Лекция 18. Методы расщепления

Лекция знакомит с идеями построения экономичных разностных схем для уравнений математической физики, основанных на методах покомпонентного расщепления (локально-одномерные схемы) и на принципах расщепления по физическим процессам.

Ключевые слова: методы расщепления, схема Кранка–Никольсон, локально-одномерные схемы, расщепление по физическим процессам, расщепление с факторизацией оператора.

18.1. Понятие о методах расщепления

Рассмотрим дифференциальную задачу для уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = 0; x \in \Omega_x,\ t \in \Omega_t,\ u|_\Gamma = u_\Gamma, u(t_0) = u_0. \tag{18.1}$$

Здесь оператор $\mathbf{A} \geqslant 0$ — положительный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. В запись оператора $\mathbf{A}$ входят производные по пространственным переменным. Для любого ненулевого элемента выполнено $(\mathbf{A}\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Γ — граница области интегрирования Ω_x; Λ — разностный оператор, аппроксимирующий $\mathbf{A}$. Можно проверить, что разностное уравнение

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda\frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0, u^0 = u_0 \tag{18.2}$$

аппроксимирует (18.1) со вторым порядком по τ (схема Кранка-Никольсон). Заметим, что (18.2) можно трактовать как результат попеременного применения явной и неявной схем первого порядка аппроксимации, записанных на интервалах $[t^n, t^{n+1/2}]$, $[t^{n+1/2}, t^{n+1}]$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} + \Lambda u^n = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} + \Lambda u^{n+1} = 0. \tag{18.3}$$

Исключая из уравнений (18.3) значения функции на промежуточном слое по времени (с полуцелым индексом), получим (18.2). Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, то

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0 \tag{18.4}$$

при этом разностный оператор также является положительным:

$$(\Lambda_n u, u) \geqslant 0,$$

а решение на следующем слое по времени может быть записано в операторном виде следующим образом:

$$u^{n+1} = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda^n)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda^n)u^n,$$

или

$$u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^n,$$

где $\mathbf{T}^n = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda^n)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda^n)$.

Для доказательства устойчивости полученного разностного уравнения умножим скалярно (18.4) на $(u^n + u^{n+1})/2$, получим

$$\frac{(u^{n+1}, u^{n+1}) - (u^n, u^n)}{2\tau} + \left(\Lambda^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) = 0 \tag{18.5}$$

Так как в силу положительности разностного оператора $(\Lambda^n u, u) \geqslant 0$, то из (18.5) следует, что $\|u^{n+1}\| \leqslant \|u^n\|$, чем и обеспечена устойчивость схемы. Если разностный оператор Λ (пространственные разности) выбран в виде полусуммы разностных операторов на верхнем и нижнем слоях по времени $\frac{1}{2}(\Lambda^{n+1} + \Lambda^n) = \Lambda^{n+1/2}$, то схема имеет второй порядок аппроксимации по τ.

18.2. Метод расщепления первого и второго порядка точности по τ

18.2.1. Локально-одномерные схемы

Положим, что дифференциальный оператор $\mathbf{A}$ и соответствующий ему разностный оператор Λ можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых включает производные лишь по одной пространственной переменной и разности лишь вдоль одного направления соответственно. Всего пространственных направлений N. Такие дифференциальные и разностные операторы будем называть *локально-одномерными*.

И дифференциальный, и разностный операторы записываются в виде суммы локально-одномерных:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i, \Lambda = \sum_{i}^{N} \Lambda_i.$$

Для однородной задачи можно выписать схему *расщепления по направлениям*:

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/N} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/N} = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_N u^{n+1} = 0.$$

Получена система разностных уравнений, каждое из которых не аппроксимирует исходное дифференциальное, но может быть легко решено (методом прогонки вдоль соответствующего направления, если разностные операторы содержат лишь первые и вторые разности). Тем не менее, последовательно примененные друг за другом, они дают на следующем слое по времени решение с разумной точностью. Говорят, что имеет место *суммарная аппроксимация* — результирующий оператор послойного перехода получился аппроксимирующим. Описанный выше способ называется иногда методом дробных шагов, и уже встречался при решении многомерного уравнения теплопроводности.

