Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
к курсовой работе  
на тему

Интегрирование дифференциальных уравнений   
с помощью степенных рядов

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр. 253502 Ахметов Р. Я.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Калугина М. А.

Минск 2023

**СОДЕРЖАНИЕ**

[**ВВЕДЕНИЕ** 4](#_Toc154634831)

[**1.** **Ряды** 5](#_Toc154634832)

[**1.1.** **Числовые ряды** 5](#_Toc154634833)

[**1.1.1.** **Основные понятия. Необходимый признак сходимости** 5](#_Toc154634834)

[**1.1.2.** **Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда.** 6](#_Toc154634835)

[**1.1.3.** **Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм.** 6](#_Toc154634836)

[**1.1.4.** **Остаток ряда** 10](#_Toc154634837)

[**1.1.5.** **Положительные ряды** 11](#_Toc154634838)

[**1.1.6.** **Признак Даламбера для положительного ряда** 11](#_Toc154634839)

[**1.1.7.** **Признак Коши** 12](#_Toc154634840)

[**1.1.8.** **Интегральный признак сходимости** 13](#_Toc154634841)

[**1.1.9.** **Знакопеременный ряд. Признак Лейбница** 13](#_Toc154634842)

[**1.1.10.** **Абсолютная и условная сходимость** 14](#_Toc154634843)

[**1.1.11.** **Признак Даламбера для произвольного ряда** 15](#_Toc154634844)

[**1.2.** **Функциональные ряды. Область сходимости** 15](#_Toc154634845)

[**1.2.1.** **Абсолютная и условная сходимость** 15](#_Toc154634846)

[**1.2.2.** **Равномерная сходимость** 17](#_Toc154634847)

[**1.2.3.** **Признак Вейерштрасса** 17](#_Toc154634848)

[**1.2.4.** **Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов** 19](#_Toc154634849)

[**1.3.** **Степенные ряды** 23](#_Toc154634850)

[**1.3.1.** **Понятие степенного ряда** 23](#_Toc154634851)

[**1.3.2.** **Равномерная сходимость степенного ряда и непрерывность его суммы** 27](#_Toc154634852)

[**1.3.3.** **Интегрирование степенных рядов** 27](#_Toc154634853)

[**1.3.4.** **Дифференцирование степенных рядов** 28](#_Toc154634854)

[**1.3.5.** **Разложение функции в степенной ряд** 28](#_Toc154634855)

[**1.4.** **Ряд Тейлора и Маклорена** 29](#_Toc154634856)

[**1.4.1.** **Понятие ряда Тейлора и Маклорена** 29](#_Toc154634857)

[**1.4.2.** **Примеры разложения функция в ряды** 31](#_Toc154634858)

[**1.4.3.** **Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами** 31](#_Toc154634859)

[**2.** **Дифференциальные уравнения** 32](#_Toc154634860)

[**2.1.** **Понятие дифференциального уравнения** 32](#_Toc154634861)

[**2.2.** **Дифференциальные уравнения первого порядка** 32](#_Toc154634862)

[**2.3.** **Дифференциальные уравнения высших порядков** 33](#_Toc154634863)

[**2.4.** **Решение уравнений с помощью рядов** 34](#_Toc154634864)

[**2.5.** **Способ последовательного дифференцирования** 35](#_Toc154634865)

[**2.6.** **Способ неопределенных коэффициентов** 36](#_Toc154634866)

[**2.7.** **Уравнение Бесселя** 39](#_Toc154634867)

[**3.** **Практическая часть** 45](#_Toc154634868)

[**ЗАКЛЮЧЕНИЕ** 53](#_Toc154634869)

[**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ** 54](#_Toc154634870)

**ВВЕДЕНИЕ**

Дифференциальные уравнения являются одним из фундаментальных инструментов математики, широко применяемым в различных научных и инженерных дисциплинах. Решение дифференциальных уравнений позволяет нам понять и прогнозировать поведение системы, описываемой этими уравнениями. Однако, не все дифференциальные уравнения имеют аналитические решения, которые можно выразить в явном виде.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов представляет собой один из методов приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на разложении неизвестной функции в бесконечный ряд степеней. Этот метод нашел широкое применение в различных областях науки и техники, таких как физика, инженерия, экономика и биология. Он позволяет получить приближенные решения дифференциальных уравнений с высокой точностью и гибкостью.

Цель данной курсовой работы заключается в изучении метода интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов и его применения в различных задачах.

В работе мы рассмотрим базовые понятия и теоретические основы метода интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Затем приступим к рассмотрению практических примеров и задач, в которых применяется этот метод.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов представляет собой мощный инструмент, позволяющий решать сложные задачи, которые не имеют аналитического решения. Понимание и применение этого метода имеет большое значение для развития науки и техники, поэтому его изучение и анализ являются актуальной и интересной задачей для данной курсовой работы.

1. **Ряды**

# **Числовые ряды**

## **Основные понятия. Необходимый признак сходимости**

В школьном курсе алгебры и начал анализа обычно рассматривают суммы, состоящие из конечного числа слагаемых. Единственным исключением является сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т. е.

,

где |q|<1. В курсе математического анализа изучаются суммы бесконечного множества слагаемых, или, как их называют, бесконечные ряды, которые являются действенным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить с заданной точностью значения функций, вычислять приближенные значения интегралов и решать многие другие прикладные задачи.

**Определение 1.** Числовым рядом с общим членом называют последовательность чисел , , …, , …, соединенных знаком сложения, т. е. выражение вида:

.

Такой ряд записывается также в виде .

**Пример 1**. Если , то ряд имеет вид:

или

Поскольку сложение бесконечного множества чисел не определено, то надо выяснить смысл суммы бесконечного ряда. Для этого поставим в соответствие ряду (А): бесконечную последовательность чисел, , ..., , ..., где ,  а . Мы будем называть число n-й частичной суммой ряда (A). Очевидно, что , и поэтому .

**Определение 2.** Числовой ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, т. е. если существует. Значение s этого предела называется суммой ряда . Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, ряд называется расходящимся.

Будем условно писать , если (соответственно, если).

В случае, когда числовой ряд имеет сумму, будем иногда обозначать ее тем же символом , что и сам ряд.

## **Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда.**

При определении суммы ряда мы писали . Если отбросить от последовательности , , …, *, …* p первых членов, то получившаяся последовательность , , , …, , … будет иметь тот же предел s. Это значит, что если существует , то для любого выполняется равенство

.

**Теорема 1.** Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

**Доказательство**. Пусть . Тогда, как мы видели, и . Но , а поэтому

.

Отсюда и следует, что .

Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что, например, ряд

Расходится (его общий член не стремится к нулю). Следует иметь в виду, что стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым признаком сходимости, но не является достаточным – общий член может стремиться к нулю и в некоторых расходящихся рядах. Например, ряд при расходится, хотя . **[1]**

## **Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм.**

**Теорема 1** (ассоциативный закон для сходящихся рядов). Если в сходящемся ряде

Произвольно объединить соседние члены в группы, не нарушая порядка членов:

(разумеется, каждый член при этом должен входить только в одну группу) и найти суммы членов, входящих в каждую из групп, то составленный из этих сумм ряд

Будет сходиться и иметь ту же сумму, что и первоначальный ряд (1)

**Доказательство.** Составим последовательность частичных сумм ряда (1)

,

,

,

……….

Среди них, в частности, окажутся и все суммы вида

,

,

,

т. е. все частичные суммы ряда (2). Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (2) оказывается подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (1). Но раз последовательность

по условию сходится и имеет предел s, ее подпоследовательность

Также должна сходиться и иметь тот же предел. Это и означает, что “сконцентрированный” ряд (2) сходится и имеет ту же сумму, что и “редкий” ряд (1).

**Следствие 1.** Если в результате описанного в условии предыдущей теоремы объединения ряд (2), который расходится, то и первоначально взятый ряд (1) также расходится.

**Теорема 2** (дистрибутивный закон для рядов; теорема об умножении ряда на число). Пусть

-некоторый ряд, c – произвольное число, отличное от нуля. Тогда ряд

cходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (5). Если ряд (5) сходится, и сумма его рано s, то сумма его равна s, то сумма ряда (6) равна .

**Доказательство**. Если последовательность частичных сумм ряда (5) есть

То последовательность частичных сумм ряда (6), очевидно, будет

Так как

из существования предела слева (которое означает сходимость ряда (5) при ) следует существование предела справа (т. е. сходимость ряда (6)) и равенство (7). Наоборот, из существования предела справа следуют существование предела слева и опять-таки равенство (7).

**Теорема 3** (Дирихле). Пусть дан ряд

с неотрицательными членами, а ряд

Получается из ряда (8) произвольной перестановкой его членов. Тогда, если ряд (8) сходится, то ряд (9) также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (8).

**Доказательство**. Пусть ряд (8) сходится и сумма его равна . Рассмотрим частичную сумму ряда (9)

Каждое из слагаемых этой суммы входит в ряд (8). Возьмем в ряде (8) столь большое число первых членов, чтобы среди них оказались все слагаемые , и составим -ю частичную сумму ряда (8):

Но частичные суммы ряда (8), ввиду неотрицательности членов ряда, не превосходят его суммы :

Следовательно,

Так как теперь в наших рассуждениях ряды (8) и (9) стали равноправными, должно быть и

Откуда следует, что .

**Теорема 4** (теорема о сложении рядов). Пусть

-два сходящихся ряда соответственно с суммами и .

Тогда ряд

также сходится и сумма его равна .

**Доказательство**. Для частичных сумм ряда (10) мы имеем

Справа в скобках стоят частичные суммы и рассматриваемых рядов. Устремляя к бесконечности, мы получаем

а это и требовалось.

Доказанная теорема означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и при этом складываются их суммы.

**Теорема 5**. Если

и

-два сходящихся ряда соответственно с суммами и , а и – произвольные числа, то ряд

также сходится и сумма его равна .

**Доказательство**. Если , то ряд (13) превращается в (12); если , то ряд (13) превращается в (11), и теорема доказана. Предположим теперь, что и . Тогда теорема 2 сходятся ряды

а по теорему 4 – ряд (13), причем его сумма равна .

**Следствие** **2** (теорема о вычитании рядов). Если сходятся ряды

и

и имеют суммы и , то сходится ряд

и сумма его равна .

В самом деле, полагая в предыдущей теореме , а , мы получаем требуемое. **[2]**

## **Остаток ряда**

Если отбросить первые членов ряда

то получим ряд

который сходится (или расходится), если сходится (или расходится) ряд (1). Поэтому пот исследовании сходимости ряда можно оставить без внимания несколько начальных членов.

В случае, когда ряд (1) сходится, сумма

ряда (2) называется остатком (или остаточным членом) первого ряда ( - первый остаток, - второй и т. д.). Остаток

есть погрешность при замене суммы ряда (1) частичной суммы . Сумма ряда и остаток связаны соотношением

При остаток ряда стремится к нулю. Практически важно, чтобы это стремление было “достаточно быстрым”, т. е. чтобы остаток стал меньше допустимой погрешности при не слишком большом . Тогда говорят, что ряд (1) сходится быстро, в противном случае говорят, что ряд сходится медленно. Разумеется, быстрота или медленность сходимости – понятие относительное.

## **Положительные ряды**

Положительный ряд (т. е. ряд, все члены которого положительны) не может быть неопределенным (т. е. когда последовательность не имеет никакого предела, расходящийся ряд называется неопределенным). Его частичные суммы всегда имеют предел – конечный или бесконечный. В первом случае ряд сходится, во втором – расходится.

Положительный сходящийся ряд при перестановке членов остается сходящимся и его сумма не изменяется, расходящийся положительный ряд остается расходящимся.

## **Признак Даламбера для положительного ряда**

**Теорема 1.** Пусть в положительном ряде

Отношение последующего члена к предыдущему при имеет предел . Возможны три случая.

Случай 1. . Тогда ряд сходится.

Случай 2. . Тогда ряд расходится.

Случай 3. . Тогда ряд может сходиться, а может и расходиться.

Эту теорему называют признаком Даламбера. **[3]**

## **Признак Коши**

**Теорема 1**. Пусть дан ряд

Если существует конечный предел

То 1) при ряд сходится; 2) при ряд расходится.

1. Пусть . Возьмем число такое, что . Так как существует предел

где , то, начиная с некоторого номера , будет выполняться неравенство . В самом деле, из предельного неравенства вытекает, что для любого , в том числе и для , найдется такой номер , начиная с которого будет выполняться неравенство

откуда или, что то же,

Отсюда получаем

Таким образом, все члены ряда, начиная с , меньше соответствующих членов сходящегося ряда . По признаку сравнения ряд

сходится, а значит сходится и ряд (1).

1. Пусть . Тогда, начиная с некоторого номера для всех , будет выполняться неравенство , или

Следовательно,

и ряд (1) расходится.

Замечание. Если , то ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. **[4]**

## **Интегральный признак сходимости**

Если каждый член положительного ряд

Меньше предшествующего, то для исследования сходимости можно рассмотреть несобственный интеграл

где – непрерывная убывающая функция , принимающая при значения .

Ряд (1) сходится или расходится, в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл (2). В случае сходимости остаток ряда (1) удовлетворяет неравенствам

Замечание. Интегральный признак удобен в тех случаях, когда член задан выражением, имеющим смысл не только для целых значений , но и для всех , больше единицы.

