第一章 函数、极限、连续

Any

一、函数

1、定义：$\forall x \in D$，$y=f(x)$.

$$x \xrightarrow[\text{对应法则}]{f} y$$

自变量   对应法则   因变量

eg: $x \xrightarrow[f]{x^2-1} y=x^2-1$

$w=u^2-1$

定域 D：x 的取值范围

值域 R：y 的取值范围

注、函数关系式与所选字母无关.

2、函数的两要素：①定义域 ②对应法则

判断一组函数是否相同.

$2^0=1$、$2^3=8$、$4^2=16$

$2^?=5 \Rightarrow ?=\log_2 5$

3、定义域的计算

5☆

(1) 具体解析式的定义域

六类函数定义域

① $y=\frac{1}{x}$，D: $x\neq0$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $y=\frac{1}{\square}$，$\square\neq0 \Rightarrow$ 解出 x

② $y=\sqrt[2n]{x}$，D: $x\geq0$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $y=\sqrt[2n]{\square}$，$\square\geq0 \Rightarrow$ 解出 x

③ $y=\log_a x$，D: $x>0$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ $y=\log_a\square$，$\square>0 \Rightarrow$ 解出 x

注：$a=10$、$\log_{10}x=\lg x$

$a=e$ $\log_e x=\ln x$

正切 ↕倒 余切

④ $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{对}{邻}$. 则: $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z \xrightarrow{推到} y=\tan\square$, $\square\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ 解 x

⑤ $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{邻}{对}$. 则: $x\neq k\pi$, $k\in Z \xrightarrow{推到} y=\cot\square$. $\square\neq k\pi \Rightarrow$ 解 x

⑥ $y=\begin{cases}\arcsin x\\ \arccos x\end{cases}$ 则: $x\in[-1,1]$. (区间表示法) $\xrightarrow{推到} y=\begin{cases}\arcsin\square\\ \arccos\square\end{cases}$. $\square\in[-1,1] \Rightarrow$ 解 x

$-1\le\square\le1$

⑦ 反函数　　$[-1,1]$ 开 闭

原 $y=4x$

反 $x=\frac{1}{4}y$ (反函数的定义域是原函数的值域)

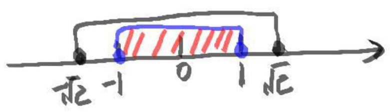
eg1) 函数 $y=\sqrt{2-x^2}+\arcsin x$ 的定义域

$x^2\le A \Rightarrow -\sqrt{A}\le x\le\sqrt{A}$

$x^2\ge A \Rightarrow x\ge\sqrt{A}$ 或 $x\le-\sqrt{A}$

分析: $\begin{cases}2-x^2\ge0 \Rightarrow x^2\le2 \Rightarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\\ -1\le x\le1\end{cases}$

大于大的, 小于小的. 则: $[-1,1]$ (区间) 或 $\{x|-1\le x\le1\}$



eg2) 函数 $f(x)=\overset{\text{内}\to\text{外}}{\sin\sqrt{9-x^2}}+\ln(x-2)$ 的定义域.

分析:
$$\begin{cases}9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x\leq 3\\ x-2>0 \Rightarrow x>2\end{cases}$$

D: $(2,3]$

(2) 抽象函数的定义域.

① 已知 $f(\boxed{x}) \to f[\boxed{g(x)}]$ 简→复

② 已知 $f[\boxed{g(x)}] \to f(\boxed{x})$ 复→简

③ 已知 $f[\boxed{g(x)}] \to f[\boxed{\varphi(x)}]$ 复→复

注: ① 联系: ( ) 取值范围一样

② 定义域是 x 的取值范围

eg1) 已知 $f(\boxed{x})$ 的定义域为 $[-1,1]$, 则函数 $f(\boxed{2x+1})$ 的定义域是______

分析: $-1\leq \underset{1}{\boxed{x}}\leq 1$, $-1\leq \underset{2}{\boxed{2x+1}}\leq 1 \Rightarrow -2\leq 2x\leq 0 \Rightarrow [-1,0]$

eg2) 已知 $f(\boxed{3-x}_{1})$ 的定义域为 $(-3,2]$，则 $f(\boxed{x-1}_{2})$ 的定义域为 $\underline{[2,7)}$.

分析：

$-3<x\le 2$

$-2\le -x<3$

$1\le \underbrace{\boxed{-x+3}}_{1}<6$

$1\le \underbrace{\boxed{x-1}}_{2}<6$

$2\le x<7$

二、反函数

（逆）

1. 定义：一般给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，由此关系确定 x 关于 y 的 $x=f^{-1}(y)$，叫 $y=f(x)$ 的反函数，习惯性 $\boxed{y=f^{-1}(x)}$ 记为.

3步求解

步骤：$y=f(x)\xrightarrow{\text{反解}x} x=f^{-1}(y)\xrightarrow{\text{对换}x,y} y=f^{-1}(x)$，$\boxed{x\in D}$

注：若 D 为 R，则省略.

补充 $\left\{\begin{array}{l} \underset{指}{y=a^{\boxed{x}}} \xrightarrow{反解x} \underset{对}{x=\log_a y} \\ \underset{对}{y=\log_a x} \xrightarrow{反解x} \underset{指}{x=a^y} \\ 三角 \longleftrightarrow 反三角 \end{array}\right.$

指 $\overset{互为}{\underset{反函数}{\longleftrightarrow}}$ 对 (底数不变)

$y=\sin x \xrightarrow{反解x} x=\arcsin y$

$y=\cot x \xrightarrow{反解x} x=\operatorname{arccot} y$

$y=2^{x-1} \Rightarrow x-1=\log_2 y$

$y=2^{x-1}+3 \Rightarrow \boxed{y-3}=2^{\boxed{x-1}}$

$x-1=\log_2(y-3)$

eg1) $y=\frac{\sqrt[3]{\boxed{1+3x}}}{2}$ $(x>1)$ 的反函数.

分析: $2y=\sqrt[3]{1+3x}$

$8y^3=1+3x$

$x=\frac{8y^3-1}{3}$

对换. $y=\frac{8x^3-1}{3}$, $x\in R$

$x>\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

eg2) $y=e^{\boxed{x-1}}+2$ 的反函数.

