2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.1. Теоретические основы вариационных методов

Основной задачей классического вариационного исчисления является следующая: среди всех непрерывных функций $u = u(x)$, $a \le x \le b$, имеющих кусочно-непрерывные производные и удовлетворяющих граничным условиям

$u(a) = \alpha$; $u(a) = \beta$)

найти такую, которая доставляет минимальное значение функционала:

$$J[u] = \int_a^b \Phi(x, u, u')dx; \quad \left(u' = \frac{du}{dx}\right).$$

В общем случае функция u может быть функцией нескольких переменных $u(x, y, z, \ldots)$, в функционал Φ входят частные производные, а интеграл берется по некоторой области Ω.

Содержание одной из *центральных теорем классического вариационного исчисления* заключается в том, что дважды дифференцируемая функция $u(x)$, доставляющая минимум функционала Φ, является решением краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера с теми же граничными условиями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right) = 0.$$

Справедливо также обратное утверждение: решение краевой задачи для дифференциального уравнения (в общем случае ДУ в частных производных) при определенных условиях является также решением соответствующей задачи вариационного исчисления. Таким образом, имеется возможность одни и те же задачи сводить либо к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, либо к нахождению минимума некоторого функционала, т.е. к решению задачи вариационного исчисления. Это позволяет при решении краевой задачи для ДУ, сводя ее к вариационной, применять специфические вариационные методы. Проиллюстрируем технику такого решения. Запишем краевую задачу для ДУ в общем виде как

$$Lu = f\,; \qquad u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma)$$

Область определения функции u: $R(u) = \Omega$; где Γ – граница области Ω. Тогда соответствующий функционал (заметим, что это один из возможных), минимум которого достигается на решении, имеет вид

$$(Lu, u) - 2(f, u).$$

Здесь посредством скобок $(.,.)$ обозначено скалярное произведение в общем случае в многомерном гильбертовом пространстве $L_2[\Omega]$.

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида $J[u]$ является ***метод Ритца***

Чаще всего этот метод реализуется следующим образом. Выбираем в области определения $R(L)$ оператора L (например, в классе дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям) некоторый ***базис***, т.е. набор функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$, обладающих ***свойством полноты***: любая функция $u(x)$ из области решений может быть представлена в виде

$$u(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x).$$

Будем искать приближение к функции, доставляющей минимум функционала $J[u]$ в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x).$$

После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)$$

в функционал $J[u]$ получим функцию N переменных:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = J\left[u^N\right] = J\left[\sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)\right].$$

Неизвестные значения коэффициентов разложения $a_1, a_2, \dots, a_N$ искомого решения по функциям базиса будем находить из условия

$$\min_{a_1,\dots,a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к нахождению минимума функции N переменных.

Алгоритмы решения этой задачи для небольшого числа N хорошо разработаны Для случая квадратичных функционалов с линейным дифференциальным оператором Lu, нахождение $a_1, a_2, \dots, a_N$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующим образом. После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x)$$

получим

$$F = \left(L\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x), \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(x)\right) - 2\left(f, \sum a_i\varphi_i\right) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_k a_i \left(L\varphi_k, \varphi_i\right) - 2\sum_{i=1}^{N} a_i\left(f, \varphi_i\right).$$

Воспользуемся необходимым условием минимума и составим N уравнений вида

$$\frac{\partial F(a_1, \dots, a_N)}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1}^{N} a_k\left(L\varphi_k, \varphi_i\right) - 2\left(f, \varphi_i\right) = 0; \quad i = 1 \dots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений для нахожения a_k может быть переписана в виде

$\left(L\sum a_k\varphi_k, \varphi_i\right) = \left(f, \varphi_i\right)$ или $\left(Lu^N, \varphi_i\right) = \left(f, \varphi_i\right)$, то есть можно заметить, что эта система получается из исходной краевой задачи простой подстановкой u^N вместо u и последующим умножением скалярно на каждую функцию базиса. Ввиду того что такое скалярное произведение называется проекцией на функцию базиса, то полученная система носит название ***системы проекционных уравнений.*** В наиболее общем случае при построении проекционной системы уравнений выбирают два базиса $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_N(x)\}$ и $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)\}$ и некоторый дифференциальный оператор K:

$$\left(L\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k, K\psi_i \right) = (f, K\psi_i);\ i = 1\ldots N.$$

Как видим, полученное уравнение совершенно не связано с необходимостью предварительного получения функционала, а обоснование сходимости полученного решения u^N к u следует из теоремы о сходимости к нулю невязки

$r_n(x) = Lu^N - f$,

если равны нулю ее проекции на базисные функции:

$(r_n, K\psi_i) = 0.$

Впервые идею такого решения ДУ (не обращаясь к вариационной задаче) предложил в 1915 году Б. Г. Галеркин. В зависимости от выбора в функций φ_i, ψ_i и оператора K эти методы имеют свои названия:

метод Бубнова-Галеркина:

$K = I$ (тождественный),

$K = I$ $\psi_i = \varphi_i$, $\varphi_i \in R(L)$,

оператор L может быть несимметричным и необязательно положительно определенным.

