Модуль 3 Ряды Фурье

Тема 1 Тригонометрические ряды Фурье

При изучении периодических процессов удобны в использовании периодические функции и их ряды.

Подтема 8.1 Ряд Фурье 2π-периодической функции

Определение 1. Рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где числа

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n\in\mathbf{N},\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbf{N}.$$

называются коэффициентами Фурье.

Ряд Фурье может расходиться или сходиться к сумме, не совпадающей с функцией. Поэтому в общем случае говорят, что функция $f(x)$ порождает ряд Фурье. Это записывается следующим образом:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Сумма такого ряда $S(x)$, если она существует, является периодической функцией от x с периодом 2π.

Достаточные условия сходимости ряда Фурье сформулированы в теореме Дирихле.

Теорема 1 (Дирихле)**.** Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на промежутке $[-\pi;\pi]$ кусочно непрерывна (имеет конечное число точек x_k разрыва первого рода или непрерывна) и кусочно дифференцируема. Тогда порождаемый ею ряд Фурье сходится к сумме $S(x)$ во всех точках этого интервала. При этом:

1) в точках непрерывности ряд Фурье сходится к самой функции:

$$S(x)=f(x);$$

2) в каждой точке разрыва x_k функции ее ряд Фурье сходится к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к x_k слева и справа:

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left(f(x_k-0)+f(x_k+0)\right);$$

3) в граничных точках промежутка $[-\pi;\ \pi]$ ряд Фурье сходится к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к этим точкам изнутри промежутка:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right).$$

Рассмотрим частные случаи разложения в ряд Фурье функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Дирихле.

1.Если функция $f(x)$ является ***четной*** $(f(x) = f(-x))$, то ее ***ряд Фурье содержит только косинусы*** $(b_n = 0)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

2 .Если функция $f(x)$ является ***нечетной*** $(f(-x) = -f(x))$, то ее ***ряд Фурье содержит только синусы*** $(a_0 = 0,\ a_n = 0)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

3. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0;\ \pi]$, то ее ряд Фурье может быть получен различными способами, в зависимости от того, как построено продолжение функции на промежуток $[-\pi;\ 0]$.

При четном продолжении функции на промежуток $[-\pi;\ 0]$ (график данной функции продолжается на промежуток $[-\pi;\ 0]$ симметрично относительно оси ординат, рис. 1) получают ряд по косинусам (см.п.1).

При нечетном продолжении функции на промежуток $[-\pi;\ 0]$ (график данной функции продолжается на промежуток $[-\pi;\ 0]$ симметрично относительно начала координат, рис. 2) получают ряд по синусам (см.п.2).

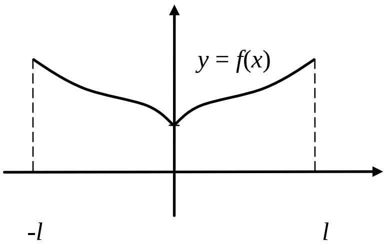

Рис. 1

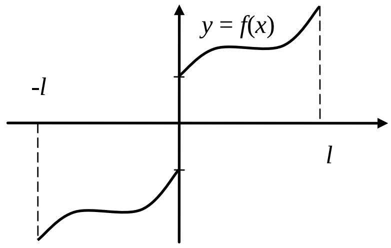

Рис. 2

4. Для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[0;\ 2\pi],$ ее ряд Фурье, получается при условии, что пределами интегрирования в формулах коэффициентов являются 0 и 2π.

5. Если функция $f(x)$ задана несколькими различными формулами на промежутке $[-\pi;\ \pi],$ то интегралы для вычисления коэффициентов ряда следует разбить на несколько точками, в которых меняется аналитическое выражение функции.

6. Если функция $f(x)$ задана на произвольном промежутке $[a;\ b] \in [-\pi;\ \pi],$ то ее ряд Фурье может быть получен двумя способами:

а) если построено продолжение функции на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ четным образом (рис. 3), то разложение в ряд Фурье происходит по косинусам;

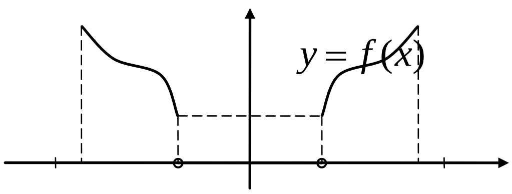

Рис. 3

б) если построено продолжение функции на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ нечетным образом (рис. 4), то разложение в ряд Фурье происходит по синусам.