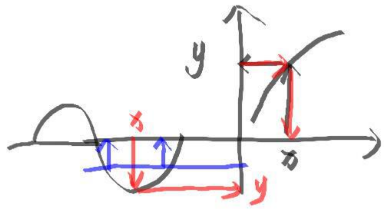
分析: $y-2=e^{x-1}$ $\quad y=a^x \to x=\log_a y$

$x-1=\log_e(y-2)=\ln(y-2)$

$x=\ln(y-2)+1$

对换. $y=\ln(x-2)+1$, $x>2$

注：当 $y=f(x)$ 具有唯一单调性时，该函数才有反函数



总结：
- 奇函数：$\sin x$ ($\csc x$)、$\arcsin x$、$\tan x$、$\arctan x$、$\cot x$、x^{2n+1}、$\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$
- 偶函数：$\cos x$ ($\sec x$)、x^{2n}
- 有界函数：$\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$、$\sin x$、$\cos x$、$(-1)^n$

奇偶性判断：
- ① 看图像
- ② 关系式法：
  - 一看：D关于原点对称
  - 二看：$f(-x)=f(x)$ 偶
    $f(-x)=-f(x)$ 奇

eg：$y=x^3\pm\arcsin x$
奇 + 奇

快速小技巧：奇+奇=奇　偶+偶=偶　奇+偶=?
奇×奇=偶　偶×偶=偶　奇×偶=奇

三、函数的分类

1、基本初等函数（反对幂指三）

2、复合函数（组合）

5☆ $u=g(x)$、$y=f(u)$ $\underset{\text{分解}}{\overset{\text{复合}}{\rightleftarrows}}$ $y=f[g(x)]$

注：$R_g \subset D_f$ 属于

eg: $u=x^2+2$、$y=\arcsin u$ $\Rightarrow$ $y=\arcsin(x^2+2)$

剥洋葱法则
- ①从外→内一层一层剥
- ②中间每层一般是基本初等（反对幂指三）
- ③遇到基本初等函数和四则运算（+、-、×、÷）

eg1) $y=\ln(1+\sqrt{x})$ 的分解　引入中间变量 u, v, w…

分析：$y=\ln u$, $u=1+\sqrt{x}$

eg2) $y=\ln x^3$

$y=\ln u$, $u=x^3$

eg3) $y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$

$y=\sin u$, $u=\ln v$, $\underbrace{v=\sqrt{w}}_{\text{幂函数}}$, $w=x^2-1$

$y=\sqrt{x}$

eg4) $y=3^{\arctan\sqrt{x}}$

$y=3^u$, $u=\arctan v$, $v=\sqrt{x}$

eg5) $y=\arcsin e^{-x}$　$y=e^x$

$y=\arcsin u$, $u=e^v$, $v=-x$

5力.

(2) 求解函数解析式

① 已知 $g(x)$ 和 $f(x)$，求 $g[f(x)]$ 或 $f[g(x)]$ 表达式　简→复（方法：由内→外依次计算）

eg1) $f(\boxed{x})=\boxed{x}^2-1$，求 $f[f(x)]=$ $\underline{x^4-2x^2}$.

分析：$f(\boxed{x^2-1})=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$

eg2) 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

则 $f(\boxed{\arctan x})=$ $\underline{\ 1\ }$.

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

复→简

② 已知 $f[g(x)]$ 表达式，求 $f(x)$ 的表达式　$\begin{cases}\text{换元法}\\ \text{配凑法.}\end{cases}$

eg1) 已知 $f(x+1)=x^2-2x$，求 $f(x)=$ $\underline{x^2-1}$

分析：换元法：令 $x+1=t$，$f(t)=(t+1)^2-2(t+1)=t^2+2t+1-2t-2=t^2-1$

$x=t+1$

配凑法：$f(\boxed{x+1})=(\boxed{x-1})^2-1$　$\Rightarrow f(x)=x^2-1$

x^2-2x+1

$f(x-1)=(x-1)^2-1$

x^2-2x+1

eg2) 已知 $f(\sin x)=\sin^2 x+\sin x+2$，则 $f(x)=$ $\underline{x^2+x+2}$．

分析：换元法：$\sin x=t$，$f(t)=t^2+t+2$

$f(\sin x+1)=\sin^2 x+\sin x+2 \Rightarrow f(x)=$ $\underline{x^2-x+2}$

配凑法：$f(\boxed{\sin x+1})=(\boxed{\sin x+1})^2-(\boxed{\sin x+1})+2$

$\sin^2 x+2\sin x+1-\sin x-1+2$

eg3) 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，则 $f(x)=$ $\underline{x^2+1}$．

分析：配凑法：

$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2+1$ $\qquad$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$x^2+\frac{1}{x^2}+2$

③已知$f[\varphi(x)]$表达式，求$f[g(x)]$表达式

换元
配凑

① → $f(x)$ → ② 代入(内→外)

eg1) 已知$f(x+1)=x^2+2$，则$f(\sin x)=$___

分析：令$x+1=t$，
$x=t-1$
$\Rightarrow f(t)=(t-1)^2+2$

$$f(\sin x)=(\sin x-1)^2+2$$
$$=\sin^2 x-2\sin x+1+2$$
$$=\sin^2 x-2\sin x+3$$

3.初等函数　　　反对幂指三

由基本初等经过有限次四则运算及复合形成的由一个解析式表达的函数.

$$y=\arcsin x^2-3^x$$

注：基本初等和复合函数属于初等函数

4. 分段函数（不同定义域，不同表达式）

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1 \\ e^x-1, & x\le 1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$$

注：绝对值函数属于分段函数。eg：$f(x)=|x-1|$

5. 参数方程（引入第三变量）

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

eg：$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$ $x^2+y^2=1$ $y=f(x)$

6. 隐函数（与显函数相对） $y=f(x)$

显函数：y 独自占有一边，另一边只有 x 的表达式

$\updownarrow$

隐函数：非显即隐。

eg：$y=\sin x+1$（显）

$2y=\sin x+1$（隐）$\Rightarrow y=\frac{\sin x+1}{2}$

$y=\sin y+x^2-1$（隐）$\Rightarrow y=?$

$F(x,y)=\boxed{\sin y+x^2-1-y}=0$

标准型：
- （一元）$F(x,y)=0$
- （二元）$F(x,y,z)=0$

7. 幂指函数（底数和指数都是 x 的表达式）

$y=u(x)^{v(x)}$. eg: $y=x^x$. $y=x^{2\sin x}$. $y=(\sin x)^{x^2}$

求导：取对数 $\ln$. 求极限：$N=e^{\ln N}$ $u(x)^{v(x)}=N=e^{\ln N}$

8. 变限积分函数（上下限关于 x 的表达式）

$\int_{\varphi_1(x)}^{b} f(t)\,dt$ $\int_a^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt$ $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt=g(x)$

1.2 极限

一、极限（$\varepsilon-N$）

1. 定义：无限接近 但未达到的状态

2. 数列（无穷多项排列）

$\{a_n\}$ → 通项

$\{\frac{1}{3^n}\}$: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots\cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots\cdots$

$n\to\infty$, $\frac{1}{3^n}\to 0$

数学形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.（$A$ 为常数）

称 $\{a_n\}$ 极限存在，否则不存在.

