Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

«Комплексные числа в Maple»

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр. 153503 Бобко И.В.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Анисимов В.Я.

Минск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что действие извлечения корня не всегда выполнимо; корень чётной степени из отрицательного числа не имеет ответа в области вещественных чисел. В связи с этим уже квадратное уравнение с вещественными коэффициентами не всегда имеет вещественные корни. Это обстоятельство приводит к расширению понятия о числе, к введению новых чисел более общей природы, частным случаем которых являются вещественные числа. При этом существенно определить эти числа и действия над ними таким образом, чтобы для новых чисел остались в силе все основные законы действий, известные для вещественных чисел.

С помощью комплексных чисел решались не только алгебраические вопросы, но и геометрические. Например, К. Гаусс с помощью комплексных чисел нашёл, при каких натуральных значениях n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник. Благодаря новым числам были доказаны некоторые классические теоремы геометрии. В терминах комплексных чисел была построена аналитическая геометрия прямых и окружностей.

Целью данной курсовой работы является изучение теоретических и практических основ применения комплексных чисел в Maple.

Maple − это пакет для аналитических вычислений на компьютере, содержащий более двух тысяч команд, которые позволяют решать задачи алгебры, геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, статистики, математической физики [4, с. 4].

Оригинальность работы (система antiplagiat.ru, см. рис. 1): 64,8%

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: pqj78693@cdfaq.com / ID: 10352723
Проверяющий:

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 2
Начало загрузки: 15.12.2022 17:39:48
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла: KURSA4.pdf
Название документа: KURSA4
Размер текста: 12 кБ
Символов в тексте: 12471
Слов в тексте: 1631
Число предложений: 125

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 15.12.2022 17:39:49
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска: Интернет Free

ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
35,2%	0%	0%	64,8%

Рисунок 1 –Проверка на оригинальность

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Определение комплексного числа

Комплексное число – это выражение вида z = x + iy (или z = a + ib), где x, y действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, символ, квадрат которого равен –1, то есть i^2 = –1. Число x называется действительной частью, а число y — мнимой частью комплексного числа z = x + iy. Если y = 0, то вместо x + 0i пишут просто x. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Два комплексных числа z = x + iy и $\bar{z}$ = x - iy , отличающихся только знаком мнимой части, называются сопряжёнными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число z = x + iy равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю: x = y = 0.

В Maple, комплексное число записывается в алгебраической форме z = x + iy, и в командной строке такая запись должна выглядеть так [4, с. 6]:

> $z := x + I \cdot y$;

2. Действия над комплексными числами

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 15]:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad (1)$$

В случае суммы сопряжённых комплексных чисел:

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \qquad (2)$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 15]:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \qquad (3)$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 16]:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2) \quad (4)$$

В случае произведения сопряжённых комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x + iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (5)$$

Делением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 19]:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (6)$$

3. Свойства комплексных чисел

Из определения операций сложений и умножений комплексных чисел вытекают следующие свойства [1, с. 6]:

1. ***Коммутативность сложения***: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2. ***Ассоциативность сложения***: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
3. ***Коммутативность умножения***: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
4. ***Ассоциативность умножения***: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
5. ***Дистрибутивность сложения и умножения***:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

4. Оценивание комплексных выражений в Maple

Вещественную и мнимую части комплексного выражения z = x + *i*y можно найти с помощью команд **Re(z)** и **Im(z)** [4, с. 19]. Например:

```
> z := 5 + I·3;
                    z := 5 + 3 I
> Re(z); Im(z);
                         5
                         3
```

С помощью команды **conjugate(z)** можно найти комплексно сопряженное выражению z [4, с. 19]. Например:

```
> z := 5 + I·3;
                    z := 5 + 3 I
> w := conjugate(z);
                    w := 5 - 3 I
```

Модуль и аргумент комплексного выражения z можно найти с помощью команды **polar(z)** [4, с. 19]. Эта команда конвертирует декартову форму в полярную, но ее результат сложно использовать в последовательных расчетах. Например:

$> z := 5 + I\cdot 3;$

$$z := 3 + 2\,\mathrm{I}$$

$> \mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{13}, \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

Команды **Re(z)** и **Im(z)** могут и не дать требуемого результата, если комплексное выражение очень сложное или содержит параметры. Получить вещественную и мнимую части комплексного выражения z можно, если использовать команду преобразования комплексных выражений **evalc(z)**. [4, с. 19]. Например:

