

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & -1 \leq |x| \leq 0, \\ -1, & 0 \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Используем проекционные уравнения

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) a_k = f_i; i = 1 \dots N.$$

Ввиду ограниченности функций каждое i -е уравнение содержит только три члена:

$$-\bar{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx + \bar{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx - \bar{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g}{h^2} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Обозначим

$$g_{i-1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g dx, \quad g_{i+1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dx, \quad f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Получаем конечно-разностную схему,:

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i-1} - \left(\frac{g_{i-1/2} + g_{i+1/2}}{h^2} \right) \bar{u}_i + \frac{g_{i+1/2}}{h^2} \bar{u}_{i+1} = f_i, i = 2 \dots n, \bar{u}_1 = \alpha, \bar{u}_n = \beta.$$

Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов: в МКЭ коэффициенты $g_{i\pm 1/2}$ вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами. Программная реализация алгоритма решения методом прогонки.

1. 3. Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двумерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех шагов.

Шаг 1. Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы).

Шаг 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e – го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0, \quad (1.1)$$

где $A^{(e)}$ – вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 – свободный член; $R = (x, y, z)$ – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (1.2)$$

где $N^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Шаг 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\Phi. \quad (1.3)$$

Система (1.3) является моделью искомой непрерывной функции.

Шаг 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор Φ в (1.3) вначале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора Φ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Выбор функционала F , зависящего для стационарных задач от искомой функции φ и ее частных производных $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dV, \quad (1.4)$$

где V – объем.

Функционал F представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам:

$$F = \sum_{e=1}^N F^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(\varphi^{(e)}, \varphi_x^{(e)}, \varphi_y^{(e)}, \varphi_z^{(e)}) dV^{(e)}, \quad (1.5)$$

где N – число элементов.

Шаг 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.2) в (1.5) и вычисление производных $\varphi_x^{(e)}, \varphi_y^{(e)}, \varphi_z^{(e)}$ по формулам вида

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \partial \varphi^{(e)} / \partial x = (\partial N^{(e)} / \partial x) \Phi^{(e)}.$$

Шаг 3. Минимизация по вектору Φ функционала F . Для этого составляются уравнения

$$\partial F^{(e)} / \partial \Phi^{(e)} = 0. \quad (1.6)$$

Суммирование выражений (1.6) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\Phi = B, \quad (1.7)$$

где K – матрица коэффициентов, так называемая, – матрица жесткости; B – вектор нагрузки.

Шаг 4. Решение системы (1.7), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора Φ подставляют в (1.3), после чего значение функции φ легко вычисляется в любой точке заданной области.

Каждый из четырех шагов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

Выделение конечных элементов. Разбиение области на элементы – важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы.

Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.).

Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (подконструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

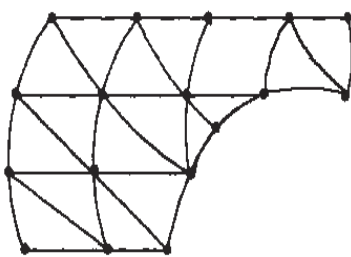


Рис. 1.3. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) – следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, – сильно разреженная матрица ленточной структуры.

Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число L , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит в свою очередь от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двухмерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы – M , то ширина полосы равна $L = (N + 1)M$.

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области. На рис. 1.4 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рис. 1.4, а) $N=14$, при втором (рис. 1.4, б) $N=5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6; при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 1.4, б сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем на (рис. 1.4, а).

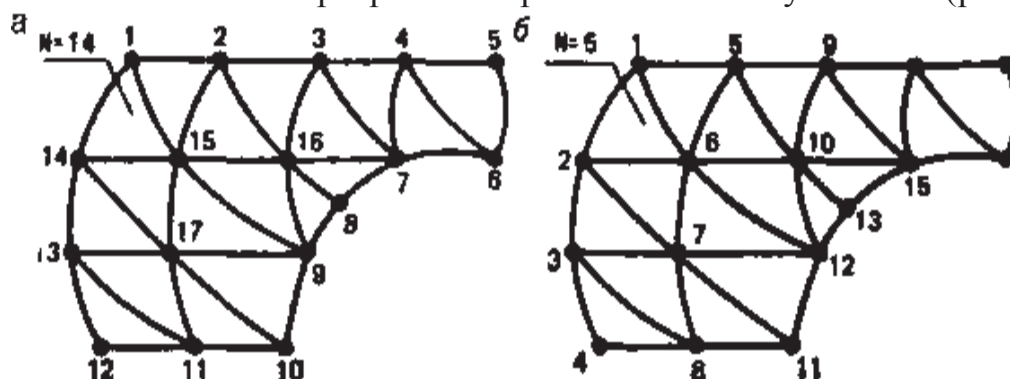


Рис. 1.4. Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов

МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к определенным конечным элементам. Такого рода информация называется топологической и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу которых составляют специальные программы, называемые препроцессорами. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ.

