Proračunska aerodinamika

Nedelja 6

A. Simonović & J. Svorcan

Mašinski fakultet, Katedra za vazduhoplovstvo

2023/2024.

Sadržaj

Numeričke metode za PDJ

PDJ opisuju ponašanje promenljive (funkcije u) u kontinualnoj sredini, što znači da u svakoj tački sredine fja u ima odredjenu vrednost.
Broj nepoznatih jednak je broju tačaka sredine, odnosno beskonačan je.
Suština numeričkih metoda je beskonačno mnogo nepoznatih svesti na konačan broj približno poznatih veličina.
U zavisnosti od toga kako se vrši svodjenje razlikuju se različiti numerički metodi. Neki od najzastupljenijih:

- metod konačnih razlika (MKR ili FDM),
- metod konačnih zapremina (MKZ ili FVM),
- metod konačnih elemenata (MKE ili FEM),
- ...

Upotreba PDJ

Inženjerske oblasti u kojima srećemo PDJ:

- Mehanika fluida (strujanje gasova i tečnosti u cevovodima, opstrujavanje letelica ili automobila, sagorevanje, morske struje, strujanje krvi, atmosferske pojave, zagadjenje vazduha, hladjenje/grejanje opreme, itd),
- Mehanika elastičnih tela (ponašanje strukture pod dejstvom opterećenja, elastičnost/plastičnost, vibracije, mehanika loma, itd),
- Prostiranje akustičnih ili elektromagnetnih talasa,
- Prenos toplote i mase, ...

Mnogo su složenije od ODJ. Za pravilno korišćenje potrebno je znati šta se dešava "unutar" kodova. Mogućnosti su velike ...

Metod konačnih razlika

Kod metoda konačnih razlika – MKR, rešava se diferencijalni oblik PDJ.

Kontinualni domen delimo (preslikavamo) na proračunski mrežu, a potom odredjujemo vrednosti nepoznate funkcije u u čvorovima (tačkama) proračunskog domena.

Aproksimacija parcijalnih izvoda direktno proizilazi iz definicije izvoda:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t)}{\Delta t}.$$

Načelno, aproksimacija je bolja (tačnija) za manje Δt.

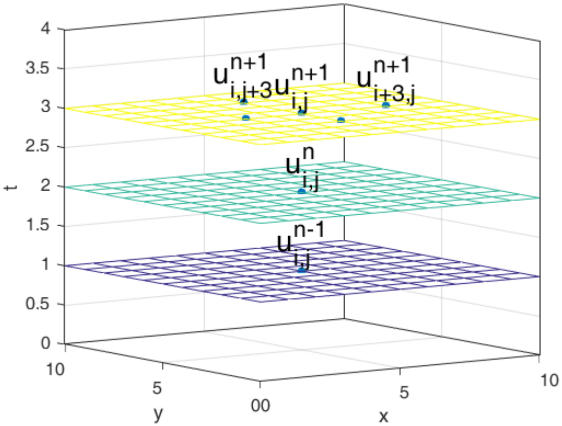
Metod konačnih razlika

Aproksimacijom se PDJ prevodi na sistem algebarskih jednačina (pri čemu dolazi do gubitka odredjenog dela informacija). Rešenje formiranog sistema jna treba da bude približno jednako rešenju polazne PDJ. Pri transformaciji treba voditi računa o:

- Konzistentnosti – kako koraci $\Delta x, \Delta t \to 0$ i sistem jna se svodi na polaznu PDJ.
- Stabilnosti – numerička šema je stabilna ukoliko se greška tokom proračuna smanjuje.
- Konvergentnosti – kako koraci $\Delta x, \Delta t \to 0$ i rešenje sistema jna teži tačnom rešenju PDJ.
- Konzervativnosti – poštovanje zakona održanja, izbegavanje veštačkih izvora i ponora.
- Ograničenosti – veličine kao gustina, koncentracija i sl. ne mogu biti negativne.

Proračunska mreža

Slikoviti prikaz vrednosti fje $u(x, y, t)$ u različitim vremenskim trenucima:



Zapis ...

