

Равномерная сходимость функциональных рядов. Степенные ряды

1. Исходя из определения равномерной сходимости, докажите равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\begin{aligned}
 & \text{1.1. } \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2; & \text{1.2. } \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad -q \leq x \leq q, 0 < q < 1; \\
 & \text{1.3. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right), \quad -1 \leq x \leq 1 & \text{1.4. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad 0 \leq x < +\infty; \\
 & \text{1.5. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n+1)x}{\sqrt{n+1}} \right), \quad -\infty < x < +\infty & \text{1.6. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n \cdot \sqrt{1+nx}}, \quad 0 \leq x \leq 2; \\
 & \text{1.7. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n \cdot \sqrt{1+nx}}, \quad 0 \leq x \leq 2.
 \end{aligned}$$

2. Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\begin{aligned}
 & \text{2.1. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad -1 \leq x \leq 1; & \text{2.2. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \\
 & \text{2.3. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty; & \text{2.4. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg nx}{x^4+n \cdot \sqrt[3]{n}}, \quad -\infty < x < +\infty; \\
 & \text{2.5. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, \quad -3 \leq x \leq -1; & \text{2.6. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}; \\
 & \text{2.7. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \arctg 2n^2 x}{\sqrt[3]{n^7+n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty; & \text{2.8. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin \frac{1}{nx}}{4+\ln^2 nx}, \quad 2 \leq x < +\infty; \\
 & \text{2.9. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3 x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty; & \text{2.10. } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{x^2+n^3}, \quad -\infty < x < +\infty; \\
 & \text{2.11. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^4} \cdot \arctg \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < +\infty; & \text{2.12. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{x^2 \sin x}{1+n^5 x^4}, \quad -\infty < x < +\infty; \\
 & \text{2.13. } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^2 x}, \quad 0 \leq x < +\infty; & \text{2.14. } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad 0 < x < +\infty.
 \end{aligned}$$

3. Найдите радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости функционального ряда:

$$\begin{aligned}
 & \text{3.1. } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \text{ 3.2. } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+1)^n; \text{ 3.3. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n; \text{ 3.4. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}; \\
 & \text{3.5. } \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; \text{ 3.6. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^{n^2} x^n; \text{ 3.7. } \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n; \text{ 3.8. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}; \\
 & \text{3.9. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n; \text{ 3.10. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}; \text{ 3.11. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+3) x^{2n+1}}{3n^2+4}; \\
 & \text{3.12. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n; \text{ 3.13. } \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} (x+1)^{n^2}; \text{ 3.14. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n; \\
 & \text{3.15. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{(n+2) \ln(n+2)}; \text{ 3.16. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{(3n-1) 2^n}; \text{ 3.17. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}; \\
 & \text{3.18. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x+4)^{2n+1}}{(n+3)!}; \text{ 3.19. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^{3n}}{(4n-1)^3}; \text{ 3.20. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n; \\
 & \text{3.21. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3) 2^n}; \text{ 3.22. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}; \text{ 3.23. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n.
 \end{aligned}$$

4. Найдти сумму ряда:

$$\begin{aligned}
 & \text{4.1. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}; \text{ 4.2. } \sum_{n=1}^{\infty} n x^n; \text{ 4.3. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \text{ 4.4. } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \text{ 4.5. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n \cdot (2n-1)}; \\
 & \text{4.6. } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n; \text{ 4.7. } \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n; \text{ 4.8. } \sum_{n=1}^{\infty} (n+5) x^{n-1}; \text{ 4.9. } \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) x^{5n}; \\
 & \text{4.10. } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^{2n+2}; \text{ 4.11. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}; \text{ 4.12. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}; \text{ 4.13. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}; \\
 & \text{4.14. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}; \text{ 4.15. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^4)^n}{n+1}; \text{ 4.16. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}; \text{ 4.17. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}; \text{ 4.18. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n! n x^{3n-3}}.
 \end{aligned}$$