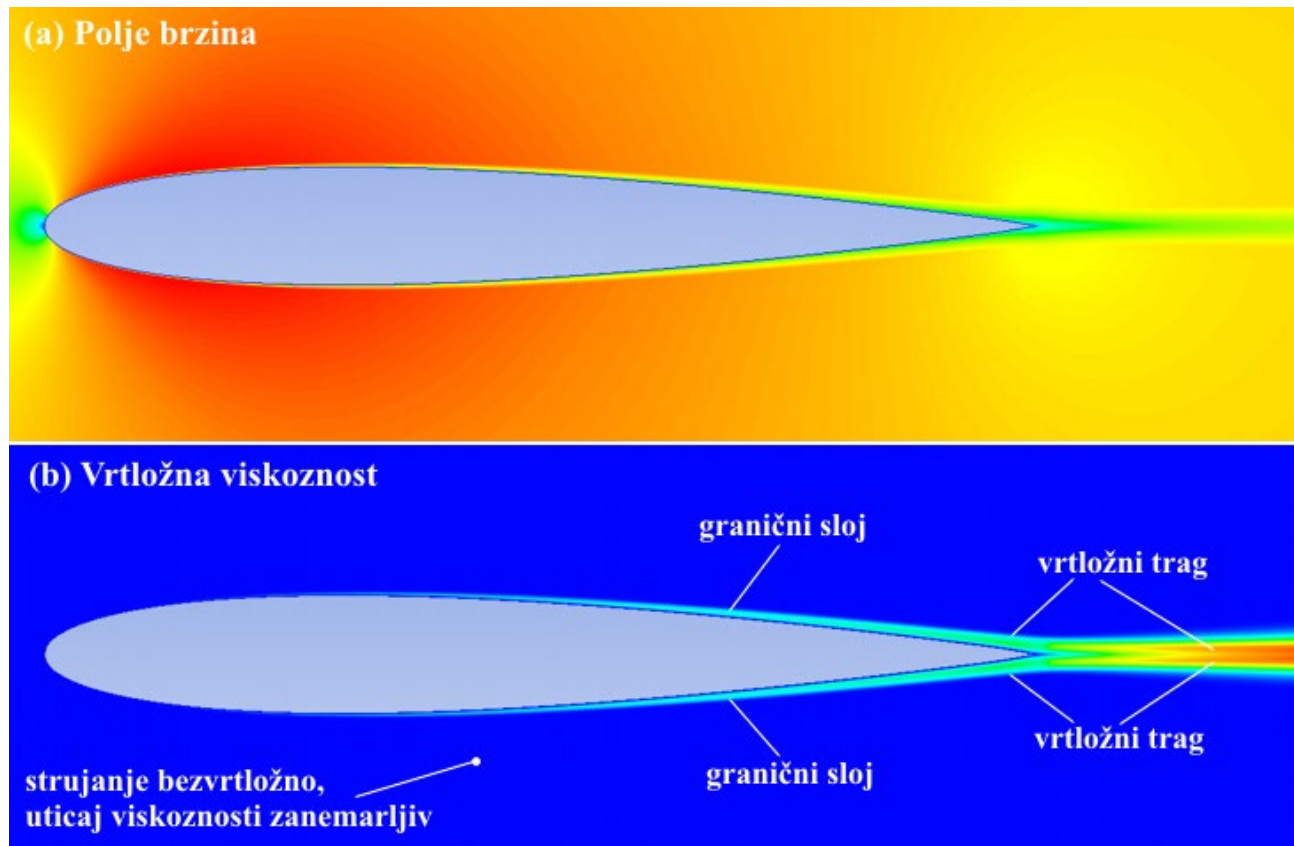


Granični sloj



Slika 1. CFD simulacija strujanja oko aeroprofila NACA 0012 (ANSYS Fluent 14)

Na slikama 1. (a) i (b) prikazana je vizuelizacija polja brzina i tzv. "vrtložne viskoznosti" oko simetričnog aeroprofila pri nultom napadnom uglu. One u potpunosti potvrđuju model strujnog polja koji je 1904. godine predložio Prantl (Ludvig Prandtl), za slučaj strujanja realnog viskoznog fluida pri kojima su efekti stišljivosti zanemarljivi (o ovome je već načelno bilo govora):

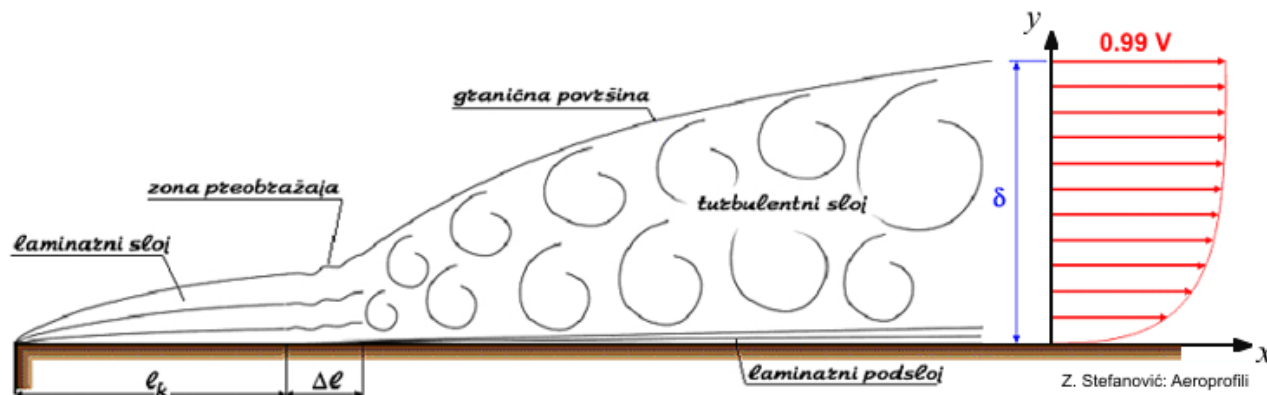
- *Granični sloj* je oblast struje relativno male debljine u odnosu na dimenzije opstrujavane konture, u kojoj su efekti viskoznosti izraženi i u proračunskom smislu se nikako ne mogu zanemariti.
- *Vrtložni trag* je oblast izrazito vrtložnog strujanja (uključujući i povratno) i nastaje iza mesta "odvajanja" ili "otcepljenja" graničnog sloja.
- *Ostatak strujnog polja* je treća oblast, van prve dve, i to je domen u kome praktično nema vrtloženja i uticaj viskoznosti je zanemarljiv.

Samo u trećoj oblasti (uniformno plava boja na slici 1. (b)) vazduh se može tretirati kao idealan gas u proračunskom smislu, a strujanje kao potencijalno (nevrtložno i neviskozno). Treba naglasiti da, na aeroprofilima i uzgonskim površinama, do odvajanja graničnog sloja i formiranja vrtložnog traga može doći i znatno ispred izlazne ivice, zavisno od zakrivljenosti konture, napadnog ugla i drugih parametara.

