

Vorlesungszusammenfassung

Schematheorie

erstellt von

Stefan Hackenberg

Maximilian Huber

gelesen im WS 2012/2013 und SS 2013 von

Prof. Dr. Marco Hien

Stand

4. April 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Lokal geringte Räume	4
1.1	Garben	4
1.2	Lokal geringte Räume	7
2	Affine Schemata	9
2.1	$\text{Spec } A$ als topologischer Raum	9

Lokal geringte Räume

1.1 Garben

Definition 1.1 (Prägarbe).

Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* \mathcal{F} auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U),$$

die jedem offenen $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, zusammen mit Homomorphismen

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

für jedes Paar $V \subset U$, so dass

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_{VW}} & \mathcal{F}(W) \\ & & \searrow \rho_{UW} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen ρ_{UV} *Restriktion*, schreiben meist $s|_V := \rho_{UV}(s)$.

Man nennt $s \in \mathcal{F}(U)$ auch *Schnitt über U* .

Bei mir steht hier
im Skript $s|_U$. Of-
fenbar ein Fehler!?

Beispiel 1.2.

$$\mathcal{C}_X^\circ : U \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit $\rho_{VU} : \mathcal{C}_X^\circ(V) \mapsto \mathcal{C}_X^\circ(U)$, $f \mapsto f|_U$.

Bemerkung 1.3. Ist \mathbf{Ab} die Kategorie der abelschen Gruppen und

$$\mathbf{Top}_X := \begin{cases} \text{Obj} : U \subset X \text{ offen} \\ \text{Morph} : \text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V, \\ U \rightarrow V & U \subset V, \end{cases} \end{cases}$$

dann ist eine Prägarbe gerade ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (U \rightarrow V) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

Oder anders ausgedrückt: Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : & \mathbf{Top}_X^{\text{op}} & \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto \mathcal{F}(U) \\ (V \rightarrow U) & \mapsto & (\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)). \end{array}$$

ein kovarianter Funktor.

Definition 1.4 (Morphismus von Prägarben).

Ein *Morphismus von Prägarben* $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ auf X ist eine natürliche Transformation der Funktoren \mathcal{F} und \mathcal{G} , d.h. für alle $U \subset X$ offen gibt es einen Morphismus $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U)$, so dass für $U \subset V$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Definition 1.5 (Garbe).

Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X heißt *Garbe*, falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ für offene $U_i \subset X$, so gilt

1. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.
2. Sind $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, mit

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j,$$

so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_i = s|_{U_i} \quad \forall i.$$

Bemerkung 1.6. \mathcal{F} ist eine Garbe, genau dann, wenn die folgende Sequenz abelscher Gruppen exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & s \mapsto (s|_{U_i})_{i \in I} & & (s_i)_{i \in I} \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j) \in I^2} & & \end{array}$$

Exaktheit an dieser Stelle ist äquivalent zu Eigenschaft 1. Exaktheit hier zu Eigenschaft 2.

Beispiel 1.7. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{C}_M^\infty : U \mapsto \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U)\}$$

eine Garbe.

Beispiel 1.8. Sei M eine \mathbb{C} Mannigfaltigkeit, so ist

$$\mathcal{O}_M : U \mapsto \mathcal{O}_M(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$

eine Garbe. Für $M = \mathbb{C}$ haben wir zusätzlich die Garbe

$$\mathcal{O}_\mathbb{C}^\times : U \mapsto \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\},$$

(wobei die Gruppenverknüpfung multiplikativ zu lesen ist). Dies liefert uns einen Morphismus von (Prä)garben

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\mathbb{C}^\times, f \mapsto \exp(f).$$

Betrachte nun die Prägarbe

Warum steht hier
naiv??

$$\mathcal{H} := \text{im}^{\text{naiv}}(\exp) : U \mapsto \text{im}(\exp_U) = \{\exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Dies ist *keine* Garbe: Betrachte die Scheibe

