МКЭ в одномерном случае

1. Двухточечная краевая задача

Формулировка двухточечной краевой задачи:

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)\cdot u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega = (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(1)}{dx} = 0 \text{ – краевые условия,} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &p(x) \in C^1[0, 1]:\ 0 < p_0 \le p(x) \le p_1; \\ &q(x) \in C[0, 1]:\ \ 0 \le q_0 \le q(x) \le q_1; \\ &f(x) \in C[0, 1] \subset L_2(0, 1) \ \text{ – заданные функции.} \end{aligned} \tag{3}$$

Область определения оператора L: $D(L) = \{v \in C^2[0,1]:\ v(0) = v'(1) = 0\}$.

Симметричность оператора L:

$$(Lu, v) = \int_0^1 (-[p\,u']' + q\,u)\cdot v\,dx = -[p\,u']\cdot v\Big|_0^1 + \int_0^1 (p\cdot u'v' + q\cdot u\,v)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (u'\cdot[p\,v'] + q\cdot u\,v)\,dx = u\cdot[p\,v']\Big|_0^1 + \int_0^1 u\cdot(-[p\,v']' + q\cdot u\,v)\,dx = (u, Lv).$$

Положительная определенность оператора L:

$$(Lv, v) = \int_0^1 (p\,|v'|^2 + q\,|v|^2)\,dx \ge p_0 \int_0^1 |v'|^2\,dx \ge \frac{p_0}{c}\int_0^1 |v|^2\,dx \equiv \gamma\,\|v\|^2,$$

где $c > 0$ – постоянная обобщенного неравенства Фридрихса:

$$\int_0^1 |v|^2\,dx \le c\cdot\left(\int_0^1 |v'|^2\,dx + |v(0)|^2\right).$$

$c = 2$, так как, интегрируя по x от 0 до 1 левую и правую части неравенств

$$[v(x)]^2 \equiv [v(0) + \int_0^x v'(y)\,dy]^2 \le 2\cdot v^2(0) + 2\cdot[\int_0^x v'(y)\,dy]^2 \le$$

$$\le 2\cdot v^2(0) + 2x\cdot\int_0^x [v'(y)]^2\,dy \le 2\cdot[v^2(0) + \int_0^1 [v'(y)]^2\,dy],$$

получим $\int_0^1 |v|^2\,dx \le 2\cdot(\int_0^1 |v'|^2\,dx + |v(0)|^2)$.

Энергетическое пространство оператора $A = L:\ D(L) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – пополнение H_A линейного множества $D(L)$ в норме $\|v\|_A = \sqrt{(v,v)_A}$, где

$$(u, v)_A = (Lu, v) = \int_0^1 (p\cdot u'v' + q\cdot u\,v)\,dx \quad \forall\, u, v \in D(L), \tag{4}$$

– функции из $W_2^1(0,1)$, равные нулю при $x = 0$ (главное краевое условие) и принимающие любое значение при $x = 1$ (естественное краевое условие).

Лемма 1. В $H_A = \{v \in W_2^1(0,1):\ v(0)=0\}$ нормы $\| v \|_A = \sqrt{(v,v)_A}$ и

$\| v \|_1 = \sqrt{\int_0^1 (| v'(x) |^2 + | v(x) |^2)\, dx}$ эквивалентны:

$$\gamma_0 \cdot (v,v)_1 \le (v,v)_A \le \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \quad \forall\ v \in H_A.$$
$$\gamma_0 = p_0 / 2, \quad \gamma_1 = \max\{p_1;\ 1+q_1\}.$$

Доказательство. Легко убедиться в справедливости следующих выкладок $\forall\ v \in H_A$.

$$(v,v)_A = \int_0^1 (p \cdot |v'|^2 + q \cdot | v |^2)\, dx \ge p_0 \cdot \int_0^1 |v'|^2\, dx =$$

$$= \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2\, dx + \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2\, dx \ge \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2\, dx + \frac{p_0}{2c} \cdot \int_0^1 |v|^2\, dx,$$

где $c = 2$ – постоянная обобщённого неравенства Фридрихса.

Следовательно, $(v,v)_A \ge \frac{p_0}{2} \cdot [\int_0^1 |v'|^2\, dx + \int_0^1 |v|^2\, dx]$, т.е. $\gamma_0 = p_0 / 2$.

Далее,

$$(v,v)_A = \int_0^1 (p \cdot |v'|^2 + q \cdot | v |^2)\, dx \le p_1 \cdot \int_0^1 |v'|^2\, dx + (1+q_1) \cdot \int_0^1 |v|^2\, dx \le$$
$$\le \max\{p_1;\ 1+q_1\} \cdot [\int_0^1 |v'|^2\, dx + \int_0^1 |v|^2\, dx],$$

Следовательно, $\gamma_1 = \max\{p_1;\ 1+q_1\}$, что и требовалось доказать.

Проекционная формулировка задачи (1) – (2):

$$u \in H_A: \qquad (u,v)_A = \int_0^1 f(x) \cdot v(x)\, dx \equiv f(v) \qquad \forall\ v \in H_A. \tag{5}$$

Лемма 2. $\forall\ f \in L_2(0,1)$ функционал $f(v) = \int_0^1 f(x) \cdot v(x)\, dx$ линеен и ограничен в

$H_A = \{v \in W_2^1(0,1):\ v(0)=0\}$.

Приближенная проекционная задача:

$$u^{(n)} \in V_n: \qquad (u^{(n)}, v)_A = \int_0^1 f \cdot v\, dx \equiv f(v) \qquad \forall\ v \in V_n, \tag{6}$$

где $V_n \subset H_A$ – n –мерное подпространство.

