Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

«Комплексные числа в Maple»
БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр. 253505 Сенько Н.С.

Руководитель: Рыкова Ольга Васильевна доцент, Каф.ВМ

Минск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Операции сложения и умножения с натуральными числами обладают определенными свойствами, которые являются основой для развития алгебры:

1) коммутативный закон сложения

$$a + b = b + a$$

2) ассоциативный закон сложения

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3) коммутативный закон умножения

$$ab = ba$$

4) ассоциативный закон умножения

$$(ab)c = a(bc)$$

5) дистрибутивный закон умножения относительно сложения

$$a(b + c) = ab + bc$$

Множество, на котором заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие основным законам 1) – 5), и выполнимы обратные операции: вычитания и деления (за исключением случая, когда делитель равен нулю) называется полем.

Таким образом, множество рациональных чисел образует простейшее числовое поле. Но на множестве рациональных чисел, за исключением редких случаев, невозможна операция, обратная к операции возведения в степень. Если ввести иррациональные числа, этот пробел частично ликвидируется. На множестве всех вещественных чисел можно извлекать корни любой степени, но только из неотрицательных чисел. Множество вещественных чисел также образует поле, но для того, чтобы операция извлечения корня была возможна всегда, требуется дальнейшее его расширение.

Сделаем это с помощью введения искусственных (идеальных) элементов. С помощью комплексных чисел решались не только алгебраические вопросы, но и геометрические. Например, К. Гаусс с помощью комплексных чисел нашёл, при каких натуральных значениях n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник. Благодаря новым числам были доказаны некоторые классические теоремы геометрии. В терминах комплексных чисел была построена аналитическая геометрия прямых и окружностей.

Maple — это программный пакет, разработанный для выполнения аналитических вычислений на компьютере. Он предлагает широкий спектр возможностей и инструментов для решения различных математических задач. Maple обладает более двух тысячами команд, которые позволяют проводить вычисления в областях алгебры, геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, статистики и математической физики.

Одной из важных функций Maple является работа с комплексными числами. Комплексные числа представляются в Maple в виде пары вещественных чисел, где первое число обозначает вещественную часть, а второе число - мнимую часть. Maple предоставляет множество операций для работы с комплексными числами, включая сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Использование комплексных чисел в Maple позволяет решать разнообразные математические задачи. Например, комплексные числа широко применяются в анализе и решении уравнений, включая квадратные и кубические уравнения, системы линейных уравнений и дифференциальные уравнения. Они также играют важную роль в геометрии, особенно при рассмотрении комплексной плоскости, где комплексные числа представляются точками на плоскости.

В этой курсовой работе будет проведено изучение и практическое применение комплексных чисел в Maple. Будут рассмотрены основные операции с комплексными числами, их свойства, а также способы использования комплексных чисел для решения различных математических задач. Благодаря возможностям Maple, мы сможем проводить вычисления с комплексными числами, визуализировать результаты и анализировать полученные данные.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Определение комплексного числа

Комплексное число – это выражение вида z = x + iy (или z = a + ib), где x, y действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, число, квадрат которого равен –1 (i^2 = –1). Число x называется действительной частью, а число y — мнимой частью комплексного числа z = x + iy. Если y = 0, то вместо x + 0i пишут просто x. Отсюда видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел. Множество комплексных чисел обычно обозначают буквой C, а элементы этого множества – буквой z.

Два комплексных числа $z = x + iy$и $\overline{z} = x - iy$, отличающихся только знаком мнимой части, называются сопряжёнными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю: $x = y = 0$.

В Maple, комплексное число записывается в алгебраической форме, и в командной строке такая запись должна выглядеть так:

$z := x + I \cdot y;$

2. Действия над комплексными числами

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 15]:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1)$$

В случае суммы сопряжённых комплексных чисел:

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \quad (2)$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 15]:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (3)$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_2$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 16]:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - y_1x_2) \qquad (4)$$

В случае произведения сопряжённых комплексных чисел:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad (5)$$

Делением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством [3, с. 19]:

$$\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 + y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (6)$$

3. Свойства комплексных чисел

Из определения операций сложений и умножений комплексных чисел вытекают следующие свойства [1, с. 6]:

1. ***Коммутативность сложения***: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. ***Ассоциативность сложения***: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
3. ***Коммутативность умножения***: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
4. ***Ассоциативность умножения***: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
5. ***Дистрибутивность сложения и умножения***:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Проверим выполнение этих свойств в Maple:

```
z1 := a1 + I·b1;
z2 := a2 + I·b2;
z3 := a3 + I·b3;
```

```
z1 := a1 + I b1
z2 := a2 + I b2
z3 := a3 + I b3
```

