(V)) && \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ (\lambda, \sigma) &\mapsto (f^\#(V)(\lambda)) \cdot \sigma \end{aligned}$$

eine Modulstruktur.  $f_*$  heißt *direktes Bild von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln*.

### 10.7.1 Inverses Bild

Man hat

$$(f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_Y}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$$

da  $f^{-1}$  nach ?? linksadjungiert zu  $f_*$ . Damit ist  $f^{-1}\mathcal{G}$  von natürlicher Weise ein  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul:

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) \times (f^{-1}\mathcal{G})(U) &\longrightarrow (f^{-1}\mathcal{G})(U) \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{O}_Y(V) \times \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{G}(V) &\longrightarrow \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{G}(V) \end{aligned}$$

$$([\lambda], [\sigma]) \longmapsto [\lambda|_{V \cap W} \sigma|_{V \cap W}]$$

für  $\lambda \in \mathcal{O}_Y(V)$  und  $\sigma \in \mathcal{G}(W)$ . Damit können wir definieren

### Definition 10.24 (inverses Bild).

Der *inverse Bildfunktor* ist definiert als

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} &\rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod} \\ \mathcal{G} &\mapsto f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \end{aligned} .$$

## 10.8 Abgeschlossene Unterschemata

Wir wiederholen zunächst ein paar Begriffe: Sei  $X$  ein Schem.  $Z \subset X$  mit Strukturgarbe  $\mathcal{O}_Z$  auf  $Z$  heißt abgeschlossenes Unterschema, wenn  $i : (Z, \mathcal{O}_Z) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  eine abgeschlossene Immersion ist. Zu bemerken sei, dass  $Z \subset X$  als abgeschlossene Teilmenge noch keine Schemastruktur festlegt, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei  $A$  ein Ring und  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} A/\mathfrak{a} & \searrow & \\ \mathfrak{A} & & V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}} \\ \mathrm{Spec} A/\mathfrak{b} & \nearrow & \end{array}$$

Es gilt nämlich  $A/\mathfrak{a} \cong A/\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ .

Das heißt, ein abgeschlossenes Unterschema definieren wir besser wie folgt:

**Definition 10.25 (abgeschlossenes Unterschema).**

Ein *abgeschlossenes Unterschema in  $X$*  ist eine Isomorphieklasse von abgeschlossenen Immersionen, wobei  $(i : Z \hookrightarrow X) \cong (j : Y \hookrightarrow X)$ , falls

$$\begin{array}{ccc} Z & \xhookrightarrow{i} & X \\ \exists \downarrow \cong & & \nearrow j \\ Y & \xhookrightarrow{j} & X \end{array}$$

**Satz 10.26.**

Sei  $X$  ein Schema. Dann ist

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{abgeschlossene Unterschemata} \\ \text{von } X \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{quasikohärente Idealgarben} \\ \text{auf } X \end{array} \right\}$$

$$Z \subsetneq^i X \mapsto \ker i^\#$$

eine Bijektion.

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

## 10.9 Quasikohärente Moduln auf projektiven Schemata

**Satz 10.27.**

Sei  $B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$  ein graduierter Ring, so dass  $B$  von  $B_1$  als  $B_0$ -Algebra erzeugt ist,  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  ein graduierter  $B$ -Modul. Dann existiert auf  $\text{Proj } B$  eine eindeutige  $\mathcal{O}_{\text{Proj } B}$ -Modulgarbe  $M^\sim$ , die quasikohärent ist und folgende Eigenschaften besitzt:

- Ist  $f \in B_+$  homogen, nicht nilpotent, so ist

$$M^\sim|_{D_+(f)} \cong (M_{(f)})^\sim.$$

- Für  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } B$  ist

$$(M^\sim)_{\mathfrak{p}} \cong M_{(\mathfrak{p})}.$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Lemma 10.28.** Sei  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  ein graduierter  $B$ -Modul. Setze  $N := \bigoplus_{n \geq n_0} M_n \subset M$  einen Untermodul. Dann ist  $M^\sim = N^\sim$  auf  $\text{Proj } B$ .