$> z := \tan(3\cdot I + 5);$

$$z := \tan(5 + 3\,\mathrm{I})$$

$> evalc(z); evalc(\mathrm{Re}(z)); evalc(\mathrm{Im}(z));$

$$\frac{\sin(5)\cos(5)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2} + \frac{\mathrm{I}\sinh(3)\cosh(3)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

$$\frac{\sin(5)\cos(5)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

$$\frac{\sinh(3)\cosh(3)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Что бы получить тригонометрическую форму комплексного числа, нужно в его алгебраическую форму подставить x = rcos(φ) и y = rsin(φ):

$$z = x + iy = rcos(\varphi) + i\,rsin(\varphi) = r(cos\varphi + i\,sin\varphi) \tag{7}$$

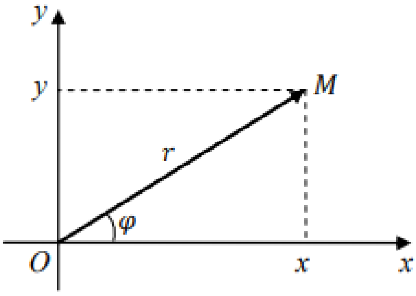

Рисунок 2 – Модуль и аргумент комплексного числа

Модуль найдём из прямоугольного треугольника (рис. 2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8}$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого 2πk, k $\in$ Z: Arg z = arg z + 2πk, где arg z – главное значение аргумента, заключённое в промежутке ($-\pi$; π] или [0; 2π). Для определения главного значения аргумента пользуются следующей формулой ($-\pi < \arg z \leq \pi$) [3, с.12]:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, z \in \text{I или IV четвертям,} \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, z \in \text{II четверти,} \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, z \in \text{III четверти.} \end{cases} \tag{9}$$

Производить операции связанные с умножением комплексных чисел более удобно в тригонометрической форме [1, с. 17].

1. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)\right) \cdot \left(r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)\right)$$
$$= r_1 \cdot r_2((cos\varphi_1 cos\varphi_2 - sin\varphi_1 sin\varphi_2) + i(cos\varphi_1 sin\varphi_2$$
$$+ sin\varphi_1 cos\varphi_2) = r_1 \cdot r_2\left(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \tag{10}$$

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)}$$

Обозначим через $\rho(cos\psi + isin\psi)$ результат деления.

Тогда

$$r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) = \rho(cos\psi + isin\psi) \cdot r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$$

Отсюда

$$\rho = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad \varphi_2 + \psi = \varphi_1 + 2\pi k, k \in N \Rightarrow \psi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \rho(cos\psi + isin\psi) = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \qquad (11)$$

3. ***Возведение в степень с натуральным показателем***

Из формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получим

$$z^n = r^n(cos\, n\varphi + i\, sin\, n\varphi) \qquad (12)$$

6. Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера: $e^{i\varphi} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi,$ комплексное число $z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$ можно записать в виде:

$$z = re^{i\varphi} \qquad (13)$$

Полученную формулу называют *показательной формой* записи комплексного числа [3, с. 14].

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задание 1. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа:

1) $\mathrm{Re}((z-2i)\cdot\bar{z})$;

2) $\mathrm{Re}(2z\cdot(z+i)\cdot(z-3i))$;

3) $\mathrm{Im}(i\,\frac{z^2}{\bar{z}})$;

4) $\mathrm{Im}((z-2i)\cdot\bar{z})$.

Пример 1.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$$Z = (z-2i)\cdot\bar{z} = z\cdot\bar{z} - 2i\bar{z} = |z|^2 - 2i\bar{z} = a^2 + b^2 - 2i(a-ib) = a^2 + b^2 - 2ia - 2b = a^2 + b^2 - 2b - 2ia.$$

Действительной частью комплексного числа Z является выражение:

$$a^2 + b^2 - 2b.$$

Решение в Maple:

> $z := a + b\cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\,b$$

> $evalc(\mathrm{Re}((z-2\cdot I)\cdot conjugate(z)));$

$$a^2 + (b-2)\,b$$

Пример 2.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$$Z = 2z\cdot(z+i)\cdot(z-3i) = (2z^2+2iz)\cdot(z-3i) = 2z^3 - 4iz^2 + 6z = 2(a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - ib^2) - 4i(a^2 + 2iab - b^2) + 6(a+ib) = 2a^3 + 6ia^2b + 6ab^2 - 2ib^3 - 4ia^2 + 8ab + 4ib^2 + 6a + 6ib = 2a^3 - 6ab^2 + 8ab + 6a + i(6a^2b - 2b^3 - 4a^2 + 4b^2 + 6b).$$

