(ב)

תרגיל קבוצות יחסים תשובות

① א) $B^{-1}=\{(2,1),(3,1)(3,2)\}$

ב) $C^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

ג) $D^{-1}=D$

ד) $E^{-1}=\{(2,1),(3,1),(1,2)\}$

ה) $F^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(2,3)\}$

ו) $G^{-1}=G$

② א) צ"ל: $R^{-1}\subset S^{-1} \Leftrightarrow R\subset S$

צ"ל: א. $R\subset S \Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

הוכחה: יהי $(x,y)\in R$

ונתון $R\subset S$

$\Downarrow$

$(x,y)\in S$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R^{-1}\wedge (y,x)\in S^{-1}$

$\Downarrow$

$R^{-1}\subseteq S^{-1}$

ב $R^{-1}\subset S^{-1}\Rightarrow R\subset S$

כמו א׳ במקרה הפוך.

ג) צ"ל: $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

יהי $(x,y)\in(R\cap S)^{-1}$

$\Updownarrow$

$(y,x)\in(R\cap S)$

$\Updownarrow$

$(y,x)\in R\wedge (y,x)\in S$

$\Updownarrow$

$(x,y)\in R^{-1}\wedge (x,y)\in S^{-1}$

$\Updownarrow$

$(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

$\Downarrow$

$(R\cap S)^{-1}\ \subseteq\supseteq\ R^{-1}\cap S^{-1}$

$\Downarrow$

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

(2) רציפ

ב. צ"ל: $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

יהי $(x,y)\in(R\cup S)^{-1}$

$\Updownarrow$

$(y,x)\in R\cup S$

$\Updownarrow$

$(y,x)\in R \vee (y,x)\in S$

$\Updownarrow$

$(x,y)\in R^{-1} \vee (x,y)\in S^{-1}$

$\Updownarrow$

$(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

$\Downarrow$

$(R\cup S)^{-1} \underset{\supseteq}{\subseteq} R^{-1}\cup S^{-1}$

$\Downarrow$

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

ג. צ"ל: $(R^{-1})^{-1}=R$

יהיו: $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$

$\Updownarrow$

$(y,x)\in R^{-1}$

$\Updownarrow$

$(x,y)\in R$

$\Downarrow$

$(R^{-1})^{-1} \underset{\supseteq}{\subseteq} R$

$\Downarrow$

$(R^{-1})^{-1}=R$.

(3) R סימטרי פירושו $(x,y)\in R$ אם"ם $(y,x)\in R$ ולכן $R^{-1}\subset R$ וגם $R\subset R^{-1}$ ולכן $R=R^{-1}$

(4) א. צ"ל: $R\cup R^{-1}$ סימטרי

יהי $(x,y)\in R$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,y)\in R\cup R^{-1} \wedge (y,x)\in R\cup R^{-1}$

$\Downarrow$

$R\cup R^{-1}$ סימטרי

ב. צ"ל: $R\cap R^{-1}$ סימטרי

יהי $(x,y)\in R\cap R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,y)\in R \wedge (x,y)\in R^{-1}$

$(y,x)\in R^{-1}$ $\qquad$ $(y,x)\in R$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R^{-1}\wedge R$

הוכחנו מכיוון אחד בלבד!

ג. לכאורה יש לנו צורך להוכיח $R\Delta R^{-1}$ הוא סימטרי.

$(x,y)\in R\Delta R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,y)\in R \oplus (x,y)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,y)\in R \wedge (x,y)\notin R^{-1} \vee (x,y)\notin R \wedge (x,y)\in R^{-1}$

$\Longrightarrow$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R^{-1}\wedge(y,x)\notin R \vee (y,x)\notin R^{-1}\wedge(y,x)\in R$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R^{-1} \oplus (y,x)\in R$

$\Downarrow$

$(y,x)\in R\Delta R^{-1}$

המשך

5. א. נניח ש: R רפלקסיבי $\rightarrow R^{-1}$ רפלקסיבי

ישנו $(x,y)\in R$

ונניח R רפלקסיבי

$\Downarrow$

$x=y$

$(y,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

R^{-1} רפלקסיבי

וגם נניח ש: R רפלקסיבי $\rightarrow R^{-1}$ רפלקסיבי

באותו אופן.

ב. נניח ש: R טרנזיטיבי $\rightarrow R^{-1}$ טרנזיטיבי

ישנם: $(x,y)\,(y,w)\in R$

R טרנזיטיבי ולכן:

$\Downarrow$

$(x,w)\in R$

$\Downarrow$

$(w,y)\wedge(y,x)\wedge(w,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

R^{-1} טרנזיטיבי

וגם נניח: R טרנזיטיבי $\rightarrow R^{-1}$ טרנזיטיבי

באותו אופן.

6. א. רפלקסיבי: נניח ישנו $a\in A$

$\Downarrow$

$a-a=0$

$\Downarrow$

$r|0$

$\Downarrow$

$(a,a)\in D$

$\Downarrow$

D רפלקסיבי.

סימטרי: נניח ישנו: $(x,y)\in D$

$\Downarrow$

$r|x-y$

$\Downarrow$

$r|y-x$

$\Downarrow$

$(y,x)\in D$

טרנזיטיבי: נניח ישנם: $(x,y)\in D\wedge(y,z)\in D$

$\Downarrow$ ישנו $t\in Z$ שעבורו $t\cdot r=x-y$

$\Downarrow$ ישנו $k\in Z$ שעבורו $k\cdot r=y-z$

נחבר משוואות:

$tr+kr=x-\cancel{y+y}-z$

$\Downarrow$

$(t+k)\cdot r=x-z$

$\Downarrow$

$r|x-z \Rightarrow (x,z)\in D \Rightarrow$ טרנזיטיבי

כן?

