Proračunska aerodinamika
Nedelja 4

A. Simonović & J. Svorcan

Mašinski fakultet, Katedra za vazduhoplovstvo

2020/2021.

Sadržaj

Uvod u parcijalne diferencijalne jne (PDJ)

PDJ su jednačine u kojima se javljaju parcijalni izvodi nepoznate funkcije više promenljivih u. Npr. opšti oblik PDJ dve nezavisne promenljive t i x 1. reda je:

$$au_t + bu_x + cu = d.$$

Nepoznata veličina je funkcija $u(t, x)$.
Nepoznata fja u može biti fja proizvoljnog broja promenljivih n. U PDJ se mogu pojaviti izvodi proizvoljnog reda m. Opšti zapis PDJ:

$$\Phi\left(x_1, \dots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^m u}{\partial x_i \dots \partial x_j}\right) = 0, \ \ i, j \in [1, n].$$

Primena PDJ je ogromna. Koriste se za opisivanje problema i procesa iz oblasti: mehanike, termodinamike, elektrodinamike, mehanike fluida, otpornosti (elastičnosti), itd.

Uvod u parcijalne diferencijalne jne (PDJ)

Slično, opšti oblik PDJ dve nezavisne promenljive t i x 2. reda je:

$$au_{tt} + 2bu_{tx} + cu_{xx} + du_t + eu_x + fu = g.$$

Koeficijenti a, b, c, $\ldots$ mogu biti konstante ili funkcije nezavisnih ili zavisne promenljive ili njihova kombinacija.
Potrebno je napomenuti da: "**različiti** fizički fenomeni, pojave, procesi mogu biti **identično** matematički formulisani i stoga vodjeni samom dinamikom koja stoji iza njih". Konačni odabir rešenja koje baš opisuje postavljeni problem od beskonačno mnogo mogućih rešenja vrši se definisanjem dopunskih **graničnih** uslova. Neke klase ovakvih problema moguće je rešiti analitički, dok u opštem slučaju, koristimo neku numeričku metodu . . .

Uvod u parcijalne diferencijalne jne (PDJ)

Osim po broju nezavisnih promenljivih, reda jne, PDJ mogu se svrstati u linearne, (kvazilinearne) i nelinearne.
Kod linearnih jna nepoznata fja i njeni izvodi učestvuju linearno (u prvom stepenu). Ne pojavljuju se proizvodi nepoznate fje i njenih izvoda, ili izvoda medjusobno. Linearna kombinacija posebnih rešenja jne takodje je rešenje PDJ.
Primer linearne jne je talasna jna 1. reda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

dok je neviskozna Burgersova jna primer nelinearne jne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Kvazilinearna – PDJ linearna po izvodima od u.

Još neke modelske PDJ

Viskozna Burgersova jna:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Stoksova jna:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Jna toplotne provodljivosti u ravni:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

Još neke modelske PDJ

Laplasova jna:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Puasonova jna:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = T_o(x, y).$$

Talasna jna:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ojler-Trikomijeva jna:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Metod karakteristika

Nepoznata je funkcija dve promenljive $u(x,t)$, a početni uslov zadat je kao $u(x,0)=f(x)$.
Metod karakteristika može se primeniti u rešavanju PDJ 1. reda opšteg oblika:

$$a(x,t,u)u_x+b(x,t,u)u_t=c(x,t,u).$$

Ideja je izvršiti transformaciju koordinata tako da PDJ postane ODJ (obična dif. jna, značajno lakša za rešavanje) duž odredjenih krivih u $x-t$ ravni koje nazivamo **karakteristikama**.

U slučaju linearne talasne jne:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Leftrightarrow u_t+au_x=0,$$

moguće je veoma brzo doći do rešenja.

Kako nalazimo karakteristične krive?

Ako postoje odgovarajuće transformacije:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = a(x,t,u),\ \frac{\partial t}{\partial r} = b(x,t,u),\ \frac{\partial u}{\partial r} = c(x,t,u),$$

polazna PDJ postaje:

$$a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} = c(x,t,u).$$

Odnosno, ako postoji odgovarajuća transformacija $(x,t) \to (r,s)$ samo treba rešiti:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = c,$$

i izvršiti obrnutu transformaciju $(r,s) \to (x,t)$ da bismo našli zavisnost $u(x,t)$.

