Proračunska aerodinamika

Nedelja 5

A. Simonović & J. Svorcan

Mašinski fakultet, Katedra za vazduhoplovstvo

2020/2021.

Sadržaj

Analitička rešenja PDJ 1. reda – kada se ne može primeniti metod karakteristika

Primer 8 – “ekspanzioni talas”

Primer 9

Dodatno o ekspanzionom talasu

Primer 10 – “udarni talas”

Analitička rešenja PDJ 1. reda – kada se ne može primeniti metod karakteristika

Razmotrimo sledeću nelinearnu jnu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty.$$

Ukoliko početni uslov, $f(x)$, nije diferencijabilan, ne može se primeniti metod karakteristika.

Ovde ćemo pomenuti dva takva slučaja:

- kada u delu oblasti $x - t$ nisu definisane karakteristike ("ekspanzioni talas"),
- ili kada u delu oblasti $x - t$ karakteristike nisu jednoznačno definisane ("udarni talas").

Primer 8 – Postavka

Rešiti:

$$uu_x + u_t = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Primer 8 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = u, \ \frac{\partial t}{\partial r} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = C(s).$$

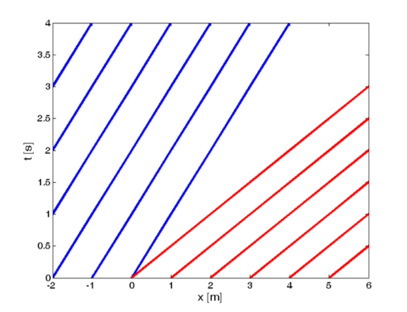
Nepoznata fja $u(x,t)$ konstantna je duž karakteristika.
Jednačine karakteristika za svaki segment početnog uslova su:

$$x = x_o + t, \quad x < 0,$$
$$x = x_o + 2t, \quad x \geq 0,$$

odakle se dobija rešenje jne: $u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ 2, & x \geq 2t \end{cases}$

Primer 8 – Analitičko rešenje

Problem je što metod karakteristika ne daje informacije o vrednostima fje $u(x,t)$ u oblasti $t \leq x < 2t$.



Slika: Karakteristike

Potrebno je dodefinisati rešenje u "kritičnoj" oblasti.

Primer 8 – Analitičko rešenje

Uvodi se dodatna fja g takva da je $g = a^{-1}$ kojom se definišu vrednosti fje $u(x,t)$ u prelaznoj oblasti. Kompletno rešenje je sada:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & x - x_o < a_1(u_1)t \\ g\big((x - x_o)/t\big), & a_1(u_1)t \leq x - x_o < a_2(u_2)t \\ u_2, & x - x_o \geq a_2(u_2)t \end{cases}$$

U ovom primeru:

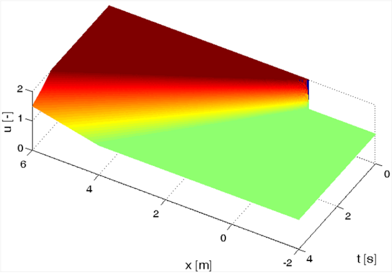
$$\begin{aligned} a(u) = u \quad &\Rightarrow \quad u(a) = a, \\ &\Rightarrow \quad g(x/t) = x/t. \end{aligned}$$

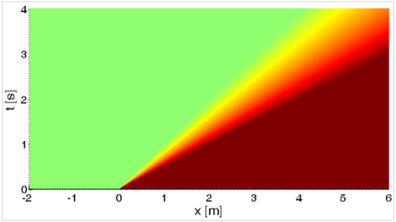
Primer 8 – Analitičko rešenje

Sada je rešenje jednačine:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ x/t, & t \leq x < 2t \\ 2, & x \geq 2t \end{cases}$$

i moguće ga je skicirati u prostoru (pogled odozgo omogućava nam da jasno vidimo karakteristike).