1. ***Коммутативность сложения***:

```
> evalb(z1 + z2 = z2 + z1)
                              true
```

2. ***Ассоциативность сложения***:

```
> evalb((z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3))
                              true
```

3. ***Коммутативность умножения***:

$> evalb(z1 \cdot z2 = z2 \cdot z1)$

$$true$$

4. ***Ассоциативность умножения***:

$> evalb((z1 \cdot z2) \cdot z3 = z1 \cdot (z2 \cdot z3))$

$$true$$

5. ***Дистрибутивность сложения и умножения***:

$> evalb(expand((z1 + z2) \cdot z3) = expand(z1 \cdot z3 + z2 \cdot z3))$

$$true$$

4. Оценивание комплексных выражений в Maple

Вещественную и мнимую части комплексного выражения $z = x + iy$ можно найти с помощью команд **Re(z)** и **Im(z)** [4, с. 19]. Например:

$> z := 5 + I \cdot 3;$

$$z := 5 + 3\,\mathrm{I}$$

$> Re(z);\ Im(z);$

$$5$$

$$3$$

С помощью команды **conjugate(z)** можно найти комплексно-сопряженное выражению z [4, с. 19].

Например:

$> z := 5 + I \cdot 3;$

$$z := 5 + 3\,\mathrm{I}$$

$> w := \ conjugate(z);$

$$w := 5 - 3\,\mathrm{I}$$

Модуль и аргумент комплексного выражения z можно найти с помощью команды **polar(z)** [4, с. 19]. Эта команда конвертирует декартову форму в полярную, но ее результат сложно использовать в последовательных расчетах.

Например:

$> z := 5 + I \cdot 3;$

$$z := 3 + 2\,\mathrm{I}$$

$> \mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{13}, \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

Команды **Re(z)** и **Im(z)** могут и не дать требуемого результата, если комплексное выражение очень сложное или содержит параметры. Получить вещественную и мнимую части комплексного выражения z можно, если использовать команду преобразования комплексных выражений **evalc(z)**.

[4, с. 19].

Например:

> $z := \tan(3 \cdot I + 5);$

$$z := \tan(5 + 3\,I)$$

> $evalc(z); evalc(\mathrm{Re}(z)); evalc(\mathrm{Im}(z));$

$$\frac{\sin(5)\cos(5)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2} + \frac{I\sinh(3)\cosh(3)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

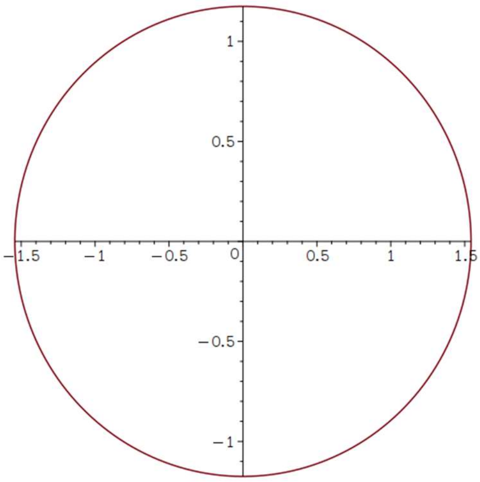
$$\frac{\sin(5)\cos(5)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

$$\frac{\sinh(3)\cosh(3)}{\cos(5)^2 + \sinh(3)^2}$$

Для построения комплексно-значных функций в Maple служит команда **complexplot**. Оператор complexplot([1+2*I,2+I,1-I],x=0..2,style = point) отобразит три точки: $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 + i,\ z_3 = 1 - i$ на комплексной плоскости. Если же опустить опцию style=point, то эти точки будут соединены ломаной. Оператор complexplot(x+2*x*I, x=0..1) построит отрезок прямой $y = 2x$. [7, 52с].