По лемме Вишика–Сеа $\| u - u^{(n)} \|_A = \inf_{v \in V_n} \| u - v \|_A$, т.е. размерность и само подпространство V_n нужно выбирать так, чтобы решение u задачи (5) можно было приблизить с заданной точностью функцией из V_n.

2. Подпространство кусочно–линейных восполнений

Лемма 3. Функция $v \in H_A = \{v \in W_2^1(0,1):\ v(0) = 0\}$ непрерывна.

Доказательство.

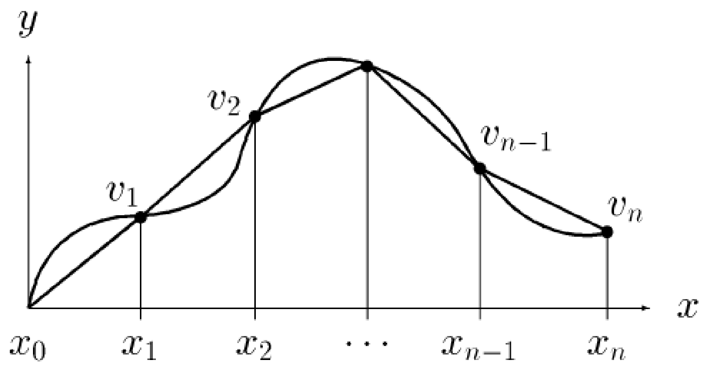
$$\forall\ x \in [0,1] \quad |v(x)| = |\int_0^x v'(x)dx| \le \sqrt{x} \cdot \sqrt{\int_0^x |v'(x)|^2 dx} \le \frac{1}{p_0} \| v \|_A$$

$\Rightarrow \| v \|_{C[0,1]} \le p_0^{-1} \| v \|_A$, тогда фундаментальная в H_A последовательность будет фундаментальной в $C[0,1]$, следовательно ее предел – непрерывная функция.

Разобьем интервал $[0, 1]$ на n частей (элементов) узлами $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, на каждом элементе $[x_k, x_{k+1}]$ функцию $v(x) \in H_A$ приблизим линейной функцией:

$$\tilde{v}(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_{k+1}} v(x_k) + \frac{x - x_k}{h_{k+1}} v(x_{k+1}), \quad h_{k+1} = x_{k+1} - x_k. \qquad (7)$$

Очевидно, что $\tilde{v}(x)$ непрерывна, суммируема в квадрате и имеет суммируемую в квадрате первую производную, т.е. $\tilde{v}(x) \in H_A$, и однозначно определяется условием $v(x_0) = 0$ и произвольными значениями $v_1 = v(x_1), \ldots, v_n = v(x_n)$.



Определение. Множество таких функций называется ***подпространством кусочно–линейных восполнений*** $V_n \subset H_A$ на сетке $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$.

Теорема 1. Пусть $\tilde{v}(x)$ – кусочно–линейное восполнение на сетке

$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ функции $v(x) \in C^2[0,1]$, тогда

$$\| v - \tilde{v} \|_1 \le h\sqrt{1 + h^2} \cdot \| v'' \|, \qquad h = \max_{k=1,\ldots,n} h_k. \qquad (8)$$

Доказательство. На каждом элементе $[x_k, x_{k+1}]$ имеем

$$|v(x) - \tilde{v}(x)|^2 = |\int_{x_k}^{x} [v(t) - \tilde{v}(t)]' dt|^2 \le h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(t) - \tilde{v}'(t)|^2\, dt,$$

$$
\begin{aligned}
|v'(x)-\tilde v'(x)|^2 &= \left|\frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} v'(x)\,dt - \frac{v(x_{k+1})-v(x_k)}{h_{k+1}}\right|^2 = \\
&= \left|\frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[v'(x)-v'(t)]\,dt\right|^2 = \\
&= \left|\frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\cdot\left[\int_t^x v''(z)\,dz\right]dt\right|^2 \le \\
&\le \frac{1}{h_{k+1}^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1^2\,dt\cdot\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[\int_t^x v''(z)\,dz\right]^2 dt = \\
&= \frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[\int_t^x 1\cdot v''(z)\,dz\right]^2 dt \le \\
&\le \frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[|x-t|\int_t^x |v''(z)|^2\,dz\right]dt \le \\
&\le \frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[|h_{k+1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2\,dz\right]dt \le \\
&\le h_{k+1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2\,dz.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x)-\tilde v'(x)|^2\,dx \le h_{k+1}^2\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2\,dz, \\
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)-\tilde v(x)|^2\,dx \le \int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[h_{k+1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(t)-\tilde v'(t)|^2\,dt\right]dx \le \\
\qquad\qquad \le h_{k+1}^4\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2\,dz.
\end{cases}
$$

Если просуммировать эти неравенства по всем ячейкам, то получим

$$
\|v-\tilde v\|_1^2 \le \sum_{k=0}^{n-1}(h_{k+1}^2+h_{k+1}^4)\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2\,dz \le h^2(1+h^2)\,\|v''\|^2
$$

или $\|v-\tilde v\|_1 \le h\sqrt{1+h^2}\cdot\|v''\|^2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ кусочно–линейных восполнений на семействе сеток:

$$\omega_n \equiv \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = 1\} \text{ – множество узлов сетки,}$$

$$h_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} \text{ – } k\text{-й шаг сетки, } h^{(n)} = \max_k h_k^{(n)} \to 0,$$

предельно плотна в H_A.

Доказательство. Пусть $v \in H_A$, тогда

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ v_\varepsilon(x) \in C^2[0,1],\ v_\varepsilon(0) = 0:\ \|v - v_\varepsilon\|_1 \le \varepsilon/2.$$

Пусть $n: \ h^{(n)}(1+h^{(n)})\,\|v''_\varepsilon\| \le \varepsilon/2$ и $\tilde{v}_{\varepsilon,n} \in V_n$ – интерполянт v_ε, тогда по теореме 1 имеем $\|v_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \le \varepsilon/2$.

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|v - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \le \|v - v_\varepsilon\|_1 + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \le \varepsilon,$$

т.е. $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотна в H_A, т.к. $\|v\|_1 \sim \|v\|_A$.

Из этой теоремы и леммы Вишика–Сеа следует Теорема 3.

Теорема 3. Если решение задачи (5):

$$u \in H_A: \qquad (u,v)_A = \int_0^1 f(x)\cdot v(x)\,dx \equiv f(v) \qquad \forall\ v \in H_A,$$

принадлежит $W_2^2(0,1)$, то последовательность метода Галеркина (6):

$$u^{(n)} \in V_n: \qquad (u^{(n)},v)_A = \int_0^1 f(x)\cdot v(x)\,dx \equiv f(v) \qquad \forall\ v \in V_n,$$

где $V_n \subset H_A$ – n-мерное подпространство кусочно-линейных восполнений, сходится к нему и имеет место оценка:

$$\|u - u^{(n)}\|_1 \le h\sqrt{1+h^2}\sqrt{\gamma_1/\gamma_0}\,\|u''\|, \tag{9}$$

где γ_0 и γ_1 – постоянные эквивалентности норм $\|v\|_A$ и $\|v\|_1$.Лекция 6. МКЭ в одномерном случае (продолжение)

3. Базис в подпространстве кусочно-линейных восполнений

Очевидно, что между $V_n \subset H_A$ и R^n устанавливается взаимно-однозначное соответствие:

$$v(x) \in V_n \leftrightarrow \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 = v(x_1) \\ \vdots \\ v_n = v(x_n) \end{pmatrix} \in R^n, \tag{10}$$

здесь мы учли, что $v_0 = v(x_0) = 0$.

Тогда (10) определяет соответствие и между базисами в этих пространствах, например: $\varphi_k(x) \in V_n \leftrightarrow \bar{e}_k \in R^n$ (k – й орт), $k = 1, \ldots, n$,

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_{k-1}], \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & x \in [x_{k+1}, 1]. \end{cases} \tag{11}$$

4. Система сеточных уравнений метода Галеркина в подпространстве кусочно-линейных восполнений

Приближение $u^{(n)}(x) \in V_n$ (решение задачи (6)) по методу Галеркина будем искать в виде $u^{(n)}(x) = u_1 \cdot \varphi_1(x) + u_2 \cdot \varphi_2(x) + \ldots + u_n \cdot \varphi_n(x)$.

Так как из (6) следует, что

$$(u^{(n)}, v)_A \equiv u_1 \cdot (\varphi_1, v)_A + u_2 \cdot (\varphi_2, v)_A + \ldots + u_n \cdot (\varphi_n, v)_A = \\ = \int_0^1 f(x) \cdot v(x)\, dx \qquad \forall\ v \in V_n, \tag{6'}$$

то, выбирая в (6′) в качестве функции $v(x)$ поочередно базисные функции $\varphi_k(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$(\varphi_1,\varphi_1)_A \cdot u_1 + (\varphi_2,\varphi_1)_A \cdot u_2 + \ldots + (\varphi_n,\varphi_1)_A \cdot u_n = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_1(x)\, dx \equiv f_1,$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)_A \cdot u_1 + (\varphi_2,\varphi_2)_A \cdot u_2 + \ldots + (\varphi_n,\varphi_2)_A \cdot u_n = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_2(x)\, dx \equiv f_2,$$

$$\ldots$$

$$(\varphi_1,\varphi_n)_A \cdot u_1 + (\varphi_2,\varphi_n)_A \cdot u_2 + \ldots + (\varphi_n,\varphi_n)_A \cdot u_n = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx \equiv f_n,$$

или

$$A^{(n)}\overline{u} \equiv \begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1)_A & (\varphi_2,\varphi_1)_A & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1)_A \\ (\varphi_1,\varphi_2)_A & (\varphi_2,\varphi_2)_A & \cdots & (\varphi_n,\varphi_2)_A \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_1,\varphi_n)_A & (\varphi_2,\varphi_n)_A & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)_A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \equiv \overline{f} \tag{12}$$

с симметричной, положительно определенной матрицей $A^{(n)}$ (матрицей Грамма системы базисных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$).

Число обусловленности матрицы

Прежде всего, напомним, что:

$$\mathrm{cond}_2\, A^{(n)} \le (\gamma^{(n)} / \gamma) \cdot \mathrm{cond}_2\, M^{(n)}, \tag{13}$$

где $M^{(n)}$ – матрица масс, γ – постоянная положительной определенности оператора задачи в $L_2(0,1)$:

$$(A^{(n)}\overline{v}, \overline{v})_{R^n} \equiv (v,v)_A \ge \gamma \cdot (v,v) \equiv \gamma \cdot (M^{(n)}\overline{v}, \overline{v})_{R^n} \quad \forall\ \overline{v} \in R^n \leftrightarrow v \in V_n,$$

а постоянная $\gamma^{(n)}$ определяется из условия

$$(v,v)_A \le \gamma^{(n)} \cdot (v,v) \quad \forall\ v \in V_n. \tag{14}$$

Сначала оценим число обусловленности матрицы масс.

Лемма 4. Если семейство сеток $\left\{\omega_n \equiv \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = 1\}\right\}$ регулярно,

т.е. $\exists\, c > 0: \ \max\limits_k h_k^{(n)} / \min\limits_k h_k^{(n)} \le c \ \ \forall\, n$, то

$$\exists\, \rho_1 > 0: \ \operatorname{cond}_2 M^{(n)} \le \rho_1 = 6 \cdot c \ \ \forall\, n.$$

Доказательство. Имеем

$$(M^{(n)}\overline{v}, \overline{v})_{R^n} = (v, v) = \int_0^1 |\, v(x)\,|^2\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\, v(x)\,|^2\, dx.$$

Оценим слагаемые этой суммы.