## **Знакопеременный ряд. Признак Лейбница**

Ряд называется знакопеременным, если его члены поочередно положительны и отрицательны. Ряд

где буквы обозначают положительные числа, - знакопеременный.

Признак Лейбница. Знакопеременный ряд сходится, если его члены стремятся к нулю, все время убывая по абсолютному значению. Остаток такого ряда имеет тот же знак, что и первый отбрасываемый член, и меньше его по абсолютному значению.

## **Абсолютная и условная сходимость**

**Теорема 1**. Ряд

заведомо сходится, если сходится положительный ряд

составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Остаток данного ряда по абсолютному значению не превосходит соответствующего остатка ряда (2).

Сумма данного ряда по абсолютному значению не превосходит суммы ряда (2)

Равенство имеет место только тогда, когда все члены ряда (1) – одного знака.

**Замечание 1**. Ряд (1) может сходиться и тогда, когда ряд (2) расходится.

**Пример 1**. Ряд

члены которого через два на третий отрицательный, сходится, так как сходится ряд

Составленный из абсолютных значений членов данного ряда. Сумма ряда (3) меньше суммы ряда (4).

**Пример 2**. Знакопеременный ряд

сходится несмотря на то, что ряд, составленный из абсолютных значений данного ряда, расходится.

**Определение 1**. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов (в этом случае сходится и данный ряд; ср. пример 1).

**Определение 2**. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд, составленный из абсолютных значений его членов, расходится (ср. пример 2).

**Замечание 2**. Сходящийся ряд, у которого все члены положительны или все члены отрицательны, - абсолютно сходящийся.

## **Признак Даламбера для произвольного ряда**

Положим, что в ряде

Наряду с положительными членами есть и отрицательные (или все члены отрицательные). Пусть абсолютное значение отношения имеет предел :

Тогда при ряд сходится, при расходится, при он может сходиться и расходиться. **[3]**

# **Функциональные ряды. Область сходимости**

## **Абсолютная и условная сходимость**

Функциональным рядом называется ряд

Членами которого являются функции , определенные на некотором множестве числовой оси. Например, члены ряда

Определены на интервале , а члены ряда

Определены на отрезке .

Функциональный ряд (1) называется сходящимся в точке , если сходится числовой ряд . Если ряд (1) сходится в каждой точке множества и расходится в каждой точке, множеству не принадлежащей, то говорят, что ряд сходится на множестве , и называют областью сходимости ряда.

Ряд (1) называют абсолютно сходящимся на множестве , если на этом множестве сходится ряд.

В случае сходимости ряда (1) на множестве его сумма будет являться функцией определенной на ,

Область сходимости некоторых функциональных рядов можно найти с помощью известных достаточных признаков, установленных для рядов с положительными членами, например, признака Даламбера, признака Коши.

Обозначим через n-ю частичную сумму функционального ряда (1). Если этот ряд сходится на множестве и его сумма равна , то ее можно представить в виде

где есть сумма сходящегося на множестве ряда

который называется n-м остатком функционального ряда (1). Для всех значений имеет место отношение

и поэтому

т. е. остаток сходящегося ряда стремится к нулю при , каково бы ни было .

## **Равномерная сходимость**

Пусть дан сходящийся на множестве функциональный ряд

сумма которого равна . Возьмем его n-ю частичную сумму

**Определение 1**. Функциональный ряд

Называется равномерно сходящимся на множестве , если для любого числа найдется число такое, что неравенство

будет выполняться для всех номеров и для всех из множества .

**Замечание 1**. Здесь число является одним и тем же для всех , т. е. не зависит от , однако зависит от выбора числа , так что пишут .

Равномерную сходимость функционального ряда к функции на множестве .

## **Признак Вейерштрасса**

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда дается теоремой Вейерштрасса.

**Теорема 1** (признак Вейерштрасса). Пусть для всех из множества члены функционального ряда

по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда

С положительными членами, т. е.

для всех . Тогда функциональный ряд (1) на множестве сходится абсолютно и равномерно.

**Доказательство**. Так как по условию теорему члены ряда (1) удовлетворяют условию (3) на всем множестве , то по признаку сравнению ряд сходится при любом , и, следовательно, ряд (1) сходится на абсолютно.

Докажем равномерную сходимость ряда (1). Пусть

Обозначим через и частичные суммы рядов (1) и (2) соответственно. Имеем

для всех .

Возьмем любое (сколь угодно малое) число . Тогда из сходимости числового ряда (2) следует существование номера такого, что и, следовательно, для всех номеров и для всех , т. е. ряд (1) сходится равномерно на множестве .

**Замечание 1**. Числовой ряд (2) часто называют мажорирующим, или мажорантным, для функционального ряда (1).

**Замечание 2**. Функциональный ряд (1) может сходится равномерно на множестве и в этом случае, когда не существует числового мажорантного ряда (2), т. е. признак Вейерштрасса является лишь достаточным признаком для равномерной сходимости, но не является необходимым.

## **Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов**

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают рядом важных свойств.

**Теорема 1**. Если все члены ряда

равномерно сходящегося на отрезке , умножить на одну и ту же функцию , ограниченную на , то полученный функциональный ряд

Будет равномерно сходиться на .

**Доказательство**. Пусть на отрезке ряд равномерно сходится к функции ограничена, т. е. существует постоянная такая, что

По определению равномерной сходимости ряда для любого числа существует номер такой, что для всех для всех будет выполняться неравенство

Где – частичная сумма рассматриваемого ряда. Поэтому будем иметь

Для и для любого , т. е. ряд

Равномерно сходится на к функции .

**Теорема 2**. Пусть все члены функционального ряда

непрерывны и ряд сходится равномерно на отрезке . Тогда сумма ряда непрерывно на этом отрезке.

**Доказательство**. Возьмем на отрезке две произвольные точки и . Так как данный ряд сходится на отрезке равномерно, то для любого числа найдется номер такой, что для всех будут выполняться неравенства

Где – частичные суммы ряда . Эти частичные сумм непрерывны на отрезке как суммы конечного числа непрерывных на функций . Поэтому для фиксированного номера и взятого числа найдется число такое, что для приращения , удовлетворяющего условию , будет иметь место неравенство

Приращение суммы можно представить в следующем виде:

откуда

Учитывая неравенства (1) и (2), для приращений , удовлетворяющих условию , получим

Это означает, что , т. е. сумма непрерывна в точке . Так как является произвольной точкой отрезка то непрерывна на .

**Замечание 1**. Функциональный ряд

члены которого непрерывны на отрезке , на который сходится на неравномерно, может иметь суммой разрывную функцию.