Действительной частью комплексного числа Z является выражение:

$$2a^3 - 6ab^2 + 8ab + 6a.$$

Решение в Maple:

> $z := a + b\cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\,b$$

> $evalc(\mathrm{Re}(2\cdot z\cdot(z+I)\cdot(z-3\cdot I)));$

$$2\,a^3 - 6\,a\,b^2 + 8\,a\,b + 6\,a$$

Пример 3.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$$Z = \frac{iz^2}{\bar{z}} = \frac{iz^2 z}{\bar{z}\, z} = \frac{iz^3}{|z|^2} = i\frac{a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3}{a^2 + b^2} = \frac{ia^3 - 3a^2b - 3iab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{3a^2b + b^2 + i(a^3 - 3ab^2)}{a^2 + b^2} = \frac{3a^2b + b^2}{a^2 + b^2} + i\frac{(a^3 - 3ab^2)}{a^2 + b^2}.$$

Мнимой частью комплексного числа Z является выражение:

$$\frac{(a^3 - 3ab^2)}{a^2 + b^2}.$$

Решение в Maple:

> $z := a + b \cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\, b$$

> $simplify\left(evalc\left(\mathrm{Im}\left(\frac{I \cdot z^2}{conjugate(z)}\right)\right)\right)$

$$\frac{a\,(a^2 - 3\,b^2)}{a^2 + b^2}$$

Пример 4.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$Z = (z - 2i) \cdot \bar{z} = z\bar{z} - 2i\bar{z} = |z|^2 - 2i\bar{z} = a^2 + b^2 - 2b - 2ia.$

Мнимой частью комплексного числа Z является выражение: *-2a*.

Решение в Maple:

> $z := a + b \cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\, b$$

> $simplify(evalc(\mathrm{Im}((z - 2 \cdot I) \cdot conjugate(z))))$

$$-2\,a$$

Задание 2. Решить уравнение с комплексными числами:

1) $2z^2 + 8z + 26 = 0$; 2) $z^2 + z + 1 = 0$.

Пример 1.

Решение:

Данное уравнение является квадратным, найдём его корни:

$$2z^2 + 8z + 26 = 0 \mid : 2,$$
$$z^2 + 4z + 13 = 0,$$
$$D = 16 - 52 = -36,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i,$$
$$z_1 = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i, \quad z_2 = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i.$$

Решение в Maple:

> $solve(2z^2 + 8\cdot z + 26 = 0)$

$$-2 + 3\,\mathrm{I},\ -2 - 3\,\mathrm{I}$$

Пример 2.

Решение:

Данное уравнение является квадратным, найдём его корни:

$$z^2 + z + 1 = 0,$$
$$D = 1 - 4 = -3,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}i,$$
$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad z_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Решение в Maple:

> $solve(z^2 - z + 1 = 0)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}$$

Задание 3. Представить комплексное число в тригонометрической и показательных формах.

Пример 1 [6, с. 10]. z = 2 + 2*i*.

Решение.

Найдём модуль комплексного числа:

$$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Найдем аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M(2, 2) находится в 1 четверти.

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right),$$

Показательная форма:

$$z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Решение в Maple:

> $z := 2 + 2\cdot I$

$$z := 2 + 2\,\mathrm{I}$$

> $\mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)$$

> $\# z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + I\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$

> $\# z = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}\pi}$

Пример 2 [6, с. 10]. $z = -3 + 3i$.

Решение.

Найдём модуль комплексного числа:

$$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Найдем аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M(-3, 3) находится в 2 четверти.

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{3}{-3} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

Показательная форма:

$$z = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}.$$

Решение в Maple:

> $z := -3 + 3 \cdot I$

$$z := -3 + 3\,\mathrm{I}$$

> $\mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(3\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

> $\# z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + I\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

> $\# z = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной курсовой работы был изучен и усвоен теоретический материал по комплексным числам и их использовании в СКО Maple.

В результате выполнения работы были выполнены следующие задачи:

1. Обобщены теоретические данные, связанные с комплексными числами.
2. Рассмотрены основные функции с комплексными числами в Maple.
3. Проведено решение задач с комплексными числами, и их решение в системе Maple.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Т.В. Родина Комплексные числа. Учебно-методическое пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 30с.

[2] Демидович, Б. П., Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

[3] Деменева, Н. В. Комплексные числа: учебное пособие / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 112 с.

[4] Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.

[5] Maple Documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.maplesoft.com/support/help/maple

[6] Деменева, Н. В. Комплексные числа : сборник задач / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего. образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2016. – 32 с