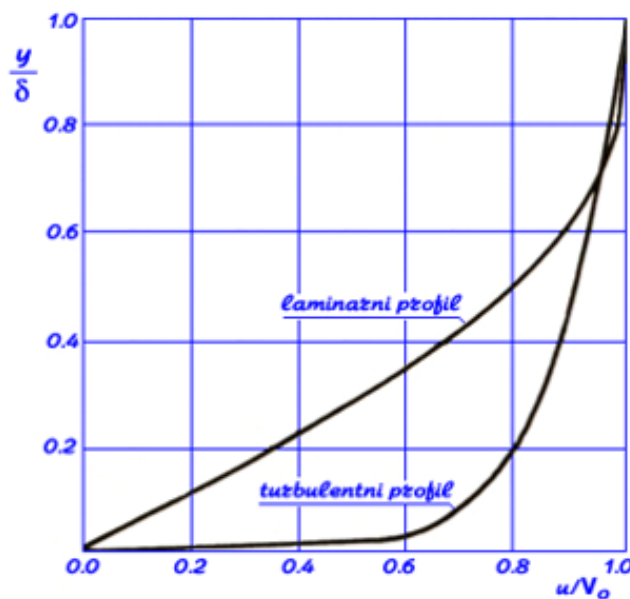
Pod **graničnim slojem** se podrazumeva oblast u kojoj brzina progresivno raste od nule na opstrujavanom telu, u pravcu lokalne normale, do 99% od brzine spoljašnje struje V u trećoj oblasti, gde efekti viskoznosti više nisu od uticaja (pošto se brzine asimptotski izjednačavaju, pa je tačnu granicu teško odrediti). Na osnovu ovog kriterijuma se definiše i **debljina graničnog sloja** δ - slika 2.

Posmatramo strujanje *unutar* graničnog sloja na ravnoj ploči koja se nalazi pod nultim napadnim uglom u odnosu na vazдушnu struju (slika 2). Na njegovom početku formira se slojevito laminarno strujanje, u kome je razmena fluidnih delića između slojeva mala, a koje zatim prelazi u uzburkano turbulentno strujanje, gde je razmena fluidnih delića (mikrovrtloženje) intenzivna. Po ovome su dva tipa graničnog sloja dobila nazive *laminarni* i *turbulentni*.

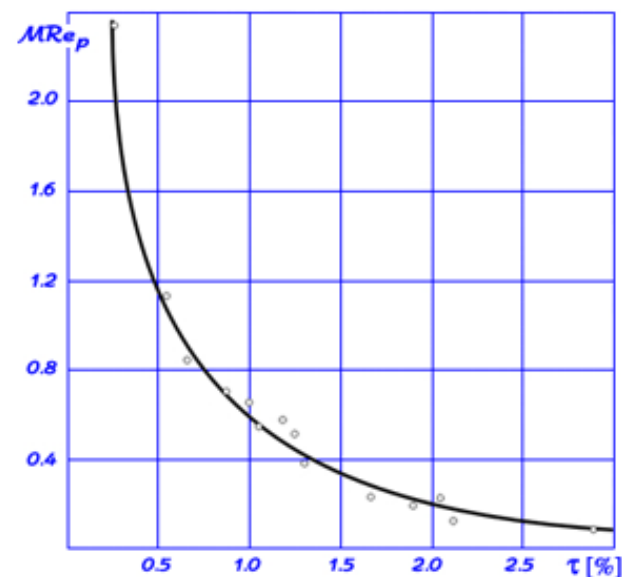
U nekim opisima se kaže da se u laminarnom graničnom sloju fluidni delići u okviru lamina "kotrljaju" jedni iznad drugih, pa je samim tim **laminarni granični sloj tanji i stvara manji otpor** trenja na površini koju opstrujava. S druge strane, zbog pojave unutrašnjeg mikrovrtloženja i intenzivnog mešanja fluidnih delića i po visini, **turbulentni granični sloj je deblji i stvara veći otpor** trenja na opstrujavanoj površini.



Slika 2. Šematski prikaz graničnog sloja i definicija njegove debljine δ (debljina graničnog sloja je mnogostruko uvećana radi jasnijeg prikaza)



Slika 3. Profili relativnih brzina



Slika 4. Uticaj stepena turbulencije na Reynoldsov broj preobražaja

Ove konstatacije generalno važe i za strujanje oko zakrivljenih kontura. Tipični profili brzina u laminarnom i turbulentnom graničnom sloju se razlikuju, pri čemu je zbog unutrašnjeg mešanja struje, profil u turbulentnom sloju ispunjeniji. Slika 3 daje njihovo poređenje, pri istoj relativnoj debljini jednog i drugog sloja. Razlika postoji i zato što mešanja fluida između spoljašnje struje i laminarnog sloja praktično nema, dok naprotiv, između turbulentnog sloja i spoljne struje postoji intenzivna razmena fluidnih delića, koji dominantno ulaze u turbulentni sloj i energizuju ga.

Prelaz laminarnog u turbulentni granični sloj vrši se u okviru zone preobražaja, koja ima svoju konačnu dužinu Δl (slika 2). Međutim, u smislu operativnih proračuna, ova dužina se često zanemaruje, pa se usvaja da se preobražaj vrši u vertikalnoj *ravni preobražaja*, na rastojanju l_k . Njen položaj zavisi od hrapavosti površine, njene zakrivljenosti, efekata stišljivosti, ali i od stepena turbulentnosti nadolazeće vazdušne struje. Reynoldsov broj koji odgovara položaju tačke preobražaja zove se Reynoldsov broj preobražaja graničnog sloja:

$$\text{Re}_p = \frac{V \cdot l_k}{\nu} \quad (1)$$

gde, kao što je već napomenuto, ν predstavlja kinematsku viskoznost vazduha:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

Zavisnost Re_p od stepena turbulentnosti strujnog polja prikazana je na slici 4. Od nje u realnim uslovima zavisi i zona preobražaja Δl , koja je utoliko kraća što je stepen turbulentnosti manji. Pošto debljina graničnog sloja δ_k na mestu preobražaja direktno zavisi od rastojanja l_k , u literaturi se ponekad položaj preobražaja definiše Reynoldsovim brojem čija je karakteristična dužina debljina laminarnog graničnog sloja na tom mestu:

$$\text{Re}_\delta = \frac{V \cdot (\delta)_{l_k}}{\nu} \quad (3)$$

Maseni protok u jedinici vremena na nekom rastojanju y od zida (u 2D analizama često se koristi $x - y$ koordinatni sistem) kroz elementarni presek visine dy biće: $\dot{m}(y) = \rho(y) \cdot u(y) \cdot b \, dy$. Komponente brzine u $x - y$ koordinatnom sistemu su u - horizontalna i v - vertikalna, dok širina opstrujavane površine ima jediničnu vrednost $b = 1 \text{ m}$ i može se izostaviti, pa generalno možemo napisati:

$$\dot{m}(y) = \rho u \, dy$$

Pošto unutar graničnog sloja brzina progresivno opada od V do nule na konturi, protok mase, količine kretanja i kinetičke energije u kontrolnoj zapremini iznad opstrujavane konture, koja obuhvata i granični sloj, biće manji od onog koji bi postojao da konturu opstrujava idealni (neviskozni) fluid. Te razlike definišu se kao debljina istiskivanja protoka mase (ili samo debljina istiskivajna), debljina količine kretanja i debljina energije (ili energetska debljina). Pod pretpostavkom nestišljivog strujanja, mogu se izvesti na sledeći način:

(1) Izjednačavanjem gubitka protoka mase (videti sliku 5, šrafirana zona):

$$\rho V \delta_p = \int_0^\delta \rho(V - u) dy$$

dobija se **debljina istiskivanja**:

$$\delta_p = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy$$

(4)

(2) Isto tako, izjednačavanjem gubitka količine kretanja (gornji izraz uvećan za dimenziju brzine):

$$\rho V^2 \delta_k = \int_0^\delta \rho(V - u)u dy$$

dobijamo **debljinu količine kretanja**:

$$\delta_k = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V}\right) \frac{u}{V} dy$$

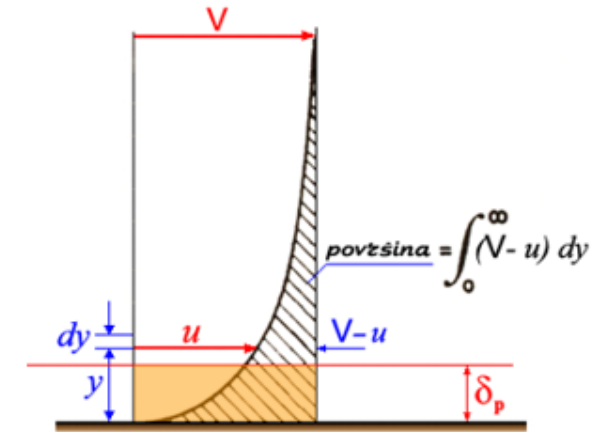
(5)