Slika: Rešenje $u(x,t)$

Primer 8 – Numeričko rešenje

Primenjujući poznate šeme aproksimacije unapred po vremenu, unazad po prostoru i unazad za konvektivni član, dobija se:

$$u_t + uu_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_{i-1}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1-c)u_i^n + cu_{i-1}^n,\ c = u_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

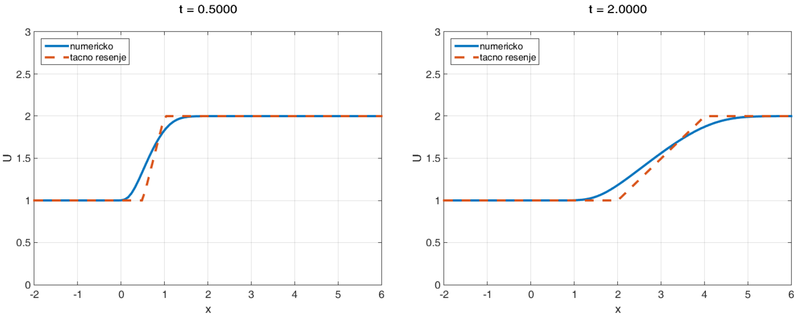
Parametar c se naziva Kuranov broj (Courant–Friedrichs–Lewy ili CFL) i predstavlja bezdimenzionalno vreme.
Pre proračuna potrebno je definisati početni uslov:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

(skript pr8_num.m)

Primer 8 – Numeričko rešenje

Analizirana jna je nelinearna (sadrži konvektivni član) i zato izuzetno nezgodna za numerički proračun MKR. Voditi računa o disipativnim i disperznim greškama!



Slika: Poredjenje numeričkog i analitičkog rešenja u različitim vremenskim trenucima

Primer 9 – Postavka

Rešiti:

$$u^2 u_x + u_t = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Primer 9 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$a = u^2 = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

Jednačine karakteristika za svaki segment početnog uslova su:

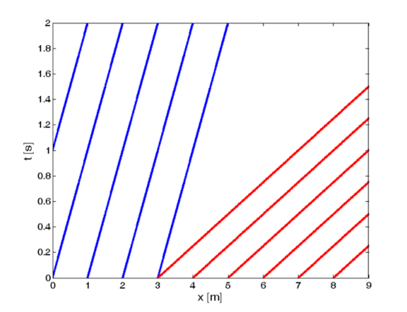
$$x = x_o + t, \quad x < 3,$$
$$x = x_o + 4t, \quad x \geq 3,$$

odakle se dobija delimično rešenje jne:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 3 + t \\ 2, & x \geq 3 + 4t \end{cases}$$

Primer 9 – Analitičko rešenje

Delimično rešenje postoji nad šrafiranom oblasti.



Slika: Karakteristike

Potrebno je dodefinisati rešenje u "kritičnoj" oblasti.

Primer 9 – Analitičko rešenje

Da bismo našli rešenje $u(x,t)$ u oblasti $t \leq x-3 < 4t$ uvodimo dopunsku fju g takvu da je $g = a^{-1}$.
Ovde:

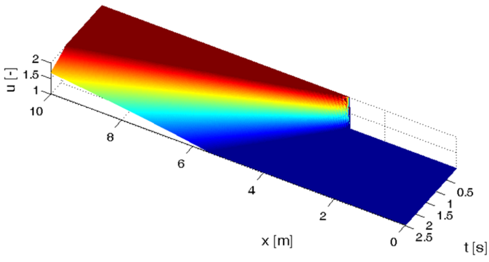
$$\begin{aligned} a(u) = u^2 \quad &\Rightarrow \quad u(a) = \sqrt{a}, \\ &\Rightarrow \quad g\big((x-x_o)/t\big) = \sqrt{(x-x_o)/t}. \end{aligned}$$

Sada je skupno rešenje:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x-3 < t \\ \sqrt{(x-3)/t}, & t \leq x-3 < 4t \\ 2, & x-3 \geq 4t \end{cases}$$

Primer 9 – Analitičko rešenje

Dodefinisano rešenje moguće je skicirati u prostoru.



Slika: Rešenje $u(x, t)$

Primer 9 – Numeričko rešenje

Primenjujući poznate šeme aproksimacije unapred po vremenu, unazad po prostoru i unazad za konvektivni član, dobija se:

$$u_t + u^2 u_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left(u_{i-1}^n\right)^2 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i-1}^n\right)^2\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1-c)u_i^n + c u_{i-1}^n, \; c = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i-1}^n\right)^2.$$

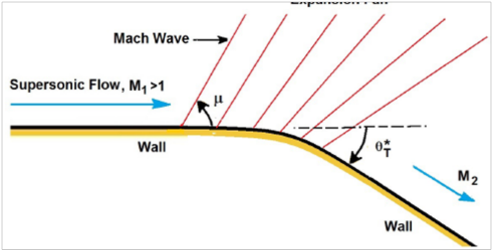
Pre proračuna potrebno je definisati početni uslov:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

(skript pr9_num.m)

Dodatno ...