6 ז ממשי פחות ממשי יהיה שלם. תודה. התגרש אחד.

רפלקסיבי: יהא $a\in A$

$$\Downarrow$$

$$a-a=0\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$a\sim a$$

סימטרי: יהיו $a,b\in A$ ונניח כי $(a,b)\in B$

$$\Downarrow$$

$$a-b=z\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$b-a=-z\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$(b,a)\in B$$

טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c\in A$

ונניח כי: $(a,b)\in B\wedge(b,c)\in B$

$$\Downarrow$$

$$a-b=z_1\in\mathbb{Z}\wedge b-c=z_2\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

חיבור משוואות: $a-b+b-c=z_1+z_2$

$$\Downarrow$$

$$a-c=(z_1+z_2)\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$(a,c)\in B$$

6) ג. קבוצה שמוגדרת על אלפא אלפא וכן את האיברים שמכפלתם חיובית

רפלקסיבי: יהי $a \in A$

(אם $a<0$ אזי מינוס · מינוס = חיובי ואם $a>0$ אזי חיובי · חיובי)

$\Downarrow$

$a \cdot a > 0$

$\Downarrow$

$a \sim a$

$\Downarrow$

S = רפלקסיבי

סימטרי: יהיו $a,b \in A$

ונניח כי $(a,b) \in S$

$\Downarrow$

$a \cdot b > 0$

$\Downarrow$

$b \cdot a > 0$

$\Downarrow$

$(b,a) \in S$

$\Downarrow$

S = סימטרי

טרנזיטיבי: עבור $a,b,c \in A$

נניח ש $(a,b) \in S \wedge (b,c) \in S$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a \cdot b > 0$ $\quad$ $b \cdot c > 0$

$\Downarrow$

$\dfrac{a \cdot \cancel{b}}{\cancel{b} \cdot c} > 0$ נחלק משוואות

$\Downarrow$

$a \cdot \frac{1}{c} > 0$

$\Downarrow$

$a \cdot c > 0$

$\Downarrow$

$(a,c) \in S$

$\Downarrow$

S טרנזיטיבי

$\Downarrow$

S יחס שקילות

⑥ ג

2 זוגות של מספרים טבעיים שחיבורים שווה זה לזה.

רפלקסיביות: יהיו $a,b\in N$

ונניח שמתקיים (a,b) $a+b=a+b$

$$\Downarrow$$

$$(a,b)\sim(a,b)$$

$$\Downarrow$$

רפלקסיבי $T=$

סימטריות: יהיו $a,b,c,d\in N$

ונניח שמתקיים $((a,b),(c,d))\in T$

$$\Downarrow$$

$$a+b=c+d$$

$$\Downarrow$$

$$c+d=a+b$$

$$\Downarrow$$

$$((c,d),(a,b))\in T$$

$$\Downarrow$$

T סימטרי.

טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c,d,e,f\in N$

ונניח שמתקיים $((a,b),(c,d))\in T \wedge ((c,d),(e,f))\in T$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$a+b=c+d \qquad c+d=e+f$$

נחבר משוואות ונקבל $a+b+\cancel{c+d}=\cancel{c+d}+e+f$

$$\Downarrow$$

$$a+b=e+f$$

$$\Downarrow$$

$$((a,b),(e,f))\in T$$

$$\Downarrow$$

T טרנזיטיבי!

$$\Downarrow$$

$T=$ יחס שקילות.

6 ד

$\{(1,3)(3,1)(3,6)(6,3)(5,2)(2,5)\}$ א סימטרי 7)

$\{(1,3)(3,6)(5,2)(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)\}$ ב רפלקסיבי

$\{(1,3)(3,6)(1,6)(5,2)\}$ ג טרנזיטיבי

$\{(1,3)(3,1)(3,6)(6,3)(5,2)(2,5)(1,6)(6,1)(5,5)(2,2)(6,6)(1,1)(3,3)\}$ ד

$\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)(1,3)(3,1)(3,6)(6,3)(5,2)(2,5)\}$ ה

$\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)(1,3)(3,6)(5,2)(1,6)\}$ ו

$\{(1,3)(3,6)(5,2)(1,6)\}$ ז

$\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)(1,3)(3,6)(1,6)(5,2)(2,5)(6,1)(6,3)(3,1)\}$ ח

$\{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)(1,3)(3,6)(5,2)(1,6)\}$ ט

8)

$[1] = \cancel{(1,1)(1,3)(1,6)}$ $1,3,6 = [3]$

$[2] = [\ldots] = [5]$ $2,5$

$[3] \ldots [4] = 4$

9) ח

$\{(1,3)(3,6)(5,2)(3,5)(1,1)(2,2)(3,3)\cancel{(4,4)}(5,5)(6,6)(1,6)(2,3)(6,1)(3,2)(3,1)$

$(6,3)(2,5)(5,3)(1,5)(5,1)(6,5)(5,6)(1,2)(2,1)(2,6)(6,2).\}$

AXA $A = \{1,2,3,5,6\}$ של זה המכפלה הקרטזית

10)

$[1] = 1,3,6,5,2 = [2] = [3] = \cancel{[4]} = [5] = [6]$

$\cancel{[4]=4}$

$(1,3)(3,6)(5,2)(3,5)$ $(3,1)(6,3)(2,5)(5,3)$ $(1,1)(2,2)(3,3)\cancel{(4,4)}(5,5)(6,6)$

$(1,6)$ $(3,2)$ $(6,1)$ $(2,3)$

$(1,2)$ $(2,1)$

$(6,2)$ $(2,6)$ $(5,6)(6,5)$ $(1,5)(5,1)$

אותו דבר כמו למעלה

$[1] = 1,2,3,5,6$ $[5] = 1,2,3,5,6$

$[2] = 1,2,3,5,6$ $[6] = 1,2,3,5,6$

$[3] = 1,2,3,5,6$

$[4] = 4$

11) א.