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Bemerkung 10.29.** Für das affine  $\sim$  hat man mehr: Ist  $X = \text{Spec } A$  affin und  $\mathcal{M}$  eine quasikohärente Modulgarbe auf  $X$ , so ist nach Satz 10.7  $\mathcal{M} = (M(X))^\sim$ , also ist  $\mathcal{M}$  bereits durch seine globalen Schnitte festgelegt. Im projektiven Fall sind diese zu wenig.

### 10.9.1 Wichtigstes Beispiel: Der Twist

#### Definition 10.30 ( $n$ -Twist).

Sei  $B = \bigoplus_{d \geq 0}$  ein graduierter Ring, so dass  $B$  von  $B_1$  als  $B_0$ -Algebra erzeugt wird. Für  $n \in \mathbb{Z}$  setze

$$B(n) := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} B(n)_d \quad \text{mit } B(n)_d := B_{n+d}$$

den  $n$ -Twist von  $B$ .

Damit wird  $B(n)$  zu einem graduerten  $B$ -Modul und induziert eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X = \text{Proj } B$ , nämlich

$$\mathcal{O}_X(n) := (B(n))^\sim,$$

den  $n$ -Twist von  $\mathcal{O}_X$ .

**Bemerkung 10.31.** Es ist  $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ , denn

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X|_{D_+(f)} &= B_{(f)} = \left\{ \frac{b}{f^r} \mid b \in B_{r \deg f} \right\} \\ \mathcal{O}_X(0)|_{D_+(f)} &= B(0)_{(f)} = \left\{ \frac{b}{f^r} \mid b \in B_{r \deg f + 0} \right\} \end{aligned}$$

**Bemerkung 10.32.** Im affinen Fall ist  $M$  bereits durch  $\mathcal{M}$  festgelegt, da

$$\mathcal{M}(X) = M^\sim(X) = M^\sim(D(1)) = M_1 = M.$$

Im projektiven Fall geht dies nicht, da sich kein  $D_+(f)$  finden lässt, das  $X$  überdeckt!

#### Satz 10.33.

Sei  $X = \text{Proj } B$ ,  $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$  von  $B_1$  als  $B_0$ -Algebra erzeugt. Dann sind alle  $\mathcal{O}_X(n)$  Geradenbündel (d.h. lokal frei von Rang 1).

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

### 10.9.2 Wiederholung Geradenbündel

#### Definition 10.34 (Geradenbündel).

Ein Geradenbündel  $\mathcal{L}$  ist eine lokal freie  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe von Rang 1, d.h.

- es gibt eine Überdeckung  $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ ,  $U_i \subseteq^\circ X$ ,
- mit Trivialisierungen

$$\mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathcal{O}_X|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$$

- und Basiswechselisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} & \omega_{ij} \in \text{Aut}_{\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}}(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}) = \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} & \xleftarrow[\varphi_i|_{U_i \cap U_j}]{\cong} \mathcal{L}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow[\varphi_j|_{U_i \cap U_j}]{\cong} & \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} \end{array}$$

**Lemma 10.35.** *Bis auf Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  gilt: Sind  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  zwei Geradenbündel auf  $X$ , die über  $\mathcal{U}$  trivialisieren, so gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \cong \mathcal{L}' &\Leftrightarrow [\gamma_{\mathcal{L}}] = [\gamma_{\mathcal{L}'}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times) \\ &\Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{L}} - \gamma_{\mathcal{L}'} \in \text{im } d\end{aligned}$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Lemma 10.36.** *Sei  $B := A[T_0, \dots, T_n]$ . Dann gilt auf  $X = \text{Proj } B = \mathbb{P}_A^n$*

$$\mathcal{O}_X(m)(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) = \begin{cases} B_m & m \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Beweis.* **Leider noch nicht fertig :-)**

**Korollar 10.37.** *Das tautologische Bündel  $\mathcal{O}_X(-1)$  ist nicht trivial (d.h.  $\not\cong \mathcal{O}_X$ ).*

**Definition 10.38 (projektiv, projektives  $S$ -Schema).**

(i) Sei  $S$  ein Basisschema. Definiere

$$\mathbb{P}_S^n := \mathbb{P}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S.$$

(ii) Ein Morphismus von Schemata  $f : X \rightarrow Y$  heißt *projektiv*, wenn er als

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}_Y^n \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

faktorisiert.