Ekspanzioni talas predstavlja zonu kontinualne promene pravca $\theta_1 \rightarrow \theta_2$, intenziteta $V_1 \rightarrow V_2$ i Mahovog broja strujanja $\mathrm{M}_1 \rightarrow \mathrm{M}_2$.

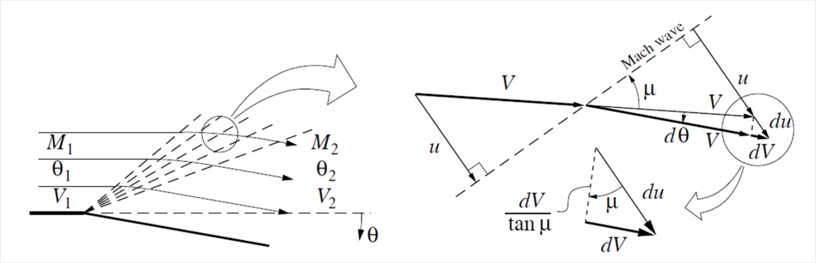


Slika: Nadzvučno strujanje pri proširenju poprečnog preseka

Dodatno ...

Iz trouglova brzina $u - V$ i $du - dV$ sledi veza:

$$\sin\mu = \frac{1}{\mathrm{M}}, \frac{1}{\tan\mu} = \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}V}{\tan\mu}\frac{1}{V} = \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$



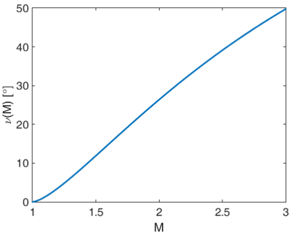
Dodatno ...

Prelaskom na Mahov broj:

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Integraljenjem izraza $\theta_2 - \theta_1 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$ gde je fja ν:

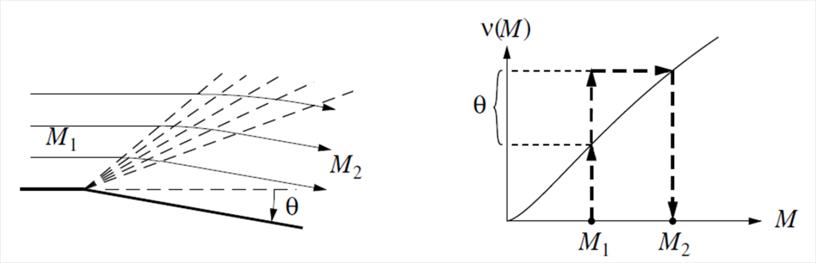
$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}(M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$



Dodatno ...

Uobičajeno je prethodnu relaciju primenjivati na početni i krajnji Mahov broj, M_1 i M_2. Odnosno, za poznato M_1 i ugao skretanja θ moguće je odrediti M_2.

$$\nu(\mathsf{M}_2) = \nu(\mathsf{M}_1) + \theta$$



Dodatno ...

Analogija

Za mali ugao skretanja θ možemo smatrati da je promena pravca zanemarljiva i skicirati ekspanzioni talas u ravni koristeći jnu

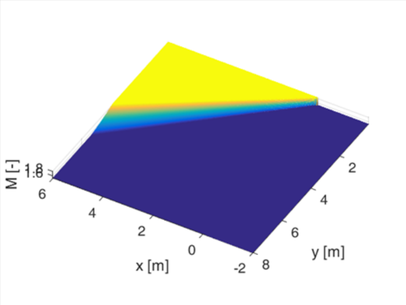
$$\sqrt{u^2-1}u_x + u_y = 0, \; -\infty < x < \infty, \; y > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \mathrm{M}_1, & x < 0 \\ \mathrm{M}_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

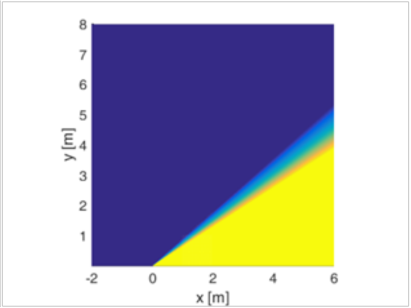
Njeno rešenje je:

$$u(x,t) = \begin{cases} \mathrm{M}_1, & x < y\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1} \\ \sqrt{1+(x/y)^2}, & y\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1} \leq x < y\sqrt{\mathrm{M}_2^2-1} \\ \mathrm{M}_2, & x \geq y\sqrt{\mathrm{M}_2^2-1} \end{cases}$$

Dodatno ...