Для неоднородной задачи один из возможных вариантов схемы расщепления имеет вид

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/N} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/N} = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_N u^{n+1} = f^n.$$

Возможны и другие способы учета правой части, например, введение ее во все уравнения с весовыми множителями, которые подбираются из условий наилучшей суммарной аппроксимации (минимизации ошибки аппроксимации на следующем слое по времени).

Приведенные выше схемы расщепления по направлениям абсолютно устойчивы.

18.2.2. Схемы Кранка–Никольсон

Рассмотрим обобщение схемы Кранка–Никольсон на случай многомерных уравнений с локально-одномерными операторами. Положим, как и ранее, $\Lambda = \sum\limits_{i}^{N} \Lambda_i$. Если коэффициенты разностного оператора явно зависят от времени, они берутся на промежуточном временном слое $\Lambda = \Lambda(t^{n+1/2})$. Для простоты изложения рассмотрим двумерный случай.

Схему расщепления по направлениям представим в виде

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 \frac{u^{n+1/2} + u^n}{2} = 0$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_2 \frac{u^{n+1} + u^{n+1/2}}{2} = 0,$$

а решение на следующем слое по времени в операторной форме выписывается как $u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^n$. Для оператора послойного перехода получается следующая формула:

$$\mathbf{T}^n = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1).$$

При выполнении условия

$$\frac{\tau}{2}\,\|\Lambda_i\| < 1$$

схема устойчива, обладает вторым порядком аппроксимации по времени, если операторы Λ_1, Λ_2 коммутативны, и первым — если нет.

18.2.3. Общая формулировка методов расщепления

Заменим локально-одномерные дифференциальные операторы $\mathbf{A}_i$ разностными операторами на каждом шаге по времени $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$.

Представим схему расщепления в следующем общем виде:

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_{10}u^n + \mathbf{\Lambda}_{11}u^{n+1/N} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_{20}u^n + \mathbf{\Lambda}_{21}u^{n+1/N} + \mathbf{\Lambda}_{22}u^{n+2/N} = 0,$$

$$\ldots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{N-1}{N}}}{\tau} + \mathbf{\Lambda}_{N0}u^n + \mathbf{\Lambda}_{N1}u^{n+1/2} + \ldots + \mathbf{\Lambda}_{NN}u^{n+1} = 0.$$

Условие устойчивости такой схемы расщепления будет

$$\|C_i C_{i-1} \dots C_1\| \leqslant 1 + c\tau, \quad c = \text{const},$$

где $C_i = (\mathbf{E} + \tau\Lambda_{ii})^{-1}(\mathbf{E} + \tau\Lambda_{i,i-1}), i = 1, 2, \dots, N$

Двухслойная схема расщепления с весовыми коэффициентами представлена в виде

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 \left[(1-\sigma)u^n + \sigma u^{n+1/N}\right] = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 \left[(1-\sigma)u^{n+1/N} + \sigma u^{n+2/N}\right] = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{N-1}{N}}}{\tau} + \Lambda_N \left[(1-\sigma)u^{n+\frac{N-1}{N}} + \sigma u^{n+1}\right] = 0.$$

Если в этой схеме расщепления положить веса верхнего и нижнего слоев по времени равными, $\gamma = 0,5$, то в случае коммутирующих операторов Λ_i (каждый такой разностный оператор аппроксимирует со вторым порядком соответствующий локально-одномерный дифференциальный оператор) схема будет иметь второй порядок аппроксимации и по времени. Если при этом каждый оператор $\Lambda_i \geqslant 0$, то схема будет абсолютно устойчивой.

18.2.4. Схемы расщепления для уравнения теплопроводности

Рассматриваем нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, t \in \Omega_t, \{x, y, z\} \in \Omega.$$

Здесь оператор Лапласа определен как $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Его также можно записать в виде суммы трех локально-одномерных операторов $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$. Соответствующие разностные операторы будут $\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} + \Lambda_{zz}$, где $\Lambda_{xx} = \frac{u_{m-1,jk} - 2u_{mjk} + u_{m+1,jk}}{h_x^2}$ аналогично определяются операторы вычисления второй разностной производной и по остальным направлениям $\Lambda_{yy}, \Lambda_{zz}$

Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности будет

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_{xx} u^{n+1/3} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_{yy} u^{n+2/3} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} + \Lambda_{zz} u^{n+1} = 0.$$

