1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1 Связь метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных разностей (МКР).

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

Шаг 1. Построение сетки в заданной области (дискретизация задачи).

Шаг 2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи).

Шаг 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Метод сеток разделяется на два метода: 1) метод конечных элементов (МКЭ); 2) метод конечных разностей (МКР). Эти методы отличаются друг от друга на шагах 1 и 2 алгоритма. На шаге 3 методы практически идентичны.

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных ствойств, как устойчивость, сходимость и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее МКЭ активно развивается, с его помощью и без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов и программ, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Теоретическое обоснование этого метода было в основном завершено в 70-е годы пршлого столетия, а с появлением высокопроизводительной вычислительной техники он стал важным инструментом исследований в науке и технике. Появилось множество пакетов прикладных программ, как коммерческих, так и общедоступных, позволяющих решать разнообразные задачи – теплопроводности, электродинамики, механики деформируемого твердого тела, гидродинамики и др. МКЭ представляет собой синтез метода сеток и проекционного метода Галеркина с выбором базиса из финитных функций, носители которых (конечные элементы) покрывают каждый узел сетки. В результате применения к такому базису проекционной процедуры для коэффициентов разложения искомого решения получается система алгебраических уравнений, аналогичная той, к которой приводят сеточные методы, – матрица ленточная, количество неизвестных равно количеству узлов сетки. К тому же при определенном выборе финитных функций, например в виде искомые коэффициенты в являются приближенными значениями решения в узлах сетки.

Поэтому можно сказать, что МКЭ – это тот же классический метод сеток, в котором конечно-разностная схема получается в результате применения проекционной процедуры к базису из финитных функций, привязанных к каждому узлу сетки. Такой способ получения конечно-разностной схемы позволил избавиться от основного недостатка классического метода сеток – привязки узлов сетки к координатным линиям, что позволило в случае многомерных задач гибко адаптировать сетку к произвольной форме границ и особенностям искомого
решения.

1.2. Пример решения одномерной задачи

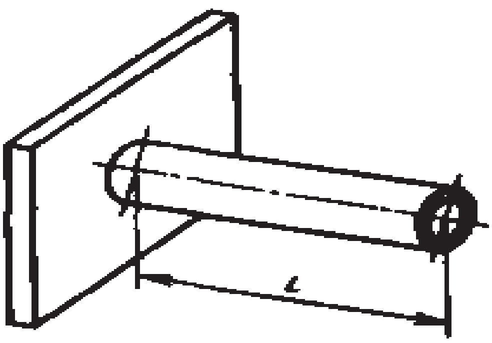


Рис. 1.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием теплового потока.

● Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рис. 1.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена α и температура окружающей среды T_*. Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

Температурное поле в неоднородном стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном приближении имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \quad ,$$

Краевые условия определяются уравнениями:

$\lambda_x(\partial T / \partial x) + q = 0$ при $x = 0$;

$$\lambda_x (\partial T / \partial x) + \alpha (T - T_x) = 0 \qquad \text{при} \quad x = L \; .$$

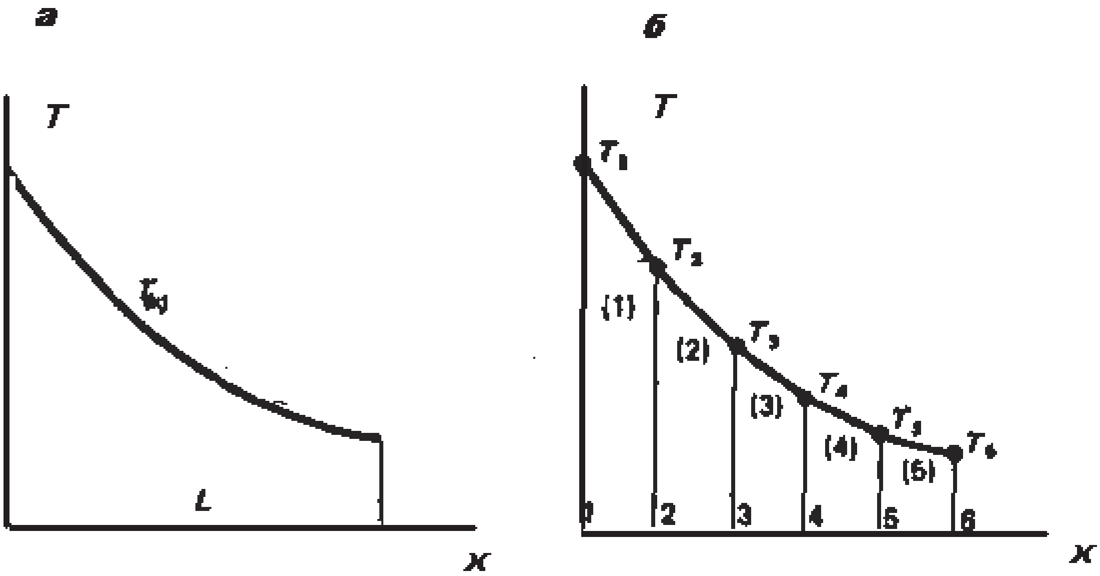


Рис. 1.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ.

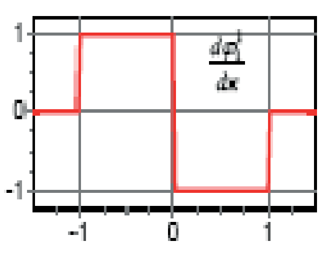
Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рис. 1.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 1.2,б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения $T_1 - T_6$, которые в общем случае сначала неизвестны и подлежат определению в МКЭ. Рассмотрим реализацию МКЭ на примере решения простейшей задачи :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \qquad\qquad u(0) = \alpha \,; u(b) = \beta .$$

Выбираем равномерную сетку $\omega_n = \{x_i = (i-1)h, i = 1 \ldots N = n+1\}$ и ищем решение в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \overline{u_k} \varphi_k(x), \quad \varphi_k = \varphi_1^1\left(\frac{x-(k-1)h}{h} \right).$$

Здесь обозначено $a_k = \overline{u_k}$. Заметим, что $\overline{u_1} = \alpha, \;\; \overline{u_N} = \beta$ в силу граничныхусловий . Производная от функции-крышки также финитная функция:



$$\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & -1 \le |x| \le 0, \\ -1, & 0 \le |x| \le 1. \end{cases}$$

Используем проекционные уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} (g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}) a_k = f_i ; i = 1 \ldots N .$$

Ввиду ограниченности функций каждое *i*-е уравнение содержит только три члена:

$$-\bar{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx + \bar{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx - \bar{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g}{h^2} dx = -\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Обозначим

$$g_{i-1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g dx, \quad g_{i+1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dx, \quad f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Получаем конечно-разностную схему,:

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i-1} - \left(\frac{g_{i-1/2} + g_{i+1/2}}{h^2} \right) \bar{u}_i + \frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i+1} = f_i , i = 2 \ldots n, \bar{u}_1 = \alpha , \bar{u}_N = \beta .$$

Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов: в МКЭ коэффициенты $g_{i\pm1/2}$ вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами. Программная реализация алгоритма решения метод прогонки.

1. 3. Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двухмерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех шагов.

Ш а г 1 . Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы).