Proračunska aerodinamika
Nedelja 7

A. Simonović & J. Svorcan

Mašinski fakultet, Katedra za vazduhoplovstvo

2020/2021.

Sadržaj

Paraboličke jednačine

Jednačine strujanja u mehanici fluida često se svode na paraboličke PDJ. Tipičan primer su jne graničnog sloja, parabolizovane jne NS ili jne nestacionarnog provodjenja toplote.
Tipični primer paraboličke PDJ:

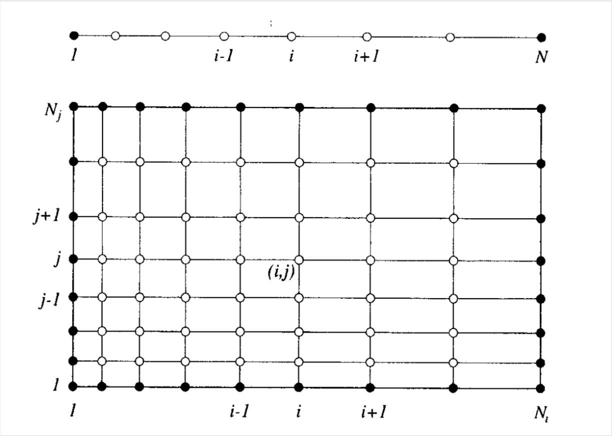
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

gde je ν konstanta (viskoznost, toplotna provodljivost, ...)
Unapredjena varijanta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

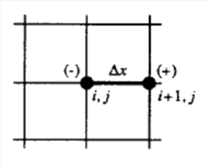
Proračunska mreža

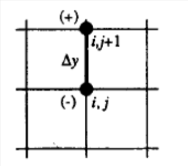
Podsetimo se prvog koraka numeričkog proračuna – formiranja proračunske mreže (na slici prikazane struktuirane 1D i 2D):



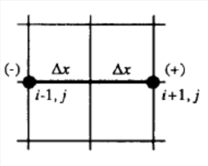
Proračunski molekul

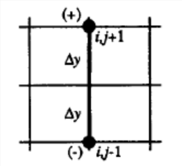
Proračunski "molekul" čine tačke koje učestvuju u šemi aproksimacije. Neki od najčešćih primera za aproksimaciju 1. reda tačnosti 2D problema (dve nezavisne promenljive, x i y, pa je i rešenje nepoznata funkcija $u(x, y)$):

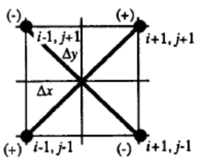




Tačnost višeg reda:







FTCS eksplicitna šema

Sledeći korak – diskretizacija. Polaznu jnu moguće je diskretizovati na mnogo načina. Jedan od najjednostavnijih je FTCS šablon (Forward in Time, Central in Space):

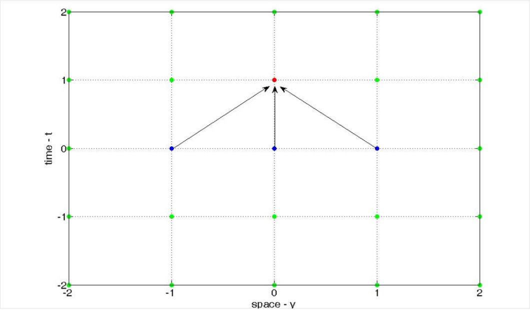
$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} &\approx \nu\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta y)^2},\\ u_i^{n+1} &\approx u_i^n+\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n).\end{aligned}$$

koji je reda tačnosti $o[\Delta t,(\Delta y)^2]$.
Stabilno rešenje se može očekivati ukoliko je zadovoljen uslov:

$$d=\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\leq\frac{1}{2}.$$

Proračunski molekul kod FTCS šablona

Računamo vrednost nepoznate fje u crvenoj tački pomoću vrednosti funkcije u plavim tačkama (sa prethodnog vremenskog nivoa, te su sada poznate). Da bismo uopšte započeli proračun potrebno je definisati početni uslov, dok granični uslovi moraju biti zadati u svakoj iteraciji proračuna jer njih ne možemo izračunati.



Primer 1

Naći profil brzine fluida kinematske viskoznosti $\nu = 0.002\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ koji struji izmedju dve paralelne ploče koje su medjusobno udaljene $h = 0.04$ m. U početnom trenutku fluid miruje, gornja ploča miruje dok se donja kreće brzinom $u_o = 10$ m/s.
Strujanje viskoznog fluida možemo opisati jednačinom:

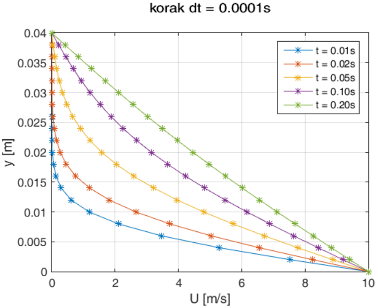
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

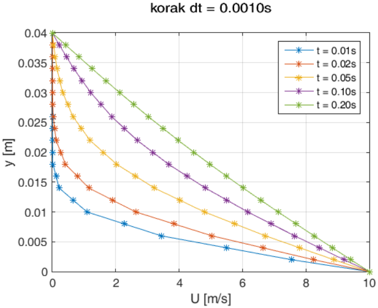
Pri rešavanju koristiti FTCS metod ...

(skriptovi sa časa)

Primer 1 – Rešenje

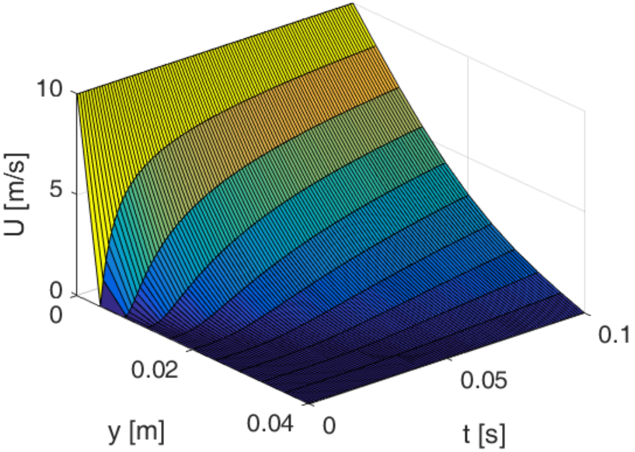
Izračunati profili brzine $U(y)$ u različitim vremenskim trenucima t za različite vremenske korake Δt:





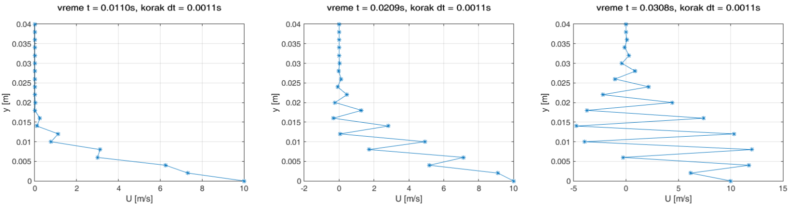
Primer 1 – Rešenje

Kompletno rešenje moguće je prikazati i u obliku zakrivljene površi $U(y, t)$:



Primer 1 – Rešenje

Ukoliko nije zadovoljen uslov stabilnosti $d \leq 0.5$, odnosno ukoliko je $d > 0.5$ može se dobiti nešto slično . . .