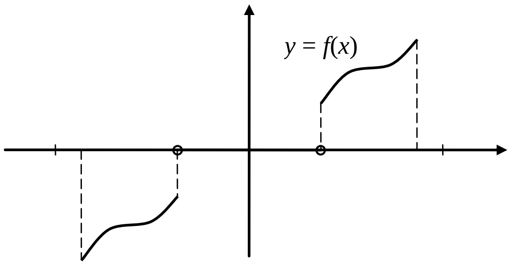

Рис. 4

7. Для функции $f(x)$, заданной на произвольном промежутке $[a; b]$ длины 2π, ее ряд Фурье получается при условии, что в формулах коэффициентов пределами интегрирования являются числа a и b.

8.2 Ряд Фурье 2*l*-периодической функции

Если $f(x)$ – $2l$-периодическая функция, $l \in \mathbb{R}$ то ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \; n \in \mathbf{N}. \; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \; n \in \mathbf{N}.$$

Ряд Фурье 2π-периодической функции является частным случаем ряда Фурье $2l$-периодической функции.

Как и в случае *2π*-периодической функции, четная $2l$-периодическая функция разлагается только по косинусам, нечетная – по синусам.

Теорема Дирихле обобщается на случай $2l$-периодической функции.

8.3 Комплексная форма ряда Фурье

С помощью формул Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y; \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y;$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

получается удобная своей краткостью ***комплексная форма ряда Фурье 2l-периодической функции:***

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n \in Z, \, l \in R, \, l > 0).$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом 2π):

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{если} \quad -\pi < x \le 0; \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Записать первые три члена полученного ряда. Исследовать ряд на сходимость.

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 1).

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2+x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx = \frac{1}{\pi}\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(-2\pi+\frac{\pi^2}{2}\right) = 2-\frac{\pi}{2}.$$

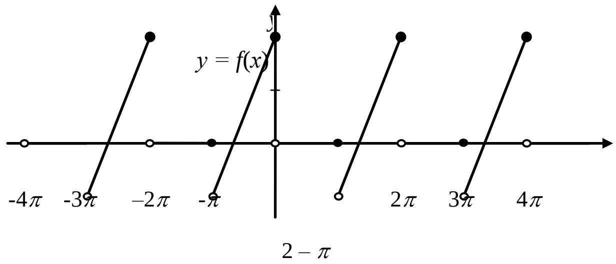

Рис. 1

Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2+x)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = 2+x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx, v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2+x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right) = -\frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{0}\sin nx d(nx) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} =$$
$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos 0 - \frac{1}{\pi n^2}\cos(-\pi n) = \frac{1}{\pi n^2} - \frac{1}{\pi n^2}\cos(\pi n).$$

Так как $\cos n\pi = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} - \frac{1}{\pi n^2}(-1)^n = \frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Вычисляем далее:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2+x)\sin nx dx =$$
$$= \begin{vmatrix} u = 2+x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx, \ v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2+x}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2+0}{n}\cos 0 + \frac{2-\pi}{n}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n} + \frac{2-\pi}{n}(-1)^n\right) = \frac{1}{\pi n}((2-\pi)(-1)^n - 2).$$

Таким образом искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид^

$$f(x) \sim 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n(2-\pi)-2}{n}\sin nx\right).$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, 3$, получаем:

$$f(x) \sim 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{\pi-4}{\pi}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2\pi}\cos 3x + \frac{\pi-4}{3\pi}\sin 3x + \ldots$$

Заданная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. В точках ее непрерывности $x \neq \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$ ряд Фурье сходится к $f(x)$. В точках разрыва $x_k = 2\pi k\ (k \in \mathbf{Z})$ сумма полученного ряда равна 1. Например, в точке $x = 0$, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-0} f(x) + \lim_{x\to 0+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(2+0) = 1.$$

В точках разрыва $x_k = \pi(2k-1),\ k \in \mathbf{Z},$ сумма полученного ряда равна

$$S((2k-1)\pi) = S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)) =$$
$$= \frac{1}{2}((2-\pi)+0) = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

График суммы $S(x)$ ряда Фурье изображен на рис. 2.