(3) Analogno prethodnim izvođenjima, iz izraza: $\rho V^3 \delta_e = \int_0^\delta \rho(V^2 - u^2)u dy$

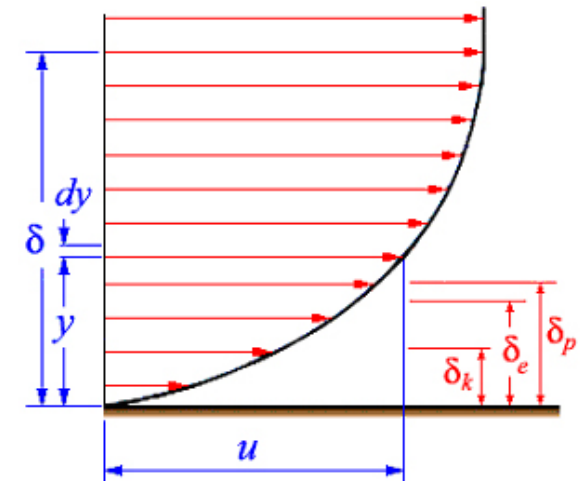
dobija se **energetska debljina**:

$$\delta_e = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{u}{V}\right)^2\right) \frac{u}{V} dy$$

(6)



Slika 5. Princip definisanja debljine istiskivanja (protoka mase)



Slika 6. Debljina istiskivanja, debljina količine kretanja i energije

Ove veličine imaju važnu ulogu u proračunima strujanja oko aeroprofila metodama baziranim na tzv. **zonalnom pristupu**, koji direktno proističe iz Prandtlovog modela:

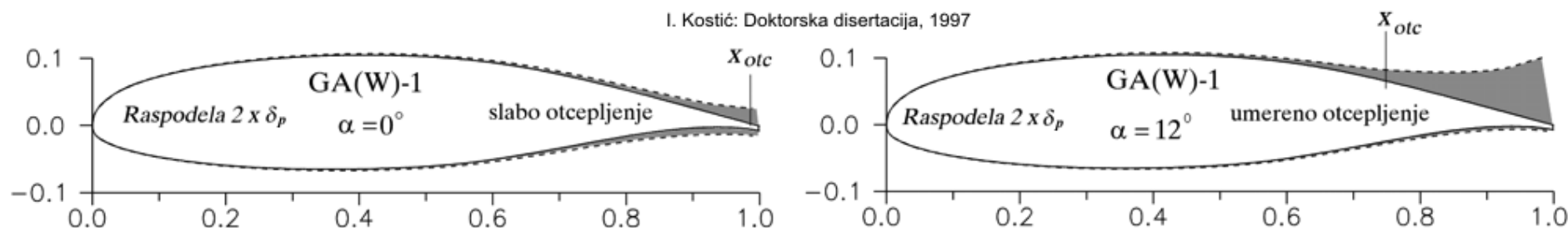
- ako se koordinatama realne konture aeroprofila doda lokalna raspodela debljine istiskivanja δ_p , dobija se *efektivna opstrujavana kontura*, oko koje se proračun strujanja u kontekstu raspodele pritisaka i određivanja koeficijenata **uzgona** i **momenta** može vršiti kao da je vazduh idealan gas (videti sliku 7);
- pomoću debljine količine kretanja δ_k , može se izračunati **otpor** aeroprofila i to ne samo otpor trenja, već i ukupni otpor, korišćenjem empirijskih jednačina koje povezuju vrednost δ_k na izlaznoj ivici sa padom količine kretanja u vrtložnom tragu dovoljno daleko iza aeroprofila, što predstavlja numeričku simulaciju metode traversiranja vrtložnog traga u aerotunelima.

Pri tome se, umesto vrlo složenih Navije-Stoksovih jednačina za proračun kompletnog strujnog polja, lokalno za proračun strujanja unutar graničnog sloja koriste znatno jednostavnije semiempirijske metode, a za proračun strujanja oko efektivne konture takođe pojednostavljeni - potencijalni model strujanja.

Za potrebe ovih proračuna definiše se odnos:

$$H = \frac{\delta_p}{\delta_k} \quad (7)$$

koji se zove **parametar oblika graničnog sloja**. Za laminarni sloj on je okvirno u granicama $H = 2 \div 3$, a za turbulentni $H = 1.5 \div 2$. Porast ovog parametra do određene empirijski definisane vrednosti ukazuje na pojavu odvajanja graničnog sloja, pa se za proračun iza te tačke na konturi koristi neki od postojećih proračunskih modela *vrtložnog traga*. Neki računarski programi koji su i danas u upotrebi koriste upravo ovaj pristup, a dobijeni rezultati su sasvim korektni za potrebe inženjerskih proračuna (svakako, poštujući poznata ograničenja u smislu primene programa).



Slika 7. Udvojena debljina istiskivanja (radi boljeg prikaza) na aeropofilu NASA GA(W)-1, u domenu graničnog sloja i vrtložnog traga

Matematički model graničnog sloja

Jednačina Navije Stoksa za nestišljivo 2D strujanje, projektovana na pravac y ose (izvođenje se može naći u brojnoj literaturi), ima formu:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Unutar graničnog sloja, komponenta v ukupne brzine je mala veličina $v \approx 0$ (ovo ne važi za znatno deblji vrtložni trag), pa svi članovi u gornjoj jednačini koji sadrže brzinu postaju jednaki nuli. Odavde sledi da je promena pritiska po visini graničnog sloja jednaka nuli:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

Samim tim, merenja pritiska tokom aerotunelskih ispitivanja mogu se vršiti na samom modelu, pri čemu je greška usled merenja kroz granični sloj zanemarljiva.

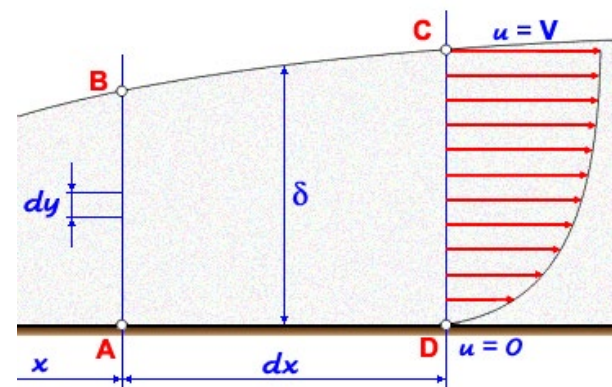
Ako posmatramo strujanje preko segmenta ravne ili zakrivljene neporozne površine $AD = dx$ (slika 8), možemo definisati kontrolnu zapreminu $ABCD$, gde BC predstavlja graničnu površinu, i $AB \approx DC \approx \delta$. Kada su efekti stišljivosti zanemarljivi, strujanje fluida definisano je zakonima o: 1) održanju protoka mase i 2) promeni količine kretanja (dok se u opštem slučaju, za stišljiva strujanja kod kojih dolazi do znatnije promene temperature u strujnom polju, mora koristiti i jednačina održanja energije).

