§ 4. Сведе́ние линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка к вариационной задаче

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = \Phi(x) \tag{1}$$

с линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и

$$|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0, \quad |\beta_1| + |\beta| \neq 0.$$

Приведем уравнение (1) к специальному, так называемому *самосопряженному виду*. Для этого умножим все его члены на положительный множитель

$$p(x) = e^{\int_a^x P(x)\,dx},$$

после чего получим

$$p(x)\,y''(x) + p(x)\,P(x)\,y' + p(x)\,Q(x)\,y = p(x)\,\Phi(x). \tag{3}$$

Так как

$$p'(x) = e^{\int_a^x P(x)\,dx} P(x) = p(x)\,P(x),$$

то уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] + q(x)\,y = f(x), \tag{4}$$

где $p(x) > 0$, $\quad q(x) = p(x)\,Q(x)$, $\quad f(x) = p(x)\,\Phi(x)$.

Дифференциальное уравнение второго порядка вида (4) называется *самосопряженным*. Вводя линейный оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\,y, \tag{5}$$

получим

$$Ly = -f(x), \tag{6}$$

где $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Предположим сначала, что краевые условия (2) являются однородными, т. е.

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = 0, \tag{7}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$ и $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$, причем без нарушения общности рассуждений можно предполагать, что $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\beta_1 \geqslant 0$.

Покажем, что в этом случае оператор L является самосопряженным (симметричным) в классе функций $K = \{y\}$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе со своими первыми и вторыми производными ($y \in C^{(2)}[a, b]$) и удовлетворяющих на концах отрезка $[a, b]$ однородным краевым условиям (7).

Пусть $u \in K$ и $v \in K$. На основании формулы (5) имеем

$$(Lu, v) - (Lv, u) =$$

$$= \int_a^b \left\{ -v \left[\frac{d}{dx}(p(x)u') + q(x)u \right] + u \left[\frac{d}{dx}(p(x)v') + q(x)v \right] \right\} dx =$$

$$= \int_a^b [p(x)(uv'' - vu'') + p'(x)(uv' - vu')] \, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}[p(x)(uv' - vu')] \, dx =$$

$$= p(x)(uv' - vu') \Big|_a^b = p(b)w(b) - p(a)w(a), \tag{8}$$

где

$$w(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad \alpha_1 v'(a) + \alpha v(a) = 0,$$

где $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha \neq 0$. Следовательно,

$$u'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} u(a), \quad v'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} v(a)$$

или

$$u(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha} u'(a), \quad v(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v'(a).$$

Поэтому $w(a) = 0$. Аналогично доказывается, что $w(b) = 0$.

Следовательно, из формулы (8) вытекает $(Lu, v)-(Lv, u)=0$, и, значит, $(Lu, v)=(Lv, u)$, т. е. оператор L симметричен.

Выясним, при каких условиях оператор L является положительным. Для функции $y \in K$ имеем

$$(Ly, y)=-\int_a^b \left\{\frac{d}{dx}[p(x) y']+q(x) y\right\} y\, dx. \tag{10}$$

Интегрируя по частям первый член формулы (10), получим

$$(Ly, y)=-p(x) yy' \Big|_a^b+\int_a^b [p(x) y'^2-q(x) y^2]\, dx. \tag{11}$$

Так как $p(x)>0$, то из формулы (11) вытекает, что оператор L положителен, если

$$q(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{12}$$

$$y(a) y'(a) \geqslant 0, \quad y(b) y'(b) \leqslant 0. \tag{13}$$

Так как $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\beta_1 \geqslant 0$, то в силу краевых условий (7) неравенства (13) эквивалентны неравенствам

$$\alpha \leqslant 0, \quad \beta \geqslant 0. \tag{14}$$

Таким образом, краевая задача (6)—(7) при наличии неравенств (12) и (14), согласно теореме 2 из § 3, равносильна задаче о минимуме функционала

$$F[y]=(Ly, y)+2(f, y) \tag{15}$$

в классе функций K. Используя формулу (11), имеем

$$F[y]=p(a) y(a) y'(a)-p(b) y(b) y'(b)+ \\ +\int_a^b [p(x) y'^2-q(x) y^2+2f(x) y]\, dx. \tag{16}$$

В частности, если $\alpha_1>0$ и $\beta_1>0$, то получим

$$F[y]=-\frac{\alpha}{\alpha_1} p(a) y^2(a)+\frac{\beta}{\beta_1} p(b) y^2(b)+ \\ +\int_a^b [p(x) y'^2-q(x) y^2+2f(x) y]\, dx. \tag{17}$$

Аналогичные выражения получаем для других случаев.

Рассмотрим теперь краевую задачу (6) с неоднородными краевыми условиями (2) в предположении, что выполнены неравенства (12) и (14). Оператор L в классе функций K_1, удовлетворяющих условиям (2), вообще говоря, не является симметричным и положительным, поэтому нельзя непосредственно использовать теорему 2 предыдущего параграфа.