$\begin{cases}\infty. & \lim\limits_{n\to\infty}3^n=\infty \\ [a,b]. & \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=-1/1\end{cases}$

3. 函数极限

(1) 定义 $y=f(x)$

$\left.\begin{matrix} x\to\infty \\ x\to x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)\to A$

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\to x_0}} f(x)=A$. ($A$为常数).

点

称 $f(x)$ 在该极限过程中 极限.

否则 不存在. 结果为 ∞ / $[a,b]$ 则 极限不存在.

(2) 左右极限

左极限: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ (A为常数). 称左极限存在

右极限: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$ (B …). 称右 ……

☆ (3) 极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

应用场景: 判断分断函数在分界点的极限存在与否

二. 极限的计算

1. 极限的运算法则

$\boxed{\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B}$ 极限存在

则 ① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

② $\lim k\cdot f(x)=k\lim f(x)$

③ $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

④ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ ($B\neq 0$)

eg: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}}_{}\right]$ $\infty-\infty$

✗ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}$

2. 极限的计算

eg: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{2x}=\frac{3}{2}$　　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

$\frac{0}{\infty}=0\Rightarrow 0\cdot\frac{1}{\infty}$
$=0\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x+1}$ $\frac{\infty}{\infty}$

模型：$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0,

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 多项式（抓大头：找最高次，同除最高次）（$\frac{c}{\infty}=0$, $\frac{c}{0}=\infty$）

x的m次

多项式标准型：$a\cancel{x}^m+b\cancel{x}^{m-1}+c\cancel{x}^{m-2}+\cdots+d$

eg1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^4-1}$ ($\frac{\infty}{\infty}$)

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^4}}{\frac{2x^4-1}{x^4}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{2-\frac{1}{x^4}}$

$=0$

eg2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+1}$ ($\frac{\infty}{\infty}$)

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{1}{3}$

eg3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x-5}$ ($\frac{\infty}{\infty}$)

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}$

$=\infty$

▲ 抓大头口诀：上大为∞，下大为0，相同即系数比

注：$\frac{\infty}{\infty}$ 的指数函数、三角函数，找主导项，同除

eg1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2+5}{3x^2-2x+1} = \underline{\infty}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \Rightarrow ax^m$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}-1}{n+2} = \underline{0}$ $\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^1}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2\cdot(2x-3)^3}{(3x-1)^5} = \underline{\frac{2^3}{3^5}}$ $\frac{x^2\cdot 2^3\cdot x^3}{3^5 x^5}$

(2) $\frac{0}{0}$型

方法：消零因子 $\begin{cases} \text{因式分解} \\ \text{无理根式有理化：} (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \end{cases}$

eg1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

解：原式 $= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}$

$= \frac{1}{2}$

$1-x^2-1=-x^2$

eg2) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$a \quad -b$

非零因子代入化

解：原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^2}\cdot 2}{-\cancel{x^2}}$

$= -6$

(3) 两个重要极限.

第一个极限重要.

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \text{ 或 } \lim_{\square\to 0}\frac{\square}{\sin\square}=1$$

特征: 极限类型: $\frac{0}{0}$型
- 有 $\sin\square$
- $\square$一样(配凑)

eg1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1$

$\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\cdot\sin 2x}{\frac{2}{3}\cdot 3x}=\frac{2}{3}$. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

第二个重要极限.

$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e \iff \lim_{n\to\infty}(1+\boxed{\frac{1}{n}})^{n}=e$

特征: 类型: 1^{∞}(前提)
- $1+$(配凑)
- 倒数(配凑)

1^{∞}: $\lim[1+p(x)]^{Q(x)}$
$=e^{\lim p(x)\cdot Q(x)}$ (选择/填空)

eg1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}\cdot 2}$ (1^{∞})
$=e^{2}$

$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}[1+(-\frac{1}{x^2})]^{-x^2\cdot(-3)}$ (1^{∞})
$=e^{-3}$

$\frac{0}{\infty}=0\cdot\frac{1}{\infty}=0$

(3) 夹逼准则求极限 ~~$(\frac{0}{x_0})$~~

定理：对于 x_0 的去心邻域内 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$，

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

无穷多个无穷小的和/积结果不确定

有限个……0

$0+0+0+\cdots+0$

eg1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

解：$a_k=\frac{n}{n^2+k}$，$k=1,2,3,\cdots,n$

$(a_k)_{min}=\frac{n}{n^2+n}$，$(a_k)_{max}=\frac{n}{n^2+1}$

$\frac{n^2}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cdots)=1$

三、无穷小量和无穷大量（变量）

1. 定义：$\lim f(x)=0$，称 $f(x)$ 为该极限过程的无穷小量。

$\lim f(x)=\infty$ 称 $f(x)$……无穷大量。

2. 关系：$\frac{1}{0}=\infty$，$\frac{1}{\infty}=0$（互为倒数）

3. 无穷小量的应用

(1) 求极限（无穷小量 × 有界函数 = 0，0 × 有界 = 0）

应用场景：遇到 $\sin\infty$ +C，$\cos\infty$，$\arctan\infty$，$\text{arccot}\infty$，$(-1)^n$

× $\arcsin\infty$，$\arccos\infty$ ×

eg: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$ ($\sin\infty$)

eg2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$ __0__ ($\frac{1}{x}\sin x$)　　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+\arctan x}{x}=$ __0__

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+3}{x}=$ __0__

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+1}\cdot\sin(x-1)=$ __0__

0 · 有界

(2) 无穷小量的比较 (谁更先趋于0)

设 $\lim \alpha(x)=0$, $\lim \beta(x)=0$

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小. eg: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小.

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小

特殊地: $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小. 表示: $\alpha(x)\sim\beta(x)$

四. 极限存在充要条件的运用

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

或 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 存在

应用场景: 分段函数在分界点的极限

特殊函数在特殊点的极限

$$y=a^x\begin{cases}a>1,\ \lim\limits_{x\to\infty}4^x\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}4^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}4^x=0\end{cases}\\ 0<a<1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=+\infty\end{cases}\end{cases}$$

$$y=\arctan x.\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$y=\operatorname{arccot}x\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi\end{cases}$$

指数复合反比例

$y=4^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}4^{\overset{+\infty}{\frac{1}{x}}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}4^{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}}=0$

反正切/余切复合反比例

$y=\arctan\frac{1}{x}$

$\arctan\frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\overset{+\infty}{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}$

eg1) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ 1-e^x, & x\geq 0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

注：初等函数在定义域内的极限即为该点的函数值。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^x)=0$

由极限的充要条件可知，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1-e^x)=1-e$

eg2) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

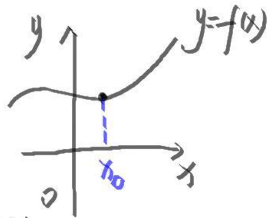
解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$

eg3) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处（ C ）

A. 有定义　　B. 极限存在　　C. 左极限存在　　D. 右极限存在.

分析：$\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\overset{+\infty}{\frac{1}{x}}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}} = 0 \end{cases}$

1.3 连续＋间断



一. 连续

1. 定义：$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \text{在} x_0 \text{处有定义.} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{有在，且} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续.