1) Protok mase definisan je jednačinama:

$$\text{Ulazni protok: } Q_{AB} = \int_0^{\delta} \rho u \, dy, \quad Q_{BC} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u \, dy \right) dx$$

$$\text{Ravna ploča: } Q_{AD} = 0 \text{ jer je površina neporozna,}$$

$$\text{Izlazni protok: } Q_{DC} = - \int_0^{\delta} \rho u \, dy - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u \, dy \right) dx$$



Slika 8. Kontrolna zapremina (kontura tela može biti i zakrivljena)

2) Druga jednačina proističe iz drugog Njutnovog zakona, po kome je promena količine kretanja u jedinici vremena u kontrolnoj zapremini jednaka sumi sila koja na nju deluje. U ovom slučaju, suma sila u pravcu x - ose je rezultanta delovanja normalnih i tangencijalnih napona po odgovarajućim površinama (dok je uticaj zapreminske sile, tj. težine vazduha zanemarljiv)

$$F_X = p\delta - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \delta - \tau_w dx = -\delta \frac{dp}{dx} dx - \tau_w dx, \text{ dok je promena količine kretanja jednaka } -\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho(V-u)u dy \right] dx. \text{ Njihovim}$$

izjednačavanjem i deljenjem sa dx dobija se opšta jednačina graničnog sloja, odnosno **jednačina količine kretanja za granični sloj**, ili osnovna forma **jednačine Karmana** (Theodor von Karman):

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho(V-u)u dy = \delta \frac{dp}{dx} + \tau_w \quad (8)$$

Uvođenjem diferencijalne forme jednačine Bernulija $p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}$ (jednačina Ojlera) i nakon matematičkih transformacija, prethodna jednačina može se napisati u formi pogodnijoj za proračune strujanja u graničnom sloju oko aeroprofila, gde postoji gradijent brzine i predstavlja drugu formu jednačine Karmana:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho(V-u)u dy + \frac{dV}{dx} \int_0^\delta \rho(V-u) dy = \tau_w \quad (9)$$

Konačno, uvođenjem debljine istiskivanja i količine kretanja, dobija se **treća forma jednačine Karmana**, napisana u obliku koju je definisao Prandtl (pa se u literaturi zove i jednačina Prandtla):

$$\frac{d\delta_k}{dx} + 2 \left(\frac{\delta_k}{V} + \frac{\delta_p}{2V} \right) \frac{dV}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V^2} \quad (10)$$

Ona se primenjuje u proračunima nestišljivog strujnog polja i predstavlja oblik jednačine koji se najčešće koristi u operativnim zonalnim proračunima strujanja, koja se baziraju na integralnom pristupu modeliranja graničnog sloja (za slučaj stišljivog strujanja jednačina ima nešto složeniji oblik, gde figuriše i Mahov broj kao mera uticaja stišljivosti).

Jednačina Karmana ima tri nepoznate i to su: 1) tangencijalni napon na zidu τ_w , 2) brzina u graničnom sloju u i 3) njegova debljina δ . (S druge strane, V , dV/dx i ρ predstavljaju parametre nezavisne od karakteristika graničnog sloja.) Za njeno rešavanje teoretski su potrebne još dve dopunske jednačine. Operativno, to mogu biti jednačine koje definišu zakon promene brzine unutar graničnog sloja $u = f(y, \delta)$ i zakon promene tangencijalnog napona $\tau = g(\delta, V)$.

Kada je u pitanju turbulentni granični sloj na aeroprofilima (pošto je jednačina Karmana generalna i važi za oba tipa graničnog sloja), broj potrebnih dopunskih jednačina postaje veći. Naime, osim što se za njega u jednačini Karmana koriste vremenski osrednjeni članovi zbog fluktuacija parametara, većina dopunskih jednačina mora uvesti i dopunske promenljive, pa ukupan broj pomoćnih jednačina do zatvaranja proračuna, zavisno od konkretne metode, može biti i veći od deset.

Granični sloj na ravnoj ploči paralelnoj sa vazdušnom strujom

U primenjenoj aerodinamici, većina preliminarne proračuna vezanih za uticaj graničnog sloja - uključujući i proračune kompletnih konfiguracija letelica, polazi od jednačina graničnog sloja izvedenih za glatku ravnu ploču pod nulim napadnim uglom. Rešenja tih jednačina se zatim empirijski koriguju za efekte neplanarnosti opstrujavanih površina.

U slučaju ravne ploče, brzina iznad celokupne konture graničnog sloja praktično je jednaka brzini neporemećenog strujnog polja V_0 (za teorijska izvođenja može se usvojiti da je u ovom slučaju uticaj debljine istiskivanja na promenu brzine V_0 mali), tako da je:

$$\frac{dV}{dx} \approx 0 \Rightarrow V = V_0, \text{ pa iz diferencijalne forme jednačine Bernulija sledi i da je: } \frac{dp}{dx} = 0$$

Osnovna forma jednačine Karmana transformiše se u oblik:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho(V_0 - u)u \, dy = \tau_w \quad (11)$$

koji predstavlja polaznu jednačinu za oba tipa graničnog sloja za ovaj slučaj opstrujavanja.

U slučaju malih Rejnoldsovih brojeva, na ravnoj ploči postojao bi samo laminarni granični sloj. Nasuprot tome, u slučaju vrlo velikih Re brojeva, laminarni sloj je jako male dužine, pa se može smatrati da na njoj postoji samo turbulentni granični sloj. Međutim, za srednje Re brojeve, na ploči će postojati i laminarni i turbulentni granični sloj, pa se on naziva mešovitim graničnim slojem.

Laminarni granični sloj

Za laminarni granični sloj kao dopunske jednačine koriste se:

- zakon promene brzine, koji prema ispitivanjima za laminarni sloj ima *paraboličku formu* $u = 2V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta}$, i
- Njutnov izraz za tangencijalni napon na površini ploče $\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}$.

Ukoliko razmatramo parametre na nekom rastojanju $l = x$ od prednje ivice ploče, sila trenja koja se javlja do tog položaja na ploči jedinične širine iznosiće $T = \int_0^x \tau_w(x) dx$, gde $\tau_w(x)$ predstavlja promenu tangencijalnog napona duž ploče do položaja x . Koeficijent otpora trenja za jedinični razmah ploče biće:

$$C_\tau = \frac{T}{0.5 \cdot \rho \cdot V_0^2 \cdot x \cdot 1}$$

Rešenja za debljinu graničnog sloja i koeficijent trenja ravne ploče sa laminarnim graničnim slojem (za detalje izvođenja videti npr. M. Nenadović, Osnovi aerodinamičkih konstrukcija - opšti deo), su:

$$\delta = \frac{5.48 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{i} \quad C_\tau = \frac{1.46}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

pri čemu se Reynoldsov broj Re_x računa kao $\text{Re}_x = \frac{V_0 x}{\nu}$.

Međutim, u operativnim primenama češće se koriste nešto drugačija, empirijski modifikovana rešenja *Blazijusa*:

$$\delta = \frac{4.92 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (12)$$

i

$$C_\tau = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (13)$$

Debljine istiskivanja i količine kretanja za laminarni granični sloj na ravnoj ploči su:

$$\delta_p = \frac{1.73 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (14)$$

$$\delta_k = \frac{0.664 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (15)$$

pa parametar oblika, po Blazijusovom profilu graničnog sloja, ima vrednost $H = \frac{\delta_p}{\delta_k} = 2.6$.

Turbulentni granični sloj

Malo istorije - Reynolds je 1883. godine obavljao eksperimente sa strujanjem vode u cevima, vršeći vizuelizaciju strujnog polja puštanjem niti obojene tečnosti kroz sredinu cevi. Nit je primala oblik jedne od strujnica, međutim na određenoj udaljenosti ta nit više nije bila vidljiva. Reynolds je zaključio da od tog mesta voda više ne struji u neporemećenim slojevima, nego da dolazi do razmene fluidnih delića između slojeva, koja dovodi do zamućenja - takvo strujanje se naziva turbulentnim. Za razliku od njegovih eksperimenata, u vazduhoplovstvu pri vrlo visokim Re brojevima, deo opstrujavane površine pod laminarnim slojem može postati zanemarljiv, pa se proračuni vrše kao da na njoj postoji samo turbulentni granični sloj. Međutim, nepravilnosti u blizini napadne ivice krila (zakivci, preklop oplata, ostaci insekata itd.) mogu i pri umerenim Re brojevima dovesti do prinudne rane transformacije laminarnog u turbulentni sloj.