U tački (x, y, t):

$$\begin{aligned} x &= x_o + (i-1)\Delta x, \\ y &= y_o + (j-1)\Delta y, \\ t &= t_o + (n-1)\Delta t. \end{aligned}$$

Da bismo uprostili zapis PDJ, koristićemo sledeće oznake:

$$u(x, y, t) = u_{i,j}^{n},\ u(x, y, t+\Delta t) = u_{i,j}^{n+1},\ u(x, y, t-\Delta t) = u_{i,j}^{n-1}.$$

Slično važi i za prostor:

$$\begin{gathered} u(x+\Delta x, y, t) = u_{i+1,j}^{n},\ u(x-\Delta x, y, t) = u_{i-1,j}^{n}, \\ u(x, y+\Delta y, t) = u_{i,j+1}^{n},\ u(x, y-\Delta y, t) = u_{i,j-1}^{n}. \end{gathered}$$

Aproksimacija prvog izvoda

Ukoliko vrednost u_i^{n+1} nepoznate fje $u(x,t)$ razvijemo u Tejlorov red u okolini u_i^n:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n + \dots$$

Slično po drugoj koordinati, ukoliko vrednost $u_{i\pm1}^n$ nepoznate fje $u(x,t)$ razvijemo u Tejlorov red u okolini u_i^n:

$$u_{i\pm1}^{n} = u_i^n \pm \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + \dots$$

Numeričke šeme su formirane uzimanjem u obzir (ili zanemarivanjem) odredjenih članova ovih izraza ...

Aproksimacija prvog izvoda

Lako (prostim oduzimanjem) se mogu izvesti:

- šema unapred

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

- šema unazad

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{u(x,y,t) - u(x,y,t-\Delta t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

- centralna šema

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t-\Delta t)}{2\Delta t} + o(\Delta t)^2.$$

Zapis ...

Sada se aproksimacije parcijalnog izvoda prvog reda tačnosti po t mogu zapisati kao:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \vee \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n} \approx \frac{u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t},$$

a aproksimacija 2. reda tačnosti:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Obratiti pažnju koje vrednosti fje u su potrebne (koje tačke proračunskog domena čine proračunski molekul) da bi se aproksimirao izvod!

Aproksimacije višeg reda tačnosti

Na primeru šeme unapred:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2\Delta x} + o(\Delta x)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + o(\Delta x)^3.$$

Kod centralne šeme:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + o(\Delta x)^4.$$

Prednosti: veća rezolucija, veća tačnost.
Mane: učestvuje veći proj proračunskih tačaka, potrebni detaljniji početni i granični uslovi, složeniji proračun, teža konvergencija.

Kako doći do ovih izraza?

Podsećanje: Kako odrediti kako će članovi učestvovati, za željenu najveću tačnost?
Npr, ukoliko želimo da uključimo članove u_j, u_{j+1} i u_{j+2} moguće je formirati sistem jednačina:

$$u_j'\Delta x + \sum_{k=0}^{2} a_k u_{j+k} = o(?),$$

gde je potrebno odrediti koeficijente a_k ...
Sistem je zapisan tako da koeficijenti ne zavise od Δx.

Kako doći do ovih izraza?

Možemo formirati pomoćnu tabelu:

Sabirci	u_j	u'_j	u''_j	u'''_j
$u'_j\Delta x$	0	Δx	0	0
$a_0 u_j$	a_0	0	0	0
$a_1 u_{j+1}$	a_1	$a_1\Delta x$	$a_1\frac{\Delta x^2}{2}$	$a_1\frac{\Delta x^3}{6}$
$a_2 u_{j+2}$	a_2	$a_2 2\Delta x$	$a_2\frac{4\Delta x^2}{2}$	$a_2\frac{8\Delta x^3}{6}$

Skupno, želimo da što više ovih sabiraka nestane, odnosno:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0,\ 1 + a_1 + 2a_2 = 0,\ \frac{a_1}{2} + 2a_2 = 0,$$

odakle $a_0 = 3/2$, $a_1 = -2$ i $a_2 = 1/2$.