2. 连续的充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A=f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续.

应用场景：判断分段函数在分界点的连续性

3 结论 $\begin{cases} ① 初等函数在定义区间内连续 \\ ② 分段函数在分界点的连续性 用连续的充要条件 \end{cases}$

eg1) 设 $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x<0 \\ e^{2x} & x\geq 0 \end{cases}$ 问在 $x=0$ 处是否连续.

解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{2x}=1$. $f(0)=1$

由连续的充要条件可知. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

eg2) 已知 $f(x)=\begin{cases} \frac{b\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 则在 $x=0$ 处正确的是 (A)

A. $b=1$ 时 $f(x)$ 必连续　　B. $b=0$ 时. $f(x)$ 必连续

C. $b=1$ 时. $f(x)$ 不 ~　　D. $b=-1$ 时. $f(x)$ 不 ~

分析: 假设 $x=0$ 处连续. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{b\sin x}{x}=b=f(0)=1$

二、间断

1.定义：(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义

(2) $f(x)$ 在 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

(3) $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

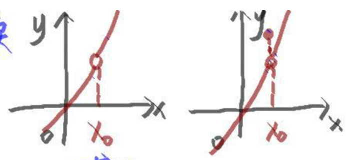
} ⇒ $f(x)$ 在 x_0 处间断

2.间断点位置：(1) 初等函数无定义点，一定是间断点（一般考察分母为0点）

(2) 分段函数的分界点，可能是间断点

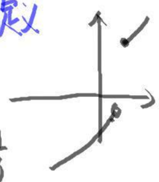
3.间断点的类型（由左右极限判定）

补充定义让其连续 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



第一类间断点（左右极限都存在）

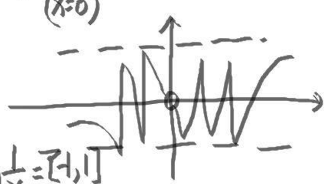
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，称 x_0 为可去间断点
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，称 x_0 为跳跃间断点



第二类间断点（左右极限至少有一个不存在）

- 至少有一个为 ∞，称 x_0 为无穷间断点
- 至少有一个为 $[a,b]$，称 x_0 为振荡间断点

$y=\sin\frac{1}{x}$ $(x=0)$　$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=[-1,1]$



eg1) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$ 的间断点及类型.

分析: 在$x=0$处. $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$

跳跃~

eg2) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点及类型

解: 令 $x^2-3x+2=0$.

得 $x_1=1$, $x_2=2$.

在$x_1=1$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=-2$. 可去间断点

补充 $f(1)=-2$. 则 $f(x)$ 在 $x=1$处 连续

在$x_2=2$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}=\infty$. 无穷间断点

极限逆的问题

1^{∞}

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，求 $a=$ <u>$\ln 2$</u>

$3a=\ln 8=\ln 2^{3}=3\ln 2$

$\frac{(x-a)+3a}{x-a}$

$\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\left(x\cdot\frac{3a}{x-a}\right)}$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}}=\boxed{e^{3a}=8}$

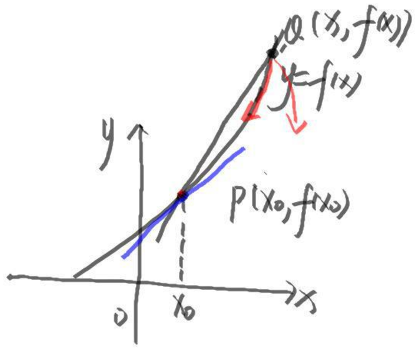
已知 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax+b}{x-2}=\overset{\frac{0}{0}}{2}$，求 a,b 的值.

$\because \lim\limits_{x\to 2}ax+b=0 \Rightarrow b=-4$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{a}{1}=2 \Rightarrow a=2$

第二章 微分学

2.1 导数



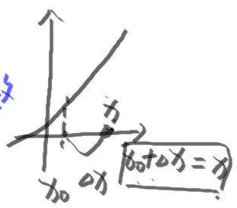
一、导数的定义

1.定义. 增量之比的极限.

$$K_{割线}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$K_{切}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ (差值式) ⇒ 分段函数在分界点的导数



$$=\lim_{\boxed{\Delta x}\to 0}\frac{f(x_0+\boxed{\Delta x})-f(x_0)}{\boxed{\Delta x}}$$ (增量式)

特征
① 减原函数. 且满足减谁求谁导 (配凑)
② +□的形式 (配凑)
③ □一样 (配凑)

等价无穷小因子代换：

$\square \to 0$

常见的等价无穷小（x01）：

$$\begin{cases} \sin\square \sim \square,\quad \tan\square \sim \square,\quad e^{\square}-1 \sim \square,\quad 1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2 \\ \arcsin\square \sim \square,\quad \arctan\square \sim \square,\quad \ln(1+\square) \sim \square,\quad \begin{cases} \sqrt[n]{1+\square}-1 \sim \frac{\square}{n} \\ (1+\square)^{x}-1 \sim \square\cdot x \end{cases} \end{cases}$$

$$\tan\square-\sin\square \sim \frac{1}{2}\square^3,\quad \tan\square-\square \sim \frac{1}{3}\square^3,\quad \square-\sin\square \sim \frac{1}{6}\square^3$$

eg1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$

eg2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-\sin x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$

eg1) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$，求 $f'(x)$

$f'(x)=\begin{cases} \ldots & x\neq 0 \\ 不存在 & x=0 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x>0 \\ 1, & x\leq 0 \end{cases}$

解：$x>0$，$f'(x)=[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{x+1}$

$x<0$，$f'(x)=x'=1$

$x=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-\ln 1}{x}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x}=1$ （$\sim x$）

由…，$f'(0)=1$

eg2) 求 $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导数

解：$x\neq 0$，$f'(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$

$x=0$ 处：

$f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=[-1,1]$

对连续性与可导性综合考察

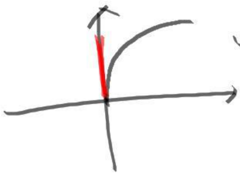
注：分段函数在分界点的极限、连续性、导数均需用充要条件。

$f'(x_0)$ 可导 = 极限值存在 = A

不可导 { 左右导至少有一个是无穷大或在区间内
左右导存在但不等
各种各样的间断点。

连续与可导 { 连续不一定可导
可导必连续
不连续一定不可导
绝对值分界点 尖点不可导
导函数分母为0点不可导。

$x=0$
$y=\sin|x|$



$y=\sqrt{x}$，$x=0$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\infty\ (x=0)$

eg1) 函数 $f(x)=|x|\cdot\sin x$，则 $f'(0)=$ 不存在

eg2) 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x\le 0 \\ \sin ax, & x>0 \end{cases}$ 选取适当的 a、b 值 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f'_-(0)=f'_+(0)$，即 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{2x}+b-(1+b)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax-(1+b)}{x}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}a\cos ax=2 \Rightarrow a=2$