Za turbulentni granični sloj na ravnoj ploči moguće je definisati dve dopunske jednačine koje ne uvode dodatne promenljive (kao što je to slučaj sa aeroprofilima). Po modelu Prandtl-Karmana, to su:

- zakon promene brzine $u = V_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$ i
- izraz za napon smicanja na površini ploče $\tau_w = 0.00228 \rho V_0^2 \left(\frac{\mu}{\rho V_0 \delta} \right)^{1/4}$.

Pod pretpostavkom da na ploči postoji isključivo turbulentni granični sloj, dobijaju se eksperimentalno verifikovani, tzv. *Prandtl-Karmanovi izrazi* u obliku:

$$\delta = \frac{0.375 x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad (16)$$

i

$$C_\tau = \frac{0.074}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad (17)$$

Međutim, u vazduhoplovnim primenama, za dijapazome Reynoldsovog broja $10^6 < Re < 10^9$, bolje rezultate za koeficijent trenja daje izraz Šlihtinga (Hermann Schlichting):

$$C_\tau = \frac{0.455}{(\log Re_x)^{2.58}} \quad (18)$$

Debljine istiskivanja i količine kretanja definisane su izrazima:

$$\delta_p = \frac{0.046 x}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad (19) \quad \delta_k = \frac{0.036 x}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad (20)$$

Mešoviti laminarno-turbulentni granični sloj

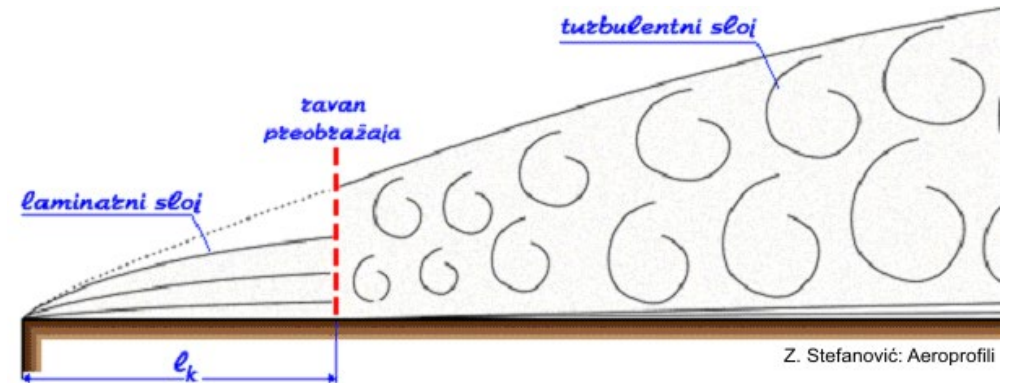
U slučaju analize mešovitog graničnog sloja na ravnoj ploči dužine l , koriste se sledeće Prandtlove pretpostavke:

- preobražaj laminarnog u turbulentni granični sloj vrši se u ravni preobražaja, na rastojanju l_k ;
- debljina turbulentnog graničnog sloja iza ravni preobražaja (u domenu $l_k \div l$) jednaka je debljini koju bi on imao da je formiran od same prednje ivice ravne ploče, $l = 0$.

To znači da se problem određivanja debljine mešovitog graničnog sloja svodi na računanje debljine laminarnog graničnog sloja po jednačini (12) do rastojanja l_k , a po jednačini (16) za turbulentni granični sloj iza njega, u domenu $l_k \div l$.

Ako koeficijent površinskog otpora trenja u domenu laminarnog sloja označimo sa $C_{\tau l}$, a u domenu turbulentnog sa $C_{\tau t}$, koeficijent trenja C_τ za celu dužinu ploče sa mešovitim graničnim slojem možemo definisati kao:

$$C_\tau = \frac{1}{l} \int_0^{l_k} C_{\tau l} dx + \frac{1}{l} \int_{l_k}^l C_{\tau t} dx = \frac{1}{l} \int_0^{l_k} C_{\tau l} dx + \frac{1}{l} \left(\int_0^l C_{\tau t} dx - \int_0^{l_k} C_{\tau t} dx \right)$$



Slika 9. Prandtlov model mešovitog graničnog sloja

odnosno:

$$C_\tau = \frac{l_k}{l} C_{\tau l_k} + \frac{1}{l} (l \cdot C_{\tau t} - l_k \cdot C_{\tau t_k})$$

Uvođenjem smene $l_k / l = \text{Re}_p / \text{Re}$, gde Re odgovara ukupnoj dužini ploče, dobijamo:

$$C_\tau = C_{\tau t} - (C_{\tau t_k} - C_{\tau l_k}) \frac{\text{Re}_p}{\text{Re}} \quad (21)$$

Vrednosti drugog člana na desnoj strani jednačine (21) mogu se odrediti na osnovu brojnih eksperimentalnih ispitivanja. Na osnovu ispitivanja Gebersa za glatku ravnu ploču, Prandtl je usvojio sledeće srednje empirijske vrednosti:

$$C_{\tau t_k} - C_{\tau l_k} \approx 0.0035 \quad \text{i} \quad \text{Re}_p \approx 485000, \quad \text{tako da je:} \quad (C_{\tau t_k} - C_{\tau l_k}) \text{Re}_p \approx 1700$$

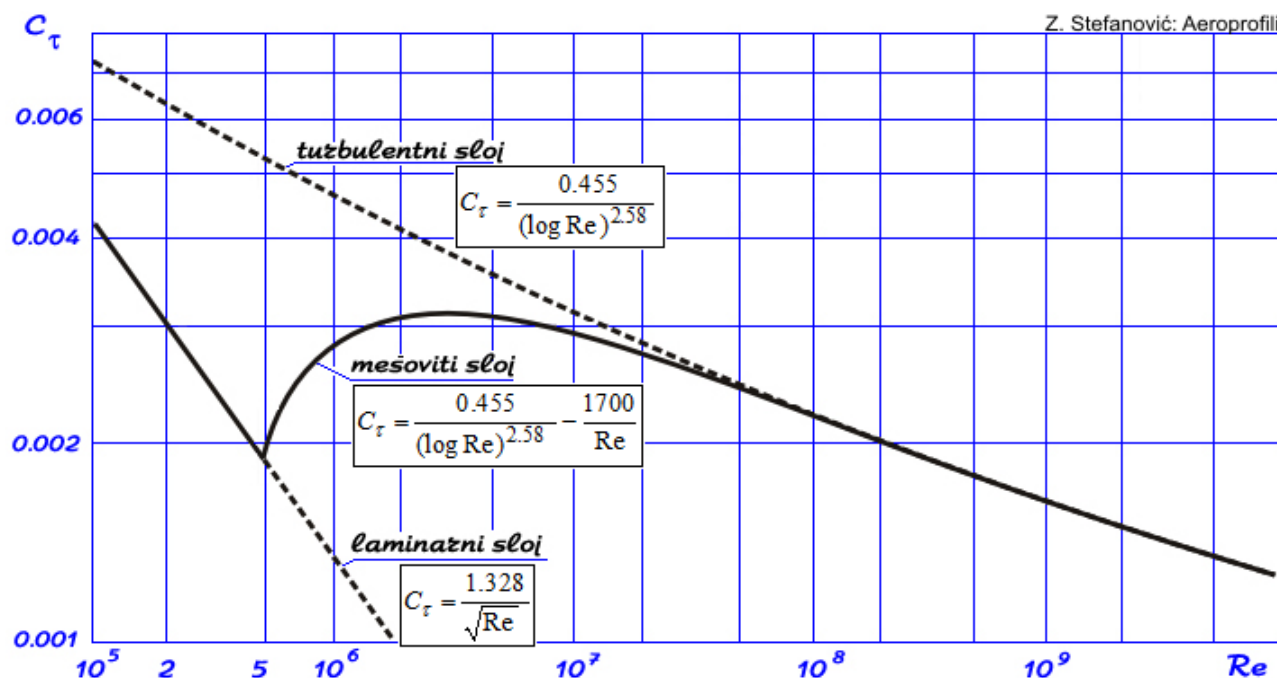
pa se na osnovu njih i jednačine (17) dobija izraz za proračun koeficijenta trenja sa mešovitim graničnim slojem:

$$C_\tau = \frac{0.074}{\sqrt[5]{\text{Re}}} - \frac{1700}{\text{Re}} \quad (21)$$

dok je za vazduhoplovnu primenu pogodniji izraz:

$$C_\tau = \frac{0.455}{(\log \text{Re})^{2.58}} - \frac{1700}{\text{Re}} \quad (22)$$