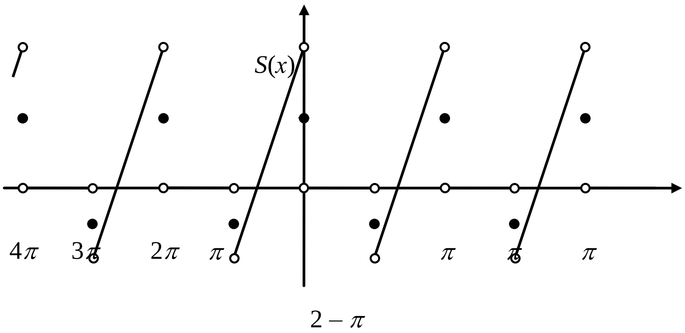

Рис. 2

На рис.3 изображены графики трех частичных сумм, при $n = 3, n = 5, n = 100$. Можно увидеть, что при увеличении n линии все больше приближаются к графику заданной функции, периодически продолженной на всю действительную ось.

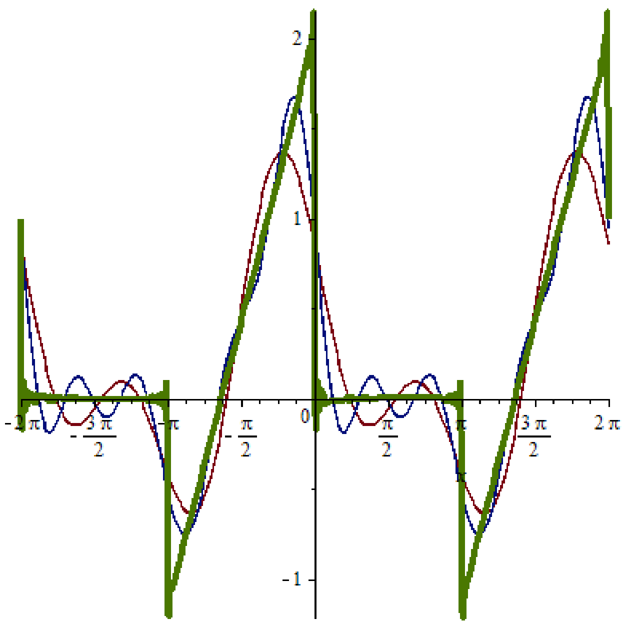

Рис.3

Пример 2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 4, которая на отрезке [-2, 2] задана формулой:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{если } -2<x<0;\\ 1, & \text{если } 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 4).

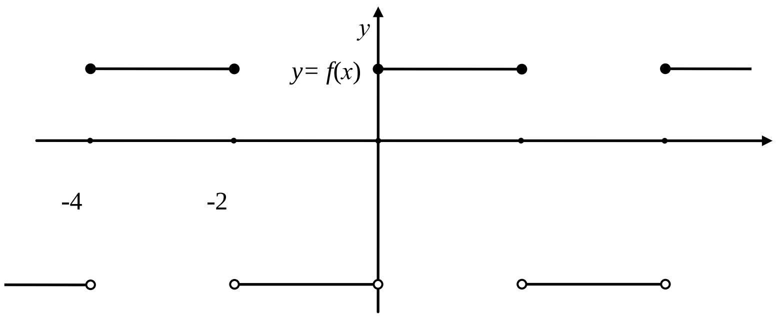

Рис. 4

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам, полагая $l=2$:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1dx=\frac{1}{2}(-2x)\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}x\Big|_{0}^{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(0-4+2)=-1;$$
$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=0;$$
$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{\pi n}-\frac{6}{\pi n}(-1)^n\right)=$$
$$=\frac{3}{\pi n}(1-(-1)^n)=\frac{6}{\pi(2n-1)}.$$

Таким образом, искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim-\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x/2)\right).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности $x\neq 2k\ (k\in\mathbf{Z})$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва $x_k=2k\ (k\in\mathbf{Z})$ сумма полученного ряда равна –0,5:

$$S(x_k)=S(0)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 0-0}f(x)+\lim_{x\to 0+0}f(x))=\frac{1}{2}(-2+1)=-0,5.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на периоде формулой $f(x)=\frac{x}{2},\ \ x\in(0;\ 2\pi).$

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 5):

