线性空间与线性变换杂谈

摘要：线性空间与线性变换是高等代数两个核心概念，本文主要介绍为何引入线性空间与线性变换，它们各自的概念，性质，优点，及应用。

关键词：线性空间；线性变换；引入；概念；优点；应用

1 线性空间

1.1 引入

现代数学有三个主流方向：分析，代数，几何。在这三个方向之中，代数学是研究各种抽象化的结构的数学分支，因此抽象结构是代数学的本质。

高等代数作为代数学的基础课程，它很好地扮演了一个引路人的角色。它从最最基本的一个具体问题（线性方程组）引入，一步一步的阐述了向量，行列式和矩阵的概念，到这里我们已经完成了一定意义上的抽象，因为解方程的具体过程以及不再是单调的消元移项，而是转变成了向量，矩阵以及行列式的运算。在进行大量的向量矩阵运算的同时，我们发现一个很重要的共性：加法以及数量乘法这两个运算能保持运算结构的稳定性，拿矩阵来讲，两个相同维数的矩阵相加维数保持不变，一个数与一个矩阵相乘矩阵的维数保持不变，对于向量运算同理。既然这两种运算具有如此好的特性，我们就忍不住考虑这样一个问题，这两种运算是否对其他所有集合都具有类似的稳定性，由此我们引入了线性空间，这是数学系所接触的第一个抽象的代数结构。

1.2 概念及性质

简单来讲，线性空间（linear space）就是在一个集合上定义了两种运算：加法与数量乘法，并且这两种运算是封闭的，除此之外，加法与数量乘法还应满足8条运算法则。

当然，运用线性空间的八条运算法则还能够推出线性空间一些比较好的性质，比如零向量唯一，每一个向量的负向量是唯一的，kα=0当且仅当k=0或者α＝0等等。

但是这些性质都只是线性空间的冰山一角，仅仅通过它们，我们无法看到线性空间的全貌。为了解析线性空间的结构，类似于线性方程组的基础解析，我们引入了基与维数的概念。在线性空间内选定一组向量基（basis）之后，线性空间中的元素就可以由这组基线性表示，因此有时也把线性空间称为向量空间。这组向量组的秩（rank）被称为线控空间的维数（dimension）。有了基与维数，搭建线性空间的材料就已经全部都有了，接下来只需把它们组装起来即可。因此，基与维数是线性空间结构的核心。

到这里我们已经把整个线性空间的体系搭建起来了，但是单单用基来构建线性空间有一个致命的缺陷，就是你每次只能一块砖一块砖的构建，有时候这并不是很高效。举个例子，你想建一栋房子，首先要做的就是采购原料，比如砖块瓦片等等，但是供应商很奇怪，他每次只提供整面的墙，这时候你有两种选择，选择一，把墙拆成一块一块的砖，再来搭建房子。选择之二，分析一下这面墙的性质，比如它的长度高度是否合适，它的形状怎么样，如果都符合条件的话，直接用来搭建房子即可。当然这个例子有些奇怪，但是它反映了这样一个问题，有时候直接用这一个个模块（墙）来搭建线性空间（房子）会更加省力，这样我们就引入了线性子空间的概念，它是线性空间的一个子集，并且它关于加法和数乘封闭。

线性子空间的性质分为两方面来考虑：内部与外部。从内部看，它本身也是一个空间，所以也是由向量基构建而成，这一组基的秩称为线性子空间的维数。下面来考虑外部性质，由于子空间是线性空间的子集，那么各个子集之间又是否具有联系呢？答案是肯定的，两个子空间的交还是子空间，两个子空间的和还是子空间，并且还有一个很重要的维数公式：设W1，W2是线性空间V的子空间，则dimW1 + dimW2 = dim（W1∩W2）+dim（W1+W2）。这一公式进一步阐释了线性子空间之间的关系。除此之外，由于子空间和运算的特殊性，我们又进一步引入了直和的概念，简单来讲就是这两个子空间的向量基的交集为空，即他们的向量基都是各自特有的，如果将这两者进行和运算，那么维数公式就变得格外的简单：dimW1 + dimW2 = dim(W1 + W2)。到这里线性子空间的概念就很完善了，线性空间内部结构的分析也就结束了。

