Computer Version final project theory

姓名：龙浩然　　学号：200111524

2023 年 6 月 25 日

首先，设卷积层输入特征图为 X，卷积核为 W，输出特征图为 Y；设池化层的输入特征图为 X，输出特征图为 Y；误差损失函数为 L。

1　卷积层

1.1　前向传播

$$Y_{i,j} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} X_{i+m,j+n}W_{m,n} + b$$

其中，M 和 N 分别为卷积核的高度和宽度。

由于输入特征 3×3，卷积核与池化核尺寸为 2×2，所以有：

$$Y_{0,0} = \Sigma(X[0:2,0:2]\cdot W) + b \tag{1}$$
$$Y_{0,1} = \Sigma(X[0:2,1:3]\cdot W) + b \tag{2}$$
$$Y_{1,0} = \Sigma(X[1:3,0:2]\cdot W) + b \tag{3}$$
$$Y_{1,1} = \Sigma(X[1:3,1:3]\cdot W) + b \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

最后使用激活函数（ReLU）：

$$Y = active(Y)$$

1.2　反向传播

已知 $Y = X * W + b$，输出梯度为 $\frac{\partial L}{\partial Y}$。

先求输入梯度

根据链式求导法则可知：

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X}$$

所以：

$$\frac{\partial L}{\partial X_{i,j}} = \sum_{p=0}^{H-M}\sum_{q=0}^{W-N}\frac{\partial L}{\partial Y_{p,q}}\cdot W_{i-p,j-q}$$

其中，H 和 W 分别为输入特征图的高度和宽度。

所以，针对本次题目要求的 3×3 特征图，有：

$$y_{0,0}=x_{0,0}w_{0,0}+x_{0,1}w_{0,1}+x_{1,0}w_{1,0}+x_{1,1}w_{1,1}+b \tag{6}$$
$$y_{0,1}=x_{0,1}w_{0,0}+x_{0,2}w_{0,1}+x_{1,1}w_{1,0}+x_{1,2}w_{1,1}+b \tag{7}$$
$$y_{1,0}=x_{1,0}w_{0,0}+x_{1,1}w_{0,1}+x_{2,0}w_{1,0}+x_{2,1}w_{1,1}+b \tag{8}$$
$$y_{1,1}=x_{1,1}w_{0,0}+x_{1,2}w_{0,1}+x_{2,1}w_{1,0}+x_{2,2}w_{1,1}+b \tag{9}$$

针对特征图中的 $x_{0,0},x_{0,2},x_{2,0},x_{2,2}$ 这类四角的点，以 $x_{2,2}$ 为例，有 $\frac{\partial L}{\partial x_{2,2}}=\frac{\partial L}{\partial Y_{1,1}}w_{1,1}$

针对特征图中的 $x_{0,1},x_{1,0},x_{1,2},x_{2,1}$ 这类四边的点，以 $x_{1,0}$ 为例，有 $\frac{\partial L}{\partial x_{1,0}}=\frac{\partial L}{\partial Y_{0,0}}w_{1,0}+\frac{\partial L}{\partial Y_{1,0}}w_{0,0}$

针对中心的 $x_{1,1}$ 点，有 $\frac{\partial L}{\partial x_{1,1}}=\frac{\partial L}{\partial Y_{0,0}}w_{1,1}+\frac{\partial L}{\partial Y_{0,1}}w_{1,0}+\frac{\partial L}{\partial Y_{1,0}}w_{0,1}+\frac{\partial L}{\partial Y_{1,1}}w_{1,0}$

接下来求权重梯度

根据链式求导法则可知：$\frac{\partial L}{\partial W}=\frac{\partial L}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial W}$ 也即：

$$\frac{\partial L}{\partial W_{i,j}}=\sum_{p=0}^{H-M}\sum_{q=0}^{W-N}\frac{\partial L}{\partial Y_{p,q}}\cdot X_{i+p,j+q}$$

所以，针对题目要求的 3×3 特征图，有：

$$\frac{\partial L}{\partial w_{0,0}}=\frac{\partial L}{\partial y_{0,0}}\cdot x_{0,0}+\frac{\partial L}{\partial y_{0,1}}\cdot x_{0,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,0}}\cdot x_{1,0}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,1}}\cdot x_{1,1} \tag{10}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_{0,1}}=\frac{\partial L}{\partial y_{0,0}}\cdot x_{0,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{0,1}}\cdot x_{0,2}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,0}}\cdot x_{1,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,1}}\cdot x_{1,2} \tag{11}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_{1,0}}=\frac{\partial L}{\partial y_{0,0}}\cdot x_{1,0}+\frac{\partial L}{\partial y_{0,1}}\cdot x_{1,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,0}}\cdot x_{2,0}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,1}}\cdot x_{2,1} \tag{12}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_{1,1}}=\frac{\partial L}{\partial y_{0,0}}\cdot x_{1,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{0,1}}\cdot x_{1,2}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,0}}\cdot x_{2,1}+\frac{\partial L}{\partial y_{1,1}}\cdot x_{2,2} \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

可以简化为：

$$\frac{\partial L}{\partial W}=X\cdot Y$$

最后求偏置梯度

根据链式求导法则可知 $\frac{\partial L}{\partial b}=\frac{\partial L}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial b}$，因为 b 只是一个标量，所以得到 $\frac{\partial L}{\partial b}=\Sigma\frac{\partial L}{\partial Y}$

也即：

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\sum_{i,j}\frac{\partial L}{\partial Y_{i,j}}$$

由于已知输入特征 3×3，卷积核与池化核尺寸为 2×2，所以有：

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\frac{\partial L}{\partial Y_{0,0}}+\frac{\partial L}{\partial Y_{0,1}}+\frac{\partial L}{\partial Y_{1,0}}+\frac{\partial L}{\partial Y_{1,1}}$$

2 池化层

2.1 前向传播

$$Y_{i,j} = \max_{m=0}^{M-1} \max_{n=0}^{N-1} X_{i+m,j+n}$$

其中，M 和 N 分别为池化核的高度和宽度。

由于卷积层输出为 2×2，池化核大小也为 2×2，所以：

$$Y_{0,0} = \max_{i=0}^{1} \max_{j=0}^{1} X_{i,j} \tag{15}$$

2.2 反向传播

池化层的特点是无参数操作，所以在反向传播过程中，总是将输出梯度传导到最大值所对应的位置（maxpooling）

$$\frac{\partial L}{\partial X_{m,n}} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Y_{i,j}}, & \text{if } X_{m,n} = \max_{m=0}^{M-1} \max_{n=0}^{N-1} X_{m,n} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

由于已知卷积层输出、池化核大小均为 2×2：

$$\frac{\partial L}{\partial X_{m,n}} = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Y_{i,j}}, & \text{if } X_{m,n} = \max_{m=0}^{1} \max_{n=0}^{1} X_{m,n} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, m \in \{0,1\}, n \in \{0,1\}$$