**Теорема** **3** (о почленном интегрировании функционального ряда). Пусть все члены ряда

Непрерывны, и ряд сходится равномерно на отрезке к функции . Тогда справедливо равенство

т. е. данный ряд можно почленно интегрировать в пределах от до при любых и . Полученный ряд будет сходиться равномерно по на отрезке , каково бы ни было .

**Доказательство**. В силу непрерывности функции и равномерной сходимости данного ряда на отрезке его сумма непрерывна и, следовательно, интегрируема на .

Рассмотрим разность

где .

Из равномерной сходимости рядя на следует, что для любого найдется число такое, что для всех номеров и для всех будет выполняться неравенство.

Но тогда

Итак,

для любого . Иными словами,

т. е.

Если ряд не является равномерно сходящимся, то его, вообще говоря, нельзя почленно интегрировать, т. е.

**Теорема 4** (о почленном дифференцировании функционального ряда). Пусть все члены сходящегося ряда

Имеют непрерывные производные и ряд

Составленный из этих производных, равномерно сходится на отрезке [a, b]. Тогда в любой точке справедливо равенство

т. е. данный ряд можно почленно дифференцировать.

**Доказательство**. Положим

Возьмем две любые точки и . Тогда в силу теоремы 4 будем иметь

Функция непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Поэтому, дифференцируя равенство

получим

т. е. , или

# **Степенные ряды**

## **Понятие степенного ряда**

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

или вида

где коэффициенты - постоянные.

Ряд (2) формальной заменой на сводится к ряду (1). Степенной ряд (1) всегда сходится к точке , а ряд (2) – в точке , и их сумма в этих точках равна .

**Теорема** **1** (Абель). Если степенной ряд

Сходится при , то он сходится абсолютно для всех таких, что ; если степенной ряд расходится при , то он расходится при любом , для которого .

**Доказательство**. Пусть степенной ряд

Сходится при , т. е. сходится числовой ряд

Отсюда следует, что

а значит, существует число такое, что для всех n.

Рассмотрим ряд

где , и оценим его общий член. Имеем

где . Но ряд

составлен их членов геометрической прогрессии со знаменателем , где , и значит, сходится. На основании признака сравнения ряд сходится в любой точке , для которой . Следовательно, степенной ряд абсолютно сходится .

Пусть теперь степенной ряд

расходится при . Допустим, что этот ряд сходится для . По доказанному он должен сходиться и при , так как , что противоречит условию расходимости ряда при .

Теорема Абеля дает возможность установить характер области сходимости степенного ряжа

Пусть в точке ряд сходится. Тогда ряд будет абсолютно сходиться в интервале . Если в некоторой точке (здесь ) ряд расходится, то он будет расходиться и в бесконечных интервалах () и (|). В этих условиях на оси существуют две точки (симметричные относительно начальной точки ), которые отделяют интервалы расходимости от интервала сходимости.

**Теорема 2**. Пусть степенной ряд

Сходится в точке . Тогда либо этот ряд абсолютно сходится в каждой точке числовой прямой, либо существует число такое, что ряд сходится абсолютно при и расходится при .

**Определение 1**. Интервалом сходимости степенного ряда

Называется интервал , где , такой, что в каждой точке ряд абсолютно сходится, а в точках таких, что , ряд расходится. Число называется радиусом сходимости степенного ряда.

**Замечание 1**. Что касается концов интервала сходимости , то возможны следующие три случая: 1) степенной ряд сходится в точке , так как и в точке , 2) степенной ряд расходится в обеих точках, 3) степенной ряд сходится в одном конце интервала сходимости и расходится в другом.

**Замечание 2**. Степенной ряд

где , имеет тот же радиус сходимости, что и ряд

но его интервалом сходимости является интервал

При условии существования конечного предела

Радиус сходимости степенного ряда (или ряда ) можно найти по формуле

Радиус сходимости степенного ряда можно находить также по формуле

Если существует конечный предел

## **Равномерная сходимость степенного ряда и непрерывность его суммы**

**Теорема 1**. Степенной ряд

Сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке , содержащемся в интервале сходимости ряда .

**Теорема 2**. Сумма степенного ряда

Непрерывна в каждой точке его интервала сходимости .

## **Интегрирование степенных рядов**

**Теорема 1** (о почленном интегрировании степенного ряда). Степенной ряд

Можно интегрировать почленно в его интервале сходимости , причем радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием, также равен . В частности, для любого из интервала справедлива формула

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым и при .

## **Дифференцирование степенных рядов**

**Теорема 1** (о почленном дифференцировании степенного ряда). Степенной ряд

Можно дифференцировать почленно в любой точке его интервала сходимости , , при этом выполняется равенство

**Следствие 1**. Степенной ряд

Можно почленно дифференцировать сколько угодно раз в любой точке его интервала сходимости , причем радиусы сходимости всех получаемых рядов будут равны R. **[4]**

## **Разложение функции в степенной ряд**

**Определение 1**. Будем говорить, что функция на интервале (на множестве ) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к на указанном интервале (указанном множестве).

**Утверждение 1**. Для того чтобы функция могла быть разложена в степенной ряд на интервале , необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка.

**Утверждение 2**. Если функция может быть разложена на интервале в степенной ряд, то лишь единственным образом.

В самом деле, пусть функция может быть разложена на интервале в степенной ряд . Дифференцирую этот ряд почленно раз (что заведомо можно делать внутри интервала ), получим

Отсюда при найдем

или

**Определение 2**. Степенной ряд , коэффициенты которого определяются формулой (1), называются рядом Тейлора функции .

**Утверждение 3**. Если функция может быть разложена на интервале в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции .

**Утверждение 4**. Для того чтобы функция могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале (на множестве ), необходима и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (указанном множестве). **[5]**

# **Ряд Тейлора и Маклорена**

## **Понятие ряда Тейлора и Маклорена**

Для функции , имеющей все производные до -го порядка включительно, в окрестности точки (т. е. на некотором интервале, содержащем точку ) справедлива формула Тейлора:

где так называемый остаточный член вычисляется по формуле

Если функция имеет производные всех порядков в окрестности точки , то в формуле Тейлора число можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный член стремится к нулю при

Тогда, переходя в формуле (1) к пределу при , получим справа бесконечный ряд, который называется рядом Тейлора:

Последнее равенство справедливо лишь в том случае, если при . В этом случае написанный справа ряд сходится и его сумма равна данной функции . Докажем, что это действительно так:

Где

Так как по условию , то

Но есть -я частичная сумма ряда (2); ее предел равен сумме ряда, стоящего в правой части равенства (2). Следовательно, равенство (2) справедливо:

Из предыдущего следует, что ряд Тейлора представляет данную функцию только тогда, когда . Если , то ряд не представляет данной функции, хотя может и сходиться (к другой функции).

