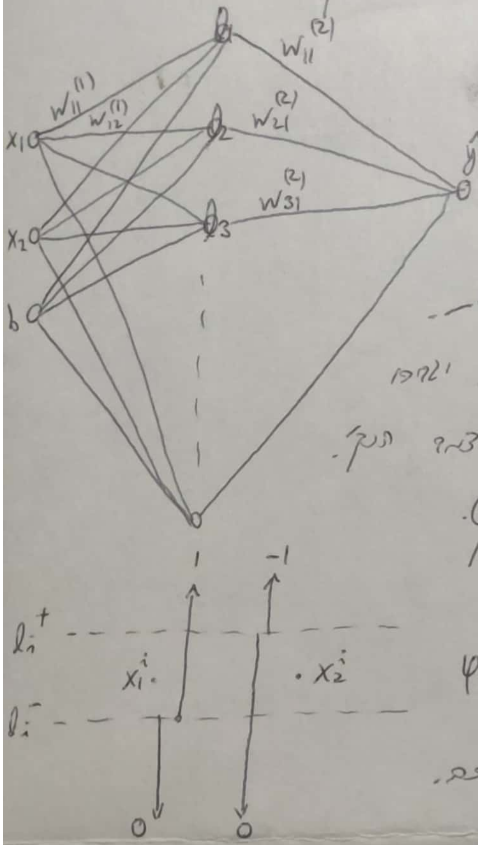
Question 3:

נתון: N נקודות של קלטים: $\{(x_1^1, x_2^1), \_\_\_\_ (x_1^N, x_2^N)\}$.

ו-N פלטי y מתאימים: $\{y_1 - \_\_\_ y_N\}$.

צ"ל: קיים רשת נוירונים עם שכבה חבויה אחת ופונקציית אקטיבציה מסוג איזשהו שיכולה להבחין X,Y בדיוק. כלומר: $f(x_1^i, x_2^i) = y_i$.



הוכחה: יהי $b=0$ $l_i := x_1 \cdot W_{1i}^{(1)} + x_2 \cdot W_{2i}^{(1)} + W_{3i}^{(1)} \cdot b = 0$ הקו לנוירון ה-i.

נשים לב שנקבל ישר המחבר בין כל זוג (x_1^i, x_2^i) במישור.

בנוסף, ידוע שאין 3 נק' כלו' כך שעל ישר זה אין עוד נק' נוספת.

נגדיר: $l_i^+ := x_1 \cdot W_{1i}^{(1)} + x_2 \cdot W_{2i}^{(1)} + W_{3i}^{(1)} b + \varepsilon = 0$ כך ש-2 הישרים הללו יגדרו רצועה המכילה את זוג הנק'.

$l_i^- := x_1 \cdot W_{1i}^{(1)} + x_2 \cdot W_{2i}^{(1)} + W_{3i}^{(1)} \cdot b - \varepsilon = 0$ (ואין נק' אחרת ברצועה).

נגדיר את פונקציית האקטיבציה באופן הבא:

$$\varphi(l_i^+) = \begin{cases} -1 & l_i^+ < \varepsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \varphi(l_i^-) = \begin{cases} 1 & l_i^- < -\varepsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כך שסכום הנוירונים יניב 0 כשהנקודה מחוץ לרצועה ו-1 כשהן בתוכה. (כיוון הפוך =1, כיוון נגדי =0).

סה"כ הפלט לנקודה ה-1 יהיה: $\hat{y}_1 = W_{11}^{(2)} \cdot \varphi(l_1^+) + W_{21}^{(2)} \cdot \varphi(l_1^-)$. נבד' את 4 המקרים האפשריים:

$\varphi(l_1^+) = (-1) \wedge \varphi(l_1^-) = 0$: $\hat{y}_1 = -W_{11}^{(2)}$

$\varphi(l_1^+) = (-1) \wedge \varphi(l_1^-) = 1$: $\hat{y}_1 = -W_{11}^{(2)} + W_{21}^{(2)}$

$\varphi(l_1^+) = 0 \wedge \varphi(l_1^-) = 1$: $\hat{y}_1 = W_{21}^{(2)}$

$\varphi(l_1^+) = 0 \wedge \varphi(l_1^-) = 0$: $\hat{y}_1 = 0$

לכן נגדיר $W_{11}^{(2)} = W_{21}^{(2)} \equiv W_1$.

ובאופן דומה נקבל ש- $W_{31}^{(2)} = W_{41}^{(2)} \equiv W_2$.

נתון ש-2 הרצועות הללו (המוגדרות ע"י 4 הישרים) הן היחידות שמכילות את y_2

ונקבל: $W_1 + W_2 = \hat{y}_2$. נמשיך את התהליך כך שנכסה את הנקודות עד $\hat{y}_{n-1}$ באופן הבא:

ונקבל: $W_{2n-1\,1}^{(2)} = W_{2n\,1}^{(2)} = W_n$

$W_2 + W_3 = y_3$

$\vdots$

$W_{n-2} + W_{n-1} = y_{n-1}$.

לבסוף נותר לכסות את הנק' ה-1 והאחרונה $(\hat{y}_1, \hat{y}_n)$, נחבר אותן בישר נוסף כמתואר לעיל ונקבל:

$w_n + w_1 = y_1$

$W_{n-1} + W_n = y_n$. באופן כללי, נקבל n משוואות ו-n נעלמים המוכרים שמתוארים במערכת כלהלן.

$$\left(\begin{array}{l} W_1 + 0 \cdot W_2 + \_\_\_\_ + 0 \cdot W_{n-1} + W_n = y_1 \\ 0 \cdot W_1 + W_2 + W_3 + \_\_\_ + 0 \cdot W_n = y_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot W_1 + 0 \cdot W_2 + \_\_\_ + W_{n-1} + W_n = y_{n-1} \end{array}\right)$$