$[0] = 0, 5, 10, 15, \ldots -5, -20 \ldots = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = 1, 6 \ldots \quad \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[2] = 2, 7 \quad \{5k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[3] = 3, 8 \quad \{5k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\{5k+4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ב.

$[0] = 0$

$[1] = \frac{1}{2}, 1{,}000 = \{k \mid k > 0\}$

$[-1] = -\frac{1}{2} \ldots \quad \{-k \mid k < 0\}$

k

12) א. כן - שקילות

ב. כן - שקילות

ג. לא תמיד אם שושי דודה של שרי, ושרי דודה של מירי

לא בהכרח ששושי דודה של מירי. - לא טרנזיטיבי = לא שקילות

ד. לא, אני לא בת-דודה של עצמי

ה. לא כן

ו. לא כן

ז. לא ~~[illegible]~~. ~~אני~~ אני קרוב ה של עצמי? וכן אם אני אחות של אחי

עדיין אני קרובה מדרגה ראשונה של אחי

~~13) [illegible]~~

13) היחס "נכבה של" הוא יחס סדר חלקי וחזק.

בדק.

14 א

$R=\{(x,x) \mid x\in A\}$

מדובר ביחס הזהות $= I_A$

הוא רפלקסיבי כי: נניח ש $x \in A$

$\Downarrow$

$(x,x)\in R$

הוא טרנזיטיבי באופן ריק כלומר אין (x,y) או (y,z) וכו'

וכן סימטרי באופן ריק כי אין (x,y) או (y,z) וכו'.

ולכן הוא יחס שקילות

$\Downarrow$

יחס הזהות הוא תמיד יחס שקילות

ק.פ.פ.

ד (ל4)

$R=\{(a,b),(c,d) \mid a\leq c,\ b\leq d\}$ $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

אנטי-סימטרי: נניח ושקף:

$(a,b),(c,d)\in R$

$\Downarrow$

$a\leq c \wedge b\leq d$

$\Downarrow$

$c\geq a \wedge d\geq b$

$\Downarrow$

$(c,d),(a,b) \notin R$

$\Downarrow$

אנטי-סימטרי R

טרנזיטיבי: נניח ושנים:

$(a,b),(c,d)\in R \wedge (c,d),(e,f)\in R$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$a\leq c \wedge b\leq d$ $c\leq e \wedge d\leq f$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

$a\leq e \wedge b\leq f$

$\Downarrow$

$(a,b),(e,f)\in R$

$\Downarrow$

טרנזיטיבי R

רפלקסיבי: נניח ושני

$(a,b)\in A$

$\Downarrow$

$a=a \wedge b=b$

$\Downarrow$

$a\leq a \wedge b\leq b$

$\Downarrow$

$(a,b),(a,b)\in R$

$\Downarrow$

רפלקסיבי R

לכן יחס זה הוא יחס חלקי

$R=\{(a,b),(c,d) \mid a<c$ או $(a=c,\ b\le d)\}$ ג (14) סעיף:

אנטי סימטרי: נניח ונראה

$(a,b),(c,d)\in R$

$\Downarrow$

$a<c \ \vee\ (a=c \wedge b\le d)$

$\Downarrow$ $c>a$ $\Downarrow$ $(c,d),(a,b)\notin R$ $\Downarrow$ R אנטי סימטרי

$\Downarrow$ $(a=c)\wedge(d\ge b)$

$\Downarrow$ $d>b$ $\Downarrow$ $(c,d),(a,b)\notin R$ $\Downarrow$ R אנטי סימטרי

$\Rightarrow$ $d=b \wedge a=c$ $\Downarrow$ $(a,c),(a,c)\in R$ $\Downarrow$ R אנטי סימטרי חלש!

טרנזיטיבי: נניח ונראה:

$(a,b),(c,d)\in R \ \wedge\ (c,d),(e,f)\in R$

$\Downarrow$

$a<c \ \vee (a=c \wedge b\le d)$ $\qquad$ $c<e \vee (c=e \wedge d\le f)$

אפשרות א:

$a<c \wedge c<e$

$\Downarrow$

$a<e$

$\Downarrow$

$(a,b),(e,f)\in R$

אפשרות ב:

$a<c \wedge (c=e \wedge d\le f)$

$\Downarrow$

$a<e$

$\Downarrow$

$(a,b),(e,f)\in R$

אפשרות ג:

$(a=c \wedge b\le d) \wedge (c<e)$

$\Downarrow$

$a<e$

$\Downarrow$

$(a,b),(e,f)\in R$

אפשרות ד:

$(a=c \wedge b\le d) \wedge (c=e \wedge d\le f)$

$\Downarrow$

$a=c=e \wedge b\le d\le f$

$\Downarrow$

$a=e \wedge b\le f$

$\Downarrow$

$(a,b),(e,f)\in R$

R טרנזיטיבי:

רפלקסיבי: נניח ש- $(a,b)\in A$

$\Downarrow$

$a=a \wedge b=b$

$\Downarrow$

$(a,b),(a,b)\in R$

$\Downarrow$

R רפלקסיבי:

ולכן זה הוא יחס סדר חלש!

בס"ד

15. ג. R יחס סדר

$\Downarrow$

R רפלקסיבי $\wedge$ R אנטי סימטרי $\wedge$ R טרנזיטיבי.

צ.ל: R^{-1} הוא יחס סדר.

נניח וישנו $(x,x)\in R$

$\Downarrow$

$(x,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

R^{-1} רפלקסיבי

$\Downarrow$

✓

נניח וישנו $(x,y)\in R$

$\Downarrow$

$(y,x)\notin R \wedge (y,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

$(x,y)\notin R$

$\Downarrow$

R^{-1} אנטי סימטרי.