Если в ряде Тейлора положим , то получим частный случай ряда Тейлора, который называют рядом Маклорена:

Если для какой-нибудь функции формально написан ряд Тейлора, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

## **Примеры разложения функция в ряды**

Разложение функции в ряд Маклорена.

Так как , получаем разложение в ряд Маклорена:

Так как остаточный член стремится к нулю при любом , то данный ряд сходится и имеет в качестве суммы функцию при любом .

Разложение функции в ряд Маклорена.

так как было доказано, что для любого . Следовательно, для значений ряд сходится и представляет функцию .

Разложение функции в ряд Маклорена.

при всех значениях ряд сходится и представляет функцию . **[6]**

## **Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами**

**Теорема 1** (теорема Вейерштрасса). Если функция неперерывна на сегменте , то существует последовательность многочленов , равномерно на сегменте сходящаяся к , т. е. для любого найдется многочлен с номером , зависящим от , такой, что

Сразу для всех из сегмента .

Иными словами, непрерывную на сегменте функцию можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью . **[5]**

1. **Дифференциальные уравнения**

# **Понятие дифференциального уравнения**

Решение различных задач математики, физики, химии и других наук приводит часто к уравнениям, связывающим независимую переменную, искомую функцию и её производные. Такие уравнения называют ***дифференциальными***.  
 ***Решением*** дифференциального уравнения (ДУ) называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.  
 Наибольший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.  
 Например, дифференциальное уравнение имеет третий порядок, а уравнение – первый порядок.  
 Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием***.

# **Дифференциальные уравнения первого порядка**

***Дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение вида

в котором — независимая переменная, — неизвестная функция. ***Дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***, называется уравнение

Правую часть этого уравнения будем считать определенной на некотором открытом множестве плоскости . Иногда его записывают в виде

и называют ***уравнением первого порядка, записанным в дифференциалах***. ***Решением*** уравнения (2) (или (3)) на интервале оси называется любая дифференцируемая функция , которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на I. ***Общим решением*** уравнения (2) называется множество всех его решений. Общее решение зависит от одной произвольной постоянной и дается формулой

Выражение вида

из которого y определяется неявно как функция от x **называется *общим интегралом*** уравнения (2). Решить уравнение (2) означает найти его общее решение или общий интеграл. При этом предпочтение, как правило, отдается более компактной записи ответа.   
 Формы записи уравнения в виде (2) или (3) равносильны и из одной записи можно получить другую. Однако, в некоторых случаях, форма записи (3) оказывается предпочтительнее, так как в нее переменные и входят симметрично. Поэтому, если независимую переменную и искомую функцию поменять местами (разрешить уравнение относительно ), то общее решение полученного уравнения определит общий интеграл уравнения (2).

Рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условию

Условие (6) называется ***начальным условием***, а сама поставленная задача — ***задачей Коши***. Любое решение уравнения (2) определяет на множестве D некоторую кривую, которую называют ***интегральной кривой*** уравнения. Поэтому, геометрический смысл задачи Коши состоит в том, чтобы найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку . Чтобы решить задачу Коши, нужно подставить начальное условие (6) в (4) или (5) и определить оттуда значение , при котором точка лежит на искомой интегральной кривой. Тогда решение задачи Коши запишется в виде или

# **Дифференциальные уравнения высших порядков**

Дифференциальным уравнением -го порядка называется уравнение

где — независимая переменная, — искомая функция, а функция определена и непрерывна на некотором открытом множестве   
-мерного пространства своих аргументов.  
 Решение уравнения (7) на некотором интервале I действительной оси определяется как раз непрерывно дифференцируемая функция такая, что для всех точка и при подстановке которой в (7) это уравнение превращается в тождество. *Общим решением* уравнения (7) называется функция

где — произвольные постоянные, которая при любом фиксированном наборе этих постоянных определяет решение уравнения. Если общее решение задано неявно соотношением

то (9) называется ***общим интегралом*** уравнения (7).  
 Чтобы поставить для уравнения (7*)* ***задачу Коши***, позволяющую выделить конкретное решение из всей бесконечной совокупности решений, определенных формулой (8) или (9), нужно, в отличие от уравнения первого порядка, задать не одно условие , а добавить к этому условию еще значения производных искомой функции в точке до порядка включительно. Поэтому, задача Коши для уравнения (7) ставится следующим образом: найти решение уравнения (7), удовлетворяющее следующим (начальным) условиям:

где произвол в выборе чисел определяется тем, что точка

Для решения задачи Коши нужно подставить условия (8) (или (9)) в (10) и определить постоянные , удовлетворяющие уравнениям, полученным в результате такой подстановки. Условия существования и единственности задачи Коши формулируются, как правило, для уравнения (7), разрешенного относительно старшей производной искомой функции. Само же уравнение (7), как будет видно из приведенных примеров, иногда имеет несколько серий решений. Поэтому на вопросе существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (7) мы не останавливаемся.

# **Решение уравнений с помощью рядов**

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.   
 Пусть, например, требуется решить уравнение

удовлетворяющее начальным условиям

# **Способ последовательного дифференцирования**

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда Тейлора:

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (2). Подставив в уравнение (1) значения , находим третий коэффициент: . Значения находим путем последовательного дифференцирования уравнения (1) по и вычисления производных при . Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (3). Ряд (3) представляет искомое частное решение уравнения (1) для тех значений Ш, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения (1).  
 Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (1), если и , рассматривать как произвольные постоянные.  
 Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

**Пример 1.** Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

Будем искать решение уравнения в виде

Здесь Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

При имеем:

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

# **Способ неопределенных коэффициентов**

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

с начальными условиями.   
 Предполагая, что коэффициенты и свободный член разлагаются в ряды по степеням, сходящиеся в некотором интервале , искомое решение ищем в виде степенного ряда

с неопределенными коэффициентами.  
 Коэффициенты и определяются при помощи начальных условий .

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (65.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции у и ее производных в уравнение (4), заменив в нем их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (5) сходится в том же интервале и служит решением уравнения (4).

**Пример 1**. Найти решение уравнения

используя метод неопределенных коэффициентов.

Разложим коэффициенты уравнения в степенные ряды:

Ищем решение уравнения в виде ряда

Тогда

Из начальных условий находим:. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях :

Отсюда находим, что, Таким образом, получаем решение уравнения в виде

Т.е.

Рассмотрим вопрос о приближенном решении задачи Коши

Здесь функцию будем считать аналитической в окрестности точки , то есть, раскладывающейся в сходящийся ряд по степеням . Тогда решение поставленной задачи также будет аналитической функцией и ее можно разложить в ряд в окрестности точки . Поэтому решение можно искать в виде ряда .