Алгоритм работы препроцессора, как правило, состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Шаг 2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Шаг 3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ. При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удастся обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. Алгоритмы формирования межузловых связей строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность

области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий алгоритм:

Шаг 1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

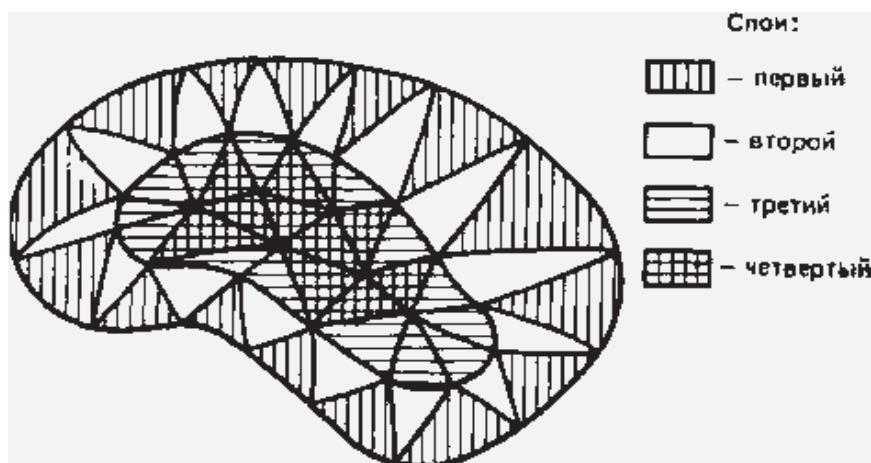


Рис. 1.5. Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы

Шаг 2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на шаге 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

Шаг 3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 1.5. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Шаг 1. Определение граничных узлов области.

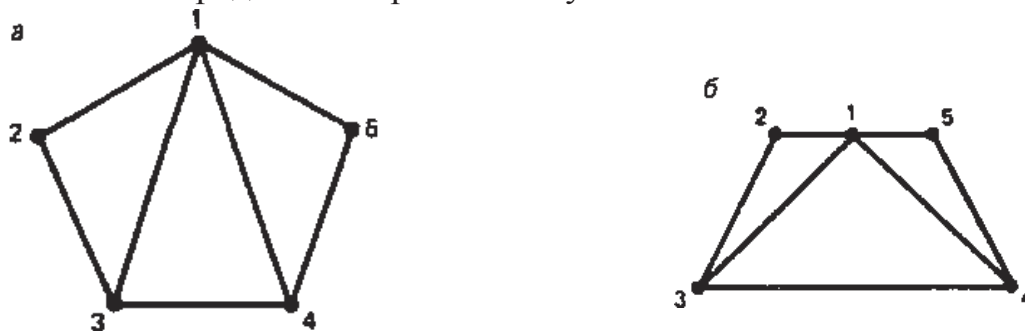


Рис. 1.6. Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы: а — регулярная сетка; б — сетка в заданной области

Шаг 2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

Шаг 3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

На рис. 1.6 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Для построения регулярной сетки используется следующий алгоритм:

Шаг 1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

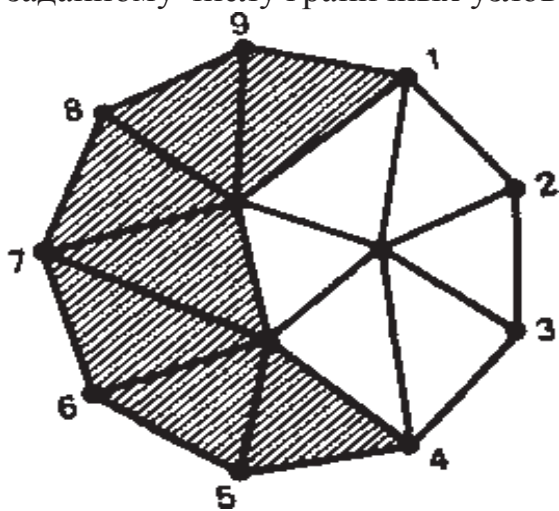


Рис. 1.7 Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами

Шаг 2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.