$\Downarrow$

✓

נניח וישנם $(x,y),(y,z)\in R$

$\Downarrow$

$(x,z)\in R$ נתון טרנזיטיבי

$\Downarrow$

$(y,x),(z,y),(z,x)\in R^{-1}$

$\Downarrow$

R^{-1} טרנזיטיבי

ג =

R^{-1} אכן יחס סדר!

6/. הסבר:

$A=\{1,2,3,4\}$

$P(A)=\{\phi,\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{1,2\}\{1,3\}\{1,4\}\{2,3\}\{2,4\}\{3,4\}\{1,2,3\}\{1,3,4\}$
$\{1,2,4\}\{2,3,4\}\{1,2,3,4\}\}$

P חלוקה של A:

לדוגמא:

$P=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

D = מחלקה בתוך A,

בדוגמא הנ"ל: זו מחלקה $\{1\}$

זו מחלקה $\{2,3\}$

זו מחלקה: $\{4\}$

יחס R הוא יחס בתוך A שבו כל איבר מתייחס לשאר האיברים שאיתו במחלקה

התרגום של השאלה הזו: xR_Py אם יש $D\in P$ כך ש $x,y\in D$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

x מתייחס ל y* | מחלקה רק | שגם x וגם y שייכים לאותה מחלקה

בדוגמא הנ"ל:

$R=\{(1,1)(2,2)(3,3)(2,3)(3,2)(4,4)\}$

צריך להוכיח שבכל חלוקה אפשרית של A

ויוצר יחס R שיהיה יחס שקילות.

רפלקסיבי: נניח ויש

$x\in A$
$\Downarrow$
$x,x\in D$ (כלומר תמיד, כל איבר נמצא במחלקה של עצמו)
$\Downarrow$
$(x,x)\in R$
$\Downarrow$
R רפלקסיבי.

סימטרי: נניח ויש $(x,y)\in R$
$\Downarrow$
$x,y\in D$
$\Downarrow$
$y,x\in D$
$\Downarrow$
$(y,x)\in R$
$\Downarrow$
R סימטרי.

טרנזיטיבי: נניח ויש:

$(x,y)\in R \land (y,z)\in R$
$\Downarrow$ $\Downarrow$
$x,y\in D$ $y,z\in D$
$\Downarrow$
$x,y,z\in D$
$\Downarrow$
$x,z\in D$
$\Downarrow$
$(x,z)\in R$
$\Downarrow$
R טרנזיטיבי

קסם

חלק ב' - מבוא לפונקציות:

שאלה 3

א) $I_A : A \to A$ $\quad I_A(x) = x$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = x_2$$
$$\Downarrow$$

I_A פונק' חח"ע

ישנו $a \in A$ נחפש מקור עבורו:

$$I_A(x) = a$$
$$\Downarrow$$
$$x = a$$
$$\Downarrow$$
$$x \in A$$

מצאנו מקור ל- a שנמצא בתחום (ב- A) תחת f.

$$\Downarrow$$

I_A על A.

ב) $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h_1(x) = 2x+1$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$
$$\Downarrow$$
$$2x_1 = 2x_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = x_2$$
$$\Downarrow$$

h_1 חח"ע

ישנו $r \in \mathbb{R}$ נחפש עבורו מקור:

$$h_1(x) = r$$
$$2x+1 = r$$
$$\Downarrow$$
$$2x = r-1$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{r-1}{2}$$

$$\frac{r-1}{2} \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$

מצאנו מקור ל r שנמצא בתחום $\mathbb{R}$ תחת h_1

h_1 על $\mathbb{R}$

3) ב. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\lfloor x\rfloor$

$g(5.5)=5$

$g(5.7)=5$

אבל $5.5\neq5.7$

$\Downarrow$

h_2 לא חח"ע

עבור $5.5\in\mathbb{R}$ (חפש מקור), אבל לא קיים x שעבורו מתקיים $\lfloor x\rfloor=5.5$

$\Downarrow$

h_2 לא על $\mathbb{R}$

ג. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ $\quad h_3(x,y)=x-y$

$h_3(2,3)=-1$ $\quad h_3(4,5)=-1$

אבל $(2,3)\neq(4,5)$

$\Downarrow$

h_3 לא חח"ע.

יהי $z\in\mathbb{Z}$ ונחפש עבורו מקור בתחום:

(1) עבור $z\geq0$ אז $(z+1,1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$h_3(z+1,1)=z$

$\Downarrow$

מצאנו מקור ל-z.

(2) עבור $z<0$ אז $(1,-z+1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$h_3(1,-z+1)=z$

$\Downarrow$

מצאנו מקור ל-z

$\Downarrow$

h_3 על $\mathbb{Z}$.

קבוצה ③

ה. $h_4 : P(N) \times P(N) \to P(N)$ $\quad h_4(A,B) = A \cup B$

$h_4(\{1\},\{2\}) = \{1,2\}$ $\quad$ אבל $(\{1\},\{2\}) \neq (\phi,\{1,2\})$

$h_4(\phi,\{1,2\}) = \{1,2\}$

$\Downarrow$

h_4 איננה חח"ע

יהי $X \in P(N)$ ונחפש עבורו מקור.

$\phi \cup X = X$

$(\phi, X) \in P(N) \times P(N)$

$\Downarrow$

מצאנו מקור ל-X שנמצא בתחום תחת h_4.