Для повышения порядка аппроксимации можно использовать схему с весами

$$\frac{u^{n+1/3}-u^n}{\tau}+\Lambda_{xx}\left[(1-\sigma)u^n+\sigma u^{n+1/3}\right]=0,$$

$$\frac{u^{n+2/3}-u^{n+1/3}}{\tau}+\Lambda_{yy}\left[(1-\sigma)u^{n+1/3}+\sigma u^{n+2/3}\right]=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+2/3}}{\tau}+\Lambda_{zz}[(1-\sigma)u^{n+2/3}+\sigma u^{n+1}]=0.$$

18.3. Методы двуциклического покомпонентного расщепления

Для этих методов отсутствует требование коммутативности операторов Λ_i.

Будем рассматривать численное решение (18.1) не на одном шаге по времени, отрезке $[t^n, t^{n+1}]$, а на двух последовательных шагах $[t^{n-1}, t^{n+1}]$. Пусть теперь разностные локально-одномерные операторы зависят явно от времени, тогда они определены в середине отрезка $\Lambda_i = \Lambda_i(t^n)$. Запишем схему расщепления:

$$\frac{u^{n-1/2}-u^{n-1}}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n-1/2}+u^{n-1}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n}-u^{n-1/2}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n}+u^{n-1/2}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n+1/2}-u^{n}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{2}=0. \qquad (18.6)$$

В операторной форме этот метод записывается как $u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^{n-1}$, где введено обозначение

$$\mathbf{T}^n=\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\times$$

$$\times\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)=\mathbf{E}-2\tau\Lambda+\frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda)^2+\ldots$$

Если локально-одномерные операторы положительны $\mathbf{A}_i(t) > 0$, то при достаточной гладкости решения и элементов матриц $\mathbf{A}_i(t)$ схема (18.6) абсолютно устойчива и аппроксимирует (18.1) со вторым порядком.

Для неоднородного дифференциального уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = f$ разностная аппроксимация метода расщепления может быть представлена в виде

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-1/2} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-1},$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) (u^n - \tau f^n) = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u^{n-1/2},$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u^{n+1/2} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) (u^n + \tau f^n),$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1/2},$$

где $f^n = f(t_n)$.

В операторной форме записи решение неоднородной задачи имеет вид: $u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^{n-1} + 2\tau \mathbf{T}_1^n \mathbf{T}_2^n f^n$, где введены обозначения $\mathbf{T}^n = \mathbf{T}_1^n \mathbf{T}_2^n \mathbf{T}_2^n \mathbf{T}_1^n$ $\mathbf{T}_i^n = \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_i^n\right)^{-1} \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_i^n\right)$.

Представим разностную аппроксимацию неоднородного дифференциального уравнения с помощью последовательного применения операторов $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N, \Lambda_N, \ldots, \Lambda_1$:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-\frac{N-1}{N}} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-1},$$

$$\ldots$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_N\right) (u^n - \tau f^n) = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_N\right) u^{n-1/N},$$

$$\ldots$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_N\right) u^{n+1/N} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_N\right) (u^n + \tau f^n),$$

$$\ldots$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+\frac{N-1}{N}}.$$

Рассмотрим примеры использования метода двуциклического расщепления для некоторых задач математической физики.

Пример 1. Трехмерное нестационарное уравнение диффузии, область интегрирования — параллелепипед. Полагаем, что в вертикальном направлении (ось $0z$) коэффициент диффузии в вертикальной плоскости γ зависит от координаты, что характерно для задач геофизики, μ — коэффициент диффузии в горизонтальной плоскости. Задача может быть представлена в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\Delta u + f.$$

Сведем решение рассматриваемой трехмерной задачи к последовательному решению трех одномерных задач. Первая задача имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u_1}{\partial z} + f,$$

она описывает диффузию в вертикальной плоскости. Вторую и третью задачи запишем

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \frac{\partial u_3}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}.$$