На рис. 1.7. проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схема соединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних точек области. Если в

результате выполнения алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

1.4. Аппроксимирующие функции элементов

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы симплекс-элементов содержат константы и линейные члены; полиномы комплекс-элементов — константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы мультиплекс-элементов также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок, изображенный на рис. 1.8.

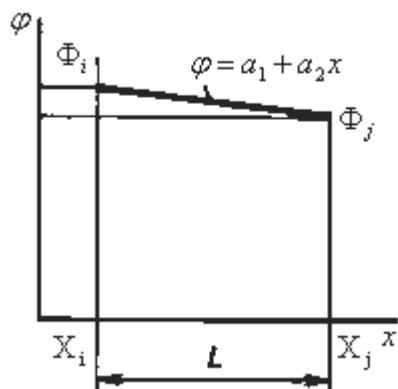


Рис. 1.8. Одномерный симплекс-элемент

При определении функции этого элемента для простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции аппроксимируется полиномом:

$$\varphi = a_1 + a_2 x. \quad (1.8)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i , Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j; \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.8), получим

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i; \quad \Phi_j = a_1 + a_2 X_j. \quad (1.10)$$

Решим систему (1.10) относительно a_1 и a_2

$$a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (1.8), получим

$$\varphi = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L + [(\Phi_j - \Phi_i) / L] x. \quad (1.11)$$

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (1.11), представим его в форме

$$\varphi = [(X_j - x) / L] \Phi_i + [(x - X_i) / L] \Phi_j. \quad (1.12)$$

Члены уравнения (1.12), заключенные в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L; \quad (1.13)$$

С учетом обозначений (1.13) уравнение (1.12) принимает вид

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \quad (1.14)$$

или в матричной форме

$$\varphi = N \Phi, \quad (1.15)$$

где

$$N = [N_i, N_j] - \text{матрица-строка}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} \text{ вектор-столбец.}$$

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Нетрудно убедиться в наличии этого свойства у функций формы (1.13).

Двухмерный симплекс-элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двухмерной области. Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию φ внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y. \quad (1.16)$$

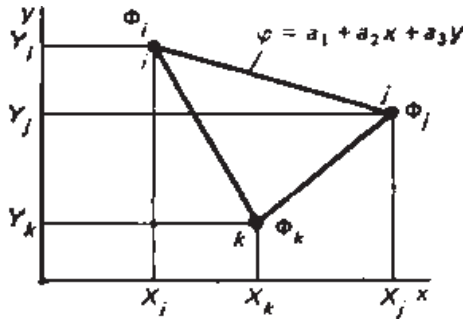


Рис. 1.9. Функция двухмерного симплекс-элемента

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис.1.9). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i;$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j;$$

$$\Phi_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k,$$

разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S)[(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k]; \\ a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k], \end{aligned} \quad (1.17)$$

где S - площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставив (1.17) в (1.16) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (1.19)$$

и

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j; & a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k; & a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i; \\ b_i &= Y_j - Y_k; & b_j &= Y_k - Y_i; & b_k &= Y_i - Y_j; \\ c_i &= X_k - X_j; & c_j &= X_i - X_k; & c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k , нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (1.14) для одномерного и (1.18) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов

безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

1.5. Объединение конечных элементов в ансамбль

Основу этой процедуры составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 1.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 1.2, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (1.14).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (1.14), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели:

$$\text{для элемента 1 } i = 1; \quad j = 2; \quad (1.21a)$$

$$\text{элемента 2 } i = 2; \quad j = 3; \quad (1.21б)$$

$$\text{элемента 3 } i = 3; \quad j = 4; \quad (1.21в)$$

$$\text{элемента 4 } i = 4; \quad j = 5; \quad (1.21г)$$

$$\text{элемента 5 } i = 5; \quad j = 6. \quad (1.21д)$$

Подставив значения номеров узлов (1.21) в (1.14), получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3; \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)} T_3 + N_4^{(3)} T_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)} T_4 + N_5^{(4)} T_5; \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)} T_5 + N_6^{(5)} T_6; \end{aligned} \quad (1.22)$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (1.14) значения произвольных номеров i, j также следует изменить в соответствии с (1.21). Тогда значения $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам

$$N_3^{(2)} = (x - X_2) / L^{(2)};$$

$$N_3^{(3)} = (X_4 - x) / L^{(3)}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин $T_1 - T_6$