метод Галеркина-Петрова:

$K = I$, $\varphi_i \neq \psi_i, \varphi_i \in R(L), \psi_i \in H(L)$,

где $H(L)$ - область значений оператора L, имеющего ограниченный обратный оператор L^{-1};

метод наименьших квадратов:

$K = L, \psi_i = \varphi_i$,

при условии существования ограниченного оператора L^{-1} доказана сходимость метода;

метод моментов:

$K \neq I, \psi_i = \varphi_i$

При выполнении условий на оператор K вида $(Lu, Ku) \geq y^2\|u\|^2$ и $(Lu, Ku) \geq \beta^2\|Ku\|^2$ доказана сходимость метода. Следует отметить, что в каждом конкретном случае от выбора удачной модификации проекционного метода зависит эффективность решения задачи.

2.2. Примеры решения задач методом Галеркина

2.2.1. Одномерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial u}\right)=f(x); \qquad u(0)=\alpha;\ u(1)=\beta;\ \Omega=[0,1];\ \Gamma=[0],[1].$$

Выберем базис вида

$$\{\varphi_1(x),\varphi_2,\ldots,\varphi_N(x);\ \varphi_k(0)=\varphi_k(1)\}=0;\ \psi_i=\varphi_i.$$

Функции базиса удовлетворяют нулевым граничным условиям, а сам базис является полным в классе функций, обращающихся в ноль на границах, например $\{\varphi_k=\sin(k\pi x),\ k=1\ldots N\}$. Решение будем искать в виде

$$u^N(x)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x).$$

Здесь $\varphi_0(x)$ выбирается такой, чтобы u^N удовлетворяло заданным граничным условиям, например, можно положить $\varphi_0=\alpha+(\beta-\alpha)x$. Если известна некоторая информация об искомом решении, то ее можно учесть в функции φ_0.

Составим проекционные уравнения:

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial\left(\varphi_0+\sum a_k\varphi_k\right)}{\partial x}\right)\varphi_i dx=\int_0^1 f\varphi_i dx;\ i=1\ldots N.$$

В левой части уравнения применим формулу интегрирования по частям и, воспользовавшись тем, что $\varphi_i\big|_\Gamma$, получим

$$-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}g\frac{\partial\left(\varphi_0+\sum a_k\varphi_k\right)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx=\int_0^1 f\varphi_i dx.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\sum_{л=1}^{n}a_k\int_0^1 g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}dx=-\int_0^1\left(f+g\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)\varphi_i dx.$$

Или в принятых выше обозначениях

$$\sum_{л=1}^{N}\left(g\frac{\partial\varphi_k}{\partial x},\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)a_k=\hat{f}_i;\ i=1\ldots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет симметричную, положительно определенную матрицу, и ее решение находится эффективным методом квадратного корня. Следует однако отметить, что с увеличением N система становится плохо обусловленной. Если коэффициенты $g(x), f(x)$ имеют особенности (например разрывы), то для увеличения точности полезно эти особенности выделить и учесть в функции $\varphi_0(x)$. В этом случае удается значительно ускорить сходимость ряда . Из вида системы следует, что для получения решения базисные функции могут не иметь второй производной (достаточно только первой). В этом случае полученное решение не является в обычном смысле решением исходного дифференциального уравнения и говорят, что оно является ***обобщенным решением***.

2.2.2. Двухмерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x,y);\ u\big|_{\Gamma}=\alpha(\Gamma);\ x,y\in\Omega.$$

Выбираем базис $\{\varphi_0(x,y),\varphi_1(x,y),...,\varphi_N(x,y),\},$ полный во множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям и имеющих первую производную. Решение ищем в виде

$$u^N=\sum_{k=0}^{N}a_k\varphi_k(x,y).$$

Составляем проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)\right]\varphi_k d\Omega=f\varphi_j d\Omega.$$

Чтобы избавиться от второй производной, воспользуемся интегрированием по частям, который для двухмерного случая имеет вид (здесь $\vec{n}=(n_x,n_y)$ - единичный вектор нормали к границе):

$$\iint_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega=-\iint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}d\Omega+\int_{\Gamma}uvn_x d\Gamma,$$

$$\iint_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial y}d\Omega=-\iint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial y}d\Omega+\int_{\Gamma}uvn_y d\Gamma.$$

После подстановки получаем систему проекционных уравнений для нахождения неизвестных $a_0...a_N$:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\left[\iint_{\Omega}g\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)d\Omega-\int_{\Gamma}n\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}n_x+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}n_y\right)\varphi_i d\Gamma\right]=\hat{f}_i.$$

Заметим, что если удается подобрать функции φ_k с нулевыми значениями на Γ, то второй интеграл в обращается в ноль; иногда удается подобрать $\varphi_0\big|_{\Gamma}=\alpha,\ \varphi_{k\geq 1}\big|_{\Gamma}=0$, тогда, выбрав $a_0=1$, этот интеграл переносится в правую часть и входит в $\hat{f}_i$, как в предыдущем примере.