Primer 1 – Postavka

Rešiti:

$$2u_x + u_t = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

Početni uslov je:

$$u(x,0) = e^{-x^2}, -\infty < x < \infty.$$

Primer 1 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 2,\ \frac{\partial t}{\partial r} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Prva dva izraza koristimo da nadjemo potrebnu transformaciju $(x, t) \rightarrow (r, s)$, a poslednji izraz (ODJ) koristimo da nadjemo nepoznatu funkciju u.
Transformacija:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 2,\ \frac{\partial t}{\partial r} = 1 \Rightarrow dx = 2dr, dt = dr$$

$$\left.\begin{array}{c} x = 2r + s \\ t = r \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} r = t \\ s = x - 2t \end{array}\right\}$$

Primer 1 – Analitičko rešenje

Analizom i rešavanjem ODJ $\partial u/\partial r = 0$ zaključujemo da u duž r ne zavisi od r već samo od s, odnosno:

$$u(r,s) = C(s),$$

što predstavlja opšte rešenje jne u prostoru (r,s).
Da bi se našlo i partikularno rešenje potrebno je razmotriti i početni uslov, čiju transformaciju takodje treba izvršiti:

$$u(x,0) = e^{-x^2} \Leftrightarrow u(r,s) = u(0,s) = e^{-(2r+s)^2} = e^{-s^2}.$$

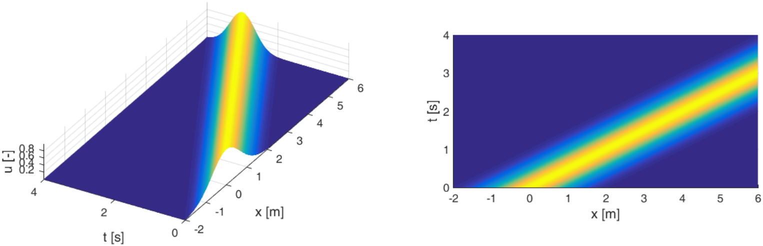
Kombinacijom prethodna dva izraza:

$$u(0,s) = C(s) = e^{-s^2} \Rightarrow C(s) = e^{-s^2},\ u(r,s) = e^{-s^2}.$$

Konačno, vraćamo se na (x,t) i dobijamo rešenje $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$.

Primer 1 – Analitičko rešenje

Rešenje $u(x,t)$ moguće je skicirati u prostoru.



Slika: Rešenje $u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}$

Pogled odozgo omogućava nam da jasno vidimo karakteristike $x = 2t + x_o$.

Primer 1 – Numeričko rešenje

Ukoliko primenimo šeme aproksimacije unapred po vremenu i unazad po prostoru, polazna jna svodi se na (eksplicitna šema):

$$u_t + au_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = u_i^n - c\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1-c)u_i^n + cu_{i-1}^n.$$

Pri numeričkom rešavanju uvek je potrebno da postoji početno rešenje, ovde $u(x,0) = e^{-x^2}$.

(skript pr1_num.m)

Primer 2 – Postavka

Rešiti:

$$2xtu_x + u_t = u, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0.$$

Početni uslov je:

$$u(x, 0) = x, -\infty < x < \infty.$$

Primer 2 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 2xt, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial r} = u.$$

Opet, prva dva izraza koristimo da nadjemo potrebnu transformaciju $(x, t) \to (r, s)$, a poslednji izraz (ODJ) koristimo da nadjemo nepoznatu funkciju u.
Transformacija:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 2xt, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1 \Rightarrow dx = 2xrdr, dt = dr$$

Rastavljanjem promenljivih:

$$\frac{dx}{x} = 2rdr \Rightarrow x = se^{r^2}, t = r.$$

Primer 2 – Analitičko rešenje

Odnosno, potrebna transformacija koordinata je:

$$\left.\begin{array}{c} x = se^{r^2} \\ t = r \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} r = t \\ s = xe^{-t^2} \end{array}\right\}$$

ODJ se sada može rešiti:

$$\frac{du}{dr} = u \Rightarrow u(r,s) = C(s)e^r.$$

Transformacija početnog uslova:

$$u(x,0) = x = se^{r^2} = s = u(0,s).$$

Kombinacijom sa opštim rešenjem:

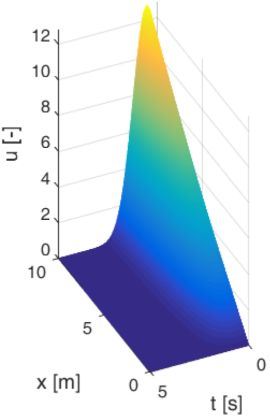
$$u(0,s) = s = C(s)e^0 \Rightarrow C(s) = s,\; u(r,s) = se^r.$$

Primer 2 – Analitičko rešenje

Konačno, vraćamo se na (x, t) i dobijamo rešenje:

$$u(x,t) = xe^{-t^2}e^t = xe^{t-t^2}.$$

Moguće je skicirati funkciju $u(x, t)$, kao i naći opšti oblik njenih karakteristika: $x = x_o e^{t^2}$.