Svi prethodni izrazi odnose se na glatku ravnu ploču koja se, u funkciji "zida", opstrujava sa jedne strane. Na slici 10 prikazana je promena koeficijenta otpora površinskog trenja ravne ploče u širem dijapazonu Re brojeva.



Slika 10. Koeficijent otpora trenja glatke ravne ploče, opstrujavane s jedne strane

Ravna ploča kao beskonačno tanak aeroprofil pri nultim napadnom uglu

U aerodinamici se dosta često razmatranja raznih fenomena strujanja vrše najpre na najprostijem aeroprofilu, a to je beskonačno tanka ravna ploča. U praksi aeroprofili tipa ravna ploča postoje, ali iz strukturalnih razloga ipak nisu beskonačno tanki, npr. na repnim površinama ultra-lakih letelica, nekih raketa, projektila, itd. Jedan od osnovnih tabličnih parametara aeroprofila je koeficijent minimalnog otpora C_{X0min} . Otpor ravne ploče biće jednak ovoj vrednosti kada se ona nalazi pod nultim napadnim uglom u odnosu na vazдушnu struju. Pošto je, kao aeroprofil, ravna ploča obostrano opstrujavana i pošto je njen otpor oblika praktično jednak nuli, C_{X0min} ovakvog aeroprofila tetive l dobićemo jednostavnim množenjem $\times 2$ izraza (13), (18) i (22):

- za slučaj čisto laminarnog graničnog sloja

$$C_{X0min} = \frac{2.656}{\sqrt{Re_l}}$$

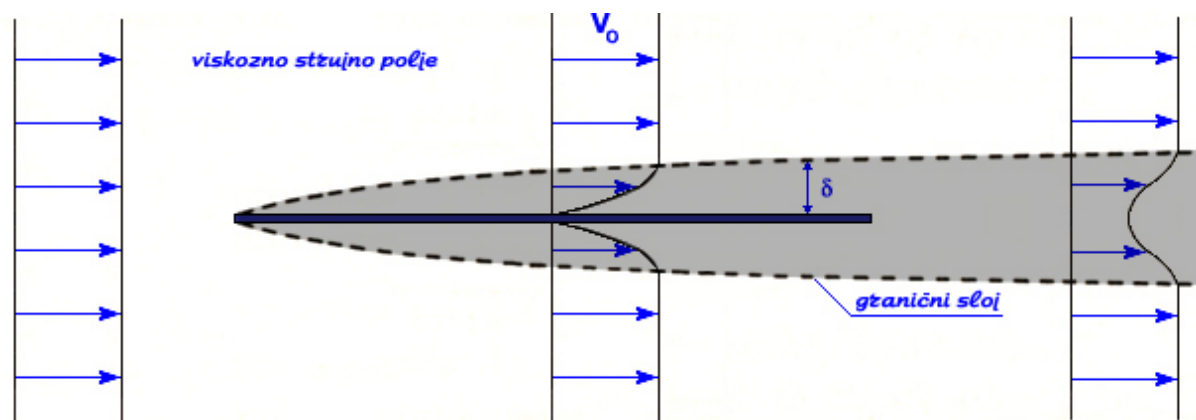
- za slučaj čisto turbulentnog graničnog sloja

$$C_{X0min} = \frac{0.910}{(\log Re_l)^{2.58}}$$

- za slučaj mešovito graničnog sloja

$$C_{X0min} = \frac{0.910}{(\log Re_l)^{2.58}} - \frac{3400}{Re_l}.$$

Izrazi važe za glatku ravnu ploču.



Slika 11. Aeroprofil ravna ploča pod nultim napadnim uglom; debljina graničnog sloja je višestruko uvećana radi boljeg prikaza

Odvajanje graničnog sloja

Za razliku od prethodno razmatranog strujanja oko ravne ploče, strujanje oko aeroprofila karakterisano je promenom brzine (ubrzavanjem i usporavanjem) oko njegove konture. Posledica toga je pojava podužnog gradijenta pritiska. Iako je struktura graničnog sloja principski ista, gradijent dp/dx ima bitan uticaj na njegovo formiranje i raspodelu. U ovom kontekstu, ako posmatramo gornjaku aeroprofila na slici 12, možemo definisati dve zone:

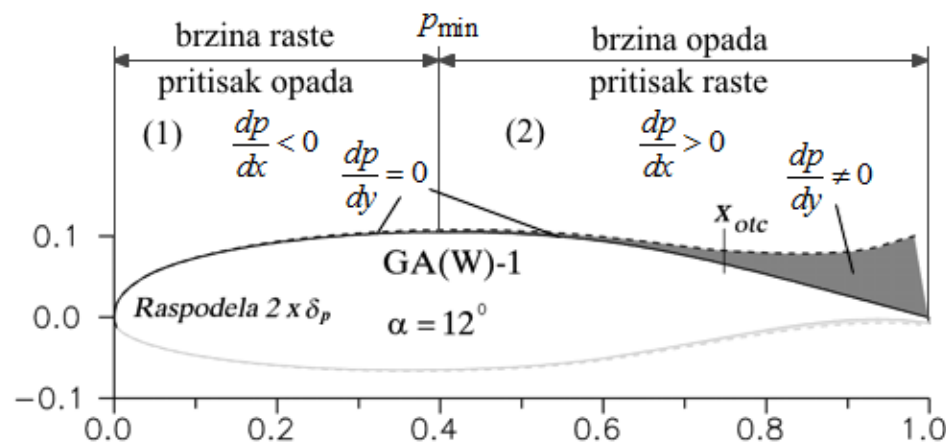
(1) U ovoj oblasti, usled porasta brzine, pritisak od napadne ivice podužno progresivno opada do vrednosti p_{min} , gde se ova zona završava. Granični sloj u ovom domenu dosta je sličan onome na ravnoj ploči, pri čemu važi $dp/dy = 0$, ali je razlika u tome što podužni pad pritiska $dp/dx < 0$ ubrzava čestice fluida, pa je zbog toga profil brzine puniji u blizini zida. Zato se ovakva promena pritiska zove **povoljni gradijent pritiska**.