由 ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

∴ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1+b=\lim\limits_{x\to0^+}\sin ax=0 \Rightarrow b=-1$

(4) 一元隐函数求导

方法：$F(x,y)=0$ 构造（移项）

- 求 F_x、F_y 偏导
- 代试 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ 或 $\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}$

注：求偏导 F_x，将 y 看作常数

……F_y 将 x ……

eg1) 设方程 $y+x=e^{xy}$ 确定 $y=y(x)$，求 y'

解：令 $F(x,y)=y+x-e^{xy}$

$F_x=1-y\cdot e^{xy}$ $\quad (k+x-e^{kx})$

$F_y=1-x e^{xy}$ $\quad (y+k-e^{ky})$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{1-ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=-\frac{1-y(x+y)}{1-x(x+y)}$

eg2) 若 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\underline{-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$

分析：（一元） 令 $F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$

$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $\quad F_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}$

$-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

eg 3) 函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，求 $y'(1)$.

x, y

解：令 $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-e^y$

$$F_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad F_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-e^y$$

$$\therefore y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-e^y}$$

当 $x=1$ 时，$y=0$

$$\therefore y'(1,0)=y'\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\frac{1}{0-1}=1$$

(5) 参数方程求导

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}$$

一阶导：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}=\varphi_3(t)$ （$\dfrac{y\text{对}t\text{求导}}{x\text{对}t\text{求导}}$）

二阶导：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}$ （$\dfrac{\text{一阶导对}t\text{求导}}{x\text{对}t\text{求导}}$）

注：一阶导的结果化为最简

$$\frac{\sin t}{\cos t}=\tan t$$

(5) 参数方程求导

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(dy/dt)}{(dx/dt)}=\dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)} & \text{(y对t求导/x对t求导)} \\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(dy/dx)}{dx}=\dfrac{(d(dy/dx)/dt)}{(dx/dt)} & \text{(一阶导对t求导/x对t求导)} \end{cases}$$

注意化简结果

eg1) 参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ (a, b为常数), 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}=\dfrac{(-\frac{b}{a}\cot t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a^2}\csc^3 t$

eg2) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{(\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}=\dfrac{(\frac{1}{2t})'}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{t^2+1}{4t^3}$

$$\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}$$

(6) 幂指函数和连乘连除之幂求导.

① $y = u(x)^{v(x)}$

取对数 $\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$ ($\ln a^b = b\ln a$)

$\ln y = v(x)\cdot \ln u(x)$

两边同时对x求导/采用隐函数求导.

$\frac{1}{y}\cdot y' = [v(x)\cdot \ln u(x)]'$

$y' = y\cdot [v(x)\cdot \ln u(x)]'$

② 指数对数化

$y = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\cdot \ln u(x)}$

$y' = e^{v(x)\cdot \ln u(x)}\cdot [v(x)\cdot \ln u(x)]'$

$= y\cdot [v(x)\cdot \ln u(x)]'$

$y = \sqrt[n]{\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}}$ (连乘连除之幂)

取对数: $\ln y = \ln \sqrt[n]{\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}} = \frac{1}{n}[\ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x)]$

两边同时对x求导. $\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{n}\cdot [\ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x)]'$

$y' = y\cdot \frac{1}{n}\cdot [\ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x)]'$

eg1) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$, 求y'

解: 两边同时取对数 $\ln$

$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}\cdot\ln x$

两边同时对x求导

$\frac{1}{y}\cdot y'=(x^{-2})'\cdot\ln x+x^{-2}\cdot(\ln x)'$

$=-2x^{-3}\cdot\ln x+x^{-3}$

$\therefore y'=x^{\frac{1}{x^2}}\cdot x^{-3}(1-2\ln x)$

$=x^{\frac{1}{x^2}-3}\cdot(1-2\ln x)$

eg2) $y=\frac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}$, 求$y'$

解: . . . —$\ln$

$\ln y=\ln\sqrt{x+2}+\ln(3-x)^4-\ln(x+1)^5$

$=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1)$

两边同时对x求导

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}$

$y'=\frac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$

(7) 高阶导 (找规律)

定义: 二阶及以上的导数统称为高阶导. 表示:

一阶	二	三
y' / $\frac{dy}{dx}$	y'' / $\frac{d^2y}{dx^2}$	y''' / $\frac{d^3y}{dx^3}$

四以上

$y^{(n)}$ / $\frac{d^ny}{dx^n}$

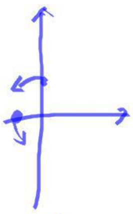
eg1) $y=x\arctan x$, 求$y''=\underline{\frac{2}{(1+x^2)^2}}$

$y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$

$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}$

eg2) $y=\cos x$，求 $y^{(n)}$

$y=\sin x \to y^{(n)}=\sin(n\cdot\frac{\pi}{2}+x)$



解: $y'=-\sin x$ 一

$y''=-\cos x$ 二

$y'''=\sin x$ 三

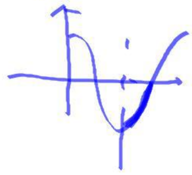
$y^{(4)}=\cos x$ 四

$y^{(5)}=-\sin x$ 五

$y^{(n)}=\cos(n\cdot\frac{\pi}{2}+x)$

$y^{(10)}=-\cos x$

$10\div 4=2\cdots 2$



$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases} m! & m=n \\ 0 & m<n \end{cases}$$

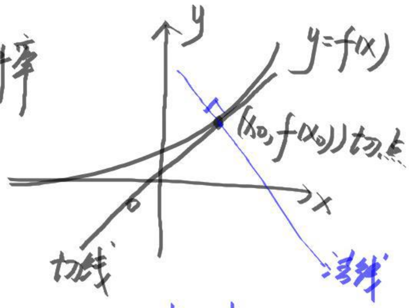
幂函数n阶导

二、导数的几何意义 5分

(1) $f'(x_0)$ 就代表曲线在切点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线斜率

(2) 切点处的切线方程和法线方程

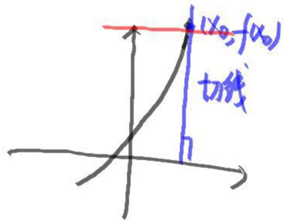
曲线 $y=f(x)$、切点 $(x_0, f(x_0))$　$k_{切}=f'(x_0)$