Primer 2 – laminarno strujanje izmedju dve ploče

I dalje se bavimo jednim tipičnim primerom paraboličke PDJ – laminarnim strujanjem izmedju dve paralelne ploče:

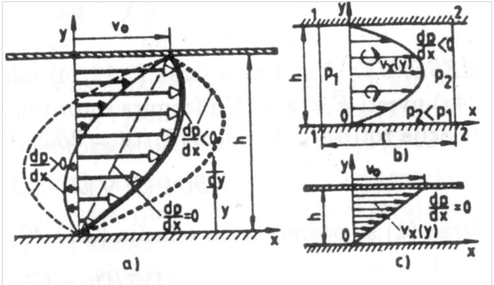
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

gde je ν konstanta (ovde kinematska viskoznost), ρ gustina fluida i $\partial p/\partial x$ gradijent pritiska.
Ova jna može se diskretizovati:

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &\approx \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
u_i^{n+1} &\approx u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\Delta t.
\end{aligned}$$

Primer 2 – laminarno strujanje izmedju dve ploče

Podsetimo se primera 2.13.2 iz *Hidrodinamike* prof. S. Čantraka: Odrediti raspodele brzine i napona i naći izraze za srednju brzinu, protok, pad pritiska i koeficijent trenja pri stacionarnom laminarnom strujanju viskozne nestišljive tečnosti izmedju dve horizontalne paralelne ploče neograničene u pravcima osa x i z. Donja ploča $y = 0$ je nepokretna, dok se gornja ploča $y = h$ kreće konstantnom brzinom u_o (slika).



Slika 2.13.2.

Primer 2 – laminarno strujanje izmedju dve ploče

Kada se matematički uslovi datog fizičkog modela:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial}{\partial z} = 0,\ v = w = 0,\ F_i = 0,\ \rho = const.$$

uvrste u jnu kontinuiteta i N-S jne dobijaju se izrazi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

koje je moguće analitički rešiti ...

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \ \Rightarrow\ \frac{\partial p}{\partial x} = C \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C.$$

Zakon raspodele brzine (analitičko rešenje) je tada:

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(hy - y^2\right) + u_o \frac{y}{h}.$$

Primer 2 – drugačiji uslov završetka proračuna

Sa druge strane, moguće je i numerički rešiti ove izraze ...
Jedina razlika u analitičkoj i numeričkoj postavci je u nestacionarnom članu $\partial u/\partial t$. Jna koju numerički rešavamo je:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Poznato je da se ovom jnom opisuje strujanje koje teži stacionarnom stanju. Umesto vršenja proračuna do nekog konačnog vremena *tfinal*, moguće je proračun vršiti i dok se ne postigne konvergencija rešenja. Kako se može zapisati ovaj uslov?

```
% na pocetku
t = 0; U = zeros(1,Ny); U(end) = u;
% nakon prve iteracije
n = 1; t = t + dt; U0 = U;
U(2:Ny-1) = U0(2:Ny-1)+d*(U0(3:Ny)-2*U0(2:Ny-1)+U0(1:Ny-2))-dpdx/rho*dt;
% zeljena tacnost
eps = 1e-4;
% vrsi proracun dok ne postigne konvergenciju
while (mean(abs(1-U0(2:Ny-1)./U(2:Ny-1))) > eps),
 % povecaj redni broj iteracije
  n = n + 1;
  ...
end
```

Primer 2 – drugačiji uslov završetka proračuna

U FORTRAN-u je potrebno definisati pomoćnu fju i malo promeniti sabrutinu koja vrši proračun:

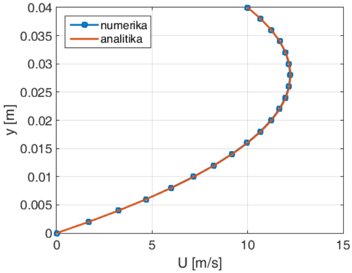
```
subroutine ftcs_v2(U0, U, Ny, d, dpdx, rho, dt, g)
real U0(*), U(*)
! proracun unutrasnjih tacaka
do i = 2,Ny-1
 U(i) = U0(i) + d*(U0(i+1) - 2*U0(i) + U0(i-1)) - dt*dpdx/rho
end do
! procena greske
g = greska(U0, U, Ny)
! pomeraj u vremenu
do i = 1,Ny
 U0(i) = U(i)
end do
end subroutine
```

```
function greska(U0, U, Ny)
real U0(*), U(*), s
s = 0
do i = 2,Ny-1
  s = s + abs(1.-U0(i)/U(i))
end do
greska = s/(Ny-2)
return
end function
```