$\Downarrow$

h_4 על $P(N)$

ו. $f_1 : (0,\infty) \to (0,2)$ $\quad f_1(x) = \frac{2x}{x+3}$

$f_1(x_1) = f_1(x_2)$

$\frac{2x_1}{x_1+3} = \frac{2x_2}{x_2+3}$ $\quad$ \ המכנים

$2x_1(x_2+3) = 2x_2(x_1+3)$

$\cancel{x_1x_2} + 3x_1 = \cancel{x_1x_2} + 3x_2$

$3x_1 = 3x_2$

$x_1 = x_2$

$\Downarrow$

f_1 חח"ע

יהי $y \in (0,2)$ ונחפש עבורו מקור.

$f_1(x) = y$

$\frac{2x}{x+3} = y$

$2x = yx + 3y$

$2x - yx = 3y$

$x(2-y) = 3y$

$x = \frac{3y}{2-y}$

היות ש $y \in (0,2)$

המונה גדול מ-0

המכנה גדול מ-0

ולכן המספר תמיד חיובי וגדול מ-0.

$\frac{3y}{2-y} \in (0,\infty)$

$\Downarrow$

מצאנו מקור ל-y בתחום תחת f_1

$\Downarrow$

f_1 על $(0,2)$

יוסף

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ $\qquad f_2(x)=x+\frac{1}{x}$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\tfrac{1}{2} \qquad f(2)=2+\tfrac{1}{2}=2\tfrac{1}{2}$$

אבל $2\neq\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

f_2 לא חח"ע

הסתירה קורית עבור כל
זוג מספרים הופכיים.

יש $y\in(0,\infty)$ ונחפש עבורו מקור בתחום $(0,\infty)$

$$f_2(x)=y$$

$$x+\frac{1}{x}=y \quad \backslash\cdot x$$

$$x^2+1=yx$$

$$x^2-xy+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4\cdot1\cdot1}}{2}$$

$\Delta=y^2-4$ וזה שלילי עבור $-2<y<2$

עבור ערכי y שבתחום $(0,2)$ שבטווח לא ימצאו מקור.

$\Downarrow$

f_2 אינה על $(0,\infty)$

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\qquad f_3(x)=x-\frac{1}{x}$

$$f_3(x)=f_3(y)$$

$$\Downarrow$$

$$x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \quad \backslash\cdot xy$$

$$x^2y-y=y^2x-x$$

$$x^2y-x(1-y^2)-y=0$$

$$x_{1,2}=\frac{y^2-1\pm\sqrt{(-y^2+1)^2-4\cdot y\cdot(-y)}}{2y}$$

$$x_{1,2}=\frac{y^2-1\pm\sqrt{y^4-2y^2+1+4y^2}}{2y}$$

$$x_{1,2}=\frac{y^2-1\pm\sqrt{y^4+2y^2+1}}{2y}=\frac{y^2-1\pm\sqrt{(y^2+1)^2}}{2y}$$

$$=\frac{y^2-1\pm(y^2+1)}{2y} \qquad x_1=\frac{2y^2}{2y}=y \qquad x_2=\frac{-2}{2y}=-\frac{1}{y}$$

y יכול להיות כל מספר ממשי, ולכן בוודאי שאחד הפתרונות y או $-\frac{1}{y}$ יהיה שלילי ואינו בתחום הפונקציה f_3.

$\Downarrow$

בתחום $(0,\infty)$ הפונקציה f_3 חח"ע.

ישנו $y \in \mathbb{R}$ ונמצא עבורו מקור בתחום $(0,\infty)$

$$f_3(x)=y$$
$$\Downarrow$$
$$x-\frac{1}{x}=y \quad /\cdot x$$
$$x^2-1=yx$$
$$0=x^2-xy-1$$
$$x_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$$

הביטוי y^2+4 תמיד חיובי ולכן בכל מקרה נמצא שורש ויהיה פתרון למשוואה.

$\Downarrow$

f_3 היא על $\mathbb{R}$

ג. $f_4: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ $\qquad f_4(x)=X\cap\mathbb{Z}$

$$f(\{1,1\tfrac{1}{2}\})=\{1,1\tfrac{1}{2}\}\cap\mathbb{Z}=\{1\}$$
$$f(\{1,1\tfrac{1}{3}\})=\{1,1\tfrac{1}{3}\}\cap\mathbb{Z}=\{1\}$$

אבל $\{1,1\tfrac{1}{3}\}\neq\{1,1\tfrac{1}{2}\}$

$\Downarrow$

f_4 לא חח"ע

אבל $\{\tfrac{1}{2}\}\in P(\mathbb{R})$ אין לה מקור כי $\{\tfrac{1}{2}\}\notin\mathbb{Z}$ ולכן $\{\tfrac{1}{2}\}\notin X\cap\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

f_4 לא על $P(\mathbb{R})$

ה. $f_5: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{Z})$ $\quad f_5(x) = X \cap \mathbb{Z}$

לא חח"ע לפי הדוגמאות דסעיף ג.

יהי $z \in P(\mathbb{Z})$ ונחפש לו מקור בתחום $P(\mathbb{R})$

$$z \cap \mathbb{Z} = z$$

$$z \in P(\mathbb{Z}) \wedge P(\mathbb{Z}) \subseteq P(\mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$z \in P(\mathbb{R})$$

$$f_5(z) = z$$

$$\Downarrow$$

f_5 היא על $P(\mathbb{Z})$

ו. $f_6: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ $\quad f_6(x) = X \Delta \mathbb{Z}$

$$f_6(x) = f_6(y)$$

$$\Downarrow$$

$$X \Delta \mathbb{Z} = y \Delta \mathbb{Z}$$

יהי $a \in X \Delta \mathbb{Z}$

$$\Downarrow$$

$$a \in y \Delta \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$((a \in X \wedge a \notin \mathbb{Z}) \vee (a \notin X \wedge a \in \mathbb{Z})) \wedge ((a \in y \wedge a \notin \mathbb{Z}) \vee (a \notin y \wedge a \in \mathbb{Z}))$$

$$\Downarrow$$

$$a \in X \wedge a \in y \wedge a \notin \mathbb{Z} \quad \vee \quad a \notin X \wedge a \notin y \wedge a \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$X \subseteq y, \; X \supseteq y \Rightarrow X = y$$

$$\Downarrow$$

f_6 חח"ע

יהי $y \in P(\mathbb{R})$ ונחפש לו מקור בתחום $P(\mathbb{R})$

$$X \Delta \mathbb{Z} = y$$

נחלק את y לשתי תתי קבוצות: $z \subseteq y$, $r \subseteq y$ (המספרים השלמים ב-y והמספרים שאינם שלמים ב-y).