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$$

zerlegt in die beiden offenen Teilmengen

$$U_1 = \{z \in U \mid \Re z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{z \in U \mid \Re z < \varepsilon\}$$

mit $U = U_1 \cup U_2$ für ein $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $i = 1, 2$ ist $(z : U_i \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z) \in \mathcal{H}(U_i)$, da sich der komplexe Logarithmus auf beiden U_i problemlos definieren lässt. Ferner ist auch

$$(z : U_1 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2} = (z : U_2 \rightarrow \mathbb{C})|_{U_1 \cap U_2},$$

erfüllt, jedoch kommen diese nicht von einem gemeinsamen Schnitt da

$$(z : U \rightarrow \mathbb{C}) \notin \mathcal{H}(U).$$

Definition 1.9.

Für einen topologischen Raum X bezeichne

$\mathbf{PSh}_X :=$ die Kategorie der Prägarben auf X ,

$\mathbf{Sh}_X :=$ die Kategorie der Garben auf X , wobei $\text{Hom}_{\mathbf{Sh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbf{PSh}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Bemerkung 1.10. Man hat den Inklusionsfunktork

$$\iota : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$$

Definition 1.11 (Halm).

Ist \mathcal{F} eine (Prä)Garbe auf X und $x_0 \in X$, so heißt

$$\mathcal{F}_{x_0} := \varinjlim_{x_0 \in U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U) / \sim$$

mit

$$s \sim t :\Leftrightarrow \exists W \subset X \text{ offen} : x_0 \in W \subset U \cap U' \text{ und } s|_W = t|_W$$

für $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(U')$ der *Halm von \mathcal{F} bei x_0* .

Die Elemente $[s] \in \mathcal{F}_{x_0}$ heißen *Keime von Schnitten bei x_0* .

Beispiel 1.12. $(\mathcal{C}_M^\infty)_{x_0} = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid f \sim g \Leftrightarrow \exists W \subset M \text{ offen}, x_0 \in W \text{ mit } f|_W = g|_W\}$

Beispiel 1.13.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}, x_0} &= \{[f : U \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}] \mid x_0 \in U\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \mid \text{Reihe hat positiven Konvergenzradius} \right\} \\ &:= \mathbb{C}\{x - x_0\} \end{aligned}$$

Definition 1.14 (push-forward).

Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und \mathcal{F} eine Garbe auf X , so ist durch

$$f_*\mathcal{F} : V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

für $V \subset Y$ offen eine Garbe definiert, der *push-forward* von \mathcal{F} .

1.2 Lokal geringte Räume

Betrachte nun

Ring := Kategorie der kommutativen Ringe mit 1

und entsprechend Garben

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ring}.$$

Definition 1.15 (lokaler Ring).

Sei R ein Ring. Dann heißt R *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Beispiel 1.16. $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$

Bemerkung 1.17. Ist R lokaler Ring und $\mathfrak{m} \triangleleft R$ das maximale Ideal, so ist $R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$.

Beispiel 1.18. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann ist $\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$ ein lokaler Ring, denn

$$\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty \setminus (\mathcal{C}_{M,x_0}^\infty)^\times = \{[f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}] \mid x_0 \in U \text{ mit } f(x_0) = 0\} =: \mathfrak{m},$$

da $[f]$ eine Einheit ist, genau dann, wenn $f(x_0) \neq 0$: Ist $f : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert $W \subset U$ offen, $x_0 \in W$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Damit folgt

$$\left[\frac{1}{f} : W \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} \right] \in \mathcal{C}_{M,x_0}^\infty$$

ist Inverses zu $[f]$. Zudem ist \mathfrak{m} ein Ideal.

Definition 1.19 (lokal geringter Raum).

Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}_X) bestehend aus:

- einem topologischen Raum X und
- einer Garbe \mathcal{O}_X auf X von Ringen,

so dass \mathcal{O}_{X,x_0} für alle $x_0 \in X$ ein lokaler Ring ist.

Man nennt \mathcal{O}_X die *Strukturgarbe* von (X, \mathcal{O}_X) . Ist $x_0 \in X$, so hat man das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{x_0} \triangleleft \mathcal{O}_{X,x_0}$.

Der Körper

$$\kappa(x_0) := \mathcal{O}_{X,x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}$$

heißt *Restklassenkörper* von x_0 in (X, \mathcal{O}_X) .

Beispiel 1.20. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$, so ist $\kappa(x_0) = \mathbb{R}$.

Definition 1.21 (lokale Ringhomomorphismen).

Sind R, S lokale Ringe mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_R \triangleleft R, \mathfrak{m}_S \triangleleft S$, so heißt der Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ *lokal*, falls

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R.$$

Äquivalent lässt sich fordern, dass

$$\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S.$$

Definition 1.22 (Morphismus lokal geringter Räume).

Ein *Morphismus* $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *lokal geringter Räume* ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ stetig,} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X \text{ Morphismus von Garben auf } Y, \end{aligned}$$

so dass der von $f^\#$ induzierte Ringhomomorphismus für $x_0 \in X, y_0 := f(x_0) \in Y$

$$\begin{aligned} f_{x_0}^\# : \mathcal{O}_{Y, y_0} &\rightarrow \mathcal{O}_{X, x_0} \\ [s] &\mapsto [f_U^\#(s)] \end{aligned}$$

für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $y_0 \in U$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist.

Bemerkung 1.23. In Definition 1.22 ist $f_{x_0}^\#$ wohldefiniert:

Sei $[s] = [t] \in \mathcal{O}_{Y, y_0}$, d.h. es existiert $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W$ und $s|_W = t|_W \in \mathcal{O}_Y(W)$. Betrachte nun $f_U^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ für $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, $U \subset Y, y_0 \in U$ und analog $f_V^\#(t) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für $t \in \mathcal{O}_Y(V)$, $V \subset Y, y_0 \in V$. Da $f^\#$ ein Garbenmorphismus ist, kommutiert damit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ s|_W = t|_W \\ \uparrow \\ t \end{array} & \in & \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f_U^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \downarrow |_W & & \downarrow |_{f^{-1}(W)} \\ \mathcal{O}_Y(W) & \xrightarrow{f_W^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\ \uparrow |_W & & \uparrow |_{f^{-1}(W)} \\ \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \end{array} & \ni & \begin{array}{c} f_U^\#(s) \\ \downarrow \\ f_U^\#(s)|_{f^{-1}(W)} = f_V^\#(t)|_{f^{-1}(W)} \\ \uparrow \\ f_V^\#(t) \end{array} \end{array}$$

Affine Schemata

2

2.1 Spec A als topologischer Raum

Sei im Folgenden A ein kommutativer Ring mit 1 und $\text{Spec } A := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$.

Definition 2.1 (Zariski Topologie).

Ist $\mathfrak{a} \triangleleft A$, ein Ideal, setze

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec } A.$$

Dann ist durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \text{Spec } A \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft A : U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})\}$$

eine Topologie auf $\text{Spec } A$ definiert. Sie heißt *Zariski-Topologie*.

Beweis (der Topologie-Eigenschaften). 1. Zeige: $\emptyset, \text{Spec } A$ offen $\iff \text{Spec } A, \emptyset$ abgeschlossen.

Dazu: $V(A) = \emptyset, V((0)) = \text{Spec } A$

2. Zeige: U_1, U_2 offen $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ offen $\iff M_1, M_2$ abgeschlossen $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ abgeschlossen.

Dazu: $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

3. $(U_i)_{i \in I}$ offen $\Rightarrow \cup_{i \in I} U_i$ offen $\iff (M_i)_{i \in I}$ abgeschlossen $\Rightarrow \cap_{i \in I} M_i$ abgeschlossen.

Dazu: $\cap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$

□

Bemerkung 2.2. Die abgeschlossenen Teilmengen $M \subset \text{Spec } A$ sind genau die $M = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \triangleleft A$.

Beispiel 2.3 (Spec \mathbb{Z}). Für $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{a} = (a)$. Falls $a \neq 0, 1, -1$ sei $a = \pm p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ die Primfaktorzerlegung. Für p Primzahl ist

$$(p) \in V((a)) \iff (a) \subseteq (p) \iff p \mid a \iff p \in \{p_1, \dots, p_r\}$$

Das bedeutet, die abgeschlossenen Mengen in $\text{Spec } \mathbb{Z}$ sind genau die Mengen $\emptyset, \text{Spec } \mathbb{Z}$ und $\{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für eine endliche Anzahl an Primzahlen.

Insbesondere gilt

- $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.
- $(0) =: \eta \in \text{Spec } \mathbb{Z}$ liegt in *jeder* nichtleeren offenen Teilmenge.

Lemma 2.4. Sei $x \in \text{Spec } A$, so ist der Abschluss $\overline{\{x\}}$ der Menge $\{x\}$ in $\text{Spec } A$ gleich

$$\overline{\{x\}} = V(x).$$

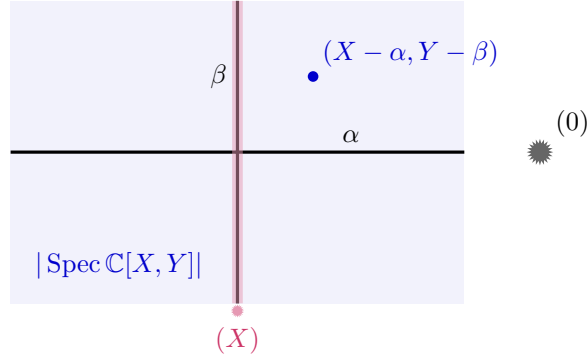
Beweis.

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{\substack{B \subseteq \text{Spec } A \\ x \in B}} B = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \triangleleft A \\ \mathfrak{a} \subseteq x}} V(\mathfrak{a}) = V(x)$$

□

Bemerkung 2.5. Beachte, dass

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$$

Abbildung 1: $\text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$ **Definition 2.6 (abgeschlossener Punkt, generischer Punkt).**

Sei X ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heißt *abgeschlossener Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Er heißt *generischer Punkt*, wenn $\overline{\{x\}} = X$ gilt.

Die Menge der abgeschlossenen Punkte bezeichnen wir mit $|X|$.

Beispiel 2.7. Sei $A = \mathbb{C}[X, Y]$.

- $x = (0) \in \text{Spec } A$ ist generisch.
- $x = (X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft A$ ist abgeschlossen, da aus $x \triangleleft A$ maximal $V(x) = \{x\}$ und somit x abgeschlossen folgt.
- $x = (X) \triangleleft A$ ist weder abgeschlossen noch generisch.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 zusammenfassen.

Definition 2.8 (basisoffene Menge).

Für $f \in A$ nennt man

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

die zu f gehörige *basisoffene Menge*.

Lemma 2.9. Die Menge $\mathfrak{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ ist eine Basis der Topologie, d.h. jedes offene $U \subseteq \text{Spec } A$ ist eine Vereinigung von $D(f) \in \mathfrak{B}$ und \mathfrak{B} ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

Beweis. Sei $U = \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a})$ offen und $\mathfrak{p} \in U$, so ist $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Damit existiert $f \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(f)$ und $f \in \mathfrak{a}$. Also $(f) \subseteq \mathfrak{a}$ und $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. Damit folgt $D(f) \subseteq U$.

Zusammenfassend gilt für $U \subseteq \text{Spec } A$ offen: $\forall \mathfrak{p} \in U \exists f \in A: \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$. Also

$$U = \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} D(f_{\mathfrak{p}})$$

Ferner folgt mit Lemma 2.10 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. □

Lemma 2.10. Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ gilt

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Angenommen $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, d.h. $\exists \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \setminus (V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ aber nicht $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Also existiert $s \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ und $t \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Damit ist $st \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Dies ist ein Widerspruch, da \mathfrak{p} ein Primideal ist. Folglich herrscht Gleichheit in obiger Inklusionskette. \square

Definition 2.11 (Radikal).

Für $\mathfrak{a} \triangleleft A$ heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

Radikal von \mathfrak{a} .

Lemma 2.12. $\sqrt{\mathfrak{a}} \triangleleft A$.

Beweis. • $0 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ ✓

- Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, r \in A$. Dann $f^n \in \mathfrak{a}, r \in A$. Also $(rf)^n \in \mathfrak{a}$ und damit $rf \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.
- $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}, g^m \in \mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned} (f+g)^{n+m-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n+m-1-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{n-1-i} \right) g^m + \left(\sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} f^i g^{m-1-i} \right) f^n \end{aligned}$$

Da g^m und f^n jeweils in \mathfrak{a} liegen, ist auch die Summe dort. \square

Definition 2.13 (Radikalideal (radiziell)).

Ein Ideal $\mathfrak{b} \triangleleft A$ heißt *Radikalideal (radiziell)*, falls

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

Bemerkung 2.14. Es gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 2.15. Für $\mathfrak{a} \triangleleft A$ gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

Beweis. „ \subseteq “ Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}, f^n \in \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Also $f^n \in \mathfrak{p}$ und da \mathfrak{p} prim, folgt $f \in \mathfrak{p}$.

„ \supseteq “ Ist $f \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, so zu zeigen, dass $f \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. Sei also $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte

$$M := \{\mathfrak{b} \triangleleft A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, f^n \notin \mathfrak{b} \forall n \in \mathbb{N}\},$$

so gilt

- $\mathfrak{a} \in M$,
- M ist angeordnet durch „ \subseteq “,

– ist $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge, so ist $\mathfrak{b} := \cup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \triangleleft A$ mit $\mathfrak{b} \in M$.

Damit hat M mit dem Lemma von Zorn ein maximales Element $\mathfrak{b}_{\max} \in M$.

Nun sei behauptet, dass $\mathfrak{b}_{\max} \triangleleft A$ ein Primideal ist. Dazu sei $xy \in \mathfrak{b}_{\max}$, wobei wir annehmen, dass $x, y \notin \mathfrak{b}_{\max}$. Betrachte $\mathfrak{b}_{\max} \subsetneq (x) + \mathfrak{b}_{\max}$, was ein Ideal in A ist, aber nicht in M liegt. Analog können wir dies von $(y) + \mathfrak{b}_{\max}$ sagen. Damit existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f^n \in (x) + \mathfrak{b}_{\max} \quad f^m \in (y) + \mathfrak{b}_{\max}.$$

Ergo ist

$$f^{n+m} \in (x)\mathfrak{b}_{\max} + (y)\mathfrak{b}_{\max} + \mathfrak{b}_{\max}\mathfrak{b}_{\max} + (xy),$$

wobei jeder Summand Teilmenge von \mathfrak{b}_{\max} ist und wir folgern $f^{n+m} \in \mathfrak{b}_{\max} \in M$, wodurch man den Widerspruch erhält.

Damit ist $\mathfrak{b}_{\max} \in V(\mathfrak{a})$ und $f \notin \mathfrak{b}_{\max}$. □

Satz 2.16.

Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ gilt

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere gilt

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. „ \Leftarrow “ Aus $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ folgt

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p}$$

und mit Lemma 2.15 folgt $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \supseteq \mathfrak{b}$.

„ \Rightarrow “ Aus $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, d.h. $\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, folgt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. □

Definition 2.17 (irreduzibel).

Ein topologischer Raum X heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = A_1 \cup A_2$, $A_{1,2} \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $X = A_1$ oder $X = A_2$.

Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ heißt *irreduzibel*, wenn Z mit der Teilraumtopologie irreduzibel ist.

Beispiel 2.18. $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ist irreduzibel. Ist nämlich $A_1 \subsetneq \text{Spec } \mathbb{Z}$ abgeschlossen, so ist $A_1 = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$ für irgendwelche Primzahlen p_i .

Lemma 2.19. In $\text{Spec } A$ gilt:

$$V(\mathfrak{a}) \text{ irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $(xy) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und mit ?? 2.16 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$.

Für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \subseteq V((xy))$, gilt: Ist $xy \in \mathfrak{p}$, so folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Damit

$$V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x)) \cup V((y)) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y))).$$

Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel nach Voraussetzung, folgt oBdA $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((x))$. Wieder mit ?? 2.16 folgt $(x) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und damit $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

„ \Leftarrow “ Schreibe $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c}) = V(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$. Dann folgt wiederum mit ?? 2.16 $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}}$.

Ist $V(\mathfrak{a}) \neq V(\mathfrak{b})$, also $V(\mathfrak{b}) \subsetneq V(\mathfrak{a})$, also $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{b}}$, so existiert $x \in \sqrt{\mathfrak{b}} \setminus \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für $y \in \mathfrak{c}$, ist

$$xy \in \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Nach Voraussetzung ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ Primideal, also nach Wahl von x ist $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Insgesamt ist $\mathfrak{c} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{c})$ und damit $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{c})$. \square

Definition 2.20 (Nilradikal).

$$\text{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$$

heißt *Nilradikal* von A .

Korollar 2.21. Es gilt

$$\text{Spec } A \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow \text{Nil}(A) \text{ Primideal.}$$

Beweis. Lemma 2.19 mit $\mathfrak{a} = (0)$. \square

Definition 2.22 (noethersch).

Ein topologischer Raum heißt *noethersch*, wenn gilt: Ist

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, so existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{i+1}$ für alle $i \geq n_0$.

Lemma 2.23. Ist A noethersch, so ist auch $\text{Spec } A$ noethersch.

Beweis. Sei

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Teilmengen, also

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \dots$$

mit $A_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für geeignete $\mathfrak{a}_i \in \text{Spec } A$, so ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in A . \square

Satz 2.24.

Ist X noetherscher topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen, so zerlegt sich

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r$$

in abgeschlossene irreduzible Teilmengen $A_i \subseteq A$. Nimmt man $A_i \not\subseteq A_j$ für $i \neq j$, so ist die Zerlegung bis auf Reihenfolge eindeutig.

Die A_i heißen Komponenten von A .

Beweis. Existenz. Sei

$$\mathcal{V} := \{A \subseteq X \mid \emptyset \neq A \text{ abgeschlossen, } A \text{ hat keine solche Zerlegung}\}.$$

Angenommen $\mathcal{V} \neq \emptyset$, so hätte man ein inklusionsminimales $A \in \mathcal{V}$, denn falls nicht gäbe es

$$A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$$

mit $A_i \in \mathcal{V}$. Da X noethersch, müsste diese Folge stationär werden, wodurch man einen Widerspruch erhält.

Dieses $A \in \mathcal{V}$ hat keine solche Zerlegung, ist also insbesondere nicht irreduzibel. Damit gibt es

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, } A_i \neq A$$

Da $A \in \mathcal{V}$ minimal sind $A_1, A_2 \notin \mathcal{V}$. Aber damit ist $A = A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{V}$. Ein Widerspruch, der wie gewünscht $\mathcal{V} = \emptyset$ liefert.

Eindeutigkeit. Sind

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_r = A'_1 \cup \dots \cup A'_s$$

zwei solcher Zerlegungen, so ist $A_1 \subseteq A'_1 \cup \dots \cup A'_s$, also $A_1 = (A'_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (A'_s \cap A_1)$. Da A_1 irreduzibel können wir oBdA $A_1 = A_1 \cap A'_1$ annehmen. Also ist $A_1 \subseteq A'_1$.

Analog ist $A'_1 \subseteq A_k$ für ein $k = 1, \dots, r$. Zusammenfassend gilt

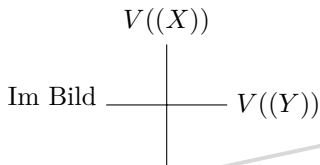
$$A_1 \subseteq A'_1 \subseteq A_k,$$

was nach Voraussetzung $k = 1$ impliziert. Also $A_1 = A'_1$.