Moguće dodatne analize i rezultati

Nakon što je dostignuta konvergencija rešenja (uspostavljen stacionarni strujni režim) moguće je uporediti rezultate ...
Npr. za:

$$
\begin{aligned}
h &= 0.04\ \mathrm{m} \\
u_o &= 10\ \mathrm{m/s} \\
N_y &= 21 \\
\rho &= 800\ \mathrm{kg/m^3} \\
\nu &= 0.002\ \mathrm{m^2/s} \\
\partial p/\partial x &= -50\ \mathrm{kPa/m}
\end{aligned}
$$



Moguće dodatne analize i rezultati

Primer dodatka koda:

```
% analiza posle dostizanja konvergencije (stacionarnog rezima)
% skiciranje profila brzine [m/s],
% poredjenje sa analitickim resenjem
Ua = -1/2/ni*dpdx/rho*(h*y-y.^2) + u*y/h;
figure,
plot(U,y,'-s',Ua,y,'-','LineWidth',2),
xlabel('U [m/s]'), ylabel('y [m]'), grid on
legend('numerika', 'analitika', 'Location','NorthWest')
axis([0, 1.5*u, yD, yU])
set(gca, 'FontSize', 14)
```

Moguće dodatne analize i rezultati

Sada je moguće izračunati i zapreminski protok $\dot{V}$ i srednju brzinu. Po definiciji:

$$\dot{V} = \int_0^h u(y) \cdot 1 dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 + u_o \frac{h}{2}.$$

Numerički (integral prelazi u sumu):

$$\dot{V} \approx \sum_{y_D}^{y_U} U(y) \cdot 1 \Delta y.$$

```
% zapreminski protok V [m^3/s]
% osrednjene proracunate brzine po elementu
Us = 0.5*(U(1:Ny-1)+U(2:Ny));
V = sum(Us*dy*1);
Va = -1/12/ni*dpdx/rho*h^3 + u*h/2;
```

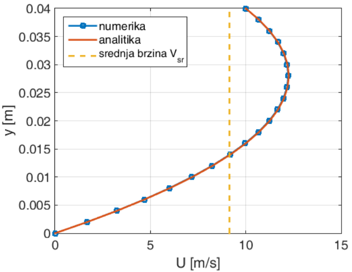
Moguće dodatne analize i rezultati

Srednja brzina po definiciji:

$$u_{sr} = \frac{\dot{V}}{h \cdot 1}.$$

Slično je i pri numeričkom rešavanju:

$$U_{sr} = \frac{\dot{V}}{h \cdot 1}.$$




```
% srednja brzina [m/s]
Usr = V/h/1;
Usra = Va/h/1;
hold on, plot(Usr*ones(1,Ny),y,'--','LineWidth',2)
legend('numerika', 'analitika', 'srednja brzina V_{sr}', ...
    'Location','NorthWest')
```

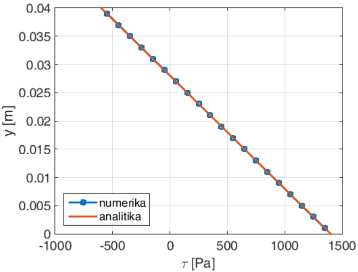
Moguće dodatne analize i rezultati

Raspodela napona:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \mu \frac{u_o}{h}.$$

Numerički:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\Delta U}{\Delta y}.$$




```
% raspodela napona \tau [Pa]
ysr = 0.5*(y(1:Ny-1)+y(2:Ny));
tau_yx = ni*rho*(U(2:Ny)-U(1:Ny-1))/dy;
tau_yx_a = 0.5*dpdx*(2*y-h)+ni*rho*u/h;
figure,
plot(tau_yx,ysr,'-s',tau_yx_a,y,'-','LineWidth',2),
xlabel('\tau [Pa]'), ylabel('y [m]'), grid on
legend('numerika', 'analitika', 'Location','SouthWest')
axis([-1000, 1500, yD, yU])
set(gca, 'FontSize', 14)
```

