Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Анализ методов решений многомерного уравнения из математической физики

Сенько Н.С., студент гр.253505
Чечулов Д.В., студент гр.253505
Колесников П.В., студент гр.253504

Анисимов Владимир Яковлевич – канд. физ.-мат. наук, доцент

→

Актуальность темы

Важность численного решения многомерных задач математической физики в различных областях науки и техники.

Цель работы

Анализ и сравнение методов переменных направлений (МПН) и дробных шагов (МДШ) для решения многомерных задач

Проблематика

Ключевые вопросы:

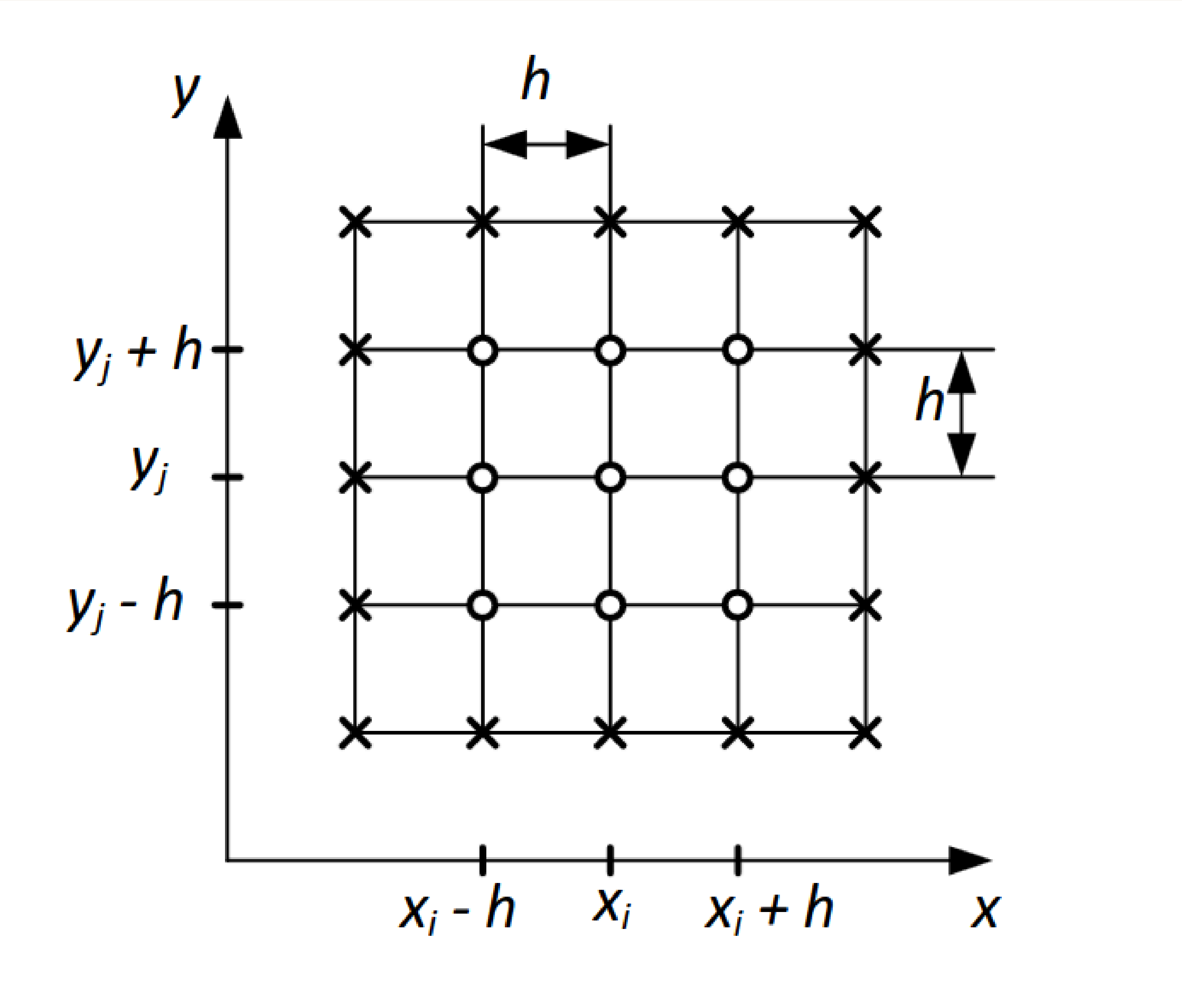
- баланс между точностью и производительностью
- поиск экономичных разностных схем