**Пример 2.** Найти с точностью до решение задачи Коши

Решение. Будем искать решение в виде ряда

Из начального условия следует, что . Подставив в исходное уравнение , получим . Но , следовательно,

Подставив этот ряд в уравнение (5.2), получим

Нам необходимо обратить дробь в правой части полученного тождества, т.е. представить ее в виде ряда , причем, поскольку в левой части равенства (5.3) максимальная степень — это , достаточно ограничиться вычислением коэффициентов до четвертой степени. Таким образом, мы получаем равенство

в котором коэффициенты нужно искать из условия

Ясно, что свободный член . Приравняв в тождестве (5.5) коэффициенты при , получим , откуда . Подставив это в соотношение (5.4), найдем , следовательно, .  
 Теперь приравняем в (5.5) коэффициенты при , откуда и . Подставим найденное значение в (5.4) и приравняем коэффициенты при . Найдем , откуда .

Действуя аналогично, приравняем в тождестве (5.5) коэффициенты при и найдем, что . Подставим это значение в (5.4) и приравняем коэффициенты при . Получим, что . Наконец, и . Таким образом, с точностью до решение задачи (5.2) имеет вид

Эту задачу можно было решать и по-другому. Мы нашли , . Теперь продифференцируем наше уравнение по :

.

Подставим и получим . Следовательно, . Далее,

откуда , а Продолжая аналогично, можно найти коэффициенты и . **[7]**

# **Уравнение Бесселя**

Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение вида

Решение этого уравнения, как и некоторых других уравнений с переменными коэффициентами, следует искать не в форме степенного ряда, а в виде произведения некоторой степени на степенной ряд:

Коэффициент мы можем считать отличным от нулю ввиду неопределенности показателя .

Перепишем выражение (2) в виде

и найдем его производные:

Подставим эти выражения в уравнения (1):

Приравнивая нулю коэффициенты при в степени , получаем систему уравнений

Рассмотрим равенство

Его можно переписать так:

По условию ; следовательно,

Поэтому или .

Рассмотрим сначала решение в случае .

Из системы уравнений (3) последовательно определяются все коэффициенты ; остается произвольным. Положим, например, . Тогда

Придавая различные значения , найдем и вообще ,

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (2), получим

Все коэффициенты определяются, так как при всяком коэффициент при в уравнении (3)

Будет отличен от нуля.

Таким образом, является частным решением уравнения (1).

Установим далее условия, при которых и при втором корне определяется все коэффициенты . Это будет, если при любом целом четном положительном выполняются неравенства

Или

Но , следовательно,

Таким образом, условие (6) в этом случае эквивалентно следующему:

Где -целое четное положительное число. Но

Следовательно,

Таким образом, если не равно целому числу, то можно написать второе частное решение, которое получается из выражения (5) заменой на :

Степенные рядя (5) и () сходятся при всех значениях , что легко обнаружить на основании признака Даламбера. Также очевидно, что и линейно независимы.

Решение , умноженное на некоторую постоянную, называется функцией Бесселя первого рода -го порядка и обозначается символом . Решение обозначают символом .

Таким образом, при , не равном целому числу, общее решение уравнения (1) имеет вид

Так, например, при ряд (5) будет иметь вид

Это решение, умноженное на постоянный множитель , называется бесселевой функцией ; заметим, что в скобках стоит ряд, сумма которого равна . Следовательно,

Точно так же, пользуясь формулой (), получим

Общий интеграл уравнения (1) при будет

Пусть далее, есть целое число, которое обозначим через . Решение (5) в этом случае будет иметь смысл и является первым частным решением уравнения (1).

При целом бесселева функция определяется рядом (5), умноженным на постоянный множитель (а при умноженным на 1):

То частное решение:

Подставляя в это выражение (1), мы определим коэффициенты .

Функция – функция Бесселя второго рода -го порядка.

Общий интеграл будет иметь вид

При , .

**Пример 1**. Найти решение Бесселя при

удовлетворяющее начальным условия: при

**Решение**. На основании формулы (7) находим одно частное решение:

Пользуясь этим решением, можно написать решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, а именно:

**Замечание**. Если бы нам нужно было найти общий интеграл данного уравнения, то мы стали бы искать второе частное решение в форме

Эта функция, умноженная на некоторый постоянный множитель, называется функцией Бесселя второго рода нулевого порядка. **[10]**

1. **Практическая часть**

**Пример 1.** ,

Заметим, что , а при выполняются неравенства

*,*

так как при . Поэтому ряд сходится поточечно на .

Пусть , тогда при и

*,*

откуда следует неравномерный характер сходимости.

Построив графики частичных сумм и суммы ряда, видим, что с увеличением номера частичные суммы все больше укладываются в коридор вокруг суммы. Представленные рисунки и дают представление о своеобразном характере нарушения равномерности. Хотя по каждой вертикали, в отдельности взятой, точки последовательных частичных сумм с возрастанием приближаются к сумме ряда, но ни одна кривая частичной суммы в целом не примыкает к сумме ряда на всем рассматриваемом отрезке.

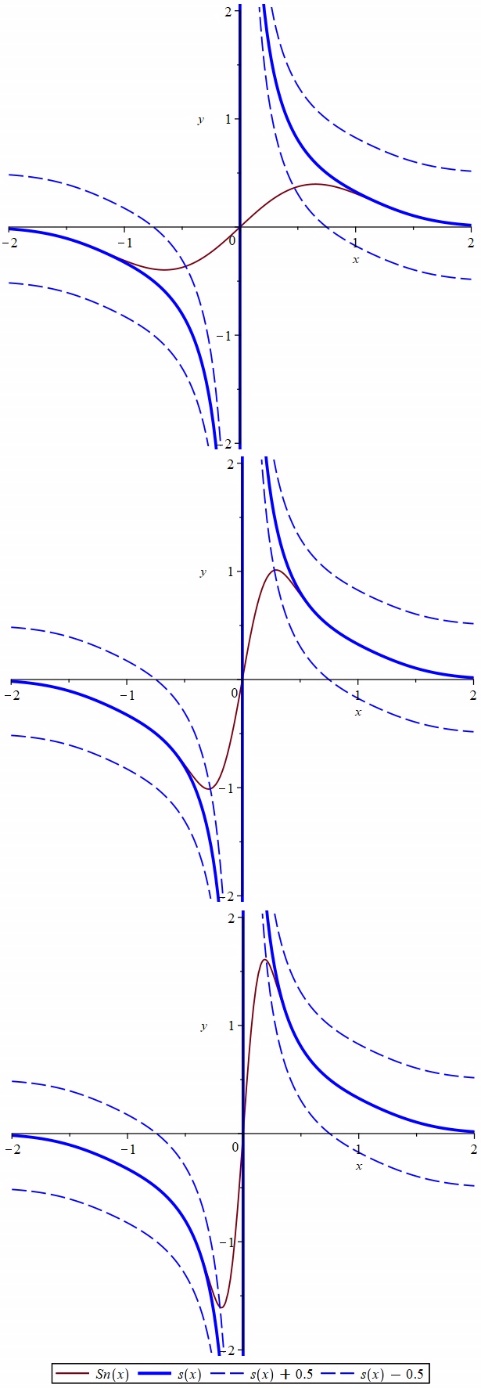


Рисунок – Графики – суммы ряда , функций и частичных сумм

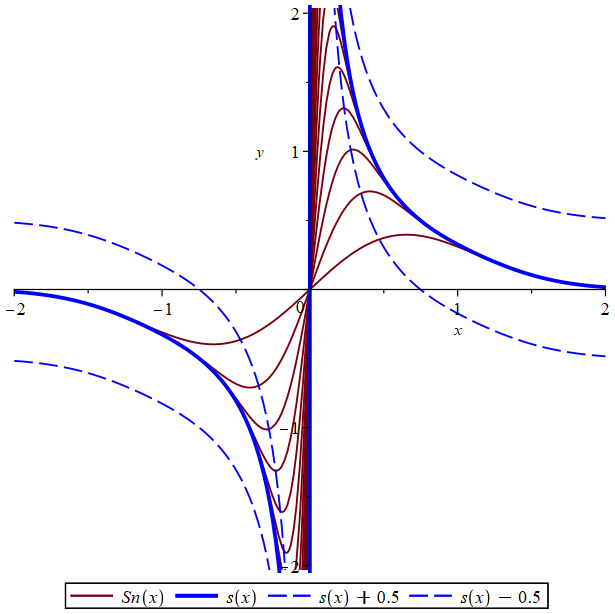
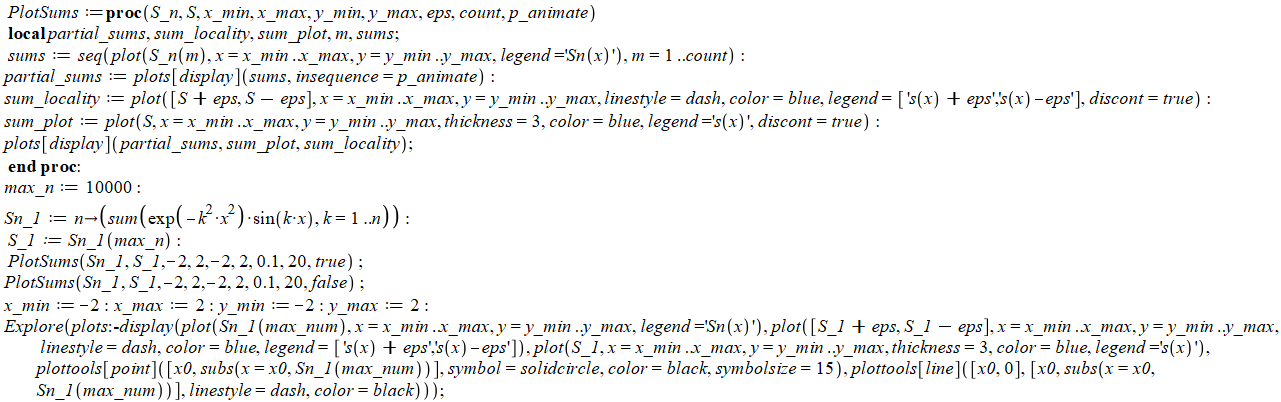


Рисунок – Графики – суммы ряда функций и частичных сумм

Рассмотрим разные значения при фиксированном и с помощью команды Explore в Maple подберем для каждого соответствующий номер , начиная с которого частичные суммы попадают в трубу шириной около суммы ряда для демонстрации поточечной сходимости (см. рисунок).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Рисунок – Графики, демонстрирующие поточечную сходимость ряда



Листинг – Код примера 1

**Пример 2.** .

Обозначим . Тогда . Степенной ряд сходится, если , и расходится, если . Следовательно, исходный ряд сходится, если , т. е. при , и расходится при . Таким образом, радиус сходимости ряда . Заметим, что для нахождения также можно воспользоваться формулой Коши-Адамара:

*.*

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. В точках получаем расходящиеся ряды и . Таким образом, областью сходимости исходного ряда является промежуток ).

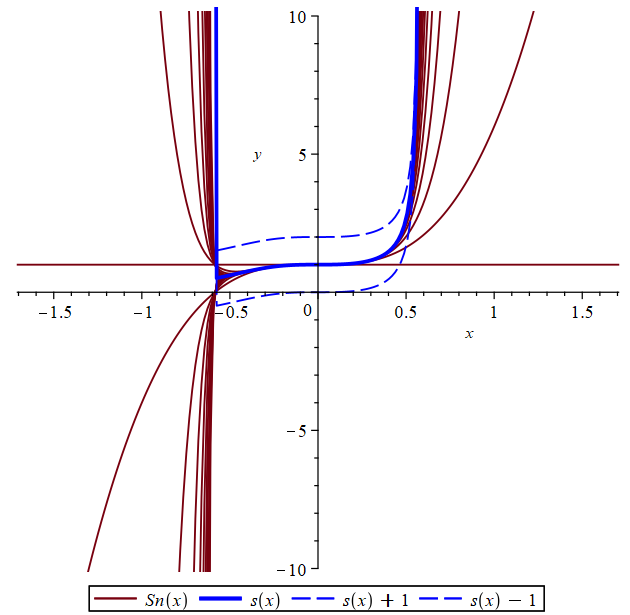
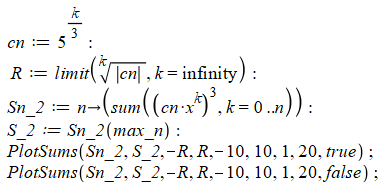
**

Рисунок – Графики – суммы ряда функций и частичных сумм

**

Листинг – Код примера 2

**Пример 3.** Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки .

Представим функцию как . Преобразуем функцию к виду и воспользуемся разложением этой функции в ряд Маклорена:

*.* Данное разложение имеет место для всех , удовлетворяющих неравенству

*,* т. е. *.*

Применим почленное дифференцирование к ряду

на промежутке *:*

*,* или *.*

Тогда.

Исследуем поведение полученного ряда на концах интервала сходимости. Подставими получим числовой ряд *.*

Поскольку необходимое условие сходимости числового ряда нарушается (), рядрасходится*.* Поэтому ряд *,* полученный умножением расходящегося ряда на число *,* тоже расходится.

Приполучим числовой ряд

*,*

который расходится в силу достаточного условия расходимости ряда.