2 线性变换

2.1 引入

从小学我们就开始接触函数：y = f（x），函数简单来讲就是一种映射关系，它将A集合中的元素唯一的对应到B集合中的一个元素，如果这种映射关系不是在数与数之间，那么它就是一个映射。现在我们引入了线性空间，也剖析了线性空间内部的结构，自然就会考虑是否存在一种线性空间V与线性空间W之间的简单映射，即线性空间的外部特性。仿照线性空间中加法和数乘的定义，我们引入了线性映射以及线性变换这一概念。

2.2 概念及其性质

简单来讲，线性映射（linear transformation）是从一个线性空间V到另一个线性空间W的映射，这个映射保持加法运算和数量乘法运算，线性变换（linear mapping）是从一个线性空间V到V的映射，这个映射保持加法运算和数量乘法运算，。

从定义上看线性变换比线性空间来的简洁许多，但是它的内部结构却要比线性空间复杂许多。本质上线性空间是一个静态的东西，线性变换是一个动态的东西，动的东西往往复杂多变，这也许就是线性变换的困难所在。为了降低我们研究线性变换难度，我们将它与矩阵联系起来，引入了线性变换在某组基下矩阵的概念。可惜的是，线性变换在不同基下的矩阵并不是相同的，也就是线性变换与矩阵之间并不是一一对应的关系，但是各个矩阵之间还是有一定联系，它们是相似的。进一步通过分析，线性变换的和对应于矩阵的和，线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积，线性变换的乘积对应于矩阵的乘积等等。这进一步说明我们的这种等价转换是很有效的。

接下来我们仿照矩阵中的特征值和特征向量的概念来研究线性变换的特征值和特征向量，具体的含义就是线性变换作用在某一特征向量上之后得到的新向量与原来的特征向量线性相关。他们之间的比例系数称为特征值。为了寻找线性变换T的特征值与特征向量，我们还是得回到它在某一组基（α1，α2，α3,…,αn）下的矩阵A的特征值和特征向量，相关证明表明，T的特征值＝A的特征值，T属于λ的特征向量在α1，α2，α3,…,αn下的坐标＝A属于λ的特征向量，这样就很好地解决了线性变换特征值和特征向量的问题。

再回到线性变换的概念，我们是否能够对它做一些修改来得到更好的性质？线性空间有一个很重要的特性，那就是它能够将加法和数量乘法保持在原先那个集合内，子空间也有这样的性质。那么如果对线性变换的所对应的对象加上限制，即对于某一特定的线性变换T，以及某一个特定的线性空间V，是否存在一个V的一个子集，对于T这一线性运算保持封闭性，由此我们引入不变子空间的概念。最平凡的不变子空间是零空间以及V本身（线性变换的定义），比较特殊的有值域，核，以及特征子空间这三个不变子空间，它们的引入都是针对某一特定问题，前两者是针对线性方程组的解，后一种是针对特征值与特征向量。

3 线性变换与线性变换的优点及应用

线性空间最重要的优点就是它很简洁，很自然，而且适用面很广，在我们接触过的集合之中，有相当一部分在定义加与数量乘法之后就构成了线性空间，比如连续函数全体，多项式全体，矩阵全体等等。而对于线性变换也同理，我们所最最熟悉的函数y=ax就是线性变换最经典的例子。但需要注意的是，y＝ax+b并不是线性变换。除此之外，幂等变换，求导也是线性变换。

线性空间及线性变换在许多学科中都有大量的直接或间接的应用，在这我仅仅举一个在图形处理中的简单应用。

在平面解析几何之中，对图形最最重要的两种变换便是平移和旋转，平移不是线性变换，但旋转是线性变换。

在线性空间，把平面围绕原点按逆时针方向旋转θ角的变换记为R（θ），中任意一个向量x = 的旋转变换R（θ）可表示为



假设 v点的坐标是(x, y) ，那么可以推导得到 点的坐标为

旋转变换有一个相当好的性质，那就是旋转前后图形的长度和角度都不会发生变化，进一步，旋转前后的图像保持全等,利用这个性质，我们可以变换前后图形除了位置之外不发生改变。

4 总结

线性空间与线性变换作为两个最基本的概念，它们在代数学体系中扮演着重要地位。比如线性空间本质上就是抽象代数结构，在之后的抽象代数课程之中，我们还会陆陆续续接触群环域模等概念，它们也都是在一定空间上满足某种运算性质的集合。为了之后学习的更好进行，我们必须牢固掌握线性空间与线性变换的概念。