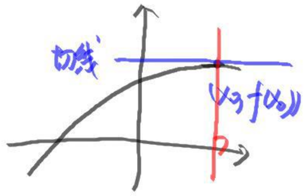


$k_{切}\cdot k_{法}=-1$

$$\left.\begin{aligned}&\text{切线方程：}\ y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\\&\text{法线方程：}\ y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)\end{aligned}\right\}\text{点斜式}$$

特殊情况：
$$\begin{cases}k_{切}=f'(x_0)=\infty & \begin{cases}\text{切线方程} & x=x_0\\ \text{法线方程} & y=f(x_0)\end{cases}\\ k_{切}=f'(x_0)=0 & \begin{cases}\text{切线方程} & y=f(x_0)\\ \text{法线方程} & x=x_0\end{cases}\end{cases}$$





eg1) 设函数 $y=\arctan x$ 在点 $(1,\frac{\pi}{4})$ 处的切线方程是 ________

$k_{切}=y'(1)=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$　　　$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$

$4y-2x-\pi+2=0$　一般式

eg2) 圆 $x^2+y^2=x+y$ 在点 $(0,0)$ 处的法线方程是 $y-x=0$

$k_{切}=y'$　　$F(x,y)=x^2+y^2-x-y$　　$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x-1}{2y-1}$

$F_x=2x-1$　$F_y=2y-1$

$k_{法}=1$　　　　$\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-1$

$y-0=1\cdot(x-0)$

eg1) 曲线 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ 1+\sin x & x<0\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率是 1

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1+\sin x-1}{x}=1$

三、微分　$y'=\frac{dy}{dx}$

1. 定义：$dy=y'dx$，这种形式称为微分。(当自变量取值作足够小的改变时，函数值是如何改变的

2. 求微分

方法：求y'，代入$dy=y'dx$

$dy(u)=y'(u)du$　微分形式不变性

$df(\square)=f'(\square)d\square$

eg1) $y=\sin(2x+1)$，求dy

解：$y'=2\cos(2x+1)$

$dy=y'dx=2\cos(2x+1)dx$

eg2) $y=e^{-x}\cdot\cos(3-x)$，求dy

解：$y'=-e^{-x}\cos(3-x)+\sin(3-x)\cdot e^{-x}$

$dy=-e^{-x}[\cos(3-x)-\sin(3-x)]\cdot dx$

eg3). $\frac{d(\ln x)}{d\sqrt{x}} =$ ________ $\frac{2\sqrt{x}}{x}$

$dy = y' dx$

$d(\ln x) = (\ln x)' \cdot dx = \frac{1}{x} \cdot dx$

$x^{-1} / x^{\frac{1}{2}}$

$d\sqrt{x} = (\sqrt{x})' \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

3. 微分的应用 1分

已知 $f(x)$. 求 $f(A)$ 的近似值

方法: $f(A) \xlongequal{拆} f(\underset{整数}{x_0} + \underset{小数}{\Delta x}) \overset{代公式}{\approx} f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}$

eg1) 求 $\sqrt{1.05}$ 的近似值

解: 令 $f(x) = \sqrt{x}$. $f(1.05) = f(\underset{x_0}{1} + \underset{\Delta x}{0.05}) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0.05$

$\approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.05$

≈ 1.025

2.2 导数的应用（洛，三点两性一线）

极值点、最值点、拐点、
单调性、凹凸
渐近线

一、利用洛必达法则求极限

1. 洛必达法则

定义：$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0}/\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\frac{0}{0}/\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{\frac{0}{0}/\frac{\infty}{\infty}}{=} \cdots = \lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} =$ 结果.

eg1) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$ $(\frac{\infty}{\infty})$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2}$ $(\frac{\infty}{\infty})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x}$ $(\frac{\infty}{\infty})$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$

2. 极限题思路

(化简→定型→代试)

(1) 化简

① 等价无穷小因子简化 (11个) eg: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$

② 非零因子代入化 ($\square\to0$, $e^{\square}$, $\square\to0$, $\cos\square$) eg: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cos x=1$

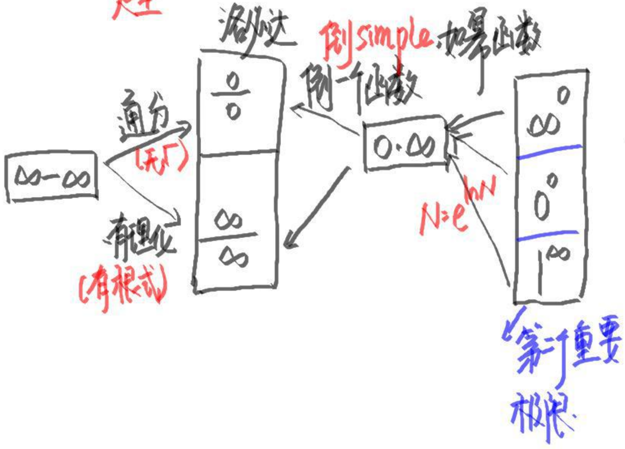
③ 无理根式有理化 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④ 幂指函数指数对数化 ($N=e^{\ln N}$)

注: 若为1^∞型, 则建议用第二个极限重要极限

$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}$

(2) 定型



eg1) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)^x$ (1^∞)

解: 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3-2x^2}{x^3}\right)^x$

$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x(3-2x^2)}{x^3}}$ ($\frac{\infty}{\infty}$)

$=e^{-2}$

eg2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})\,e^x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot 2}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})\cdot 1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{2\sin x+x\cos x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=\dfrac{4}{3}$

$y'>0$，↗；$y'<0$，↘

二、一阶导的应用（单调性、极值、最值及应用）

增减

1. 函数的单调性与极值

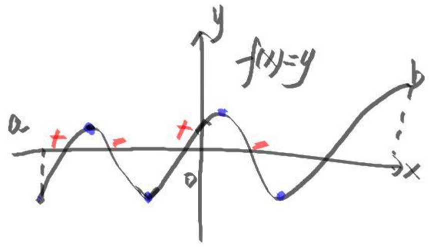
步骤：① 明确定义域

② 计算驻点和不可导点

③ 利用上述点划分区间，分别判断 $f'(x)$ 符号，分析单调性

④ 得出结论

$+$ ↗ ↘ $-$ 极大值　　$-$ ↘ ↗ $+$ 极小值



$f'(x_0)=0 \Rightarrow x=x_0$ 为驻点

不可导点（导函数分母为0点）

eg1) 函数 $y=2x^2-\ln x$ 的递增区间是 $\underline{\left(\frac{1}{2},+\infty\right)}$

$D: x>0$

$y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$ 得驻点 $x=\frac{1}{2}$ 不可导点 $x=0$ (舍)

	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y'	$-$	$+$
	↘	↗

在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$

$\sqrt[3]{x^2}$

eg2) $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点个数是 $\underline{2}$ 个.

$D: x\in R$.