Primer 2 – Numeričko rešenje

Ukoliko primenimo šeme aproksimacije unapred po vremenu i unazad po prostoru, polazna jna svodi se na (eksplicitna šema):

$$u_t + 2xtu_x = u \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + 2x_i t^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = u_i^n + o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + u_i^n \Delta t - \frac{2x_i t^n \Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) \\ &= u_i^n(1 + \Delta t) - c\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1 + \Delta t - c)u_i^n + cu_{i-1}^n. \end{aligned}$$

Pri numeričkom rešavanju uvek je potrebno da postoji početno rešenje, ovde $u(x, 0) = x$.

(skript pr2_num.m)

Primer 3 – Postavka

Rešiti:

$$u^2 u_x + u_t = 0,\ x > 0,\ t > 0.$$

Početni uslov je:

$$u(x, 0) = \sqrt{x}, x > 0.$$

Primer 3 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = u^2, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Opet, prva dva izraza koristimo da nadjemo potrebnu transformaciju $(x, t) \to (r, s)$, a poslednji izraz (ODJ) koristimo da nadjemo nepoznatu funkciju u. Medjutim, kako prva jna nije eksplicitna, sada je lakše prvo rešiti ODJ:

$$\frac{du}{dr} = 0 \Rightarrow u(r, s) = C(s).$$

Vraćamo se na transformaciju koordinata:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} = u^2, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1 \quad &\Rightarrow \quad dx = u^2 dr, dt = dr \\ &\Rightarrow \quad x = [C(s)]^2 r + s, t = r\end{aligned}$$

Primer 3 – Analitičko rešenje

Odnosno:

$$\left.\begin{array}{c} x = u^2 r + s \\ t = r \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} r = t \\ s = x - u^2 t \end{array}\right\}$$

U početnom trenutku:

$$u(x,0) = \sqrt{x} = \sqrt{u^2 r + s} = \sqrt{s}.$$

Kombinacijom sa opštim rešenjem:

$$u(0,s) = \sqrt{s} = C(s) \Rightarrow C(s) = \sqrt{s},\ u(r,s) = \sqrt{s}.$$

Obrnutom transformacijom se dobija:

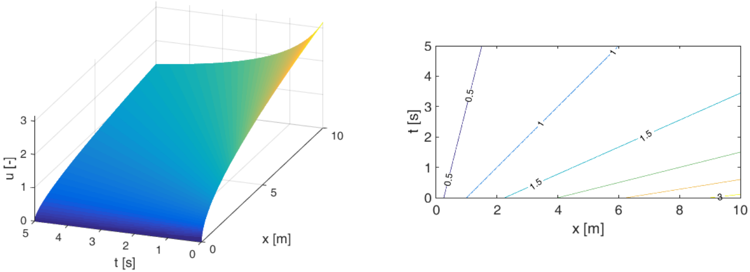
$$u(x,t) = \sqrt{x - [u(x,t)]^2 t}.$$

Primer 3 – Analitičko rešenje

Funkcija je implicitno zadata pa je moguće srediti prethodni izraz:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{x}{1+t}}.$$

Rešenje $u(x,t)$ moguće je skicirati u prostoru, kao i naći opšti oblik karakteristika $x = x_o(1+t)$.



Slika: Rešenje $u(x,t) = \sqrt{\frac{x}{1+t}}$

Primer 3 – Numeričko rešenje

Ukoliko primenimo šeme aproksimacije unapred po vremenu i unazad po prostoru, polazna jna svodi se na (eksplicitna šema):

$$u_t + u^2 u_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + [u_i^n]^2 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{[u_i^n]^2 \Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1-c)u_i^n + c u_{i-1}^n,\ c = \frac{[u_i^n]^2 \Delta t}{\Delta x}.$$

Pri numeričkom rešavanju uvek je potrebno da postoji početno rešenje, ovde $u(x,0) = \sqrt{x}$.