уравнения (1.22) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

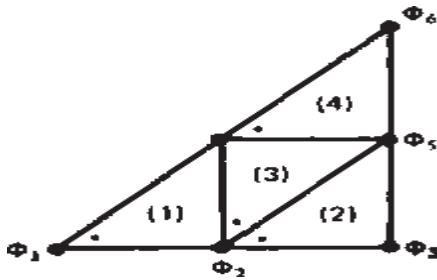


Рис. 1.10. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 1.10. Для обозначения узлов отдельных элементов по

прежнему используются номера i, j, k , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой) против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

$$\text{элемента 1 } i=1; \quad j=2; \quad k=4; \quad (1.23a)$$

$$\text{элемента 2 } i=2; \quad j=3; \quad k=5; \quad (1.23б)$$

$$\text{элемента 3 } i=2; \quad j=5; \quad k=4; \quad (1.23в)$$

$$\text{элемента 4 } i=4; \quad j=5; \quad k=6. \quad (1.23г)$$

Подставляя значения (1.23) и (1.18), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_4^{(1)}\Phi_4; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_4^{(2)}\Phi_4; \\ \varphi^{(3)} &= N_2^{(3)}\Phi_2 + N_5^{(3)}\Phi_5 + N_4^{(3)}\Phi_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (1.4.19) при вычислении функций формы элементов. Система (1.24) – сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_4^{(2)}\Phi_4 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(3)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\varphi = N\Phi. \quad (1.25)$$

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (1.24). Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

1.6. Определение вектора узловых значений функций

Для этой цели, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

• Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне. При указанном методе минимизируется функционал

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha(T - T_*)^2] dS, \quad (1.26)$$

где V - объем тела; S - площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия. При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (1.27)$$

Функционал (1.26) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY + \int_{S_1} qTdS_1 + \int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2, \quad (1.28)$$

где S_1 и S_2 - площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (1.1 а) и (1.1б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (1.28) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY = \int_{V_1} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \quad (1.29)$$

Производные в (1.29) вычисляются с учетом (1.27) :

$$dT^{(1)} / dx = (-T_1 + T_2) / L^{(1)}; \quad dT^{(2)} / dx = (-T_2 + T_3) / L^{(2)}. \quad (1.30)$$

Подставив (1.30) в (1.29) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)} dx$, получим

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY = 0,5 \frac{\lambda_x^{(1)} S^{(1)}}{L^{(1)}} \cdot (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{\lambda_x^{(2)} S^{(2)}}{L^{(2)}} \cdot (-T_2 + T_3)^2. \quad (1.31)$$

Второе и третье слагаемые в (1.28) вычисляются просто, так как подинтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_2} q T dS_1 = q T_1 S_1; \quad (1.32)$$

$$\int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2 = 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2), \quad (1.33)$$

где S_1 и S_2 - площади поверхностей, на которых заданы q и α (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием выражений (1.32), (1.33):

$$F = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2 T_3 + T_3^2) + qS_1 T_1 + 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2), \quad (1.34)$$

где

$$C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)} \text{ и } C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}.$$

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий

$$dF / dT_1 = C^{(1)} T_1 + C^{(1)} T_2 + qS_1 = 0;$$

$$dF / dT_2 = -C^{(1)} T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}] T_2 - qC^{(2)} T_3 = 0;$$

$$dF / dT_3 = -C^{(2)} T_2 + [C^{(2)} + \alpha S_2] T_3 - \alpha S_2 T_* = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \alpha S_2 T_* \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

В общем виде (1.35) можно представить так:

$$KT = B,$$

что соответствует (1.18).

Примечание. Матрица коэффициентов K в (1.35) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (1.35) можно определить узловые значения T_1, T_2, T_3 .

Из (1.34) и (1.35) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

Метод Галеркина — другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений — представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом

применяется при решении задач, для которых не удастся подобрать функционал для минимизации (например задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации ошибки $\varepsilon = Lu - f$ приближенного решения и исходного дифференциального уравнения $L_\varphi - f = 0$, где L — дифференциальный оператор.

Для минимизации ε в заданной области G требуется выполнение равенства $\int_G N_i \varepsilon dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений:

$$\int_G N_\beta L(\varphi) dG = 0 \text{ при } \beta = i, j, k, \dots,$$

где $L(\varphi)$ — левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию φ .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне, конечно-элементная модель которого представлена ранее.