Во-первых,

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\, v(x)\,|^2\, dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\, v_k \cdot \varphi_k(x) + v_{k+1} \cdot \varphi_{k+1}(x)\,|^2\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_k & v_{k+1} \end{pmatrix}}_{\overline{v}_{k,k+1}^T} \begin{pmatrix} \varphi_k(x) \\ \varphi_{k+1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_k \\ v_{k+1} \end{pmatrix}}_{\overline{v}_{k,k+1}} dx =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \overline{v}_{k,k+1}^T \begin{bmatrix} \varphi_k(x)\varphi_k(x) & \varphi_k(x)\varphi_{k+1}(x) \\ \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(x) \end{bmatrix} \overline{v}_{k,k+1}\, dx =$$

$$= \overline{v}_{k,k+1}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_k(x)\, dx & \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\varphi_{k+1}(x)\, dx \\ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(x)\, dx & \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(x)\, dx \end{bmatrix}}_{\Gamma_{k,k+1}} \overline{v}_{k,k+1} =$$

$$= (\Gamma_{k,k+1}\overline{v}_{k,k+1}, \overline{v}_{k,k+1})_{R^2}.$$

Во-вторых,

$$\Gamma_{k,k+1} = \frac{h_{k+1}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \ \lambda_1(\Gamma_{k,k+1}) = \frac{h_{k+1}}{6}, \ \ \lambda_2(\Gamma_{k,k+1}) = \frac{h_{k+1}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h_{k+1}}{6} (\overline{v}_{k,k+1}, \overline{v}_{k,k+1})_{R^2} \le \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\, v(x)\,|^2\, dx = (\Gamma_{k,k+1}\overline{v}_{k,k+1}, \overline{v}_{k,k+1})_{R^2}$$

$$\le \frac{h_{k+1}}{2} (\overline{v}_{k,k+1}, \overline{v}_{k,k+1})_{R^2}.$$

Тогда

$$(M^{(n)}\bar{v},\bar{v})_{R^n} = \sum_{k=0}^{n}(\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1},\ \bar{v}_{k,k+1})_{R^2} \ge \sum_{k=0}^{n}\frac{h_{k+1}}{6}(\bar{v}_{k,k+1},\ \bar{v}_{k,k+1})_{R^2} \ge$$

$$\ge \frac{\min\limits_k h_k}{6}(\bar{v},\ \bar{v})_{R^n},$$

$$(M^{(n)}\bar{v},\bar{v})_{R^n} = \sum_{k=0}^{n}(\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1},\ \bar{v}_{k,k+1})_{R^2} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{h_{k+1}}{2}(\bar{v}_{k,k+1},\ \bar{v}_{k,k+1})_{R^2} \le$$

$$\le \frac{\max\limits_k h_k}{2}2(\bar{v},\ \bar{v})_{R^n},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\min\limits_k h_k}{6} \le \lambda_{\min}(M^{(n)}) < \lambda_{\max}(M^{(n)}) \le \max\limits_k h_k \\ \mathrm{Cond}_2 M^{(n)} = \dfrac{\lambda_{\max}(M^{(n)})}{\lambda_{\min}(M^{(n)})} \le 6\dfrac{\max\limits_k h_k}{\min\limits_k h_k} \le 6\cdot c = \rho_1, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Теперь оценим константу неравенства $(v,v)_A \le \gamma^{(n)}\cdot(v,v) \quad \forall\ v \in V_n$.

Лемма 5. Пусть γ_1 – постоянная эквивалентности норм $\| v\|_A$ и $\| v\|_1$:

$$(v,v)_A \le \gamma_1\cdot(v,v)_1 \quad \forall\ v \in W_2^1(0,1),$$

$\gamma_1 = \max\{p_1;\ 1+q_1\}$ по лемме 1,

$h_{\min} = \min\limits_k h_k$ – минимальный шаг сетки $\{x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n\}$,

тогда $\gamma^{(n)} \le \gamma_1\cdot(1+12\cdot h_{\min}^{-2}) = O(h_{\min}^{-2})$.

Доказательство. Так как $(v,v)_A \le \gamma_1\cdot(v,v)_1 \quad \forall\ v\in H_A$, то

$$\gamma^{(n)} = \sup_{v\in V_n}\frac{(v,v)_A}{(v,v)} \le \gamma_1 \sup_{v\in V_n}\frac{(v,v)_1}{(v,v)} = \gamma_1\{1+\sup_{v\in V_n}\frac{\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx}{\int_0^1 |v(x)|^2\,dx}\}.$$

Сравним элементы сумм: $\int_0^1 |v(x)|^2\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|v(x)|^2\,dx$ и $\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|v'(x)|^2\,dx$.