2.2.3. Сведение задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича

Предположим, что задана краевая задача в цилиндрической области вида

$$Lu(xyz)=f;\ u\big|_{z=0}=\alpha(xy);\ u\big|_{z=L}=\beta(xy);\ u\big|_{\Gamma}=0,$$

где L - дифференциальный оператор 2-го порядка по z ; Γ - граница области поперечного сечения $\Omega_\Gamma, x,y\in\Omega_\Gamma$. Выберем базис из функций, определенных на $\Omega_\Gamma\{\varphi_1(x,y),...,\varphi_N(x,y)\}$ и обращающихся в ноль на границе $\varphi_k\big|_\Gamma=0$. Решение будем искать в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\varphi_k(x,y),$$

т.е. коэффициенты разложения $a_k(z)$ зависят от третьей координаты z.
Составим проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega_\Gamma}\left[\left(L\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\varphi_k(x,y)\right)\varphi_i(x,y)\right]dxdy = \iint_{\Omega_\Gamma} f(x,y,z)\varphi_i(x,y)dxdy.$$

После интегрирования получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных коэффициентов с граничными условиями $a_k(0)=\alpha_k$; $a_k(L)=\beta_k$. Значения a_k, β_k находятся из решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_k a_k \iint_{\Omega_\Gamma}\varphi_k\varphi_i dxdy = \iint_{\Omega_\Gamma}\alpha\varphi_i dxdy; \ \sum_k \beta_k \iint_{\Omega_\Gamma}\varphi_k\varphi_i dxdy = \iint_{\Omega_\Gamma}\beta\varphi_i dxdy.$$

Заметим, что решение задачи значительно упрощается, если функции выбранного базиса оказываются ортогональными, т.е.

$$\iint_{\Omega_\Gamma}\varphi_i dxdy = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \|\varphi_k\|^2_{L_2}, & i = k \end{cases}.$$

В этом случае

$$\alpha_k = \iint_{\Omega_\Gamma}\alpha\varphi_k dxdy / \|\varphi_k\|^2_{L_2}; \ \beta_k = \iint_{\Omega_\Gamma}\beta\varphi_k dxdy / \|\varphi_k\|^2_{L_2}.$$

Такое сведение к системе ОДУ обычно используют при решении задач распространения волн в нерегулярных волноводах, а базис получают как набор собственных функций из решения соответствующей задачи Штурма-Лиувиля.

Контрольные вопросы

1. Как ставится основная задача вариационного исчисления?
2. Сформулируйте метод Ритца для нахождения минимума функционала.
3. Как получаются проекционные уравнения при решении краевой задачи для дифференциальных уравнений?
4. В чем разница между методами Бубнова-Галеркина, Галеркина-Петрова, методом наименьших квадратов и методом моментов?

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ЗАДАНИЕ 13.

Метод сеток для решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.

Цель:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности,
- составить алгоритмы решения **уравнения теплопроводности** методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения **уравнения теплопроводности** по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение заданного **уравнения теплопроводности.**

Краткие теоретические сведения

Требуется найти непрерывную на замкнутом прямоугольнике $\overline{D}$ функцию u(x, t), которая на D' удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,, \qquad (П.1)$$

при t = 0 удовлетворяет начальному условию

$$u(x,\ 0) = s(x), \qquad (П.2)$$

а при x = 0 и x = 1 подчиняется краевым условиям

$$u(0,\ t) = p(t),\ \ u(1,\ t) = q(t), \qquad (П.3)$$

где f*(x, t), s(x), p(t), q(t)* — заданные достаточно гладкие функции, причем *s(0) = p(0), s(l) = q(0).*

Задача (1) — (3) называется смешанной, поскольку она содержит как начальное условие, так и краевые условия. Известно, что у поставленной задачи существует единственное решение *u(x, t)*. Мы будем предполагать, что это решение имеет на замкнутом прямоугольнике $\overline{D}$ непрерывные частные производные $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^4 u/\partial x^4$.

С е т к и и н о р м ы. Пусть h = 1/N, τ = T/M — шаги по *x* и *t*, где *N, M* — натуральные, $x_k = kh$, $t_\nu = \nu\tau$, $u_k^\nu = u(x_k, t_\nu)$. Построим сетки (рис. 1)

$\omega_h = \{(x_k, t_\nu):\ k = 0, 1, \ldots, N,\ \nu = 0, 1, \ldots, M\}$,

$\omega'_h = \{(x_k, t_\nu):\ k = 1, 2, \ldots, N\text{-}1,\ \nu = 1, 2, \ldots, M\}$,

$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega'_h$.

Сетка ω_h^* состоит из узлов сетки ω_h, обозначенных на рис. П.1 крестиками. Эти узлы расположены на трех сторонах прямоугольника $\overline{D}$, на которых заданы начальное и краевые условия. Сетка ω'_h состоит из остальных