Пусть $z=z(x)\in C^{(2)}[a,\ b]$ и удовлетворяет условиям (2), т. е.

$$\alpha_1 z'(a)+\alpha z(a)=A,\quad \beta_1 z'(b)+\beta z(b)=B. \tag{18}$$

Обозначая через y решение краевой задачи (6), (2), введем функцию $u=u(x)$, определяемую равенством

$$u=y-z. \tag{19}$$

Функция u удовлетворяет однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u'(a)+\alpha u(a)=0,\qquad \beta_1 u'(b)+\beta u(b)=0 \tag{20}$$

и является решением уравнения $Lu=Ly-Lz$, т. е.

$$Lu=-f(x)-Lz. \tag{21}$$

Таким образом, $u\in K$. Оператор Lu в классе функций K является симметричным и положительным, и, следовательно, решение u краевой задачи (20)—(21), в силу теоремы 2 из § 3, дает минимум функционалу

$$F[u]=(Lu,\ u)+2(f(x)+Lz,\ u).$$

Отсюда на основании формулы (15) имеем

$$F[u]=p(a)\,u(a)\,u'(a)-p(b)\,u(b)\,u'(b)+\\ +\int_a^b[p(x)\,u'^2-q(x)\,u^2+2(f(x)+Lz)\,u]\,dx. \tag{22}$$

Из равенства (19) получаем, что решение y краевой задачи (6), (2) дает минимум функционалу

$$\begin{aligned}F_1[y]&=p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)-z'(a)]-\\ &\quad-p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)-z'(b)]+\\ &\quad+\int_a^b[p(x)(y'-z')^2-q(x)(y-z)^2+2(f(x)+Lz)(y-z)]\,dx=\\ &=p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)-z'(a)]-\\ &\quad-p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)-z'(b)]+\\ &\quad+\int_a^b[p(x)\,y'^2-q(x)\,y^2+2f(x)\,y]\,dx+\\ &\quad+\int_a^b[p(x)\,z'^2-q(x)\,z^2-2f(x)\,z]\,dz+\\ &\quad+2\int_a^b[-p(x)\,y'z'+q(x)\,yz+(y-z)\,Lz]\,dx.\end{aligned} \tag{23}$$

Используя интегрирование по частям, будем иметь

$$\int_a^b (y-z)\,Lz\,dx = -\int_a^b (y-z)\left[\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z\right]dx =$$

$$= -(y-z)\,p(x)\,z'\Big|_a^b + \int_a^b [p(x)\,z'(y'-z') - q(x)\,z\,(y-z)]\,dx =$$

$$= p(a)[y(a)-z(a)]\,z'(a) - p(b)[y(b)-z(b)]\,z'(b) + \int_a^b [p(x)\,z'(y'-z') - q(x)\,z\,(y-z)]\,dx.$$

Внося это выражение в формулу (23), после несложных упрощений получим

$$F_1(y) = p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)+z'(a)] - p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)+z'(b)] + \int_a^b [p(x)\,y'^2 - q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx - \int_a^b [p(x)\,z'^2 - q(x)\,z^2 + 2f(x)\,z]\,dx. \tag{24}$$

Пусть $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Из краевых условий (2) имеем

$$y'(a) = \frac{A-\alpha y(a)}{\alpha_1}, \quad z'(a) = \frac{A-\alpha z(a)}{\alpha_1}$$

и

$$y'(b) = \frac{B-\beta y(b)}{\beta_1}, \quad z'(b) = \frac{B-\beta z(b)}{\beta_1}.$$

Тогда

$$F_1[y] = \frac{p(a)}{\alpha_1}[2Ay(a) - \alpha y^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b) - \beta y^2(b)] + \int_a^b [p(x)\,y'^2 - q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx - \left\{\frac{p(a)}{\alpha_1}[2Az(a) - \alpha z^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1}[2Bz(b) - \beta z^2(b)] + \int_a^b [p(x)\,z'^2 - q(x)\,z^2 + 2f(x)\,z]\,dx\right\}. \tag{25}$$

Так как стоящие в фигурной скобке члены формулы (25) фиксированы и не меняются при изменении функции y, то вместо функционала $F_1[y]$ можно рассмотреть функционал

$$\Phi[y] = \frac{p(a)}{\alpha_1}[2Ay(a) - \alpha y^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b) - \beta y^2(b)] + \int_a^b [p(x)\,y'^2 - q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx. \quad (26)$$

Таким образом, краевая задача (6), (2) с неоднородными краевыми условиями в предположении, что имеют место неравенства (12) и (14), эквивалентна вариационной задаче для функционала (26) в классе функций K_1, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Замечание. 1° Если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 \neq 0$, то $y(a) = z(a) = A/\alpha$. Из формулы (24) вытекает, что за $\Phi[y]$ можно принять функционал

$$\Phi[y] = -\frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b) - \beta y^2(b)] + \int_a^b [p(x)\,y'^2 - q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx.$$

2° Аналогично доказывается, что если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$, то

$$\Phi[y] = \int_a^b [p(x)\,y'^2 - q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx.$$