

Vorlesungszusammenfassung

---

# Schematheorie

---

erstellt von

**Stefan Hackenberg**

**Maximilian Huber**

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

**Prof. Dr. Marco Hien**

Stand

**21. März 2013**



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Lokal geringte Räume</b>	<b>4</b>
1.1	Garben . . . . .	4

# Lokal geringte Räume

1

## 1.1 Garben

### Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe*  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen  $U \subset X$  eine abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar  $V \subset U$ , so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen  $\rho_{UV}$  *Restriktion*, schreiben meist  $s|_V := \rho_{UV}(s)$ .

Man nennt  $s \in \mathcal{F}(U)$  auch *Schnitt über  $U$* .

Bei mir steht hier  
im Skript  $s|_U$ .  
Offenbar ein Fehler!?

### Beispiel 1.1.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit  $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U), f \mapsto f|_U$ .

**Bemerkung 1.2.** Ist **Ab** die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbf{Top}_X &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ (U \rightarrow V) &\mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{aligned}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathbf{Top}_X^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ (V \rightarrow U) &\mapsto (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.

**Definition 1.2 (Morphismus von Prägarben).**

Ein *Morphismus von Prägarben*  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  auf  $X$  ist eine natürliche Transformation der Funktoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , d.h. für alle  $U \subset X$  offen gibt es einen Morphismus  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$ , so dass für  $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

**Definition 1.3 (Garbe).**

Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt *Garbe*, falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  für offene  $U_i \subset X$ , so gilt

1. Ist  $s \in \mathcal{F}(U)$  und  $s|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$ .
2. Sind  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

**Bemerkung 1.3.**  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s \longmapsto & & (s|_{U_i})_{i \in I} & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & (s_i)_{i \in I} \longmapsto & & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

**Beispiel 1.4.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

**Beispiel 1.5.** Sei  $M$  eine  $\mathbb{C}$  Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für  $M = \mathbb{C}$  haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier  
naiv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: