Здесь опять предполагается, что функция $q(x)$ кусочно-постоянная. Последнее слагаемое с $p(x)$ дает выражение

$$C_{k-1} \cdot p(x_{k-1/2})\,\frac{h}{6} + C_k \cdot p(x_k)\,\frac{4h}{6} + C_{k+1} \cdot p(x_{k+1/2})\,\frac{h}{6},$$

т. е. при «плохом» способе вычисляемых интегралов фактически получаем конечно-разностное соотношение, похожее на аппроксимацию Нумерова.

Вместе с тем, существует значительное отличие. Сеточная функция — это функция, заданная таблично. Решение (приближенное) МКЭ — это не сеточная функция, а элемент W_2^1.

17.5. Построение базисных функций

Математическая основа МКЭ — метод Галеркина и вариационный метод Ритца — развиваются, начиная со второго десятилетия XX века. Прогресс в МКЭ последних лет заключается именно в построении наборов базисных функций, обладающих достаточной гладкостью — так называемых согласованных базисов.

Базис из «крышечек» в двумерном случае. Процесс построения базисных функции включает в себя:

а) триангуляцию области — разбиение на треугольники, каждый из которых является носителем своей базисной функции;

б) построение базисных функций.

Требования к триангуляции (обозначения на рис. 17.3).

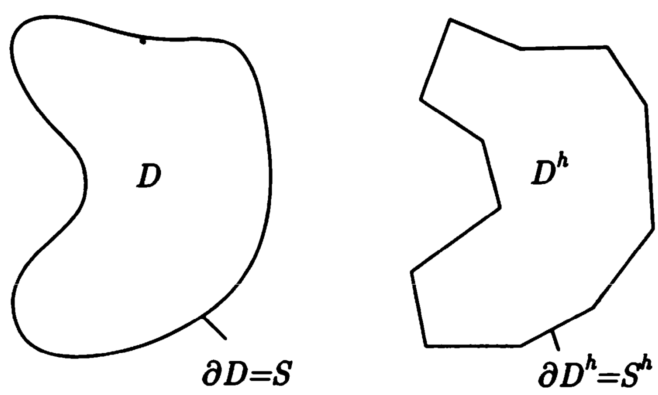


Рис. 17.3

1. Между точками S и S^h с помощью нормалей к S устанавливается взаимно-однозначное соответствие, расстояние между соответствующими точками не превосходит $\delta_1\ h^2$ (h — сеточный параметр).

2. Длины сторон треугольников и их площади лежат в пределах $[hl_1, hl_2]$ и $[h^2\gamma_1,\ h^2\gamma_2]$, где $l_1, l_2, \gamma_1, \gamma_2$ — положительные константы, не зависящие от h.

3. Существует непрерывное взаимно-однозначное преобразование D^h на область, границы которой параллельны осям координат, или составляют с ними угол $\pi/4$. Преобразование линейно внутри каждого треугольника и переводит последний в равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными h.

Простейший пример построения триангуляции.

1. Область D вписываем в прямоугольник.

2. Строим в прямоугольнике равномерную сетку с шагом h (рис. 17.4).

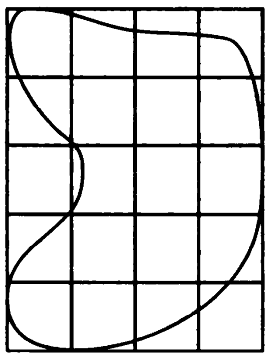


Рис. 17.4

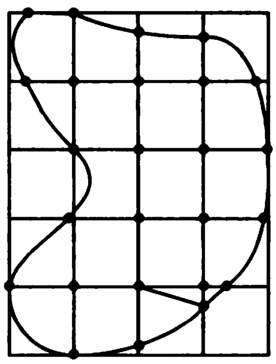


Рис. 17.5

3. Ближайшие к границе D узлы сетки сдвигаем на границу D (рис. 17.5).

4. Разбиваем четырехугольники внутри D^h диагоналями (рис. 17.6).

5. Убираем все ячейки, пересечение которых с D^h пусто (рис. 17.7).

Построение базисной функции — «крышечки». Фиксируем вершину P_1 какого-либо треугольника. Составляем список соседей — вершин, принадлежащих треугольникам, имеющим вершину P_1. Пусть в списке

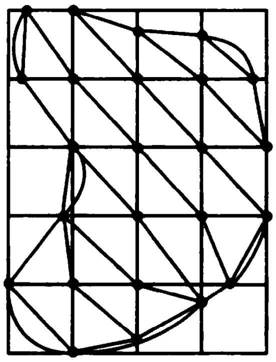


Рис. 17.6

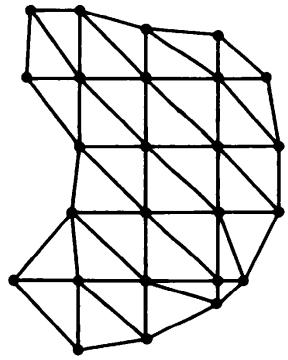


Рис. 17.7

есть вершины Q_1 и Q_2, принадлежащие треугольнику 1 (рис. 17.8). В этом треугольнике представляем

$$\varphi_1(x,\ y) = \frac{1 - \frac{y-y_1}{y_2-y_1} - \frac{x-y_2}{x_1-y_2}}{1 - \frac{y_{P_1}-y_1}{y_2-y_1} - \frac{x_{P_1}-y_2}{x_1-y_2}}.$$

Тогда для точки

$$P_1 \psi_{P_1}^N(x,\ y) = \sum_{k=1}^{6} \varphi_k(x,\ y).$$

К сожалению, базисных функций типа «крышечек» может не хватить для решения уравнений второго (по пространственной производной) порядка. До сих пор рассматривались уравнения второго порядка. Перейдем теперь к модельному уравнению

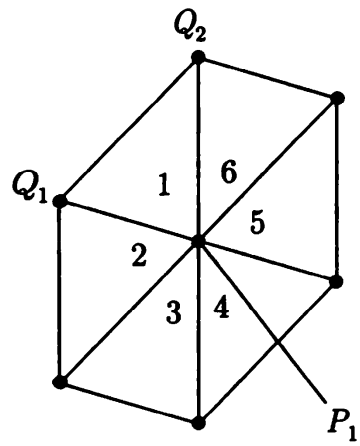


Рис. 17.8

$$\frac{d^4u}{dx^4} + au = f(x); x \in [0,\ X] \qquad (17.12)$$

с какими-либо граничными условиями.

Будем искать решение в соответствии с методами МКЭ:

$$u^N = \psi_0^N + \sum_{j=1}^{N} C_j \psi_j^N, \qquad (17.13)$$

где ψ_j^N обладают финитным носителем. Подставляем разложение (17.13) в (17.12). Отвлекаясь от членов с граничными условиями, отнесенными к

ψ_0^N, при умножении на ψ_l^N имеем

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}\sum_{j=1}^{N} C_j\psi_j^N,\ \psi_l^N\right) = \int_0^X \sum_{j=1}^{N} C_j\,\frac{d^4\psi_j^N}{dx^4}\,\psi_l^N\,dx =$$

$$= \int_0^X \sum_{j=1}^{N} C_j\,\frac{d^2\psi_j^N}{dx^2}\,\frac{d^2\psi_l^N}{dx^2}\,dx = \left(\sum_{j=1}^{N} C_j\,\frac{d^2\psi_j^N}{dx^2},\ \frac{d^2\psi_l^N}{dx^2}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{N} C_j\,\frac{d^2\psi_j^N}{dx^2},\ \frac{d^2\psi_l^N}{dx^2}\right) + a\left(\sum_{j=1}^{N} C_j\psi_j^N,\ \psi_l^N\right) = \eta(x). \qquad (17.14)$$

Отсюда следует, чтобы первая сумма в (17.14) вычислялась, желательно, чтобы базисы ψ_l^N были гладкими:

$$\psi_l^N \in W_2^2[0,\ X],$$

$$\|\psi_l^N\|^2_{W_2^2} = \int_0^X \left[(\psi_l^N)^2 + \left(\frac{d\psi_l^N}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2\psi_l^N}{dx^2}\right)^2\right] dx,$$

а сходимость МКЭ следует понимать в норме $W_2^2[0,\ X]$.

Примеры *согласованных* базисных функций. Если используется базис из «крышечек», то в каждом узле (при стыковке конечных элементов) решение МКЭ будет иметь разрыв первой производной. Это происходит из-за выбора базиса МКЭ. Сама искомая функция непрерывна.

Допустим, необходимо найти решение, обладающее непрерывной первой производной.

Строим набор функций базиса:

$$\{\varphi_i(x)\}^m; \quad m = \frac{p+1}{2}; \quad (p \text{ — нечетное положительное число}).$$

Считаем, что размер конечного элемента равен 1. Для одномерной сетки всегда найдется линейное преобразование (свое для каждого элемента!), переводящее данный элемент в отрезок длины 1. Положим, что базисная функция есть

$$\varphi_i(x) \equiv 0, \text{ если } x \notin [-1;\ 1],$$

а на каждом отрезке $[-1;\ 0]$, $[0;\ 1]$ — полином степени p. В точках $x = \pm 1$ $\varphi_i(x)$ и все ее производные до порядка $m-1$ равны нулю. В точке $x = 0$ $\frac{d^{i-1}\varphi_i(x)}{dx^{i-1}} = 1$.

Введем

$$\varphi_{ij}^h(x) = \varphi_i\left(\frac{x-a}{h} - j\right)$$

(в случае равномерного разбиения отрезка на конечные элементы). Тогда $\{\varphi_{ij}^h\}$ $j = 0, \ldots, N; i = 1, \ldots, m$ - базис.

Рассмотрим случай $p = 1$. Тогда $m = p = 1$, на каждом отрезке функция линейна. Приходим к набору из «крышечек».

Возьмем $p = 3$, тогда $m = 2$. Строим набор базисных функций.

Фиксируем $i = 1$. На отрезках $[-1; \ 0]$, $[0; \ 1]$ получаем полином степени 3.

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 (\text{на}[-1; \ 0]).$$

Условия: $\varphi_1'(-1) = 0, \varphi_1(0) = 1, \varphi_1(-1) = 0, \varphi_1'(0) = 0$ определяют коэффициенты

$$a_0 = 1; a_1 = 0; a_2 = -3; a_3 = -2.$$

В итоге на отрезке $[-1; \ 0]$

$$\varphi_1(x) = 1 - 3x^2 - 2x^3.$$

Аналогично поступаем на отрезке $[0; \ 1]$, там имеем

$$\varphi_1(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3.$$

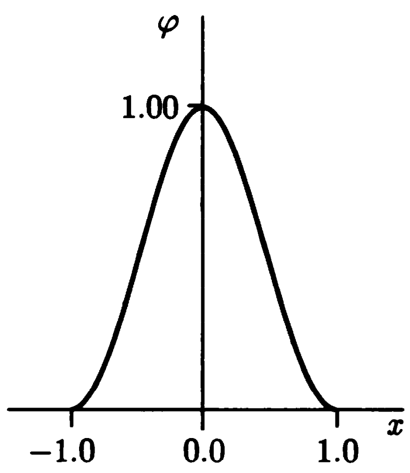


Рис. 17.9

График базисной функции $\varphi_1(x)$ представлен на рис. 17.9.

Пусть теперь $i = m = 2$. Строим набор $\varphi_2(x)$ такой, что

$$\varphi_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3.$$

Из условий $\varphi_2'(1) = 0, \varphi_2(1) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 1$ получается

$$\varphi_2(x) = (1-x)^2x \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Аналогично, $\varphi_2(x) = (1-x)^2x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 0$. График функции изображен на рис. 17.10.

Базис является согласованным, если для уравнения степени не выше $p+1$ все базисные функции непрерывны (принадлежат C^m).

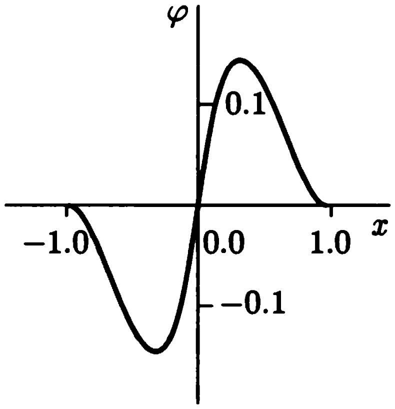


Рис. 17.10

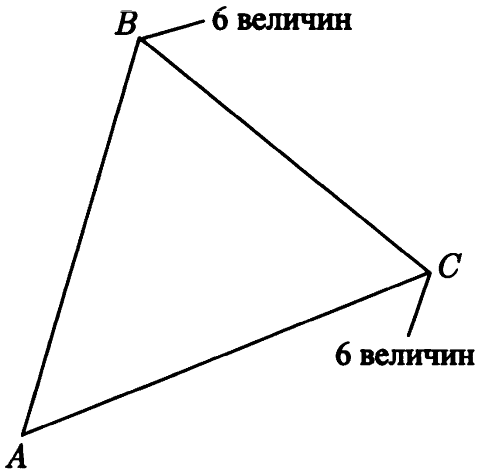
Что представляет собой метод Галеркина при использовании такого базиса? Теперь в точках сетки (межэлементных) необходимо знать не только функцию u, но и ее первую, вторую, ..., $(m-1)$-ю производную по x:

$$u^h = \sum_{j=1}^{N} [u(a+jh)\varphi_{1j}^h(x) + u_x'(a+jh)\varphi_{2j}^h(x)],$$

$$u^h = \sum_{j=1}^{N} (c_j\psi_{1j}^N + b_j\varphi_{2j}^N(x)].$$

Отметим, что $u(a+jh)$ и $u_x'(a+$ $+jh)$ определяются численно при решении уравнений методом Галеркина.

Увеличилось число базисных функций и коэффициентов разложения.



$$\underbrace{\varphi_A;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}(A);\quad \frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}(A),\quad \frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}(A),\quad m=1,2}_{\text{6 величин}}$$

Рис. 17.11

Заметим также, что матрица системы — разреженная, но уже не трехдиагональная (если порядок системы выше второго).

Согласование в двумерном случае. Надо сшивать следующие величины (рис. 17.11): 18 величин в узлах плюс 3 значения нормальных производных на гранях.

Получается 21 условие, значит необходимо иметь 21 произвольную константу. Полином должен иметь достаточно высокую степень (члены до x^5, y^5). Поэтому в многомерном случае, как правило, используются несогласованные базисные функции или с низким $(m=1)$ порядком согласования.

17.6. МКЭ для нестационарных уравнений

Рассмотрим простейшую МКЭ-аппроксимацию уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Будем искать решение в виде

$$u = \sum_{j=1}^{N} C_j(t)\psi_j^N.$$

Используя подход Галеркина, получаем (в базисе из «крышечек»)

$$\frac{1}{6}\,\frac{dC_{j-1}}{dt} + \frac{2}{3}\,\frac{dC_j}{dt} + \frac{1}{6}\,\frac{dC_{j+1}}{dt} = \frac{D}{h^2}\,(C_{j-1} - 2C_j + C_{j+1}).$$

Это — система дифференциально-разностных уравнений. Теперь необходимо заменить производные по времени разностными отношениями.

Заметим, что «явная» схема (когда в правой части стоят коэффициенты разложения на предыдущем слое по времени C_j^n) уже не является явной, в соответствии с определением явных методов, данном выше:

$$\frac{1}{6}\,\frac{C_{j-1}^{n+1} - C_{j-1}^{n}}{\tau} + \frac{2}{3}\,\frac{C_{j}^{n+1} - C_{j}^{n}}{\tau} + \frac{1}{6}\,\frac{C_{j+1}^{n+1} - C_{j+1}^{n}}{\tau} = \frac{D}{h^2}\,(C_{j-1}^n - 2C_j^n + C_{j+1}^n)$$

и на $n+1$-м слое все равно необходимо решать систему уравнений методом прогонки. Причиной этого вычислительного неудобства является то, что система дифференциальных уравнений для определения зависимости коэффициентов разложения — это система обыкновенных дифференциальных уравнений, но не записанная в нормальной форме Коши.

Попытаемся исследовать схему на устойчивость спектральному признаку фон Неймана. Подставив в приведенное выше разностное уравнение

$$C_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi},$$

получаем выражение для спектра оператора послойного перехода $\lambda(\varphi)$:

$$\frac{\lambda - 1}{6}\,[e^{i\varphi} + 4 + e^{-i\varphi}] = k\,[e^{i\varphi} + 2 + e^{-i\varphi}],$$

где $k = D\,\frac{\tau}{h^2}$. Отсюда видно, что устойчивость метода конечных элементов опять определяется безразмерной комбинацией параметров разбиения (размера конечного элемента, шага по времени) и коэффициента теплопроводности — параболическим аналогом числа Куранта. Преобразуем уравнение для λ :

$$\frac{\lambda - 1}{6} = \frac{k\,(2\cos\varphi - 2)}{4 + 2\cos\varphi},$$

$\lambda = 1 - 6k\,\dfrac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 2}$, откуда условием устойчивости будет $k \leqslant \dfrac{1}{6}$.

Имеет смысл пользоваться «неявной схемой» (правая часть берется с верхнего слоя по времени) или аппроксимацией типа Кранка-Никольсон.

Продолжим рассмотрение применения МКЭ к нестационарным уравнениям. Как и ранее, смотрим задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Выбирая базис из «крышечек», представляем решение в виде

$$u = \sum_{j=1}^{N} C_j(t)\psi_j^N.$$

Подставляя последнее уравнение в исходное и применяя стандартную процедуру метода Галеркина, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{6}\,\frac{dC_{j-1}}{dt} + \frac{2}{3}\,\frac{dC_j}{dt} + \frac{1}{6}\,\frac{dC_{j+1}}{dt} = \frac{D}{h^2}\,(C_{j-1} - 2C_j + C_{j+1})$$

(шаг сетки считается постоянным), или, в матричном виде

$$\mathbf{B}\,\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{D}{h^2}\,\mathbf{AC}. \qquad (17.15)$$

При этом, в любом базисе

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0.$$

Тогда

$$\exists\,\mathbf{B}^{1/2}: \quad \mathbf{B}^{1/2}\mathbf{B}^{1/2} = \mathbf{B}.$$

Матрица $\mathbf{B}^{1/2}$ — самосопряженная положительно определенная. Можно записать последнее уравнение (17.15) в виде

$$\mathbf{B}^{1/2}\mathbf{B}^{1/2}\,\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{D}{h^2}\,\mathbf{AB}^{-1/2}\mathbf{B}^{1/2}\mathbf{C}.$$

Введем вектор $\mathbf{z} \equiv \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{C}$ и умножим последнее соотношение слева на $\mathbf{B}^{-1/2}$, тогда получаем

$$\mathbf{B}^{1/2}\,\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{D}{h^2}\,\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{AB}^{-1/2}\mathbf{z} = \frac{D}{h^2}\,\mathbf{P}\,\mathbf{z}. \qquad (17.16)$$

Таким образом, из неявной системы (17.15) получена «явная» система (17.16) — перед вектором производных нет матричного множителя.

Запишем для (17.16) схему Кранка–Николсон:

$$\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n = \frac{D\tau}{2h^2}\, \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}(\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n). \tag{17.17}$$

Вопрос об устойчивости схемы (17.17) можно решить следующим образом. Умножим (17.17) на $\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n$. Получаем соотношение:

$$(\mathbf{z}^{n+1},\ \mathbf{z}^{n+1}) - (\mathbf{z}^n,\ \mathbf{z}^n) = \frac{\sigma}{2}\,(\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}(\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n),\ (\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n));$$

$$||\mathbf{z}^{n+1}||^2 = ||\mathbf{z}^n||^2 + \frac{\sigma}{2}(\mathbf{P}(\mathbf{z}^{n+1}+\mathbf{z}^n), (\mathbf{z}^{n+1}+\mathbf{z}^n)) \leqslant ||\mathbf{z}^n||^2 - \frac{\sigma\lambda}{2}\, ||\mathbf{z}^{n+1}+\mathbf{z}^n||^2$$

в силу того, что $\mathbf{A} < 0$ (спектр оператора $\mathbf{A}$ уже известен). Последнее неравенство и означает безусловную устойчивость метода.

17.7. Решение нелинейных уравнений с помощью МКЭ

Рассмотрим в качестве простейшего примера уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{17.18}$$

Его решение, как и ранее, ищем в виде (17.14), при этом по-прежнему используем базис из «крышечек». После вычислений получаем

$$\frac{1}{6}\,\frac{dC_{j-1}}{dt} + \frac{2}{3}\,\frac{dC_j}{dt} + \frac{1}{6}\,\frac{dC_{j+1}}{dt} - C_{j-1}^2 - C_jC_{j-1} + C_jC_{j+1} + C_{j+1}^2 = 0. \tag{17.19}$$

Если написать дискретизацию (17.19) неявным образом (по величинам на $n+1$-м слое по времени или по аналогии со схемой Кранка–Николсон), то получается нелинейная относительно C_j^{n+1} система. Ее необходимо решать с помощью метода Ньютона. Можно линеаризовать (17.19) в окрестности C_j^n, считая, что

$$C_j^{n+1} \approx C_j^n + \tau\,\frac{dC_j}{dt}.$$

Тогда (17.19) преобразуется в следующую линейную относительно величин на $n+1$-м слое по времени запись:

$$\frac{1}{6}\,\frac{C_{j-1}^{n+1} - C_{j-1}^n}{\tau} + \frac{2}{3}\,\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\tau} + \frac{1}{6}\,\frac{C_{j+1}^{n+1} - C_{j+1}^n}{\tau} - (C_{j-1}^n)^2 -$$
$$-2C_{j-1}^nC_{j-1}^{n+1} - C_j^nC_{j-1}^n - C_j^nC_{j-1}^{n+1} - C_j^{n+1}C_{j-1}^n +$$
$$+C_j^nC_{j+1}^n + C_j^nC_j^{n+1} + C_j^nC_{j+1}^{n+1} + (C_{j+1}^n)^2 + 2C_{j+1}^nC_{j+1}^{n+1} = 0.$$