(skript pr3_num.m)

Dodatno za skiciranje grafika ...

Za skiciranje analitičkog rešenja može se koristiti sledeći deo koda u Matlab-u:

```
% prikaz analitickog resenja
Nx = 101; xL = 0; xR = 10; t0 = 0; tfinal = 5;
[X,T] = meshgrid(linspace(xL,xR,Nx),linspace(t0,tfinal,Nx));
UP = sqrt(X./(1+T));
figure,
mesh(X,T,UP)
view(-70,20), set(gca,'FontSize',14)
xlabel('x [m]','FontSize',16),
ylabel('t [s]','FontSize',16),
zlabel('u [-]','FontSize',16),
axis([xL xR 0 tfinal xL xR]),
axis equal
```

Primer 4 (zadat i granični uslov) – Postavka

Rešiti:

$$u_x + u_t = 0, \; x > 0, \; t > 0.$$

Početni uslov je:

$$u(x,0) = e^{-x^2}, x > 0.$$

Granični uslov je:

$$u(0,t) = 1, t > 0.$$

Primer 4 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 1, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

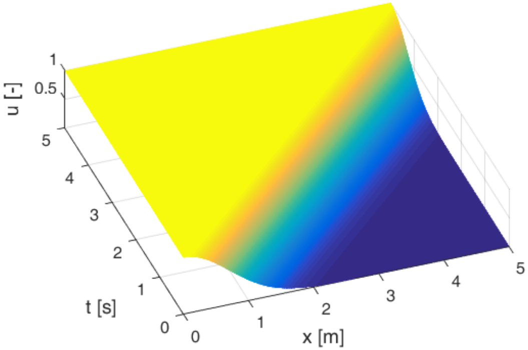
Sad već znamo da su kod linearne jne karakteristike prave linije u ravni (x, t). Kako je $\partial u / \partial r = 0$ nepoznata fja $u(x, t)$ konstantna je duž karakteristika.
Domen (x, t) delimo na dve oblasti: jedna podoblast odredjena je početnim, a druga graničnim uslovom.
U opštem slučaju, rešenje je:

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x - at), & x > at, \quad a > 0 \\ g(t - x/a), & x < at, \quad a > 0 \end{cases}$$

gde fja f odgovara početnom, a fja g graničnom uslovu.

Primer 4 – Analitičko rešenje

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-(x-t)^2}, & x > t \\ 1, & x < t \end{cases}$$



Primer 4 – Numeričko rešenje

Primenjujući poznate šeme aproksimacije unapred po vremenu i unazad po prostoru, dobija se:

$$u_t + u_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) = (1-c)u_i^n + cu_{i-1}^n,\ c = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Pri numeričkom rešavanju uvek je potrebno da postoji početno rešenje, ovde $u(x,0) = e^{-x^2}$. Tokom proračuna zadaje se granični uslov $u(0,t) = 1$.

(skript pr4_num.m)

Primer 5 (zadat i granični uslov) – za vežbu

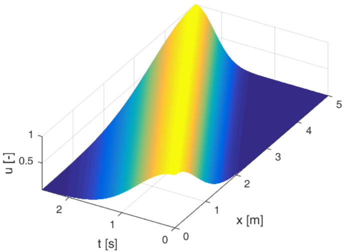
Rešiti:

$$2u_x + u_t = 0,\ x > 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, x > 0$$
$$u(0,t) = e^{-t^2}, t > 0$$

Analitičko rešenje:

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-(x-2t)^2}, & x > 2t \\ e^{-(t-x/2)^2}, & x < 2t \end{cases}$$

(skript pr5_num.m)



Primer 6 (zadat i granični uslov sa prekidom) – za vežbu

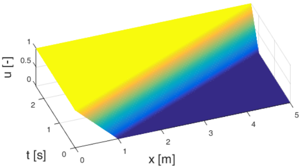
Rešiti:

$$2u_x + u_t = 0,\ x > 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$
$$u(0,t) = 1, t > 0$$

Analitičko rešenje:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 2t \\ 1-x+2t, & 2t < x < 1+2t \\ 0, & x > 1+2t \end{cases}$$

(skript pr6_num.m)