Теперь рассмотрим разностную аппроксимацию исходного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)u = f, \text{где}$$

$$\Lambda_1 u = -\frac{\mu}{h_x^2}(u_{m,j,k+1} - 2u_{mjk} + u_{m,j,k-1}),$$

$$\Lambda_2 u = -\frac{\mu}{h_y^2}(u_{m,j-1,k} - 2u_{mjk} + u_{m,j+1,k}),$$

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{h_z}\left[-\frac{\gamma_{m+1/2,jk}}{h_z}(u_{m+1,jk} - u_{mjk}) + \frac{\gamma_{m-1/2}}{h_z}(u_{mjk} - u_{m-1,jk})\right].$$

Разностная схема двуциклического покомпонентного расщепления приобретает вид

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau} + \Lambda_1\frac{u^{n+1/6} + u^n}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau} + \Lambda_2\frac{u^{n+2/6} + u^{n+1/6}}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau} + \Lambda_3\frac{u^{n+3/6} + u^{n+2/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+4/6} - u^{n+3/6}}{\tau} + \Lambda_3\frac{u^{n+4/6} + u^{n+3/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+5/6} - u^{n+4/6}}{\tau} + \Lambda_2\frac{u^{n+5/6} + u^{n+4/6}}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+5/6}}{\tau} + \Lambda_1\frac{u^{n+1} + u^{n+5/6}}{2} = 0.$$

Пример 2. Сопряженное нестационарное уравнение переноса и диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3)u = f,$$

где операторы определены как

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial(v_1 u)}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\partial(v_2 u)}{\partial y} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\partial(v_3 u)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma u.$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — компоненты вектора скорости, u — концентрация субстанции, σ — коэффициент поглощения субстанции внешней средой, $\sigma > 0$.

Соответствующую схему расщепления представим в виде

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau} + \Lambda_1\frac{u^{n+1/6} + u^n}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau} + \Lambda_2\frac{u^{n+2/6} + u^{n+1/6}}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau} + \Lambda_3\frac{u^{n+3/6} + u^{n+2/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+4/6} - u^{n+3/6}}{\tau} + \Lambda_3\frac{u^{n+4/6} + u^{n+3/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+5/6} - u^{n+4/6}}{\tau} + \Lambda_2\frac{u^{n+5/6} + u^{n+4/6}}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+5/6}}{\tau} + \Lambda_1\frac{u^{n+1} + u^{n+5/6}}{2} = 0,$$

где разностные операторы аппроксимируют соответствующие локально-одномерные дифференциальные операторы. Так для рассматриваемой задачи

$$\Lambda_1 u = -\frac{\mu}{h_x^2}(u_{m+1,jk} - 2u_{mjk} + u_{m-1j,k}) + \frac{(v_1 u)_{m+1,jk} - (v_1 u)_{m-1,jk}}{2h_x},$$

$$\Lambda_2 u = -\frac{\mu}{h_y^2}(u_{m,j+1,k} - 2u_{mjk} + u_{m,j-1,k}) + \frac{(v_2 u)_{m,j+1,k} - (v_2 u)_{m,j-1,k}}{2h_y},$$

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{h_z}\left[-\frac{\gamma_{m+1/2,jk}}{h_z}(u_{m+1,jk} - u_{mjk}) + \frac{\gamma_{m-1/2}}{h}(u_{mjk} - u_{m-1,jk})\right] +$$
$$+\frac{(v_3 u)_{m,j,k+1} - (v_3 u)_{m,j,k-1}}{2h_z} + \sigma u_{mjk}.$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче на каждом этапе может быть проведено расщепление и по физическим процессам. Для простоты рассмотрим двухмерное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(v_1, u)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2, u)}{\partial y} - \mu\Delta u - \sigma u = f,$$

в котором компоненты скорости движения среды v_1, v_2 удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Первый этап расщепления задачи по физическим процессам связан с переносом, на нем решается разностный аналог уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial (v_1, u)}{\partial x} + \frac{\partial (v_2, u)}{\partial y} = 0.$$

Второй этап расщепления описывает процессы диффузии и поглощения субстанций

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu \Delta u + \sigma u_2 = f.$$

Пример 3. ***Расщепление по физическим процессам*** системы уравнений газовой динамики (метод крупных частиц).

Система

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} u_1) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} u_2) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) + \operatorname{div}(P \mathbf{v}) = 0,$$

$$P = P(\rho, \varepsilon), e = \varepsilon + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2},$$

u_1, u_2 — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, P — давление газа, ρ — плотность, ε — внутренняя энергия.

Первый (Эйлеров) этап. Измеряются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость внутри каждой ячейки сетки считается моментально замороженной. Расчет производится по формулам, аппроксимирующим уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(P \mathrm{v}) = 0.$$

На втором (Лагранжевом) этапе происходит движение газа массы через границы эйлеровых ячеек и перераспределение массы, импульса, энергии по пространству; определяются поля параметров течения газа. Аппроксимируется система уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_1 \mathbf{v}) = 0, \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_2 \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) = 0.$$

18.4. Методы расщепления с факторизацией оператора

18.4.1. Факторизованная схема расщепления

Пусть для решения дифференциальной задачи

$$\mathbf{B}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = f, u(t_0) = u_0$$

используется разностная схема $\mathbf{B}u^{n+1} = F^n$, где $F^n = (\mathbf{B} - \tau\mathbf{A})u^n + \tau f^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Пусть для вычисления F^n затрачивается $O(N)$ действий, число арифметических операций пропорционально числу узлов сетки N. Такие разностные операторы называются *экономичными*.

Пусть $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — экономичные разностные операторы, такие, что $\mathbf{B}_i v = F$.

Назовем схему ***разностной схемой с факторизованным оператором*** $\mathbf{B}$, если возможно его представление в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_N.$$

Эта схема будет также экономичной, так как для решения разностного уравнения по-прежнему потребуется $O(N)$ действий. В самом деле, решение уравнения

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_N u^{n+1} = F^n$$

может быть найдено в результате последовательного решения р уравнений

$$\mathbf{B}_1 u_1 = F^n,$$

$$\mathbf{B}_2 u_2 = u_1,$$

$$\mathbf{B}_3 u_3 = u_2,$$

$$\cdot \;\ldots$$

$$\mathbf{B}_i u_i = u_{i-1},$$

здесь $i = 2, 3, \ldots, N$. Тогда $u^{n+1} = u_N$. В записи задачи введены обозначения $u_1 = u^{n+1/N}, \ldots, u_i = u^{n+i/N}, \ldots, u_{N-1} = u^{n+\frac{N-1}{N}}$ — промежуточные значения.

Схемы с факторизованным оператором иногда называются также *факторизованными схемами*. Устойчивая схема с факторизованным оператором $\mathbf{B}$, которая представляет собой произведение конечного числа операторов $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_N$, является экономичной схемой.

Пример. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема). Приведем запись схемы для решения линейного двумерного уравнения теплопроводности. Расчетные формулы есть

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\frac{1}{2}\tau} - (\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n) = f^n,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\frac{1}{2}\tau} - (\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1}) = f^n.$$

Тогда, исключая $u^{n+1/2}$, получим в операторной форме записи

$$\left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1} = \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^n,$$

или $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 u^{n+1} = F^n$, где $\mathbf{B}_1 = \mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2$, $F^n = \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^n$.

Разностная схема может быть представлена в виде факторизованный схемы расщепления:

$$\mathbf{B}_1 u_1 = F^n, \mathbf{B}_2 u^{n+1} = u_1.$$

18.4.2. Неявная схема расщепления с приближенной факторизацией

Рассмотрим неявную разностную схему

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda u^{n+1} = 0, n = 0, 1, \ldots, \Lambda = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i, \Lambda_i > 0. \tag{18.7}$$

Представим разностную схему (18.7) в виде

$$(\mathbf{E} + \tau\Lambda)u^{n+1} = u^n. \tag{18.8}$$

Факторизуем разностную схему (18.8) приближенно с точностью до членов порядка $O(\tau^2)$. Для этого заменим в (18.8) оператор $\mathbf{E} + \tau\Lambda$ на факторизованный

$$(\mathbf{E} + \tau\Lambda_1)(\mathbf{E} + \tau\Lambda_2)\ldots(\mathbf{E} + \tau\Lambda_N) = \mathbf{E} + \tau\Lambda + \tau^2\mathbf{R},$$

где введено обозначение

$$\mathbf{R} = \sum_{i<j}\Lambda_i\Lambda_j + \tau\sum_{i<j<k}\Lambda_i\Lambda_j\Lambda_k + \ldots + \tau^{n-2}\Lambda_1\ldots\Lambda_n.$$