$$\Downarrow$$

הקבוצה X מכילה את r

ואת $\bar{\mathbb{Z}}$

$$\Downarrow$$

מצאנו מקור ל-y בתחום $P(\mathbb{R})$ מתאים f_6

$$\Downarrow$$

f_6 על $P(\mathbb{R})$

בס״ד

חלק א׳ שאלה 4

א׳
$$f(x)=\begin{cases} \frac{n}{2} & 4|n \\ 2n+1 & \text{else} \end{cases}$$
כלומר

לדוגמא: $\frac{0}{2}=0$, $\frac{4}{2}=2$, $\frac{8}{2}=4$, $\frac{12}{2}=6$ ... נקבל את כל הזוגיים.

לדוגמא: $3=2\cdot1+1$, $5=2\cdot2+1$, $7=2\cdot3+1$, ~~$9=2\cdot4+1$~~ ... נקבל את

כי 4 אי-זוגיים!

כל האי-זוגיים חוץ מ: 1, 9, ... $=8n+1$

הפונקציה חח״ע: מכל הצבה נקבל מס׳ אחר.

לא על כי יש מספרים שלא ניתן להגיע אליהם כמו 1,9 וכו׳

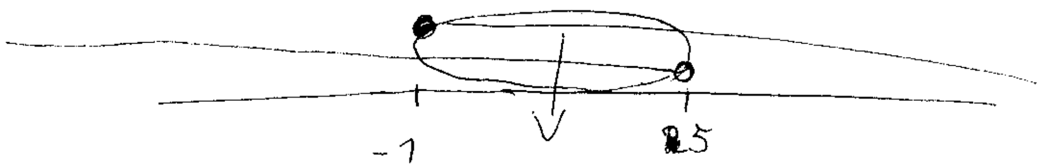
התמונה:

$$Im f = N - \{8n+1 \mid n \in N\}$$

ב׳
$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<2 \\ x-3 & x\geq 2 \end{cases}$$

כשנציב מספרים שקטנים מ-2 נקבל תוצאות שקטנות מ-5

כשנציב מספרים שגדולים/שווים ל-2 נקבל תוצאות שגדולות מ-1-



לדוגמ: $f(0)=-1$
$f(2)=-1$

תחום תוצאות זה כפול ולכן זו פונקציה לא חח״ע.

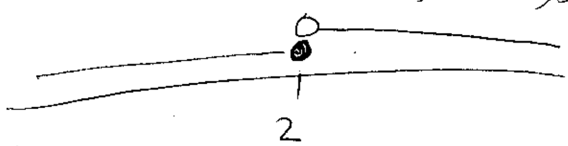
הפונקציה היא על (ניתן להגיע לכל מספר)

ולכן התמונה היא R $Im f = R$

ג׳
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq 1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1 \end{cases}$$

כשנציב מספרים שווים וקטנים מאחד נקבל תוצאות מ-2 ומטה.

כשנציב מספרים גדולים מאחד נקבל תוצאות גדולות מ-2



ולכן זו פונקציה חח״ע, ועל, ולכן $Im f = R$

שאלה 6

להזכיר לפני זה פונק' רציפה חח"ע ועל: קווית, $\frac{1}{x}$

א. $f:(0,1)\to(1,\infty)$ חח"ע ועל

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ב. $f:(0,1)\to(0,\infty)$ חח"ע ועל

$$f(x)=\frac{1}{x}-1$$

ג. $f:[2,5)\to[1,7)$ חח"ע ועל

ננסה פונק' קווית לפי הנקודות: $(2,1)$ $(5,7)$

$$m=\frac{7-1}{5-2}=\frac{6}{3}=2 \qquad y-1=2(x-2)$$

$$\boxed{y=2x-3}$$

$$f(x)=2x-3$$

ד. $a,b,c,d\in R$ $f:[a,b]\to[c,d]$ חח"ע ועל.

נמצא פונקציה קווית לפי הנקודות (a,c) (b,d)

$$m=\frac{c-d}{a-b} \qquad y-c=\frac{c-d}{a-b}(x-a)$$

$$y=\frac{c-d}{a-b}x+c-\frac{ac-ad}{a-b}$$

$$f(x)=\frac{c-d}{a-b}x+c-a\cdot\frac{c-d}{a-b}$$

ה. $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ חח"ע ועל.

כדי שיהיה על נפרק את הטווח לשני חלקים שכל אחד יתאים לתחום אחר.

ננסה $[0,\frac{1}{2})$ $[\frac{1}{2},1]$

נמצא $f:[1,3)\to[0,\frac{1}{2})$ לפי הנק' $(1,0)$ $(3,\frac{1}{2})$

$$\frac{\frac{1}{2}-0}{3-1}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4} \qquad \boxed{y=\frac{x}{4}+1}$$

נמצא: $f:[4,8]\to[\frac{1}{2},1]$ לפי הנק' $(4,\frac{1}{2})$ $(8,1)$

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{8-4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8} \qquad y-1=\frac{1}{8}(x-8)$$

$$\boxed{y=\frac{x}{8}}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{4}+1 & 1\le x<3\\ \frac{x}{8} & 4\le x\le 8\end{cases}$$

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ חח״ע ועל

כדי שיהיה על נפרק את התחום ל-2 חצי ישארו חיוביים
וחצי יהפכו לשליליים

נפרק לזוגי ואי זוגי :

f: זוגי → שלם חיובי $\frac{n}{2}$

f: אי זוגי → שלם שלילי $-\frac{n-1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n \text{ even}\\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ odd}\end{cases}$$

פונקציה g:

$$g(x)=\begin{cases}-2z-1 & z\le 0\\ 2z & z>0\end{cases}$$

דף.