Primer 7 (zadat i granični uslov sa prekidom) – za vežbu

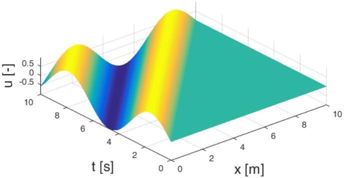
Rešiti:

$$
\begin{aligned}
u_x + u_t = 0,\ x > 0,\ t > 0 \\
u(x,0) = 0, x > 0 \\
u(0,t) = \sin t, t > 0
\end{aligned}
$$

Analitičko rešenje:

$$
u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > t \\ \sin(t-x), & x < t \end{cases}
$$

(skript pr7_num.m)



Klasifikacija PDJ 2. reda

Kvazilinearne PDJ 2. reda dve nezavisne promenljive možemo svrstati u: hiperboličke, paraboličke ili eliptičke. Ova podela izvršena je prema prirodi i broju karakteristika (linijama po kojima se prenosi informacija o rešenju).

- Hiperboličke – karakteristike su realne i različite (informacija se prostire konačnom brzinom duž dva pravca). Potrebna su dva početna uslova za svaku karakteristiku (i granični uslov na granicama).
- Paraboličke – karakteristike su realne i jednake, potreban jedan početni uslov (i granični uslov na granicama).
- Eliptičke – karakteristike su kompleksne (informacije se ravnomerno prostiru u svim pravcima), nisu potrebni početni uslovi (samo granični uslov na granicama). Nestacionarni problemi nikada nisu eliptički.

Klasifikacija PDJ 2. reda

Za PDJ 2. reda po dve nezavisne promenljive t i x opšteg oblika

$$au_{tt} + 2bu_{tx} + cu_{xx} + du_t + eu_x + fu = g,$$

klasifikaciju vršimo prema vrednosti izraza $D = b^2 - ac$.
PDJ su:

- hiperboličkog tipa ukoliko je $D > 0$,
- paraboličkog tipa ukoliko je $D = 0$,
- eliptičkog tipa ukoliko je $D < 0$.

Primer: Odrediti tip PDJ $u_{tt} - u_{tx} - 2u_{xx} = 0$.
Kako je $a = 1,\ b = -0.5,\ c = -2 \Rightarrow D = 0.25 + 2 > 0$, jna je hiperboličkog tipa svugde.

Klasifikacija PDJ 2. reda

Za rešavanje različitih tipova PDJ koristimo različite numeričke metode. (N-S jne su nelinearne, po 4 nezavisne promenljive, pa se ova podela na njih ne odnosi. Medjutim, razvijeni numerički postupci za PDJ po 2 promenljive mogu se primeniti i na N-S jne).

- Nestacionarno strujanje neviskoznog stišljivog fluida načelno spada u hiperboličke jne.
- Stacionarno nadzvučno strujanje – hiperboličke, a stacionarno podzvučno strujanje – eliptičke jne.
- (Viskoznost značajno komplikuje stvari!)
- Aproksimacija graničnog sloja – paraboličke jne (informacije se prostiru samo nistrujno).
- Potencijalno strujanje – eliptičke jne.
- Ukoliko postoje oblasti povratnog strujanja – eliptičke jne.

Klasifikacija PDJ 2. reda

- Nestacionarno nestišljivo strujanje – kombinacija eliptičkih i paraboličkih jna.
- Znači, moguće je da realan problem opstrujavanja opisujemo jednačinama koje nisu isključivo jednog tipa.
- Tipičan primer je okozvučno opstrujavanje, kada postoje i podzvučne (eliptičkog tipa) i nadzvučne zone (hiperboličkog tipa).
- U takvim slučajevima, potrebno je odrediti oblasti (deo prostora nezavisnih promenljivih) u kojima su razmatrane jne hiperboličkog, paraboličkog ili eliptičkog tipa.

Klasifikacija PDJ 2. reda

Primer 1: Odrediti tip PDJ $x^2 u_{tt} - t^2 u_{xx} = 0$.

Sledi $a = x^2,\ b = 0,\ c = -t^2 \Rightarrow D = 0 + t^2x^2 \geq 0$. Jna je paraboličkog tipa za $t = 0 \vee x = 0$, u suprotnom hiperboličkog. Skicirati ove oblasti.

Primer 2: Odrediti tip PDJ $tu_{tt} + tu_{tx} + xu_{xx} = 0$.

Sledi $a = t,\ b = t/2,\ c = x \Rightarrow D = t^2/4 - tx = t(t - 4x)/4$. Skicirati ove oblasti.