$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 驻点 $x=1$. 不可导点 $x=0$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$		$-$		$+$
	↗	极大值点 $x=0$	↘	极小值点 $x=1$	↗

2. 极值存在的充要条件

①极极存在的必要条件(结论)

函数$f(x)$在x_0处取得极值 $\Longrightarrow$ $f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不可导

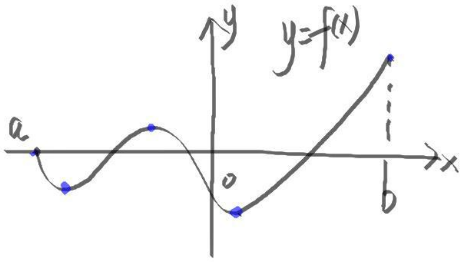
函数$f(x)$在x_0处取得极值且可导 $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$

② ----充要条件(判定)

第一充分条件

第二充分条件 → $\left.\begin{array}{l} f(x)\text{在}x_0\text{处去心邻二阶可导、} \\ \text{且}\boxed{f'(x_0)=0}\text{、且}f''(x_0)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f''(x_0)>0\text{、} \cup \text{ 取得极小值} \\ f''(x_0)<0\text{、} \cap \text{ 取得极大值} \end{array}$

3. 最值(区间)



(1)定义: $f(x)$在某个区间上的最大最小值.

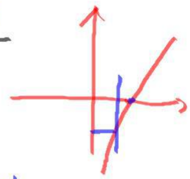
步骤: ① 明确定义域

② 求解驻点和不可导点.

③ 计算驻点值、不可导点值、端点值

④ 比大小,得结论

eg1) 函数 $f(x)=x-\ln(1+x^2)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $2-\ln5$



分析：D: $x\in[-1,2]$

$f'(x)=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$、驻点 $x=1$

又 $f(-1)=-1-\ln2$、 $f(1)=1-\ln2$ $f(2)=2-\ln5$

$f(2)-f(1)=1+(\ln2-\ln5)>0$ $\ln\frac{2}{5}=\ln0.4$

e^{-1}

$\frac{1}{2.71}\approx0.4$

5分

(3) 最值的应用(离不开主题：几何和经济)

思路：① 根据实际问题,找目标函数(即题目所要求)最值函数

② 求 $f(x)$ 的驻点 $x=x_0$、用 $f''(x_0)$ 的符号验证最值.

eg1) 已知生产x件的成本为$C=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$. 试问:

(1) 要使平均成本最小. 应生产多少件产品?

(2) 若产品以每件500元售出. 使利润最大. 应生产多少件产品?

解:(1) 设平均成本为$\bar{C}$,则

$$\bar{C}=\frac{C}{x}=\frac{25000}{x}+200+\frac{x}{40}$$

$(\bar{C})'=-\frac{25000}{x^2}+\frac{1}{40}$ 得唯一驻点 $x=1000$

又: $\bar{C}''=\frac{50000}{x^3}$. 即 $\bar{C}''(1000)>0$

∴ $x=1000$ 是最小值. 即生产1000件产品 最小.

设利润为L.

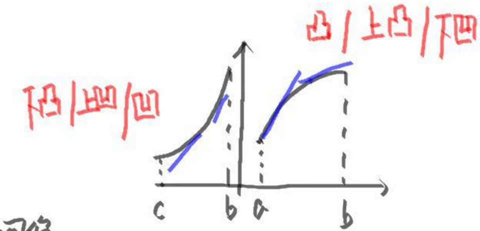
$$L=500x-25000-200x-\frac{1}{40}x^2$$

$x=6000$件

二、二阶导的应用

1. 判断凹凸性和拐点.

2. 凹凸性判定



$f(x)$在(a,b)内二阶可导. $\begin{cases} f''(x)>0 \Longleftrightarrow \text{凹图像} \\ f''(x)<0 \Longleftrightarrow \text{凸图像} \end{cases}$

3. 拐点

①定义: 函数图像凹凸性改变的点坐标.

②拐点可能出现: $f''(x_0)=0$点 和 $f''(x_0)$不存在的点.

3. 凹凸性及拐点计算

步骤: ① 明确定义域

② 求解 $f''(x_0)=0$ 点 和 $f''(x_0)$ 不存在点.

③ 利用上述点划分小区间, 判断 $f''(x)$ 符号

④ 分析得结论.

eg1) $y=xe^{-x}$ 的凹凸性及拐点.

解: D: $x\in R$

$y' = e^{-x} - xe^{-x}$

$y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$

$= e^{-x}(x-2)$

令 $y''=0$, 得 $x=2$

	$(-\infty,2)$	$x=2$	$(2,+\infty)$
y''	$-$		$+$
	凸	拐点 $(2,2e^{-2})$	凹

eg2) $y=x^4$ 有 0 个拐点.

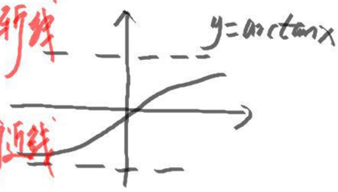
D: $x\in R$

$y'=4x^3$. $y''=12x^2$

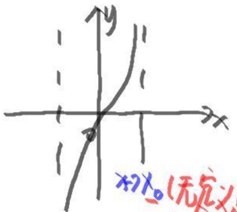
四、曲线的渐近线

1. 分类：

- 水平渐近线：
  - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$（C为常数） $y=C$为水平渐近线
  - $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} f(x)=A$（A为常数） $y=A$为水平渐近线



- 垂直/铅直渐近线：
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$． $x=x_0$为垂直渐近线
  - $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ x\to x_0^+}} f(x)=\infty$ $x=x_0$为垂直渐近线



$x\to x_0$（无定义点 常考分母为0点）

eg1) 下列曲线中既有水平~，又有铅直~是（C）

A. $y=\frac{\sin 2x}{x}$ B. $y=\frac{x^2}{2x-1}$ C. $y=\frac{x^2}{1-x^2}$ D. $y=\frac{x^3}{1+x^2}$

分析：A：水平：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$． $y=0$；垂直：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$（无）

B：水平：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-1}=\infty$

C. 水平：$y=-1$ 垂直：$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2}{1-x^2}=\infty$． $x=-1$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x^2}=\infty$． $x=1$

eg2) 下列曲线有垂直渐近线的是（ B ）

A. $y=\frac{x^2-3x-4}{x+1}$　　B. $y=e^{\frac{1}{x}}$　　C. $y=\frac{e^x}{x^2+1}$　　D. $y=\ln(1+x^2)$

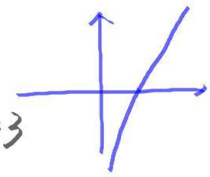
分析: A. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1}=C.$　　　C. 水平.

B. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　　$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\infty\ (\times)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$. $x=0$　　　$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=0$, $y=0$

4X

eg3) 曲线 $y=\frac{\ln x}{x-2}$ 的垂直渐近线为（ C ）



A. $x=0$　　B. $x=1$　　C. $x=2$, $x=0$　　D. $x=3$

分析: 无定义: $x=2$.　　$\ln x$. $x>0$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln x}{x-2}=\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-2}=\infty$, $x=0$

$f'(\xi)\cdot\sin\xi=-f(\xi)\cdot\cos\xi$

$f'(x)\sin x+f(x)\cdot\cos x=0$

$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cdot\cos x$

前导 后不导 前不导 后导

$F(x)=f(x)\cdot\sin x$

$F(x)=x^n\cdot f(x)$ $\quad nx^{n-1}f(x)+x^n\cdot f'(x)=0$

$nf(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0$

$n\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=0$

$F'(x)=n\cdot f(x)+x\cdot f'(x)$

$\int\frac{n}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$n\ln x+\ln f(x)=\ln[x^n\cdot f(x)]$

eg2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)\cdot f(2)<0$。

证明：在 $(0,2)$ 内至少存在一个点 ξ，使得 $f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0$ $\quad f(\xi_1)$

证明：令 $F(x)=x\cdot f(x)$ $\quad [0,\xi_1]$

$\because f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)\cdot f(2)<0$

由零点定理可知，至少 $\exists\,\xi_1\in(1,2)$，使得 $f(\xi_1)=0$

显然 $F(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上连续，$(0,\xi_1)$ 内可导，且 $F(0)=0$，$F(\xi_1)=\xi_1\cdot f(\xi_1)=0$

由罗尔定理可知，至少存在 $\exists\,\xi\in(0,\xi_1)$ 满足 $F'(\xi)=0$

即 ……

$F(x)$ $[a,b]$ 连续 (a,b)

不等式的证明

简 $F'(\xi)=\boxed{\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}}$ 复

1. 拉格朗日证明不等式

① 变形 "x"型：$x\cdot f(x)<F(x)<x\cdot g(x)\xrightarrow{x>0} f(x)<\dfrac{F(x)-\underbrace{F(0)}_{=0}}{x-0}<g(x)$

"$b-a$"型. $(b-a)(\ )<(\ )<(\ )\cdot(b-a)\xrightarrow{b>a}(\ )<\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}<(\ )$

② 原函数：中间的 $F(x)$ 利用拉朗结论将复杂 $\xrightarrow{换}$ 简单

即证 $f(x)<F'(\xi)<g(x)$ 需据 ξ 的取值范围即成立.

eg1) 证明：当 $t>0$ 时 $\dfrac{1}{1+t}<\ln(1+\dfrac{1}{t})<\dfrac{1}{t}$ $\qquad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明. 原不等式变形 $\dfrac{1}{1+t}<\ln\dfrac{t+1}{t}<\dfrac{1}{t}$

$$\frac{1}{1+t}<\frac{\ln(t+1)-\ln t}{(t+1)-t}<\frac{1}{t}$$

令 $F(x)=\ln x$. $x\in[t,t+1]$

显然 $F(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上连续. $(t,t+1)$ 内可导. …… $F'(\xi)=\dfrac{\ln(1+t)-\ln t}{1+t-t}$

又：$F'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$. 即证 $\dfrac{1}{1+t}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{t}$(成立)∵ $\xi\in(t,t+1)$ 且 $t>0$

∴ 当 $t>0$ 时. ________。

2、单调性证明不等式

关键：找原函数
- (1) 幂指函数 → 取对数 ln
- (2) 左右两端类型、$f(b) < f(a)$、原函数：$f(x)$ $(a>b)$
- (3) 乱七八糟无规律 → 移项、原函数：一侧为0，另一侧为原函数

eg1) 证明当 $x>0$ 时 $(x^2-1)\cdot\ln x \geq (x-1)^2$

证明：当 $x=1$ 时，$(x^2-1)\cdot\ln x = (x-1)^2$

当 $0<x<1$ 时，变形为 $(x+1)\cdot\ln x < x-1$

令 $F(x) = (x+1)\cdot\ln x - x + 1$

$\therefore F'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x}$

$F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} < 0$

$\therefore F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

$\therefore F'_{min}(x) = F'(1) = 1$

$\therefore F'(x) > 0 \quad x\in(0,1)$

即 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

$\therefore F_{max}(x) = F(1) = 0$

$\therefore F(x) < 0 \quad x\in(0,1)$

即 $(x+1)\cdot\ln x < x-1$

第三章 一元函数积分学

3.1 不定积分

一、不定积分的概念与性质　　导数与积分是互逆运算

1. 原函数：若 $F'(x)=f(x)$，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数。

$[F(x)+C]'=f(x)$，称 $F(x)+C$ 称 $f(x)$ 的全体原函数。

2. 不定积分　$\int f(x)\,dx = F(x)+C$　　eg：$\int \cos x\,dx = \sin x + C$　$(\ )'=\cos x$

积分号　被积函数　微分

混合运算　$F'(x)=f(x)$

最外层 {积分：$+C$；微分：dx；导数：无 C、无 dx}

$\int F'(x)\,dx = F(x)+C$　　$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)+C$　　$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

eg: 如果$f(x)$的一个原函数为 $x-\arcsin x$. 则 $\int df(x) =$ $1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$

$f(x)+C$

$$\begin{cases} \int f(x)\,dx = x-\arcsin x + C \\ (x-\arcsin x)' = f(x) \end{cases}$$

常数、$\int k\,dx = kx + C$

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int x^{-2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cdot \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C. \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = (-\arcsin x + C)'$$

$$(\arccos x + C)'$$

$C+1$

$\sin^2 x + \cos^2 x$

$$(\arccos x + \arcsin x) - \arcsin x + C_1$$

$\frac{\pi}{2}$

$-\arcsin x + C$

2. 凑微分

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int f[\boxed{\varphi(x)}]\,d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

① 两个函数的乘积，一个 simple，一个 complex

② 复杂函数内层求导是简单函数的倍数关系

③ 构造 $\int f[\varphi(x)]\cdot \varphi'(x)\,dx$ $\boxed{y'dx = dy}$

④ 凑微分 $\int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x)$

$$\int \sin(x+1)\,dx$$

$$= \int \sin(x+1)\cdot 1\,dx$$

$$= \int \sin(x+1)\cdot (x+1)'\,dx$$

$$= \int \sin(\boxed{x+1})\,d(\boxed{x+1})$$

$$= -\cos(x+1)+C$$

$$\int f(ax+b)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \quad d(ax+b)$$

$$= F(ax+b)+C$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx$$

$$dx = d(x+c)$$

$$= \int \sin(ax+b)\cdot 1\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,(ax+b)'\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,d(ax+b)$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$