②

$M = \{0,4\} \qquad f(x) = x^2 - 5x + 4$

א

$$f^{-1}(f(M))$$

$$f(M) = \left\{ \begin{array}{l} 0^2 - 0 + 4 = 4 \\ 4^2 - 20 + 4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(4,0)$$

בהכרח הקבוצה M נכללת בקבוצת המקורות של $\{4,0\}$, אך יש לבדוק

האם ישנם מקורות נוספים לכל הנקודה ה-4 :

$x^2 - 5x + 4 = 4$ חדש

$x(x-5) = 0 \qquad x_1 = 0 \checkmark \quad x_2 = 5$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ חדש

$(x-4)(x-1) = 0 \qquad x_1 = 4 \checkmark \quad x_2 = 1$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(f(M)) = \{0,1,4,5\}$$

ב

$$f(f^{-1}(M))$$

$$f(\{0,1,4,5\})$$

$$f(0) = 4 \quad f(1) = 0 \quad f(4) = 0 \quad f(5) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$f(f^{-1}(M)) = \{0,4\}$$

ג

$$f(f^{-1}(\{-3,4\}))$$

כי לא נמצא את מקור המקורות של -3 $x^2 - 5x + 4 = -3 \quad x^2 - 5x + 7 = 0$

ונשאר 4 שמקורו כבר $\{0,5\}$ כי המשוואה אין לה מקור ממשי, אין פתרון.

$$f(0) = f(5) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\{4\}$$

$$f\left(f^{-1}(\{-3\})\right) \quad \underline{3}$$

$\phi = f^{-1}(\{-3\})$ כי אין מקור

$\Downarrow$

$f(\phi) = \phi$

$\underline{ד}$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = \begin{cases} 2n & n \in \mathbb{N}_{even} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$ $E\{1,5,6,8\}$

$$f\left(f^{-1}(E)\right)$$

נמצא את קבוצת המקורות של E:

$f(n) = 1$ – מקור כל n אי זוגי.

$f(n) = 5$ – אין לו מקור.

$f(n) = 6$ $6 \neq 1$ ולכן n חייב להיות זוגי

$2n = 6$

$\Downarrow$

$n = 3$ אבל הוא אי זוגי ולכן לא שייך לתחום של $2n$

$\Downarrow$

עבור 6 אין מקור.

$f(n) = 8$ $8 \neq 1$ ולכן n זוגי

$2n = 8$ $4 = n$

קבוצת המקורות: $\{4, \mathbb{N}_{even}\}$

$$f\left(\{4, \mathbb{N}_{\text{אי-זוגי}}\}\right) = \{1, 8\}$$

קבוצה

(3) $f: A\to B$ $\quad E\subseteq B$ (קבוצת הטווח) $\quad D\subseteq A$ (מקור כי מוגדר במקור?)

לא נכון א) $f(D)=D$ רק אם מדובר בפונקציה שהתמונה שלה זהה למקור אחת, אבל זה לא תמיד נכון.

לא נכון ב) $f(D)\neq D$ היות לפי א. לכן פונקציה הזהות.

לא נכון ג) $f^{-1}(E)=E$ רק אם מדובר בפונקציה שהתמונה שלה זהה למקור L.

לא נכון ד) $f^{-1}(E)\neq E$ לפי ג' פונקציית הזהות.

נכון ה) $f(D)\subseteq f(A)$

~~$x\in f(D)$~~

~~יהי $x\in D$ $\Downarrow$ $x\in A$ $\quad f(x)=t$ $\Downarrow$ $t\in f(A)$ ∧ $t\in f(D)$~~

~~יהי $x\in f(D)$~~ ~~יהי $x\in D$ $\Downarrow$ $f(x)\in f(D)$ נתון $D\subseteq A$ $\Downarrow$ לפי ההגדרה $x\in A$ $\Downarrow$ f~~

יהי $x\in D$

$\Downarrow$

$x\in A$ לפי ההגדרה $D\subseteq A$

$\Downarrow$

$f(x)\in f(D)\ \wedge\ f(x)\in f(A)$

$\Downarrow$

$f(D)\subseteq f(A)$ כי כל איבר ב-$f(D)$ נמצא גם ב-$f(A)$

מש"ל.

לא נכון ו) אם $D\subsetneq A$ אז $f(D)\subsetneq f(A)$ ~~[illegible]~~ יתכן שיש מקורות ב-A שיש להם אותה תמונה כמו בפונקציה $f(x)=x^2$ שהתמונה זהה גם לקבוצה של טבעיים $\mathbb{N}$ וגם לקבוצה של שלמים $\mathbb{Z}$.

$f^{-1}(E)\subseteq A$ ב

יהי $\alpha \in f^{-1}(E)$

$\Downarrow$

$\cancel{f(\alpha)}$

$f(\alpha) \in E$ כי $E\subseteq B$

$\Downarrow$

$f(\alpha)\in B$

$\Downarrow$

$\alpha \in f^{-1}(B)$ $\qquad f^{-1}(B)\subseteq A$

הפונקציה מוגדרת מ- $A\to B$

$\Downarrow$

$\alpha\in A$

$\Downarrow$

$f^{-1}(E)\subseteq A$

ג. f על. אמ"ם לכל $y\in B$ מתקיים $f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$

נניח: $f^{-1}(\{y\})=\emptyset$

$\Downarrow$

לתמונה y לא היה מקור בתחום.

