Исследование комплексных чисел в программе Maple: Теория и практика

Введение

Презентация посвящена **исследованию комплексных чисел** в программе Maple. Мы рассмотрим **теоретические аспекты** и **практические примеры** применения комплексных чисел в Maple.

Введение

Операции сложения и умножения с натуральными числами обладают определенными свойствами, которые являются основой для развития алгебры:

1) коммутативный закон сложения

$$a + b = b + a$$

2) ассоциативный закон сложения

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3) коммутативный закон умножения

$$ab = ba$$

4) ассоциативный закон умножения

$$(ab)c = a(bc)$$

5) дистрибутивный закон умножения относительно сложения

$$a(b + c) = ab + bc$$

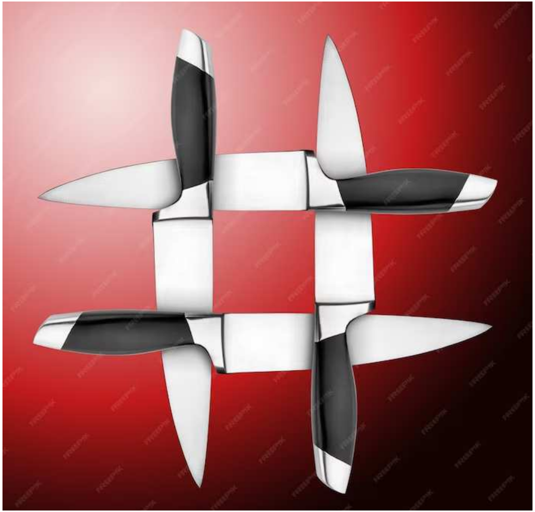
Множество, на котором заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие основным законам 1) – 5), и выполнимы обратные операции: вычитания и деления (за исключением случая, когда делитель равен нулю) называется полем.

Введение

Для того, чтобы операция извлечения корня была возможна всегда, требуется дальнейшее расширение множества вещественных чисел. Сделаем это с помощью введения искусственных (идеальных) элементов.

Определение комплексных чисел

Комплексные числа представляются в виде **a + bi**, где **a** и **b** - действительные числа, а **i** - **мнимая единица**.



Алгебраическая форма

Комплексные числа могут быть представлены в **алгебраической форме** вида **z = a + bi**, где **a** - **действительная часть**, а **b** - **мнимая часть**.

Тригонометрическая форма

Комплексные числа также могут быть представлены в **тригонометрической форме** с использованием **модуля** и **аргумента**.

$$z = x + iy = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Модуль найдём из прямоугольного треугольника

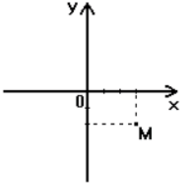
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, z \in I \text{ или } IV \text{ четвертям} \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, z \in II \text{ четверти} \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, z \in III \text{ четверти} \end{cases}$$

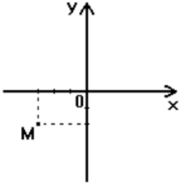
Комплексное число a+bi определяется двумя вещественными числами, поэтому ему можно сопоставить точку M (a, b) координатной плоскости и, наоборот, каждой точке плоскости M (a b) можно сопоставить комплексное число a + bi . Поэтому можно рассматривать комплексные числа как точки плоскости, которую мы будем называть комплексной плоскостью.