Врезультате приходим к неявной схеме с приближенной факторизацией

$$\mathbf{B}u^{n+1} = u^n, \mathbf{B} = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i = \mathbf{E} + \tau\Lambda_i,$$

или

$$(\mathbf{E} + \tau\Lambda_1)u^{n+1/N} = u^n,$$
$$(\mathbf{E} + \tau\Lambda_2)u^{n+2/N} = u^{n+1/N},$$
$$\ldots$$
$$(\mathbf{E} + \tau\Lambda_N)u^{n+1} = u^{n+\frac{N-1}{N}}.$$

Эта схема абсолютно устойчива, имеет первый порядок аппроксимации.

18.4.3. Метод «предиктор-корректор»

Основная идея методов типа «предиктор-корректор» заключается в следующем. На каждом отрезке $[t^n,\ t^{n+1}]$ задача решается в два приема: сначала по схеме первого порядка аппроксимации и со значительным запасом устойчивости находится решение в момент времени $t^{n+1/2} = t^n + \tau/2$ — *предиктор*. После этого на втором этапе расписывается исходное уравнение по схеме более высокого порядка аппроксимации (чаще всего, второго) — корректор. Основная идея семейств таких методов близка к идее построения методов типа Рунге-Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представим эту схему как следующую схему расщепления:

$$\frac{u^{n+1/4} - u^n}{\tau/2} + \Lambda_1 u^{n+1/4} = 0,$$
$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n+1/4}}{\tau/2} + \Lambda_2 u^{n+1/2} = 0,$$
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda u^{n+1/2} = 0.$$

Если в этой схеме расщепления исключить $u^{n+1/4}$, то получим последовательность расчетных формул

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1/2}=\varphi^n,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1/2}=0,$$

далее, исключив, $\Lambda u^{n+1/2}$, получим

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}u^n=0.$$

Если для разностных операторов выполнены условия $\frac{\tau}{2}\|\Lambda_i\|<1$, $\Lambda_1\geqslant 0$, $\Lambda_2\geqslant 0$, а коэффициенты разностной схемы явно не зависят от времени, то при достаточной гладкости решения дифференциальной задачи разностная схема абсолютно устойчива и аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком.

Далее рассмотрим случай, когда оператор Λ представляется в виде суммы операторов Λ_i: $\Lambda=\sum\limits_i\Lambda_i$. Пусть все эти разностные операторы положительны. Метод «предиктор-корректор» можно записать в виде последовательности расчетных формул

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)u^{n+1/2N}=u^n+\frac{\tau}{2}f^{n+1/2},$$

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^{n+2/2N}=u^{n+1/2N},$$

$$\ldots$$

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_N\right)u^{n+1/2}=u^{n+\frac{N}{2N}},$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1/2}=f^{n+1/2}.$$

Эта последовательность после исключения промежуточных этапов сводится к одному разностному уравнению

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda\prod_{i=N}^{1}\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_i\right)^{-1}(u^n+\frac{\tau}{2}f^{n+1/2})=f^{n+1/2}.$$

Приведем пример построения такой схемы. Для нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$$

получим следующую разностную схему типа «предиктор-корректор»

$$\frac{u^{n+1/6}-u^n}{\tau/2}+\Lambda_1 u^{n+1/6}=0,$$

$$\frac{u^{n+1/3}-u^{n+1/6}}{\tau/2}+\Lambda_2 u^{n+1/3}=0,$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n+1/3}}{\tau/2}+\Lambda_3 u^{n+1/2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1/2}=0.$$

Далее, исключая промежуточные слои, получим схему, записанную в каноническом виде

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda\frac{u^{n+1}+u^n}{2}+\frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1\Lambda_2+\Lambda_1\Lambda_3+\Lambda_2\Lambda_3)\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+$$
$$+\frac{\tau^3}{8}\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=0.$$

Схема абсолютно устойчива (для коммутирующих операторов), имеет второй порядок аппроксимации по τ и h_i. Конечно, при практическом решении задач на компьютере используется именно последовательность разностных операторов. Канонический вид схемы удобен для ее теоретического исследования.

Литература

[1] *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физико-математическая литература, 1994. 442 с.

[2] *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.

[3] *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Методы расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 263 с.