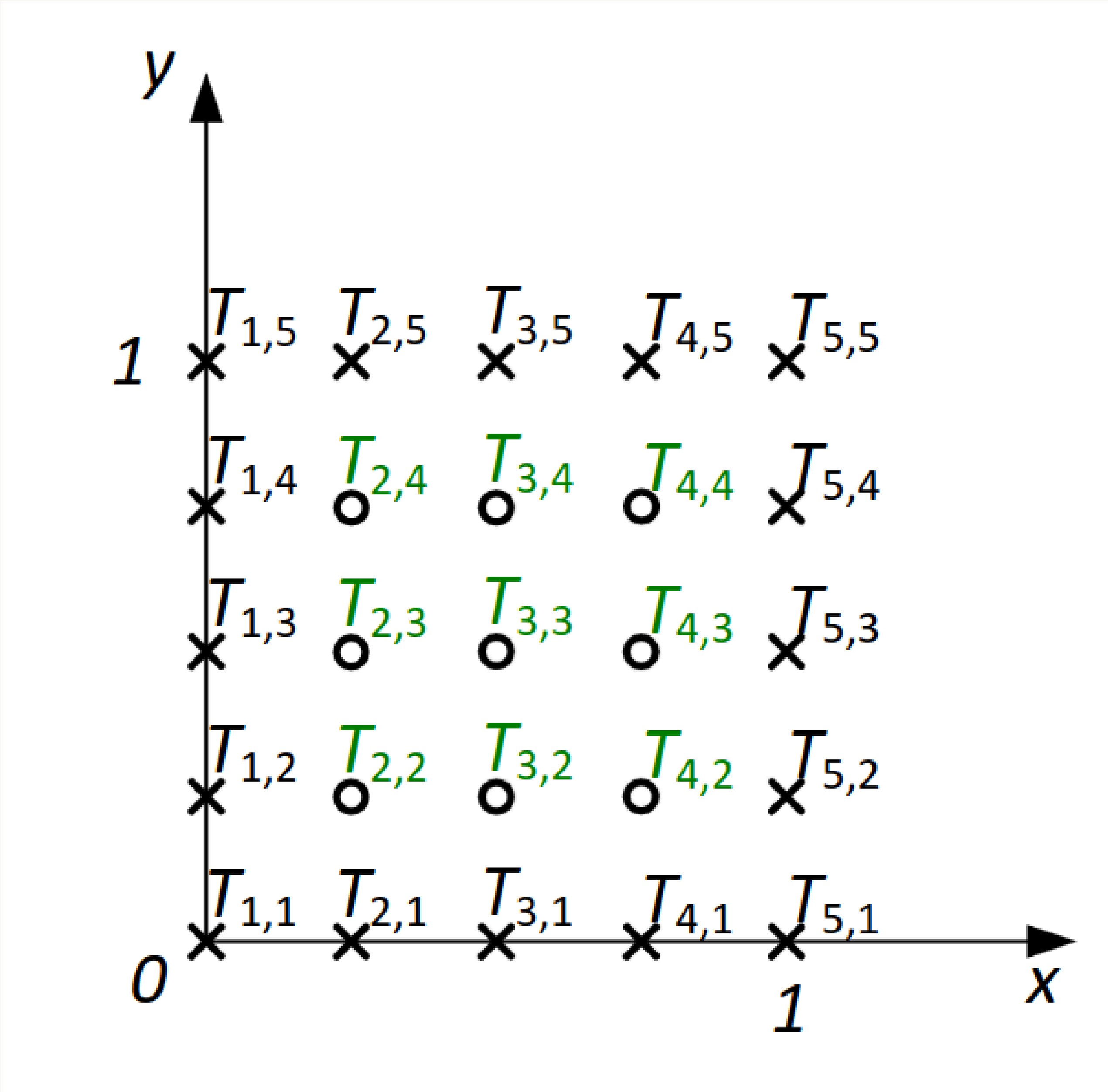
→

05.

Методы расщепления

Общая идея методов расщепления: Разделение сложной многомерной задачи на последовательность более простых одномерных задач.





→

06. Метод переменных направлений

- последовательное решение одномерных задач вдоль каждого координатного направления
- на каждом шаге по времени, задача расщепляется на несколько этапов
- на каждом этапе решается одномерное уравнение вдоль одного из координатных направлений.

Метод дробных шагов

Выполняет "дробные шаги" по времени для каждого направления. Это означает, что на каждом шаге по времени, решение продвигается на небольшую долю полного шага по времени вдоль каждого координатного направления.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение теплопроводности для 4 пространственных независимых переменных и одной переменной времени

$$U'_t = U''_{x^2} + U''_{y^2} - U''_{{x_1}^2} - U''_{y_1} + f(x, y, x_1, y_1, t)$$

где x, y, x_1, y_1 -пространственные независимые

t -переменная времени

→

09.

Применим к уравнению метод переменных направлений, который заключается в том, что на первом шаге, оператор (1) аппроксимируется неявно, а остальные (2) – явно; на втором шаге, следующий оператор (2) аппроксимируется неявно, а остальные явно и т.д. После этого счет повторяется.

1 $L_1 = U''_{x^2}$

2 $L_2 = U''_{y^2}; L_3 = U''_{x_1^2}; L_4 = U''_{y_1^2};$

3 L_2

→

10.

Рассмотрим полученную схему, введя оператор:

$$\lambda_{xx} = \frac{U^k{}_{x+1,y\,x_1,y_1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x-1,y,x_1,y_1}}{h_x{}^2}$$

Получим:

$$\frac{U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + \lambda_{yy}U^{k+\frac{1}{2}} - \lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{1}{2}} - \lambda_{y_1y_1}U^{k+\frac{3}{4}} + f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

- Схема имеет порядок $O(t^2 + |h|^2)$
- Схема не является абсолютно устойчивой

11. Применим теперь к исходному уравнению метод дробных шагов, которых заключается в том, что на каждом дробном шаге пользоваться будем только неявными операторами. При этом на каждом дробном шаге в правой части аппроксимируется оператор:

$$L_s = U''_{{y_s}^2}$$

Получим: $$\frac{U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,\ y,\ x_1,\ y_1} - U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = -\lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{3}{4}} + f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,\ y,\ x_1,\ y_1}$$

- Схема имеет порядок $O(t+|h|^2)$
- Схема является абсолютно устойчивой

Список использованных источников:

1. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – 1967. С. 26-46
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – "Nauka" Glavnaâ redakciâ Fiziko-matematičeskoj Literatury, 1984. – С. 442.
3. Marchuk G. I. Методы расщепления, 1988. С. 263.
4. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. – Наука. Сиб. отд-ние, 1981. С. 263.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – 1967.
6. Тюкин О. А. Метод полного расщепления численного решения параболических уравнений со смешанными производными : дис. – Моск. гос. авиационный ин-т, 1996.

Спасибо за внимание