Таким образом, *.*

**Пример 4.** .

При разложении рациональных функций в ряд Тейлора удобно использовать их разложение на элементарные дроби. Представим в виде суммы элементарных дробей:

*.*

Отсюда находим

*.*

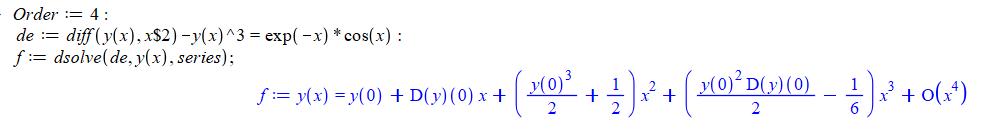
Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях *,* получим систему уравнений, из которой найдем *, ,* . Тогда

*.*

Используя известные разложения *и ,* получим

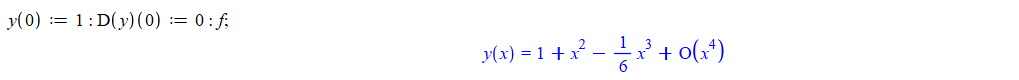
*.*

**Пример 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения

, в виде разложения в степенной ряд до 4-го порядка. Найти разложение при начальных условиях: . **[11]** ****

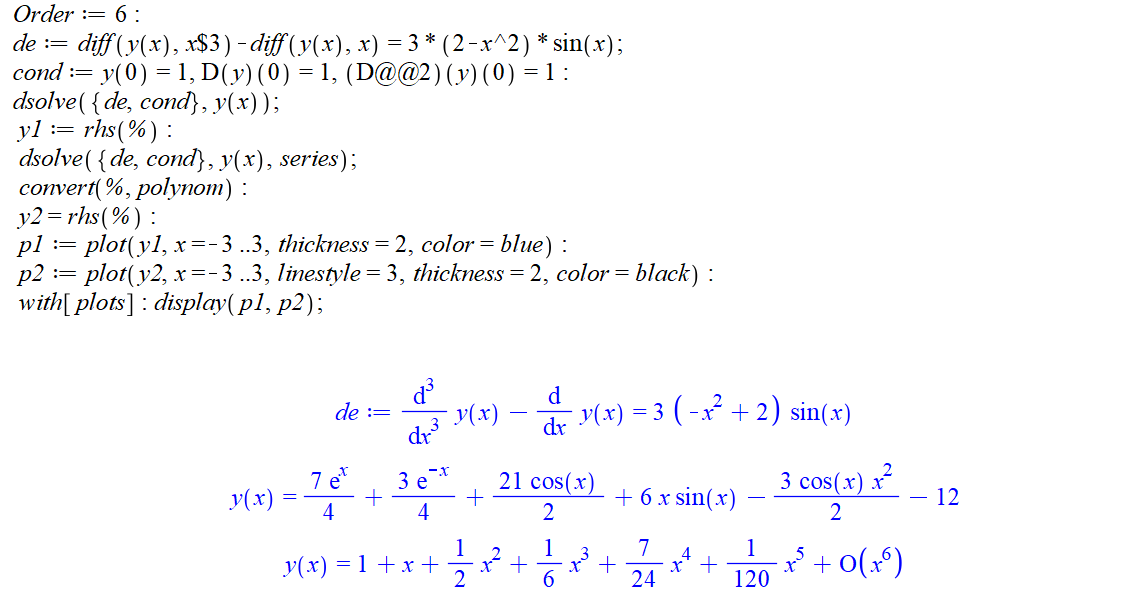
Листинг - Код примера 5

**Замечание**. В полученном разложении запись обозначает производную в нуле: . Для нахождения частного решения осталось задать начальные условия:

****

Листинг – Код примера 5

**Пример 6**. Найти приближенное решение в виде степенного ряда до 6-го порядка и точное решение задачи Коши:



Листинг – Код примера 6

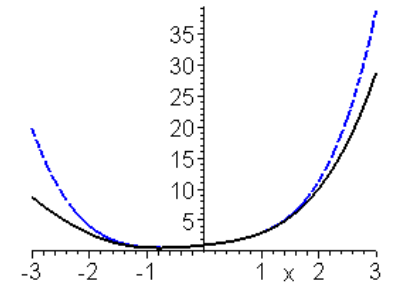


Рисунок – Графики и

На рисунке видно, что наилучшее приближение точного решения степенным рядом достигается примерно на интервале .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Цели, поставленные в курсовой работе, полностью достигнуты, решены следующие задачи:

1. Определены основные понятия, связанные с рядами и дифференциальными уравнениями.
2. Рассмотрен метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
3. Решены задачи по данной теме.
4. Подобраны и визуализированы с помощью системы компьютерной алгебры Maple примеры для более наглядного представления, облегчающие понимание и усвоение рассмотренных понятий.

В данной курсовой работе изучен и систематизирован материал для применения его студентами во время самостоятельного изучения метода интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Рассмотрены понятия ряда и дифференциальных уравнений. Проведены приближенные вычисления с помощью рядов. Работа может быть использована в качестве учебно-методического пособия для студентов технических и математических специальностей.

Система Maple как нельзя лучше подходит для визуализации абстрактных математических понятий, которая применяется в современных методах обучения. Ее возможности позволяют творчески подходить к решению поставленных задач, проверять графически найденное решение и применять полученные теоретические знания на практике, при этом не требуя специализированных знаний в области программирования.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

[1] Виленкин Н. Я., Цукерман В. В., Доброхотова М. А. Сафонов А. Н*.* Ряды. — М.: Просвещение, 1982. — 160 с.

[2] Воробьев Н. Н. Теория рядов. — 4-е изд. — М.: Наука, 1979. — 408 с.

[3] Выгодский М. Я.Справочник по высшей математике. — 12-е изд.. — М.: Наука, 1977. — 872 с.

[4] Краснов М. Л., Киселев А. И.,Макаренко Г. И., и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 3. - М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2005. - 240 с.

[5] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ, ч. 2, изд. 3, ред. А. Н. Тихонов. М.: Проспект, 2004. – 358 с.

[6] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2 т. — Изд. 13-е. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — Т. 1. — 432 с.

[7] Киясов С. Н., Шурыгин В. В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ, МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ Казань: Казанский федеральный университет, 2011. – 112 с.

[8] Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс-М.: Айрис-пресс. – 2006.

[9] Maplesoft Online Help System [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.maplesoft.com/support/help/index.aspx. – Дата доступа: 10.09.2023.

[10] Яблонский А. И., Кузнецов А. В., Шилкина Е. И. и др. Высшая математика: Общий курс: Учебник. - М.: Высш. шк., 2000.- 351 с.

[11] Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2004. - 464 с.