Применив метод Галеркина, получим

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = 0 \quad (1.36)$$

Подставим в (1.36) формулу дифференцирования произведений:

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = \int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV - \int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV \quad (1.37)$$

Интерполяционная функция T не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (1.37) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Так, второй интеграл в (1.37) можно представить в виде

$$\int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}. \quad (1.38)$$

Вычислим в (1.38) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)t}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{X_j - x}{L^{(e)}} \\ \frac{x - X_i}{L^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.39)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} N^{(e)} T^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1, 1] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

С учетом (1.39) и (1.40)

$$\int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{\lambda_x^{(e)}}{L^{(e)} L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Первый интеграл в (1.37) на основании теоремы Остроградского—Гаусса преобразуется к виду:

$$\int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV = \int_S N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} l_x dS, \quad (1.42)$$

где $l_x (dT/dx) = dT/dn$; n — внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия в точке $x = 0$ для первого элемента интеграл (1.42) принимает вид

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} X_2 \\ L^{(1)} \\ X_1 \\ -L^{(1)} \end{bmatrix} (-q) dS. \quad (1.43)$$

Подставив значения $X_1 = 0$, $X_2 = L^{(1)}$ в (1.43), получим:

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

С учетом краевого условия в точке $x = L$ для второго элемента интеграл (1.42) запишется так:

$$\int_S N^{(2)t} \lambda_x^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} dS = \int_S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-\alpha(T_3 - T_*)] dS = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha T_3 + \alpha T_*). \quad (1.45)$$

Просуммировав выражения вида (1.45) для первого и второго элементов и выражения (1.43) и (1.44) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)}C^{(1)} & +C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)}C^{(2)} & +\alpha S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ -\alpha S_2 T_* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.46)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Система (1.46) идентична системе (1.35), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала. Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Φ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ **Примечание.** Основные особенности этого шага — большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.

1.7. Двухмерные финитные функции на треугольной сетке

Коэффициенты этой функции находятся из решения системы трех линейных уравнений:

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_i - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_i - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_i - z_k) = 0;$$

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_j - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_j - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_j - z_k) = 0;$$

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_l - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_l - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_l - z_k) = 0.$$

. Решение двумерной задачи Дирихле на треугольной сетке

Проиллюстрируем технологию МКЭ на примере решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f;$$

$$u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma).$$

Допустим, что область Ω , на которой необходимо получить решение, покрыта треугольной сеткой и представлена на рис. 1.13. Решение ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k \varphi_k(x, y),$$

где φ_k - набор финитных функций, привязанных к внутренним узлам сетки $P_k \notin \Gamma$. Следует отметить, что построение треугольной сетки для произвольной области, учитывающей особенности получаемого решения, является зачастую наиболее трудоемкой задачей при использовании МКЭ.

Результатом триангуляции являются список узлов $P_k(x_k, y_k, z_k)$,

где $k = 1 \dots N_0, N_0 + 1, \dots, N(1 \dots N_0$ - номера внутренних узлов, $N_0 + 1, \dots, N$ - номера граничных узлов) и список треугольников $\Delta_{kij}^m, m = 1 \dots M$, содержащий номера соответствующих m -му треугольнику узлов-вершин. Зная координаты вершин и список треугольников, легко построить список конечных элементов Ω_k , связанных с каждым узлом сетки, вычислить параметры $\alpha_k^{ij}, \beta_k^{ij}$ соответствующих финитных функций φ_k , а также всю необходимую информацию – площади треугольников S_{kij}^m , координаты их центров тяжести C_{kij}^m и др.

При построении конечно-разностной схемы воспользуемся проекционным соотношением для внутренних узлов:

$$\sum_{j=1}^N \bar{u}_j \left[\iint_{\Omega_k} g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] = \mathcal{F}_k, \quad k = 1 \dots N_0.$$

Ввиду линейности финитных функций φ_j, φ_k на каждом треугольнике значения производных, входящих в \mathcal{F}_k постоянны. Кроме того, как видно из рисунка, в каждом уравнении имеется только $m_k + 1$ отличных от нуля матричных

элементов (заметим, что количество вершин m_k у разных элементов Ω_k может отличаться):