Moguće dodatne analize i rezultati

Zamenom vrednosti granica (ekstrapolacijom) moguće je dobiti vrednosti tangencijalnog napona na zidovima ...

```
% tangencijalni napon na zidovima
tauwD = interp1(ysr, tau_yx, y(1), 'linear', 'extrap')
tauwU = interp1(ysr, tau_yx, y(Ny), 'linear', 'extrap')
```

Proveriti vrednost Rejnoldsovog broja strujanja:

$$\mathrm{Re} = \frac{U_{sr} h}{\nu}.$$

Koeficijent trenja λ prema Darsijevoj formuli:

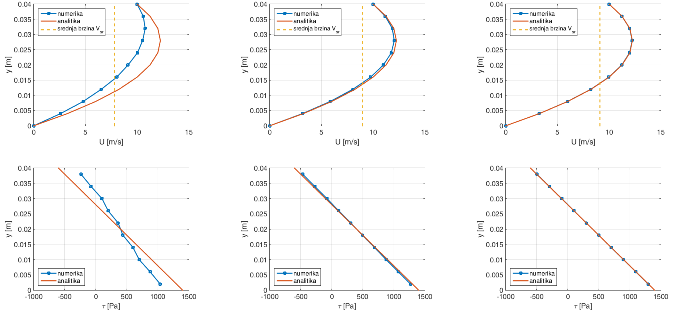
$$\lambda \approx h \frac{\partial p}{\partial x} \frac{2}{\rho U_{sr}^2}, \quad \lambda = \frac{24}{\mathrm{Re}} \text{ za nepokretne ploče.}$$

Dodatno: Analiza uticaja željene tačnosti ϵ_z

Kako se zadatim uslovom tačnosti proverava koliko su dva uzastopna rešenja slična (pošto u opštem slučaju nije poznato analitičko rešenje) potrebno je izvršiti proveru potrebne željene tačnosti ϵ_z.

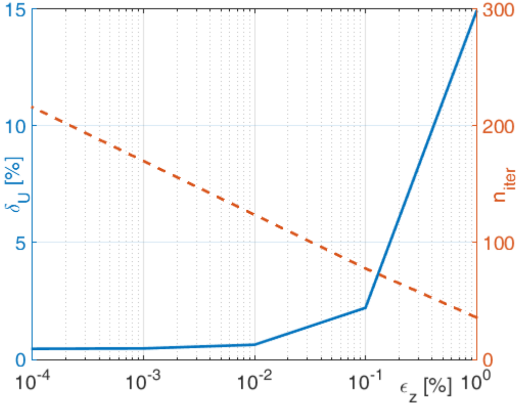
Npr. za iste podatke i $N_y = 11$ i $\Delta t = 0.004$:

$\epsilon_z = 0.01$ $\quad$ $\epsilon_z = 0.001$ $\quad$ $\epsilon_z = 0.0001$



Dodatno: Analiza uticaja željene tačnosti ϵ_z

Odnosno, sa povećanjem željene tačnosti ϵ_z (smanjenjem greške proračuna) smanjuje se i relativna greška vrednosti srednje brzine U_{sr} obeležena kao δ_U, ali se i povećava broj potrebnih iteracija n_{iter}.



Primer 3

Primer 2.13.3 iz *Hidrodinamike* prof. S. Čantraka:

Odrediti raspodele brzine $u(y)$ i tangencijalnog napona $\tau(y)$ pri stacionarnom laminarnom strujanju viskoznog nestišljivog fluida izmedju dve horizontalne paralelne ploče koje se kreću brzinama u_d i u_g. Za $p_1 = p_2 = 0.1$ MPa, $u_g = 2u_d = 2$ m/s, $h = 1.5$ mm, $\mu = 0.5$ Pa s izračunati protok kao i tangencijalni napon na obe ploče.