(iii) Ein  $S$ -Schema  $X$  heißt *projektives  $S$ -Schema*, wenn der Strukturmorphismus  $f : X \rightarrow S$  projektiv ist.

**Bemerkung 10.39. Zu (i).** Ist  $S = \text{Spec } A$ , so ist  $\mathbb{P}_A^n = \mathbb{P}_{\text{Spec } A}^n$ .

**Zu (iii).** Ein  $\text{Proj } A$ -Schema ist ein abgeschlossenes Unterschema von  $\mathbb{P}_A^n = \text{Proj } A[T_0, \dots, T_n]$ .

**Beispiel 10.40.** Sei  $\mathfrak{a} \triangleleft A[T_0, \dots, T_n]$  homogen, dann ist

$$\text{Proj } A[T_0, \dots, T_n] / \mathfrak{a} \hookrightarrow \text{Proj } A[T_0, \dots, T_n] = \mathbb{P}_A^n$$

ein projektives  $A$ -Schema.

**Definition 10.41 (sehr ample Geradenbündel).**

Sei  $A$  ein Ring und  $X$  ein  $A$ -Schema mit einer Immersion  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$  (d.h.  $i : X \hookrightarrow Z \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n$ ), dann heißt

$$i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1) =: \mathcal{O}_X(1)$$

das zu  $i$  gehörige *sehr ample Geradenbündel* auf  $X$ . Schreibe analog  $\mathcal{O}_X(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(m)$ .

# Literatur

---

- [1] S. Bosch. *Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2009. ISBN: 9783540928126. URL: [http://books.google.de/books?id=dI1p9fh%5C\\_fV0C](http://books.google.de/books?id=dI1p9fh%5C_fV0C).
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449. URL: <http://books.google.de/books?id=3rtX9t-nnvwC>.

# Definitionen

---

- $\mathfrak{B}$ -(Prä-)Garbe, 19
- Čech-Kohomologie, 54
  - Čech-Komplex, 54
- Abgeschlossener Punkt, 12
- affines Schema, 20
- Basisoffene Menge, 12
  - auf Proj, 33
- Bewertungsring, 27
  - diskreter, 27
  - Restklassenkörper, 27
- Diskrete Bewertung, 26
- Garbe, 6
  - exakte Sequenz, 40
  - Garbenmorphismus
    - Bildgarbe, 40
    - Kerngarbe, 40
  - Halm, 7
  - Keim, 7
  - push-forward, 8
- Garbifizierung, 39
- Generischer Punkt, 12
- Graduierte Algebra, 32
  - homogenes Ideal, 32
- Kategorie der Garben, 7
- Kategorie der Prägarben, 7
- lokal geringter Raum, 9
  - Morphismus lokal geringter Räume, 10
  - reduziert, 39
- Lokalisierung
  - homogene, 33
- $\mathcal{O}_X$ -Modul
  - direktes Bild, 57
  - endlich erzeugt, 55
  - frei, 47
  - inverses Bild, 57
  - kohärent, 55
  - lokal frei, 47
  - quasi-kohärent, 48
  - von seinen globalen Schnitten erzeugt, 49
- Prägarbe, 5
  - Morphismus von Prägarben, 6
- Ring
  - lokal, 8
  - lokaler Ringhomomorphismus, 10
  - Lokalisierung, 18
  - Multiplikative Teilmenge, 18
  - Nilradikal, 15
  - Radikal, 13
  - radiziell, 13
  - reduziert, 39
- Schema, 20
  - $S$ -Schema, 22
  - abgeschlossenes Unterschema, 35
  - Basiswechsel, 42
  - Faserprodukt, 42
    - Faser eines Morphismus, 42
  - integer, 41
  - Morphismus von Schemata, 20
  - noethersch, 38
    - lokal noethersch, 38
  - projektives Schema über  $A$ , 35
  - pull-back, 43
  - Schemamorphismus
    - abgeschlossene Immersion, 35
    - offene Immersion, 35
  - Unterschema
    - reduzierte Unterschema-Struktur, 41
- topologischer Raum
  - irreduzibel, 14
  - noethersch, 15
- topoloischer Raum
  - quasi-kompakt, 17
- Varietät
  - algebraische, 38
  - projektive, 38
- Zariski Topologie, 11
  - auf Proj, 32