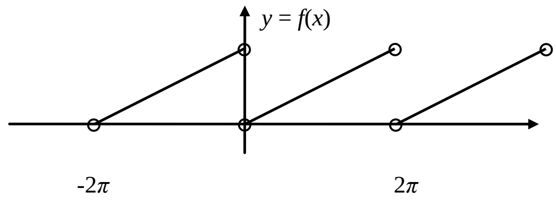

Рис. 5

Поскольку функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам, полагая $l=\pi$ (с пределами интегрирования 0 и 2π), поскольку функция задана в интервале $(0;\,2\pi)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=\frac{x}{2},\ \ du=\frac{1}{2}dx\\ dv=\cos nx\,dx,\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2n}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,d(nx)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi n^2}\cos 2\pi n-\frac{1}{2\pi n^2}\cos 0=\frac{\cos 2\pi n-1}{\pi n^2}=0,$$

так как $\cos 2n\pi=1,\ \ n\in\mathbf{N};$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\frac{x}{2},\ \ du=\frac{1}{2}dx\\ dv=\sin nx\,dx,\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{2n}\cos 2\pi x+0+\frac{1}{2n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}\right)=-\frac{1}{n}.$$

Таким образом, искомый ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{x}{2}\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности $(x \in (0;\, 2\pi))$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в граничных точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ сумма полученного ряда равна $\frac{\pi}{2}$, так как

$$S(2\pi) = S(0) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x \to 2\pi - 0} f(x) + \lim_{x \to 0+0} f(x)\Big) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}.$$

График суммы полученного ряда изображен на рис. 6.

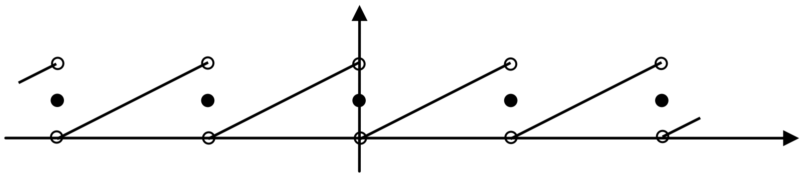

Рис. 6

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|, \quad x \in [-1;\, 1]$, заданной на периоде.

Решение. Изобразим график заданной функции (рис. 7).

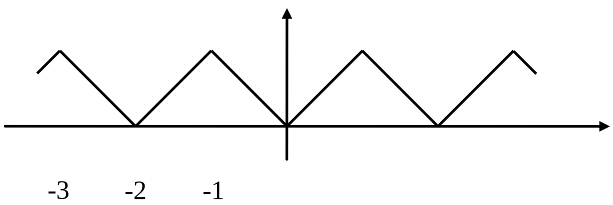

Рис. 7

Поскольку функция $f(x)$ является четной, то вычисляем ее коэффициенты Фурье по упрощенным формулам, учитывая, что ее ряд Фурье не содержит синусов $(b_n = 0)$. Полагаем $l = 1$ и берем пределами интегрирования 0 и 1, поскольку функция задана на отрезке $[-1;\, 1]$:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1;$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos n\pi x dx, & v = \frac{1}{\pi n}\sin n\pi x \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \sin n\pi x dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \sin n\pi x d(n\pi x) = \frac{2}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}\cos \pi n - \frac{2}{\pi^2 n^2}\cos 0 =$$

$$= \frac{2(\cos \pi n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}.$$

Отсюда следует, что $a_n = 0$ при четном *n*, $a_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2}$ при нечетном *n*.

Таким образом, искомый ряд Фурье функции *f*(*x*) имеет вид

$$f(x) = |x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Функция *f*(*x*) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности ряд Фурье сходится к *f*(*x*) на всей числовой прямой.

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 1 - x,$ заданную на промежутке [0; 1] как на полупериоде:

1) по синусам; 2) по косинусам.

Решение. 1) Продолжим заданную функцию на промежуток [– 1; 0] нечетным образом, т. е. положим

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x, & \text{если } -1 \le x < 0; \\ 1 - x, & \text{если } \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Далее продолжим ее периодически (рис. 8).