Nun sukzessive weiter. □

Beispiel 2.25. In $\text{Spec } k[X, Y]$ zerfällt

$$V((XY)) = V((X)) \cup V((Y)).$$



Beispiel 2.26. Sei k algebraisch abgeschlossen. Betrachte $\text{Spec } k[X, Y]$. Die maximalen Ideale sind gerade $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)$ für $\alpha, \beta \in k$. Ein abgeschlossener Punkt $\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y]$ wird eindeutig durch $(\alpha, \beta) \in k^2$ gegeben.

$\mathbb{A}_k^2 := \text{Spec } k[X, Y]$ wird der 2 dimensionale affine Raum über k genannt. Man hat die Bijektion

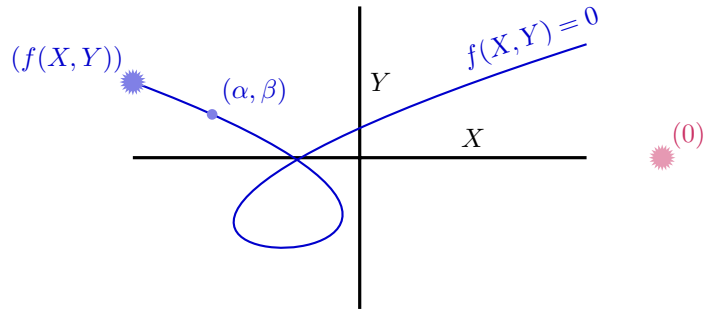
$$|\mathbb{A}_k^2| \xrightarrow{\phi} k^2.$$

Eine abgeschlossene Teilmenge $A = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ liefert

$$A \cap |\mathbb{A}_k^2| \cong_{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\},$$

denn

$$\begin{aligned} A \cap |\mathbb{A}_k^2| &= V(\mathfrak{a}) \cap |\mathbb{A}_k^2| = |V(\mathfrak{a})| \\ &= \{\mathfrak{m} \in \text{Spec } k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \text{ maximal}\} = \{(X - \alpha, Y - \beta) \triangleleft k[X, Y] \mid \mathfrak{a} \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) \in (X - \alpha, Y - \beta)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(X, Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(X, Y) = (X - \alpha)g(X, Y) + (Y - \beta)h(X, Y)\} \\ &= \{(X - \alpha, Y - \beta) \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} \\ &\xrightarrow{\phi} \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid f(\alpha, \beta) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

Abbildung 2: Spec $k[X, Y]$ 

In \mathbb{A}_k^2 hat man aber noch mehr Punkte: Sei $\mathfrak{p} \triangleleft k[X, Y]$ Primideal, aber nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^2$ kein abgeschlossener Punkt. Ist beispielsweise $\mathfrak{p} = (f(X, Y))$ für $f \in k[X, Y]$ irreduzibel, so liegen alle $(\alpha, \beta) \in k^2$ mit $f(\alpha, \beta) = 0$ auf der entsprechenden Menge in k^2 , d.h.

$$\mathfrak{p} = (f(X, Y)) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} := (X - \alpha, Y - \beta) \Rightarrow \mathfrak{m}_{\alpha, \beta} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}.$$

Abbildung 2 verdeutlicht dies.

Lemma 2.27. Ist A ein Ring, $\mathfrak{a} \in \text{Spec } A$ und $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ die Projektion, so ist

$$\begin{aligned} \varphi := \pi^{-1} : \text{Spec } A/\mathfrak{a} &\rightarrow \text{Spec } A \\ \bar{\mathfrak{p}} &\mapsto \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\text{Spec } A/\mathfrak{a} \xrightarrow[\approx]{\pi^{-1}} V(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Spec } A.$$

Beweis.

Definition 2.28 ((quasi)-kompakt).

Ein topologischer Raum X heißt *quasi-kompakt*, wenn gilt: Ist $X = \bigcap_{i \in I} U_i$, U_i offen, so existiert eine endliche Teilmenge $F \subset I$ mit $X = \bigcap_{i \in F} U_i$.

X heißt *kompakt*, wenn X hausdorffsch und quasi-kompakt ist.