Prostorni prikaz:





Primer 10 – Postavka

Suprotni slučaj od "ekspanzionog talasa" je kad se u delu oblasti $x - t$ karakteristike ukrštaju (preklapaju). Npr. rešiti:

$$uu_x + u_t = 0, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Primer 10 – Analitičko rešenje

Iz postavke zadatka sledi:

$$a = \frac{\partial x}{\partial r} = u,\ \frac{\partial t}{\partial r} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = C(s).$$

Nepoznata fja $u(x,t)$ konstantna je duž karakteristika.
Jednačine karakteristika za svaki segment početnog uslova su:

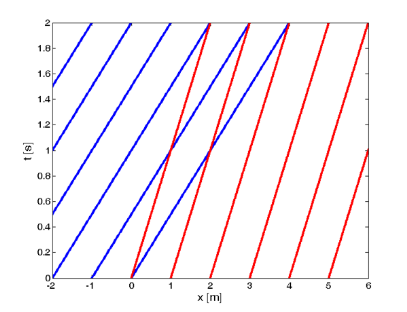
$$x = x_o + 2t, \quad x < 0,$$
$$x = x_o + t, \quad x \geq 0,$$

dok se delimično rešenje može prikazati kao:

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < 2t \\ 1, & x \geq t \end{cases}$$

Primer 10 – Analitičko rešenje

Problem je što metod karakteristika ne daje jednoznačne informacije o vrednostima fje $u(x,t)$ u oblasti $t \leq x < 2t$.



Slika: Karakteristike

Potrebno je predefinisati rešenje u “kritičnoj” oblasti.

Primer 10 – Analitičko rešenje

Mora postojati granica koja deli oblast $x - t$ na dva dela tako da se karakteristike medjusobno ne seku. Na toj granici dolazi do nagle promene fizičkih veličina.

Uvodi se dodatna fja E takva da je $E'(u) = a(u)$ kojom se definiše granica izmedju dve oblasti. Gradijent granice je onda:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E(u_2) - E(u_1)}{u_2 - u_1}$$

U ovom primeru:

$$\begin{aligned} a(u) = u \quad &\Rightarrow \quad \partial E/\partial u = u, \\ &\Rightarrow \quad E(u) = u^2/2 + C. \end{aligned}$$

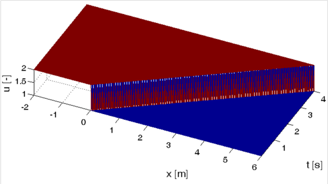
Primer 10 – Analitičko rešenje

Onda je koeficijent granične linije:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E(u_2) - E(u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{u_2^2/2 - u_1^2/2}{u_2 - u_1} = \frac{1/2 - 4/2}{1 - 2} = \frac{3}{2},$$

te je rešenje jednačine:

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < 3/2t \\ 1, & x \geq 3/2t \end{cases}$$



Primer 10 – Numeričko rešenje

Primenjujući poznate šeme aproksimacije unapred po vremenu, unazad po prostoru i unazad za konvektivni član, dobija se:

$$u_t + uu_x = 0 \Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_{i-1}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = o(\Delta x, \Delta t).$$

Nepoznati član odredjujemo pomoću poznatih članova:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = (1-c)u_i^n + cu_{i-1}^n, \; c = u_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

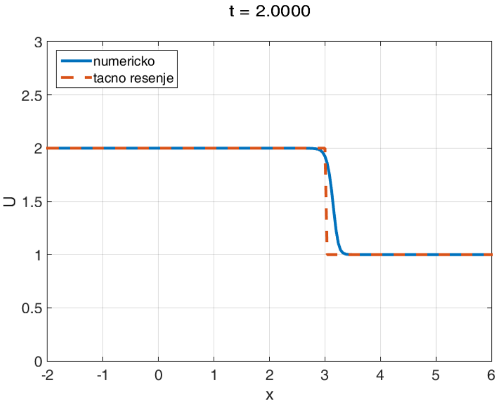
Pre proračuna potrebno je definisati početni uslov:

$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(skript pr10_num.m)

Primer 10 – Numeričko rešenje

Opet je u pitanju nelinearna jna i treba imati u vidu da numerička greška nije beznačajna!



Slika: Poredjenje numeričkog i analitičkog rešenja