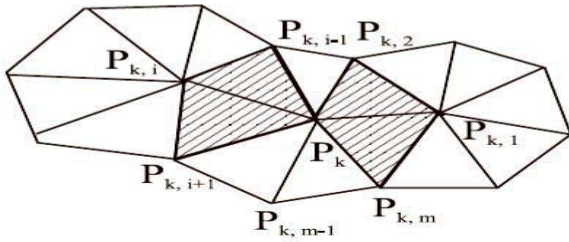


Рис. 1.13

$$\bar{u}_k g_k + \bar{u}_{k_1} g_{k_1} + \dots + \bar{u}_{k_m} g_{k_m} = \hat{f}_k ;$$

$$k = 1 \dots N_0 ; \bar{u}_{N_0+1} \dots \bar{u}_N = \alpha_{N_0+1} \dots \alpha_N .$$

Причем

$$g_k = - \sum_{i=1}^{m_k} g_{k_i} ,$$

а элементы g_{k_i} вычисляются как интегралы по двум смежным треугольникам:

$$g_{k_i} = \left(\alpha_k^{k_{i-1}k_i} \alpha_{k_i}^{k_{i-1}k} + \beta_k^{k_{i-1}k_i} \beta_{k_i}^{k_{i-1}k} \right) \iint_{\Delta k k_{i-1} k_i} g dS + \left(\alpha_k^{k_i k_{i+1}} \alpha_{k_i}^{k_{i+1}k} + \beta_k^{k_i k_{i+1}} \beta_{k_i}^{k_{i+1}k} \right) \iint_{\Delta k k_i k_{i+1}} g dS .$$

При вычислении интегралов ввиду малости Δ для случая непрерывных $g(xy)$ обычно используют формулу средних

$$\iint_{\Delta k_{ij}} g dS = g(C_{kij}) S_{kij} ,$$

где C_{kij} — точка пересечения медиан. Решается система методом простой итерации или Зейделя с использованием релаксации:

$$\bar{u}_k^{s+1} = (1 - \omega_r) \bar{u}_k^s + \omega_r \frac{1}{g_k} \left(\hat{f}_k - \sum_{i=1}^{m_k} \bar{u}_{k_i}^s g_{k_i} \right) .$$

Эффективность метода во многом зависит от удачной программной реализации итерационного процесса.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие МКЭ от классического метода сеток?
2. Как построить конечно-разностную схему по МКЭ задачи Дирихле для одномерного уравнения второго порядка?
3. Каким образом строится конечно-разностная схема для двухмерной области на основе треугольной сетки?
4. Какие результаты триангуляции области являются исходными данными для построения конечно-разностной схемы по технологии МКЭ?

2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.1. Теоретические основы вариационных методов

Основной задачей классического вариационного исчисления является следующая: среди всех непрерывных функций $u = u(x)$, $a \leq x \leq b$, имеющих кусочно-непрерывные производные и удовлетворяющих граничным условиям

$$u(a) = \alpha; u(b) = \beta$$

найти такую, которая доставляет минимальное значение функционала:

$$J[u] = \int_a^b \Phi(x, u, u') dx; \quad \left(u' = \frac{du}{dx} \right).$$

В общем случае функция u может быть функцией нескольких переменных $u(x, y, z, \dots)$, в функционал Φ входят частные производные, а интеграл берется по некоторой области Ω .

Содержание одной из центральных теорем классического вариационного исчисления заключается в том, что дважды дифференцируемая функция $u(x)$, доставляющая минимум функционала Φ , является решением краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера с теми же граничными условиями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) = 0.$$

Справедливо также обратное утверждение: решение краевой задачи для дифференциального уравнения (в общем случае ДУ в частных производных) при определенных условиях является также решением соответствующей задачи вариационного исчисления. Таким образом, имеется возможность одни и те же задачи сводить либо к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, либо к нахождению минимума некоторого функционала, т.е. к решению задачи вариационного исчисления. Это позволяет при решении краевой задачи для ДУ, сводя ее к вариационной, применять специфические вариационные методы. Проиллюстрируем технику такого решения. Запишем краевую задачу для ДУ в общем виде как

$$Lu = f; \quad u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma)$$

Область определения функции $u: R(u) = \Omega$; где Γ – граница области Ω . Тогда соответствующий функционал (заметим, что это один из возможных), минимум которого достигается на решении, имеет вид

$$(Lu, u) - 2(f, u).$$

Здесь посредством скобок (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в общем случае в многомерном гильбертовом пространстве $L_2[\Omega]$.

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида $J[u]$ является **метод Рунца**