При доказательстве леммы 4 получили

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)|^2\,dx = (\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1},\ \bar{v}_{k,k+1})_{R^2}.$$

Далее,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x)|^2\,dx = \frac{1}{h_{k+1}}(v_{k+1}-v_k)^2 = (\Gamma'_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2},$$

$$\Gamma'_{k,k+1} = \frac{1}{h_{k+1}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x)|^2\,dx = \frac{(\Gamma'_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2}}{(\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2}}(\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2} =$$

$$= \frac{(\Gamma'_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2}}{(\Gamma_{k,k+1}\bar{v}_{k,k+1}, \bar{v}_{k,k+1})_{R^2}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)|^2\,dx \le$$

$$\le \rho(\Gamma^{-1}_{k,k+1}\Gamma'_{k,k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)|^2\,dx,$$

где

$$\Gamma^{-1}_{k,k+1}\Gamma'_{k,k+1} = (\frac{h_{k+1}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix})^{-1}\frac{1}{h_{k+1}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^{-2}_{k+1}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(\Gamma^{-1}_{k,k+1}\Gamma'_{k,k+1}) = \frac{12}{h^2_{k+1}} \le \frac{12}{h^2_{k+1}} \le \frac{12}{h^2_{\min}}.$$

Из этих оценок следует, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x)|^2\,dx \le \frac{12}{h^2_{\min}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)|^2\,dx,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x)|^2\,dx \le \frac{12}{h^2_{\min}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x)|^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\gamma^{(n)} = \sup_{v\in V_n}\frac{(v,v)_A}{(v,v)} \le \gamma_1\cdot\{1+\sup_{v\in V_n}\frac{\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx}{\int_0^1 |v(x)|^2\,dx}\} \le \gamma_1\cdot(1+12\cdot h^{-2}_{\min}),$$

что и требовалось доказать.

Следствием лемм 4 и 5 является

Теорема 5. Если

1. γ – постоянная положительной определенности оператора задачи (5.5):
   $(v,v)_A \ge \gamma\cdot(v,v) \quad \forall\ v\in H_A,$
2. $\gamma_1 = \max\{p_1; 1+q_1\}$ – постоянная эквивалентности норм $\|v\|_A$ и $\|v\|_1$:

$(v,v)_A \le \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \quad \forall\, v \in W_2^1(0,1)$,

3. семейство сеток $\left\{\omega_n \equiv \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = 1\}\right\}$ регулярно, т.е. $\exists\, c > 0:\ h_{max}^{(n)} / h_{min}^{(n)} \le c \quad \forall\, n$,

то

для числа обусловленности матрицы $A^{(n)}$ системы сеточных уравнений (12) метода Галеркина в подпространстве кусочно-линейных восполнений имеет место оценка

$$\mathrm{cond}_2\, A^{(n)} \le (\gamma^{(n)} / \gamma) \cdot \mathrm{cond}_2\, M^{(n)} \le [\gamma_1 \cdot (1 + 12 \cdot h_{min}^{-2}] / \gamma) \cdot 6 \cdot c \approx \frac{72 c \gamma_1}{\gamma} h_{min}^{-2}$$

Вычисление компонент вектора $\overline{f}^{(n)}$

Для вычисления компонент вектора $\overline{f}^{(n)}$ достаточно вычислить интегралы

$$\begin{aligned} f_{k,-} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx, \\ f_{k,+} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx, \ k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда $(f, \varphi_k) = f_{k,-} + f_{k,+}$ и

$$\overline{f}^{(n)} = \begin{pmatrix} f_1 = f_{1,-} + f_{1,+} \\ \vdots \\ f_{n-1} = f_{n-1,-} + f_{n-1,+} \\ f_n = f_{n,-} \end{pmatrix}.$$

Интегралы (15) можно вычислять приближенно, заменяя функцию $f(x)$ на каждой ячейке сетки $[x_{k-1}, x_k]$ линейным интерполянтом:

$$f(x) \approx f(x_{k-1}) \cdot \varphi_{k-1}(x) + f(x_k) \cdot \varphi_k(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k,-} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x_{k-1}) \cdot \varphi_{k-1}(x) + f(x_k) \cdot \varphi_k(x)] \cdot \varphi_k(x)\, dx = \\ &= f(x_{k-1}) \cdot \frac{h_k}{6} + f(x_k) \cdot \frac{h_k}{3} = \frac{f(x_{k-1}) + 2f(x_k)}{6} h_k, \\ \tilde{f}_{k,+} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x_k) \cdot \varphi_k(x) + f(x_{k+1}) \cdot \varphi_{k+1}(x)] \cdot \varphi_k(x)\, dx = \\ &= f(x_k) \cdot \frac{h_k}{3} + f(x_{k+1}) \cdot \frac{h_k}{6} = \frac{2f(x_k) + f(x_{k+1})}{6} h_{k+1}, \\ & k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что в этом случае

$$\overline{f}^{(n)} \approx \tilde{\overline{f}}^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} h_1 \cdot f(x_0) + 2(h_1 + h_2) \cdot f(x_1) + h_2 \cdot f(x_2) \\ \vdots \\ h_{n-1} \cdot f(x_{n-2}) + 2(h_{n-1} + h_n) \cdot f(x_{n-1}) + h_n \cdot f(x_n) \\ h_n \cdot f(x_{n-1}) + 2h_n \cdot f(x_n) \end{pmatrix},$$

т.е. приближенный вектор $\tilde{\overline{f}}^{(n)}$ вычисляется достаточно просто.

Вычисление элементов матрицы $A^{(n)}$

Так как $A^{(n)} \equiv \left[a_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)_A \right]_{i,j=1}^{n}$ и

$$(\varphi_j, \varphi_i)_A \equiv \int_0^1 [p(x) \cdot \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x) \cdot \varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [p(x) \cdot \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x) \cdot \varphi_j(x)\varphi_i(x)]dx,$$

а на интервале $[x_k, x_{k+1}]$ отличны от нуля только базисные функции $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$, то в i-й строке матрицы $A^{(n)}$ отличны от нуля только элементы $a_{i-1,i}$, $a_{i,i}$ и $a_{i,i+1}$:

$$a_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [p(x) \cdot \varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x) + q(x) \cdot \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)]dx,$$

$$a_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [p(x) \cdot \varphi_i'(x)\varphi_i'(x) + q(x) \cdot \varphi_i(x)\varphi_i(x)]dx,$$

$$a_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p(x) \cdot \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x) + q(x) \cdot \varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x)]dx.$$