Графическое представление

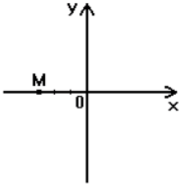
$z = 3 - 2i$



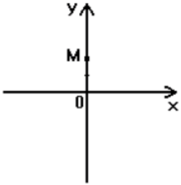
$z = -3 - 2i$



$z = -3$

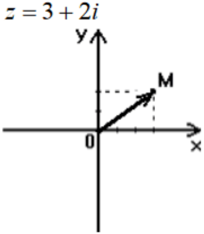


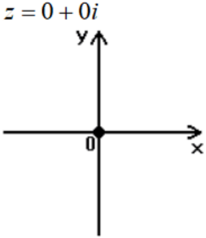
$z = 2i$



Графическое представление

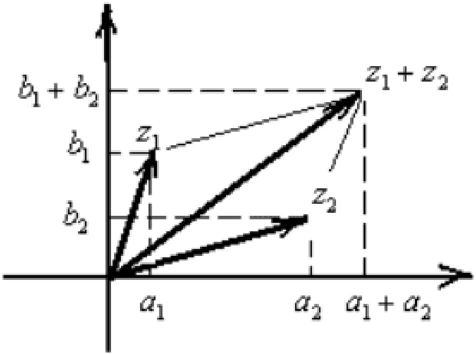
Часто комплексное число интерпретируют как вектор, направленный из начала координат в точку M(a,b) Точке O(0,0) соответствует нулевой вектор или число 0 0i

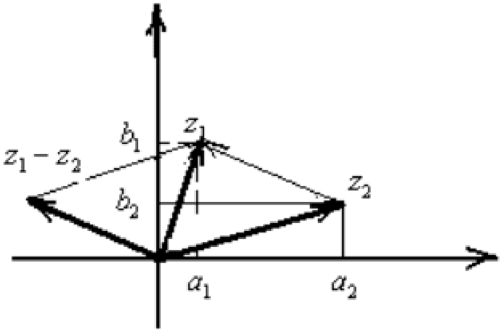




Графическое представление

Интересно отметить, что сложение и вычитание комплексных чисел, введенное в их определении, полностью согласуется со сложением векторов по правилу параллелограмма.





Комплексные числа в Maple

Программа Maple предоставляет мощные инструменты для работы с комплексными числами, включая возможность выполнения **алгебраических** и **тригонометрических операций**.

Практическая часть

Проверим выполнение свойств поля комлексных чисел в Maple

1. ***Коммутативность сложения***:

$> evalb(z1 + z2 = z2 + z1)$

$$true$$

2. ***Ассоциативность сложения***:

$> evalb((z1 + z2) + z3 = z1 + (z2 + z3))$

$$true$$

3. ***Коммутативность умножения***:

$> evalb(z1 \cdot z2 = z2 \cdot z1)$

$$true$$

4. ***Ассоциативность умножения***:

$> evalb((z1 \cdot z2) \cdot z3 = z1 \cdot (z2 \cdot z3))$

$$true$$

5. ***Дистрибутивность сложения и умножения***:

$> evalb(expand((z1 + z2) \cdot z3) = expand(z1 \cdot z3 + z2 \cdot z3))$

$$true$$

Практическая часть

Решим пример $Re\left((z-2i)\cdot\overline{z}\right);$

Решение.

Раскроем скобки и подставим $z = a + ib$

$$Z = (z-2i)\cdot\bar{z} = z\cdot\bar{z} - 2i\bar{z} = |z|^2 - 2i\bar{z} = a^2 + b^2 - 2i(a-ib) = a^2 + b^2 - 2ia - 2b = a^2 + b^2 - 2b - 2ia.$$

Действительной частью комплексного числа Z является выражение:

$$a^2 + b^2 - 2b.$$

Решение в Maple:

> $z := a + b\cdot I;$

$$z := a + \mathrm{I}\,b$$

> $evalc(\mathrm{Re}((z - 2\cdot I)\cdot conjugate(z)));$

$$a^2 + (b-2)\,b$$

Практическая часть

Решим уравнение

Решение:

Данное уравнение является квадратным, найдём его корни:

$$2z^2 + 8z + 26 = 0 \mid : 2,$$

$$z^2 + 4z + 13 = 0,$$

$$D = 16 - 52 = -36,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$z = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Решение в Maple:

> $solve(2z^2 + 8 \cdot z + 26 = 0)$

$$-2 + 3I, -2 - 3I$$

Заключение

Maple - мощный инструмнт для исследования комплексных чисел, а также для решения уравнений и неравенств.

Спасибо!

Сенько Никита
Святославович

2 курс ИиТП