Aproksimacija drugog izvoda

Sabiranjem dva Tejlorova polinoma za u_{i+1} i u_{i-1}:

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + o(\Delta x)^4,$$

odakle:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2.$$

Alternativni način: Kako je 2. izvod izvod 1. izvoda:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_i \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2}}{\Delta x} \approx \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}.$$

Aproksimacije drugog izvoda

Odnosno,

- centralna šema

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2,$$

- šema unapred

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x),$$

- šema unazad

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x).$$

Aproksimacije višeg reda tačnosti

- Šema unapred

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2,$$

- šema unazad

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 2u_i}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2,$$

- centralna šema

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i^n + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^4.$$

Mešoviti članovi

Kod mešovitih izvoda primeniti: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.
Tada, npr, centralnom šemom po x:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x)^2,$$

i centralnom po y:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i\pm1,j} = \frac{u_{i\pm1,j+1} - u_{i\pm1,j-1}}{2\Delta y} + o(\Delta y)^2,$$

sledi šema tačnosti $o\left[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2\right]$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}.$$

Granični uslovi

PDJ aproksimiramo (i proračunavamo) u svakom unutrašnjem čvoru mreže. Da bismo našli jedinstveno rešenje, potrebno je da fja u bude definisana (zadata) na granicama proračunskog domena. Najčešće je poznata vrednost fje (Dirihleov), vrednost njenog izvoda (Nojmanov granični uslov) ili njihova linearna kombinacija.

$$\phi_B = a, \ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_B = b.$$

Problemi se mogu javiti ako koristimo aproksimacije višeg reda tačnosti (koje zahtevaju poznavanje informacija iz više proračunskih tačaka). Tada je potrebno koristiti druge, jednostavnije šeme aproksimacije u blizini granica.

Primer

Eksplicitno aproksimirati PDJ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

šemom unapred po t, šemom unazad po x i izraziti član u_i^{n+1}.

Kako će izgledati aproksimirani izraz ako se iskoristi centralna šema po x?

Primer – Rešenje

Iz aproksimiranog izraza:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{(\Delta x)^2},$$

sledi nepoznati član u_i^{n+1}:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n).$$

Tačnost šeme?

Primer – Rešenje

Primenom centralne šeme po x:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

sledi nepoznati član u_i^{n+1}:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Tačnost šeme?

Prosta analiza stabilnosti

Primenićemo Nojmanovu analizu stabilnosti, koja ne uračunava uticaje graničnih uslova. Tehnika je primenljiva na linearne PDJ sa konstantnim koeficijentima, diskretizovane nad uniformnim mrežama.
Pretpostavićemo rešenje u obliku:

$$u_i^n = \sigma^n e^{ikx_i}.$$

Tada i:

$$u_i^{n+1} = \sigma^{n+1} e^{ikx_i}, u_{i\pm1}^n = \sigma^n e^{ikx_{i\pm1}}.$$

Odakle se skupno dobija:

$$\sigma^{n+1} e^{ikx_i} = \sigma^n e^{ikx_i} + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\sigma^n e^{ikx_{i+1}} - 2\sigma^n e^{ikx_i} + \sigma^n e^{ikx_{i-1}}\right).$$

Prosta analiza stabilnosti

Skraćivanjem sa σ^n i zamenom $x_{i\pm1} = x \pm \Delta x$:

$$\sigma e^{ikx_i} = e^{ikx_i} + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(e^{ik(x+\Delta x)} - 2e^{ikx_i} + e^{ik(x-\Delta x)} \right).$$

Daljim skraćivanjem sa e^{ikx_i}:

$$\sigma = 1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x} \right) = 1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(2\cos k\Delta x - 2 \right).$$

Da bi šema bila stabilna, $|\sigma| \leq 1$ (inače bi član σ^n samo rastao), odnosno:

$$-1 \leq 1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(2\cos k\Delta x - 2 \right) \leq 1.$$

Prosta analiza stabilnosti

Što se svodi na:

$$-2 \leq \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(2 \cos k\Delta x - 2\right) \leq 0.$$

Odnosno:

$$-1 \leq \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(\cos k\Delta x - 1\right) \leq 0.$$

Fja cos je ograničena, pa je kritična samo leva nejednačina, odnosno:

$$1 - \cos k\Delta x \leq \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t}.$$

U "najgorem" slučaju, kad je $\cos k\Delta x = -1$, dobija se:

$$2 \leq \frac{(\Delta x)^2}{\nu \Delta t} \Leftrightarrow \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$