Для их определения достаточно вычислить интегралы

$$\begin{array}{l|l}
p_{i,i-1} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \cdot \varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x)dx & q_{i,i-1} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \cdot \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)dx \\
\left\{ \begin{array}{l} p_{i,-} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \cdot \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx \\ p_{i,+} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \cdot \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} q_{i,-} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \cdot \varphi_i(x)\varphi_i(x)dx \\ q_{i,+} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \cdot \varphi_i(x)\varphi_i(x)dx \end{array} \right. \\
p_{i,i+1} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \cdot \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x)dx & q_{i,i+1} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \cdot \varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x)dx
\end{array} \qquad (17)$$

Тогда

$$a_{i,i-1} = p_{i,i-1} + q_{i,i-1}, \quad a_{i,i} = (p_{i,-} + p_{i,+}) + (q_{i,-} + q_{i,+}), \quad a_{i,i+1} = p_{i,i+1} + q_{i,i+1} \quad (18)$$

и

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$ – трехдиагональная матрица.

Интегралы (17) можно вычислять приближенно, заменяя функции $p(x)$ и $q(x)$ на каждой ячейке сетки $[x_{k-1}, x_k]$ линейными интерполянтами:

$$p(x) \approx \tilde{p}(x) = p(x_{k-1}) \cdot \varphi_{k-1}(x) + p(x_k) \cdot \varphi_k(x),$$

$$q(x) \approx \tilde{q}(x) = q(x_{k-1}) \cdot \varphi_{k-1}(x) + q(x_k) \cdot \varphi_k(x).$$

Тогда, используя квадратурные формулу трапеций $\int_a^b P_1(x)dx = \frac{P_1(a) + P_1(b)}{2}(b-a)$, точную на полиномах $P_1(x)$ первой степени, и формулу Симпсона $\int_a^b P_3(x)dx = \frac{P_3(a) + 4 \cdot P_3([a+b]/2) + P_3(b)}{6}(b-a)$, точную на полиномах $P_3(x)$ третьей степени, получим

$$\tilde{p}_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{p}(x) \cdot \varphi'_{i-1}(x)\varphi'_i(x)\,dx = -\frac{p(x_{i-1}) + p(x_i)}{2h_i} \qquad \tilde{q}_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{q}(x) \cdot \varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\,dx = \frac{q(x_{i-1}) + q(x_i)}{12} h_i$$

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i,-} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{p}(x) \cdot \varphi'_i(x)\varphi'_i(x)\,dx = \frac{p(x_{i-1}) + p(x_i)}{2h_i} \\ \tilde{p}_{i,+} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{p}(x) \cdot \varphi'_i(x)\varphi'_i(x)\,dx = \frac{p(x_i) + p(x_{i+1})}{2h_{i+1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{q}_{i,-} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{q}(x) \cdot \varphi_i(x)\varphi_i(x)\,dx = \frac{q(x_{i-1}) + 3q(x_i)}{12} h_i \\ \tilde{q}_{i,+} = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{q}(x) \cdot \varphi_i(x)\varphi_i(x)\,dx = \frac{3q(x_i) + q(x_{i+1})}{12} h_{i+1} \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{p}_{i,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{p}(x)\cdot\varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x)\,dx = -\frac{p(x_i)+p(x_{i+1})}{2h_{i+1}} \qquad \tilde{q}_{i,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{q}(x)\cdot\varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x)\,dx = \frac{q(x_i)+q(x_{i+1})}{12}h_{i+1}$$

т.е. ненулевые элементы $\tilde{a}_{i,j}$ матрицы $\tilde{A}^{(n)} \approx A^{(n)}$:

$$\tilde{a}_{i,i} = (\tilde{p}_{i,-}+\tilde{p}_{i,+}) + (\tilde{q}_{i,-}+\tilde{q}_{i,+}) = \left(\frac{p(x_{i-1})+p(x_i)}{2}\frac{1}{h_i} + \frac{p(x_i)+p(x_{i+1})}{2}\frac{1}{h_{i+1}}\right) + \left(\frac{q(x_{i-1})+3q(x_i)}{12}h_i + \frac{3q(x_i)+q(x_{i+1})}{12}h_{i+1}\right),$$

$$i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\tilde{a}_{n,n} = \tilde{p}_{n,-}+\tilde{q}_{n,-} = \frac{p(x_{n-1})+p(x_n)}{2}\frac{1}{h_n} + \frac{q(x_{n-1})+3q(x_n)}{12}h_n,$$

$$\tilde{a}_{i,i-1} = \tilde{p}_{i,i-1}+\tilde{q}_{i,i-1} = -\frac{p(x_{i-1})+p(x_i)}{2}\frac{1}{h_i} + \frac{q(x_{i-1})+q(x_i)}{12}h_i,$$

$$\tilde{a}_{i-1,i} = \tilde{p}_{i-1,i}+\tilde{q}_{i-1,i} \equiv \tilde{a}_{i,i-1},$$

$$i = 2, \ldots, n,$$

вычисляются достаточно просто.

Таким образом, вместо системы метода Галеркина (12) мы получим

$$A^{(n)}\bar{u}^{(n)} \equiv \left[a_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)_A\right]_{i,j=1}^{n} \bar{u}^{(n)} = \left((f, \varphi_i)\right)_{i=1}^{n} \equiv \bar{f}^{(n)} \tag{12}$$

мы получим ее приближение

$$\tilde{A}^{(n)}\bar{\tilde{u}}^{(n)} \equiv \left[\tilde{a}_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)_{\tilde{A}}\right]_{i,j=1}^{n} \bar{\tilde{u}}^{(n)} = \left((\tilde{f}, \varphi_i)\right)_{i=1}^{n} \equiv \bar{\tilde{f}}^{(n)}, \tag{20}$$

где

$$(u,v)_{\tilde{A}} = \int\limits_0^1 [\tilde{p}(x)\cdot u'(x)v'(x) + \tilde{q}(x)\cdot u(x)v(x)]\,dx \quad \forall\ u,v \in V_n. \tag{21}$$

Замечание. Билинейная форма (21) зависит от n, так как коэффициенты $\tilde{p}(x)$ и $\tilde{q}(x)$ – кусочно-линейные аппроксимации коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ на сетке $\omega_n = \{0 = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = 1\}$, зависят от n.