Например:

> $with(plots):$
$complexplot(\sin(x + I), x = -\pi..\pi)$



5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Что бы получить тригонометрическую форму комплексного числа, нужно в его алгебраическую форму подставить $x = rcos(\varphi)$ и $y = rsin(\varphi)$:

$$z = x + iy = rcos(\varphi) + irsin(\varphi) = r(cos\varphi + isin\varphi) \tag{7}$$

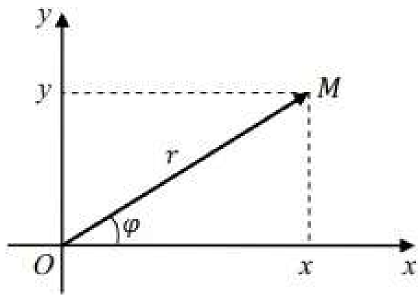


Рисунок 2 – Модуль и аргумент комплексного числа

Модуль найдём из прямоугольного треугольника (рис. 2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8}$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого 2πk, k ∈ Z: $Argz = argz + 2\pi k$, где $argz$ – главное значение аргумента, заключённое в промежутке. Для определения главного значения аргумента пользуются следующей формулой $(-\pi < argz \le \pi)$ [3, с.12]:

$$argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, z \in I \text{ или } IV \text{ четвертям} \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, z \in II \text{ четверти} \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, z \in III \text{ четверти} \end{cases} \tag{9}$$

Производить операции, такие, как умножение и деление комплексных чисел более удобно в тригонометрической форме [1, с. 17].

1. ***Умножение***

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) \tag{10}$$

Доказательство:

$$z_1 \cdot z_2 = \big(r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)\big) \cdot \big(r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)\big)$$
(11)
$$r1 \cdot r2$$
$$+sin\varphi_1 cos\varphi_2 = r_1 \cdot r_2\big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

2. ***Деление***

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} \tag{11}$$

Доказательство:

Обозначим через $\rho(cos\psi + isin\psi)$ результат деления. Тогда

$r1(cos\varphi1 + isin\varphi1) = \rho(cos\psi + isin\psi) \cdot r2(cos\varphi2 + isin\varphi2)$ отсюда

$r_2\rho = r_1 \Rightarrow \rho = \frac{r_1}{r_2}$ и $\varphi_2 + \psi = \varphi_1 + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow \psi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k$

3. *Возведение в степень с натуральным показателем*

Из формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получим

$$z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi) \qquad (12)$$

4. Извлечение корня

Число w называется корнем степени n из числа z, если $w^n = z$. Обозначать корень n-ой степени из z будем $\sqrt[n]{z}$.

Каждое решение уравнения $w^n = z$ является корнем n-ой степени из z. Все корни n -ой степени из числа z можно найти по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1 \dots n - 1 \qquad (13)$$

где $\sqrt[n]{r} -$ арифметический корень из модуля числа z, а φ – одно из значений $Argz$.

6. Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера: $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, комплексное число $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ можно записать в виде:

$$z = re^{i\varphi} \qquad (14)$$

Полученную формулу называют *показательной формой* записи комплексного числа [3, с. 14].

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задание 1. Найти действительную (мнимую) часть комплексного числа:

1) $Re\big((z-2i)\cdot\overline{z}\big)$;
2) $Re\big(2z(z+i)(z-3i)\big)$;
3) $Im\left(i\frac{z^2}{\overline{z}}\right)$;
4) $Im\big((z-2i)\overline{z}\big)$

Пример 1.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$$Z = (z - 2i)\cdot\bar{z} = z\cdot\bar{z} - 2i\bar{z} = |z|^2 - 2i\bar{z} = a^2 + b^2 - 2i(a - ib) = a^2 + b^2 - 2ia - 2b = a^2 + b^2 - 2b - 2ia.$$

Действительной частью комплексного числа Z является выражение:

$$a^2 + b^2 - 2b.$$

Решение в Maple:

```
> z := a + b·I;
                              z := a + I b
> evalc(Re((z − 2·I)·conjugate(z)));
                              a^2 + (b − 2) b
```

Пример 2.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$Z = 2z\cdot(z+i)\cdot(z-3i) = (2z^2 + 2iz)\cdot(z-3i) = 2z^3 - 4iz^2 + 6z = 2(a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - ib^2) - 4i(a^2 + 2iab - b^2) + 6(a+ib) = 2a^3 + 6ia^2b + 6ab^2 - 2ib^3 - 4ia^2 + 8ab + 4ib^2 + 6a + 6ib = 2a^3 - 6ab^2 + 8ab + 6a + i(6a^2b - 2b^3 - 4a^2 + 4b^2 + 6b).$

Действительной частью комплексного числа Z является выражение:

$$2a^3 - 6ab^2 + 8ab + 6a.$$

Решение в Maple:

```
> z := a + b·I;
                              z := a + I b
> evalc(Re(2·z·(z + I)·(z − 3·I)));
                              2 a^3 − 6 a b^2 + 8 a b + 6 a
```

Пример 3.

Решение.

Решение в Maple:

> $z := a + b \cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\, b$$

> $simplify\left(evalc\left(\operatorname{Im}\left(\frac{I \cdot z^2}{conjugate(z)}\right)\right)\right)$

$$\frac{a\,(a^2 - 3\,b^2)}{a^2 + b^2}$$

Пример 4.

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$Z = (z - 2i) \cdot \bar{z} = z\bar{z} - 2i\bar{z} = |z|2 - 2i\bar{z} = a^2 + b^2 - 2b - 2ia.$

Мнимой частью комплексного числа Z является выражение: *-2a*.

Решение в Maple:

> $z := a + b \cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\, b$$

> $simplify(evalc(\operatorname{Im}((z - 2 \cdot I) \cdot conjugate(z))))$

$$-2\,a$$

Задание 2. Решить уравнение с комплексными числами:

1) $2z^2 + 8z + 26 = 0;$

2) $z^2 + z + 1 = 0.$

Пример 1.

Решение:

Данное уравнение является квадратным, найдём его корни:

$$2z^2 + 8z + 26 = 0\ |:2,$$

$$z^2 + 4z + 13 = 0,$$

$$D = 16 - 52 = -36,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$z = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Решение в Maple:

> $solve(2\,z^2 + 8 \cdot z + 26 = 0)$

$$-2 + 3\,\mathrm{I},\ -2 - 3\,\mathrm{I}$$

Пример 2.

Решение:

Данное уравнение является квадратным, найдём его корни:

Решение в Maple:

> $solve(z^2 - z + 1 = 0)$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}$$

Задание 3. Представить комплексное число в тригонометрической и показательных формах.

Пример 1 [6, с. 10]. $z = 2 + 2i$.

Решение.

Найдём модуль комплексного числа:

$$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Найдем аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M(2, 2) находится в 1 четверти.

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right),$$

Показательная форма:

$$z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

Решение в Maple:

> $z := 2 + 2 \cdot I$

$$z := 2 + 2\,\mathrm{I}$$

> $\mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)$$

> $\# z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + I\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$

> $\# z = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi}$

Пример 2 [6, с. 10]. $z = -3 + 3i$.

Решение.

Найдём модуль комплексного числа:

$$r = z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Найдем аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M(-3, 3) находится в 2 четверти.

$$\varphi = \pi + arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{3}{-3} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = 3\sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sin\frac{3\pi}{4})$$

Показательная форма:

$$z = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Решение в Maple:

> $z := -3 + 3 \cdot I$

$$z := -3 + 3\,\mathrm{I}$$

> $\mathrm{polar}(z)$

$$\mathrm{polar}\left(3\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

> $\# z = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + I\cdot\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

> $\# z = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной курсовой работы был изучен и усвоен теоретический материал, касающийся комплексных чисел и их применения в системе компьютерной алгебры Maple.

В результате выполнения работы были выполнены следующие задачи:

1. Тщательно обобщены и систематизированы теоретические данные, связанные с комплексными числами. Были изучены основные понятия, свойства и операции, связанные с комплексными числами, включая алгебраическую и геометрическую интерпретации.
2. Были детально рассмотрены основные функции, связанные с комплексными числами, в системе Maple. Это включало изучение функций для работы с комплексными числами, таких как сложение, вычитание, умножение и деление, а также функций для нахождения модуля, аргумента и сопряженного числа.
3. Были проведены вычисления и решение задач, требующих использования комплексных чисел, с применением системы Maple. Это включало решение уравнений, нахождение корней комплексных чисел, вычисление значений функций с использованием комплексных аргументов и другие подобные задачи. Благодаря возможностям Maple, было возможно эффективно и точно решать такие задачи, что значительно облегчило и ускорило процесс решения.

Данная работа позволила углубить знания о комплексных числах и их применении, а также в использовании их в системе Maple, развить навыки решения задач с использованием комплексных чисел с помощью данной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Т.В. Родина Комплексные числа. Учебно-методическое пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 30с.

[2] Демидович, Б. П., Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

[3] Деменева, Н. В. Комплексные числа: учебное пособие / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 112 с.

[4] Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.

[5] Maple Documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.maplesoft.com/support/help/maple

[6] Деменева, Н. В. Комплексные числа : сборник задач / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего. образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2016. – 32 с

[7] Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple: учебное пособие/М.Н. Кирсанов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011.— 208 с.

[8] О. А. Сдвижков Математика на компьютере: Maple 8. — М.: СОЛОН-Пресс, 2003. — 176 с

[9] Деменева, Н. В. Комплексные числа: учебное пособие / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. Учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 112 с.

[10] Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116