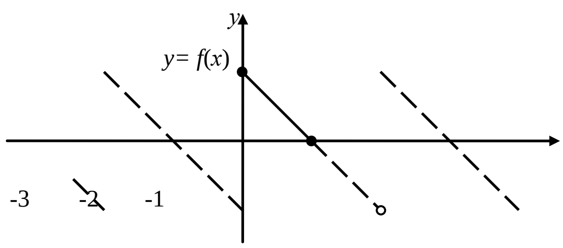

Рис. 8

Поскольку функция *f*(*x*) является нечетной, то ее ряд Фурье содержит только синусы $(a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, ...)$. Вычисляем его коэффициенты Фурье по упрощенным формулам, полагая $l=1.$ Пределами интегрирования берем 0 и 1, поскольку функция задана на промежутке [0; 1]:

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1(1-x)\sin n\pi x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=1-x, & du=-dx \\ dv=\sin n\pi x dx, & v=-\dfrac{1}{\pi n}\cos n\pi x \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-x}{n}\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\cos n\pi x dx\right)=\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi^2n^2}\sin n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi n}.$$

Таким образом, искомый ряд Фурье функции *f*(*x*) имеет вид:

$$f(x)=1-x\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x.$$

2) Продолжим заданную функцию на промежуток [–1; 0] четным образом, т. е. положим

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } -1\le x<0; \\ 1-x, & \text{если } \ \ 0\le x\le 1. \end{cases}$$

Затем продолжим его периодически (рис. 9).

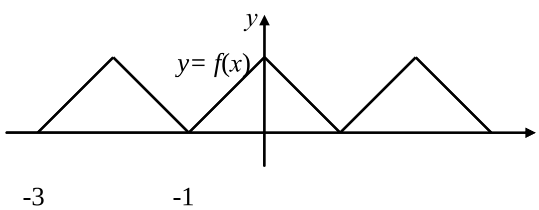

Рис. 9

Поскольку функция *f*(*x*) является четной, то ее ряд Фурье содержит только косинусы $(b_n=0,\ n\in\mathbf{N}).$ Вычисляем его коэффициенты Фурье по упрощенным формулам, полагая $l=1.$ Пределами интегрирования берем 0 и 1, поскольку функция задана на промежутке [0; 1]:

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(1-x)dx=-2\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right)\Big|_0^1=1;$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=1-x, & du=-dx \\ dv=\cos n\pi x dx, & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin n\pi x \end{vmatrix}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-x}{n}\sin n\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1\sin n\pi x dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\int_0^1\sin n\pi x d(n\pi x)=-\frac{2}{\pi^2n^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=-\frac{2}{\pi^2n^2}\cos\pi n+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cos 0 = -\frac{2(\cos \pi n - 1)}{\pi^2 n^2} = -\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}.$$

Откуда следует, что $a_n = 0$ при четном *n*, $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}$ при нечетном *n*.

Таким образом, искомый ряд Фурье функции *f*(*x*) имеет вид:

$$f(x) = 1 - x \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Функция *f*(*x*) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому во всей области определения ряд Фурье сходится к *f*(*x*), а на всей числовой прямой сумма полученного ряда определяет периодическую функцию с периодом 2.

Пример 6. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме 2π-периодическую функцию, заданную на периоде формулой $f(x) = e^{-x}, \quad x \in (-\pi; \pi).$

Решение. Изобразим график этой функции (рис. 10).

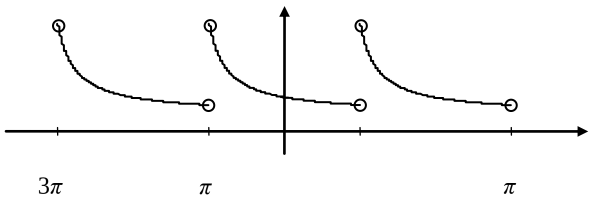

Рис. 10

Вычисляем коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\Bigg|_{\pi}^{-\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{1+in} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{\pi}e^{in\pi} - e^{-\pi}e^{-in\pi}}{1+in}.$$

По формулам Эйлера $e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i\sin n\pi = (-1)^n.$

Следовательно, $c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{1+in}.$

Таким образом, искомый ряд Фурье функции *f*(*x*) имеет вид:

$$f(x) = e^{-x} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{inx} = \frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{inx}.$$

Функция *f*(*x*) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в интервалах $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z},$ ряд Фурье сходится к функции $f(x) = e^{-x},$ а в точках $x = (2k-1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ его сумма равна

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\pi.$$