Возникают два вопроса:

1. существует ли решение приближенной системы (20)?
2. насколько хорошо решение системы (20) приближает решение системы (12)?

5. Разрешимость задачи при приближенном вычислении интегралов

Прежде всего, заметим, что система (20) является алгебраической формулировкой проекционной задачи

$$\tilde{u}^{(n)}(x) \in V_n: \qquad (\tilde{u}^{(n)}, v)_{\tilde{A}} = \tilde{f}(v) \qquad \forall\, v(x) \in V_n, \tag{22}$$

где $\tilde{u}^{(n)}(x)$ – кусочно-линейное восполнение решения $\tilde{\bar{u}} \in R^n$ системы (20). Решение этой задачи существует и единственно, если:

1. билинейная форма $(u,v)_{\tilde{A}}$ является скалярным произведением в V_n;
2. линейный функционал $\tilde{f}(v)$ ограничен из V_n в R.

Предположим, что функции $p(x), q(x)$ непрерывны на каждом элементе сетки $[x_k, x_{k+1}]$ (именно на ячейке сетки мы аппроксимировали коэффициенты и правую часть дифференциального уравнения при вычислении интегралов) и

$$0 < p_0 \le p(x) \le p_1, \;\; 0 \le q_0 \le q(x) \le q_1 \;\; \forall\, x \in [0,1].$$

Напомним, что по константам $0 < p_0 \le p_1$, $0 \le q_0 \le q_1$ и постоянной $c = 2$ обобщенного неравенства Фридрихса

$$\int_0^1 |v|^2 dx \le c \cdot (\int_0^1 |v'|^2 dx + |v(0)|^2) \;\; \forall\, v \in H_A = \{v \in W_2^1(0,1):\; v(0) = 0\}$$

определяются

- положительная определенность билинейной формы $(u,v)_A$:

$$(v,v)_A = \int_0^1 (p\,|v'|^2 + q\,|v|^2)dx \ge \gamma \int_0^1 |v|^2 dx, \;\; \gamma = \frac{p_0}{c} \quad \forall\, v \in V_n,$$

- и оценка (см. теорему 5) числа обусловленности матрицы $A^{(n)}$:

$$\mathrm{cond}_2\, A^{(n)} \le [\gamma_1 \cdot (1 + 12 \cdot h_{\min}^{-2}] / \gamma) \cdot 6 \cdot c_1 \approx \frac{72 \cdot c_1 \cdot \gamma_1}{\gamma} h_{\min}^{-2},$$

где

$\gamma_1 = \max\{p_1, 1 + q_1\}$ – постоянная эквивалентности норм $\| v \|_A$ и $\| v \|_1$:

$$(v,v)_A \le \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \;\; \forall\, v \in W_2^1(0,1),$$

c_1 – константа, характеризующая регулярность семейства сеток $\left\{\omega_n \equiv \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = 1\}\right\}$, т.е. $h_{\max}^{(n)} / h_{\min}^{(n)} \le c_1 \;\; \forall\, n$.

Очевидно, что, так как для функций $\tilde{p}(x), \tilde{q}(x)$ выполняются практически очевидные неравенства

$$0 < p_0 \le \tilde{p}(x) \le p_1, \;\; 0 \le q_0 \le \tilde{q}(x) \le q_1 \;\; \forall\, x \in [0,1], \tag{23}$$

то вышеизложенное относительно билинейной формы $(u,v)_A$ будет справедливо и для билинейной формы $(u,v)_{\tilde{A}}$, т.е.

$$(v,v)_{\tilde{A}} = \int_0^1 (\tilde{p}\,|v'|^2 + \tilde{q}\,|v|^2)dx \ge \gamma \int_0^1 |v|^2 dx, \;\; \gamma = \frac{p_0}{c} \quad \forall\, v \in V_n \tag{24}$$

$\Rightarrow$ билинейная форма $(u,v)_{\tilde{A}}$ – скалярное произведение в V_n,

$\Rightarrow$ матрица $\tilde{A}^{(n)}$ системы (20) положительно определена, так как $(\tilde{A}^{(n)}\overline{v},\overline{v})_{R^n} \equiv (v,v)_A > 0 \quad \forall\, \overline{v} \in R^n$, и, стало быть, $\det \tilde{A}^{(n)} \neq 0$, что является условием существования и единственности решения системы (20);

$$\operatorname{cond}_2 \tilde{A}^{(n)} \le [\gamma_1 \cdot (1 + 12 \cdot h_{\min}^{-2}] / \gamma) \cdot 6 \cdot c_1 \approx \frac{72 \cdot c_1 \cdot \gamma_1}{\gamma} h_{\min}^{-2}, \tag{25}$$

т.е. числа обусловленности матриц исходной (12) и приближенной (20) систем метода Галеркина оцениваются одной и той же величиной порядка $O(h_{\min}^{-2})$, характеризующей сложность решения систем.

Замечание. Для разрешимости приближенной системы (20) ограниченность линейного функционала $\tilde{f}(v)$ в V_n не понадобилась.