(2) Iza tačke minimalnog pritiska, brzina opada i tada je $dp/dx > 0$. Da je fluid neviskozan, kinetička energija dobijena u prvoj zoni bila bi dovoljna da, uprkos pozitivnom gradijentu pritiska, dovede čestice do izlazne ivice. Međutim, usled sile trenja u graničnom sloju, jedan deo kinetičke energije pretvara se u toplotu, a gradijent pritiska imaće tendenciju da gradijent brzine fluida u graničnom sloju svede na nulu pre izlazne ivice, što će se prvo dogoditi na zidu (slika 13). Na tom mestu postojaće tzv. tačka infleksije na profilu brzine:

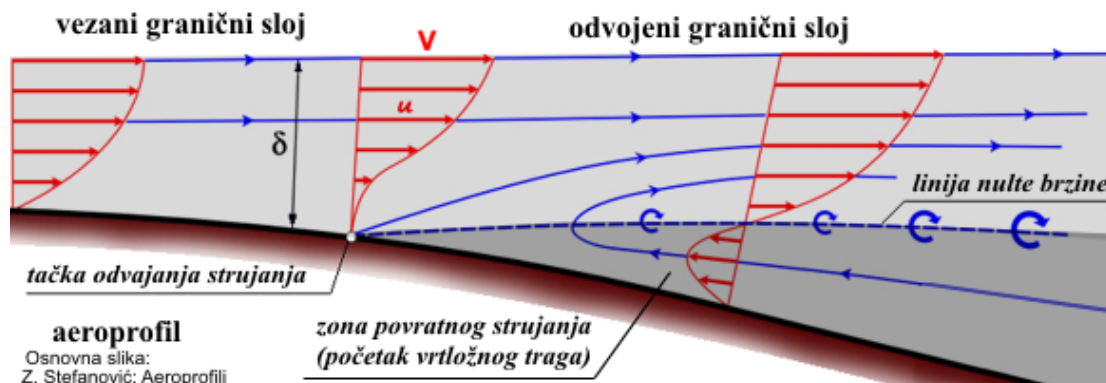
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (23)$$

$$\text{dok je normalni gradijent pritiska iza tog položaja: } \frac{dp}{dy} \neq 0 \quad (24)$$

Ta tačka se zove **tačka odvajanja** ili **tačka otcepljenja** graničnog sloja, a takvo delovanje pritiska u zoni (2) zove se **nepovoljni gradijent pritiska**. Iza nje javlja se povratno strujanje uz površinu aeroprofila, čestice fluida obrazuju izraženo vrtložno strujanje, koje se naziva **vrtložni trag**. To više nije granični sloj, već sloj ispunjen makrovrtloženjem (za razliku od turbulentnog sloja, gde se govori o mikrovrtloženju).



Slika 12. Gradijenti pritiska na gornjaci aeroprofila (osenčena oblast je dvostruka debljina istiskivanja)



Slika 13. Profili brzine u okolini tačke odvajanja graničnog sloja na aeroprofilu i nastanak vrtložnog traga

U prikazanom modelu strujanja tačka odvajanja je iza tačke minimalnog pritiska, i biće utoliko bliža mestu minimalnog pritiska što je veći pozitivni gradijent pritiska. Za vrtložni trag više ne važe pretpostavke uvedene za granični sloj, pre svega zato što je njegova debljina znatno veća od graničnog sloja, a strujanje unutar njega je izrazito nestacionarno (fluktuacije parametara u funkciji vremena su vrlo izražene). Pritisak u vrtložnom tragu u domenu izlazne ivice je manji od onog koji bi tu postojao da nema vrtložnog traga. Na taj način dolazi do pojave sile otpora usled podužne razlike u pritisku ispred i iza aeroprofila, koji se zove *otpor pritiska* ili **otpor oblika**, a koji ne bi postojao da je vazduh idealan fluid (čuveni D'alambertov paradoks).

Položaj tačke otcepljenja zavisi i od tipa graničnog sloja iz koga nastaje. Turbulentni granični sloj svojim unutrašnjim mešanjem molekula bolje se suprotstavlja nepovoljnom gradijentu pritiska, pa će tačka odvajanja biti bliže izlaznoj ivici, nego što bi to bio slučaj kod laminarnog graničnog sloja. Zato je u smislu formiranja vrtložnog traga, povoljnije kada se najpre laminarni sloj prevede u turbulentni, a zatim iz njega formira vrtložni trag (napraviti analogiju sa strujanjem oko cilindra!). S druge strane, granični sloj stvara **otpor trenja**, pa je iz te perspektive povoljnije da veći deo konture bude pod laminarnim graničnim slojem.

Prema tome, pošto **otpor aeroprofila čine i otpor trenja i otpor oblika**, projektovanje aeroprofila u smislu optimalnog kompromisa predstavlja izuzetno važan zadatak u okviru aerodinamičkog projektovanja letelica. Međutim, treba napomenuti da ove dve komponente učestvuju u ukupnom otporu bilo kog opstrujavanog tela, pri čemu njihov udeo zavisi od geometrije konkretnog tela.

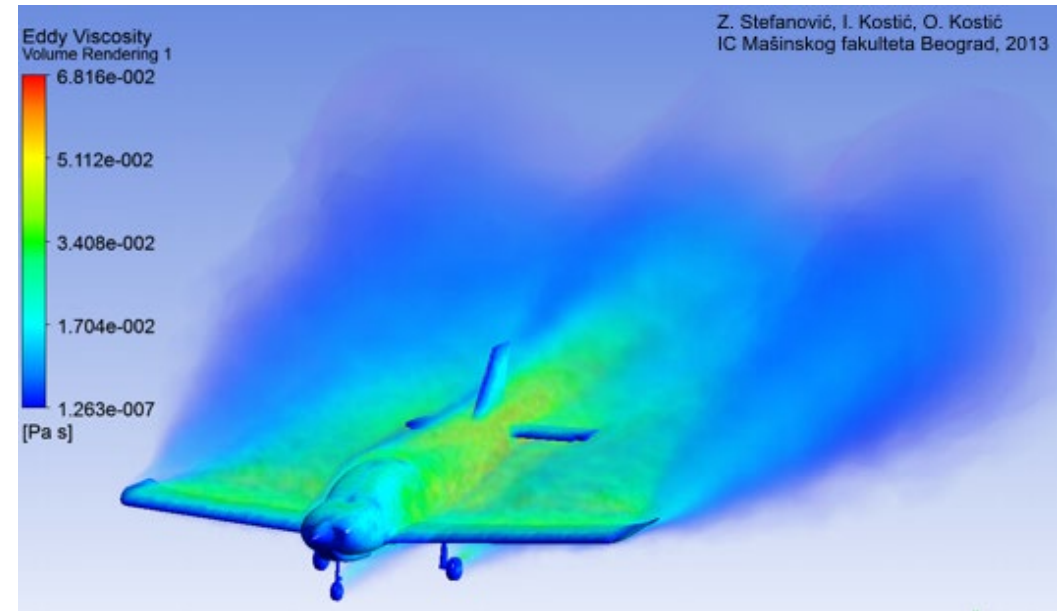
Struktura ukupnog otpora

Komponente ukupnog otpora opstrujavanog tela (avion, automobil, zgrada, voz, projektil, žardinjera sa cvećem...) mogu se definisati na sledeći način:

1) Komponente otpora koje nisu posledica stvaranja uzgona

Ovi otpori posledica su viskoznosti vazduha i javljaju se na svim telima opstrujavanim vazдушnom strujom. Sve prethodne analize mogu se načelno prevesti i na slučaj 3D strujanja u koordinatnom sistemu OXYZ. U zapadnoj literaturi, ovi otpori u kontekstu vazduhoplovne primene nazivaju se sumarno *parazitnim otporom*, pošto nisu direktna posledica stvaranja uzgona:

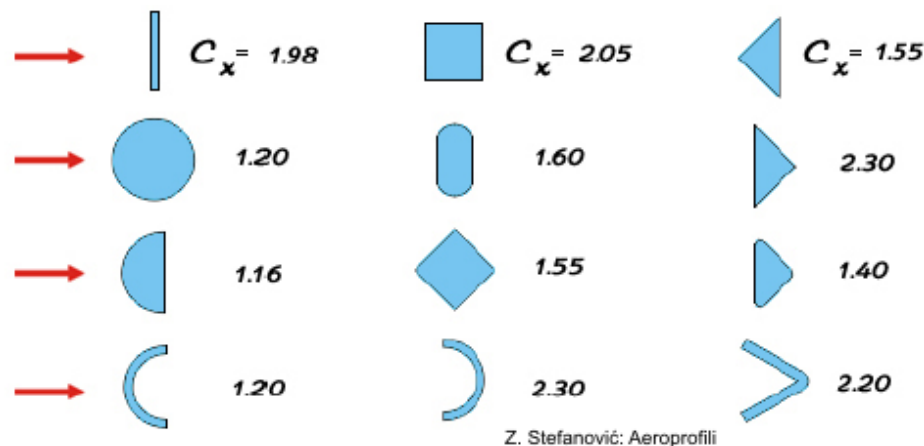
- **otpor trenja**, koji je posledica delovanja tangencijalog napona realnog - viskoznog fluida po površini tela i deluje po takozvanoj "okvašenoj površini" tela;
- **otpor oblika** ili otpor pritiska, koji postoji na svim telima, ali je dominantan kod "nestrujoliko" modeliranih oblika ili u slučaju intenzivnog odvajanja vrtložnog traga, do koga na strujolokim telima dolazi pri većim napadnim uglovima;
- **otpor interferencije** - nastaje usled međusobnog uticaja (remećenja) opstrujavanja različitih elemenata konstrukcije na njihovim spojevima, na spoju krilo-trup, trup-rep, krilo-upornica, itd. Na primer, zbog interferencije, otpor konfiguracije krilo-trup biće veći od sume otpora izolovanog trupa i izolovanog krila.
- **ostali otpori** - formalno usvojen naziv za otpore koje generišu razne nepravilnosti na konturi, kao što su ispupčeni zakivci, preklopi limova oplata aviona, sonde, antene, upornice krila, ali i npr. brisači i retrovizori na automobilima, itd. U nekim izvorima, samo ovi otpori se nazivaju *parazitnim otporom* (u užem smislu reči). U suštini, njih takođe čine otpor oblika i trenja, ali su kao kategorija izdvojeni, jer se njihovi proračuni najčešće ne baziraju na jednačinama izvedenim iz teorije graničnog sloja, zbog složenosti prirode strujanja oko njih.



Slika 14. Vizuelizacija poremećaja koje generiše laki avion BS-03 u strujnom polju oko sebe - vrložna viskoznost, pri napadnom uglu krila od 14° (ANSYS Fluent 14)

Na slici 14 jasno se vidi odvajanje struje na krilu na nekih 60÷70% tetive iza napadne ivice i vrtložni trag koji se odvaja sa krila, kao i vrtložni trag koji nastaje na trupu i delimično zasenčuje repne površine.

Na slici 15 prikazane su okvirne vrednosti koeficijenata otpora nekih karakterističnih poprečnih preseka, pri umerenim Reynoldsovima. U pitanju je beskonačni razmah (2D strujanje), što znači da uticaj krajeva ne postoji, a koeficijenti su sračunati u odnosu na čeonu površinu jediničnog razmaha 1 m. Ovi koeficijenti uključuju otpor oblika i otpor trenja (oba su posledica viskoznosti vazduha).



Slika 15. Koeficijenti otpora nekih poprečnih preseka beskonačnog razmaha (vrednosti tretirani prevashodno u kontekstu poređenja)

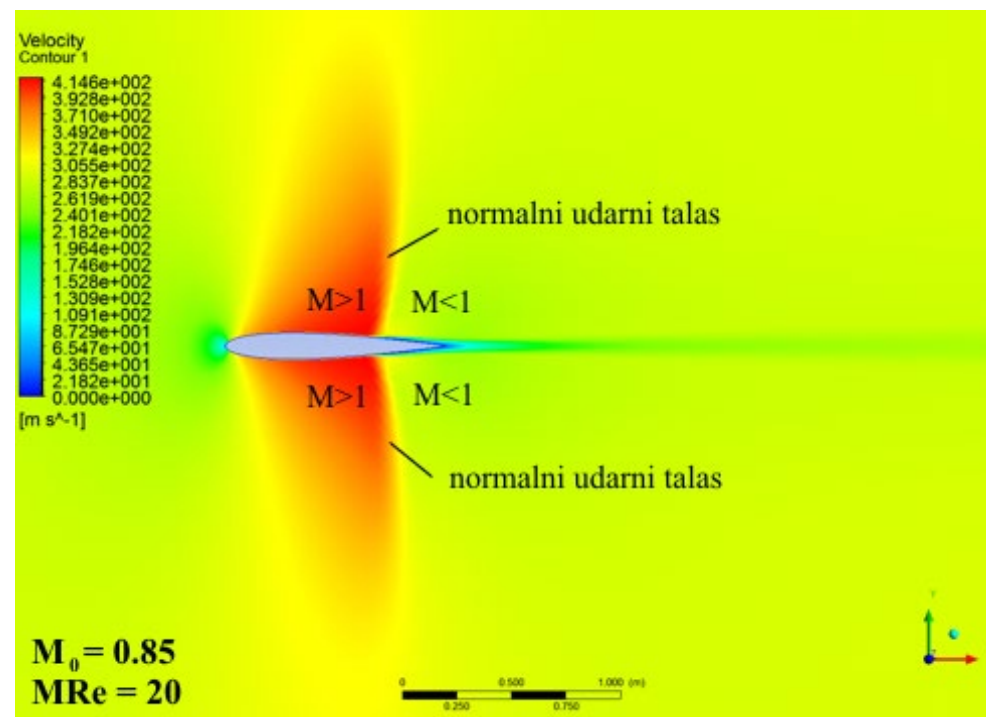
2) Indukovani otpor - otpor koji nastaje kao posledica stvaranja uzgona

Ovaj otpor javlja se na površinama čiji je primarni zadatak generisanje uzgona, kao što su krilo i repne površine letelica, obrnuta krila na trkačkim automobilima (pogrešno u žargonu nazvana "spojleri"; spojleri su vazdušne kočnice na avionima i imaju zadatak da "kvare" strujanje i tako povećavaju otpor), krajevi krakova elisa i lopatica rotora, itd. Naime, usled razlike pritisaka na gornjoj i donjoj strani npr. krila aviona, oko njegovih krajeva dolazi do prelivanja struje sa donje na gornju stranu i generisanja sekundarnog strujanja oko krajeva, koje se u vidu tzv. marginalnih vrtloga prostire niz vazdušnu struju - videti velike konusne vrtloge na krajevima krila, slika 14. Sekundarno strujanje takođe povija struju na gornjoj strani krila ka trupu, a na donjoj od trupa, pa se pri ukrštanju na izlaznoj ivici javlja dopunsko vrtloženje koje se utapa u vrtložni trag krila (ovo je razlika između vrtložnog traga krila, i vrtložnog traga iza razmatranih 2D aeroprofila). Promena količine kretanja vazduha usled ovako generisanog sekundarnog strujanja jednaka je sili indukovanog otpora, koja je utoliko veća što je uzgon koji krilo stvara veći.

3) Talasni otpor - otpor usled efekata stišljivosti

Ovaj otpor se javlja pri okozvučnim i nadzvučnim brzinama strujanja. Na primer, pri opstrujavanju krila (ili aeroprofila) višim podzvučnim Mahovim brojevima, u nekim delovima strujnog polja dolazi do pojave lokalnog nadzvučnog strujanja, koje se zatim kroz tzv. *normalni udarni talas* naglo prevodi u podzvučno strujanje. Kinetička energija strujanja se, usled velikog unutrašnjeg viskoznog trenja unutar udarnog talasa, pretvara u toplotu, a promena količine kretanja usled ove pojave jednaka je sili talasnog otpora. Osim toga, iza udarnog talasa dolazi do znatnog zadebljanja ili čak odvajanja turbulentnog graničnog sloja, što takođe doprinosi povećanju ukupnog otpora (slika 16).

O svemu ovome biće više reči u narednim poglavljima.



Slika 16. Normalni udarni talas na aeroprofilu NACA 0012 pri $\alpha = 0^\circ$ (ANSYS Fluent 14)