Оценка $\| u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)} \|_A$

Так как $\forall\, v \in V_n\ (u^{(n)}, v)_A = f(v)$ и $(\tilde{u}^{(n)}, v)_{\tilde{A}} = \tilde{f}(v)$, то

$$\begin{aligned}&(u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}, u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)})_A = f(u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}) - (\tilde{u}^{(n)}, u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)})_A = \\ &= f(u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}) \underbrace{- \tilde{f}(u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)}) + (\tilde{u}^{(n)}, u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)})_{\tilde{A}}}_{=0} - (\tilde{u}^{(n)}, u^{(n)} - \tilde{u}^{(n)})_A.\end{aligned} \tag{26}$$

Оценим разности из правой части (26).

Предположим, что функции $p(x), q(x), f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]\ \ \forall\, k$ (именно на ячейках $[x_k, x_{k+1}]$ мы аппроксимировали их линейными приближениями $\tilde{p}(x), \tilde{q}(x), \tilde{f}(x)$ при вычислении интегралов).

При доказательстве леммы 1 для любой $v(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$ была установлена оценка $| v(x) - \tilde{v}(x) |^2 \le h_{k+1}^3 \int_{x_k}^{x_{k+1}} | v''(t) |^2\, dt$, из которой следуют неравенства

$$| v(x) - \tilde{v}(x) |^2 \le h_{k+1}^4 \cdot \| (v'')^2 \|_{C^2[x_k, x_{k+1}]} \le h_{\max}^4 \cdot \underbrace{\max_{0 \le k \le n-1} \| (v'')^2 \|_{C^2[x_k, x_{k+1}]}}_{C_{k,v''}^2},$$

где $\tilde{v}(x)$ – кусочно-линейная аппроксимация функции $v(x)$ на сетке ω_n. Применив это неравенство для функций $p(x), q(x), f(x)$, получим оценки

$$\begin{gathered}| p(x) - \tilde{p}(x) | \le \varepsilon,\ \ | q(x) - \tilde{q}(x) | \le \varepsilon,\ \ | f(x) - \tilde{f}(x) | \le \varepsilon \quad \forall\, x \in [0, 1], \\ \varepsilon = h_{\max}^2 \cdot c,\ \ c = \max_{0 \le k \le n-1} \max\{C_{k,p''}; C_{k,q''}; C_{k,f''}\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Очевидно, что измельчая сетку, мы можем сделать ε сколь угодно малым.

Из (27) следует, что

$$|f(u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})-\tilde{f}(u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})|\equiv|\int\limits_0^1(f-\tilde{f})(u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})dx|\le \le\varepsilon\cdot\sqrt{\int_0^1(u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})^2dx}\le\varepsilon\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1 . \quad (28)$$

Далее,

$$|(u,v)_A-(u,v)_{\tilde{A}}|\le\varepsilon\cdot|\int_0^1[|u'(x)|\cdot|v'(x)|+|u(x)|\cdot|v(x)|]dx|\le$$

$$\le\varepsilon\cdot|\int_0^1\sqrt{|u'(x)|^2+|u(x)|^2}\cdot\sqrt{|v'(x)|^2+|v(x)|^2}\,dx|\le$$

$$\le\varepsilon\cdot\|u\|_1\cdot\|v\|_1,$$

и, полагая $u=\tilde{u}^{(n)}$, $v=u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}$, получим

$$|(\tilde{u}^{(n)},u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})_A-(\tilde{u}^{(n)},u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})_{\tilde{A}}|\le\varepsilon\cdot\|\tilde{u}^{(n)}\|_1\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1. \quad (29)$$

Теперь, применяя оценки (28) и (29) разностей правой части (26), получим

$$(u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)},u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)})_A\le\varepsilon\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1+\varepsilon\cdot\|\tilde{u}^{(n)}\|_1\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1 \le\varepsilon\cdot(1+\|\tilde{u}^{(n)}\|_1)\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1 . \quad (30)$$

Оценим $\|\tilde{u}^{(n)}\|_1$, используя эквивалентность норм $\|v\|_A,\|v\|_{\tilde{A}}$ и $\|v\|_1$ ($\gamma_0\cdot(v,v)_1\le(v,v)_A,\|v\|_{\tilde{A}}\le\gamma_1\cdot(v,v)_1\quad\forall\, v\in H_A$):

$$\|\tilde{u}^{(n)}\|_1^2\le\gamma_1\cdot(\tilde{u}^{(n)},\tilde{u}^{(n)})\equiv\gamma_1\cdot[\int\limits_0^1\tilde{f}\cdot\tilde{u}^{(n)}dx\underbrace{-\int\limits_0^1 f\cdot\tilde{u}^{(n)}dx+\int\limits_0^1 f\cdot\tilde{u}^{(n)}dx}_{=0}]\le$$

$$\le\gamma_1\cdot[\varepsilon\cdot\sqrt{\int_0^1|\tilde{u}^{(n)}|^2dx}+\sqrt{\int_0^1|f|^2dx}\cdot\sqrt{\int_0^1|\tilde{u}^{(n)}|^2dx}]\le$$

$$\le\gamma_1\cdot[\varepsilon+\sqrt{\int_0^1|f|^2dx}]\cdot\|\tilde{u}^{(n)}\|_1$$

Тогда (30) можно переписать в следующем виде:

$$\gamma_0\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1^2\le\ \varepsilon\cdot[1+\gamma_1\cdot(\varepsilon+\|f\|)]\cdot\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1,$$

т.е. получаем искомую оценку

$$\|u^{(n)}-\tilde{u}^{(n)}\|_1\ \le\ \varepsilon\cdot\frac{1+\gamma_1\cdot(\varepsilon+\|f\|)}{\gamma_0}=h_{max}^2\cdot[c\cdot\frac{1+\gamma_1\cdot(\varepsilon+\|f\|)}{\gamma_0}], \quad (31)$$

где все константы не зависят от сетки.