$\Downarrow$

f לא על.

סתירה לנתון.

נתון f על

$\Downarrow$

יש $y\in B$

$\Downarrow$

$f^{-1}(\{y\})=\alpha\in A$

$\Downarrow$

$f^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$

נניח f לא על

$\Downarrow$

יש $y\in B$ שאין לו מקור

$\Downarrow$

$f^{-1}(y)=\emptyset$

סתירה לנתון.

$f \circ g = \left(2^{(3x+7)^2} - 1\right)$ $g \circ f = 3\left(2^{x^2-1}\right) + 7$ /ג

חלק ג: שאלה 1 — ספר

ב

$f(x) = \begin{cases} 7 & x < 3 \\ 8 & x \geq 3 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

$f \circ g = \begin{cases} 7 & x < 1 \\ 8 & x \geq 1 \end{cases}$ $g \circ f = \cancel{8}\ 5$

ג

$f(x) = 2x - 1$
כאשר $x < 2$
התשובה קטנה מ-3

$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} x \leq 2 & 4x - 3 \\ x > 2 & 2x - 1 \end{cases}$ $f \circ g = \begin{cases} 4x - 3 & x \leq 3 \\ 2x - 1 & x > 3 \end{cases}$

$2x - 1 = 3$
$2x = 4$
$x = 2$

$2x - 1 < 3$
$2x < 4$
$x < 2$

$2(2x - 1) - 1$
$4x - 2 - 1$
$4x - 3$

א 2

$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & x < 5 \\ 2x & x \geq 5 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} \cancel{x}\ 2 & x \leq -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \leq x < 5 \\ \cancel{2}\ 3 & x \geq 5 \end{cases}$

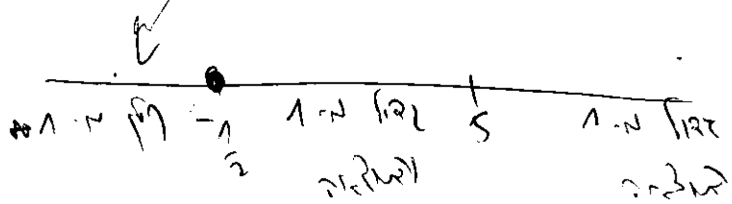
$4x + 3 \geq 1$
$4x \geq -2$
$x \geq -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq x < 5$
מקבל התשובה $4x+3$ ב- $f(x)$
והיא גדולה או שווה 1.

$x < -\frac{1}{2}$
התוצאה היא $4x+3$
וזה היא קטנה מ-1.

$2x \geq 1$
$x \geq \frac{1}{2}$

$x \geq 5$ כאשר
מקבלת התשובה $2x$
והיא גדולה מ-1



$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\geq 2\end{cases}$$

$$f\circ g\begin{cases}-3x-5 & x\leq -2\\ 3x+10 & -2<x<2\\ -6x+7 & 2\leq x\end{cases}$$

$2x-1\geq 1$

$2x\geq 2$

$x\geq 1$

$x+3\geq 1$

$\cancel{x+3}\ x\geq -2$

$-2 \qquad 2$

1 א קטן — $x+3$

1 א גדול — $x+3$

1 א גדול — $2x-1$ תמיד

$3\cancel{(x+3)+1}$

$4-3(x+3)$

$4-3x-9$

$-3x-5$

$3(3+x)+1$

$9+3x+1$

$3x+10$

$4-3(2x-1)$

$4-6x+3$

$-6x+7$

3.

$f: A\to B$

צ"ל: $I_B\circ f=f$

$I_B(f(a))=\cancel{f(a)}$ b

$I_B(b)=b$ ✓

צ"ל: $f\circ I_A=f$

$f\circ(g(a)=a)=f(a)$

$f(g(a))=f(a)$

4.

$\cancel{f(g(b)=c)}=D$

$h(a)$

B

$\cancel{g(B)}=c$

$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

$h(a)=b$

$g(b)=c$

$f(c)=D$

$f(g(b))=D$

$f(g(h(a)))=D$

קצ"ב

הפיכה משמאל: $f: A \to B$ $\quad g: B \to A \quad g \circ f = I_A$
חח"ע

הפיכה מימין: $f: A \to B$ $\quad g: B \to A \quad f \circ g = I_B$
על

$f: B \to C \quad g: A \to B \quad f \circ g: A \to C$

ד) נכון צ"ל: אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע

נתון: f חח"ע $\Downarrow$ $h_1 \circ f = I_B$ $\quad h_1: B \to C$ $\qquad g$ חח"ע $\Downarrow$ $h_2 \circ g = I_A$ $\quad h_2: B \to A$

צ"ל: לפונקציה $f \circ g$ הפיכה משמאל

$h_2 \circ g = I_A$ - נתון

$\Downarrow$

$h_2 \circ I_B \circ g = I_A$

$\Downarrow$

$h_2 \circ h_1 \circ f \circ g = I_A$

$\Downarrow$

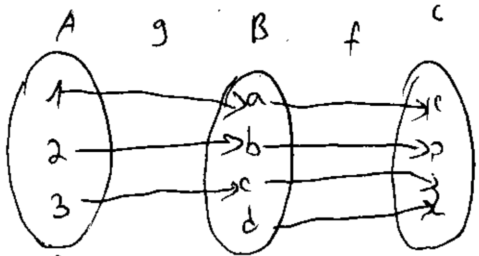
$h_2 \circ h_1$ היא ההפיכה משמאל של $f \circ g$

$\Downarrow$

$f \circ g$ חח"ע כי יש לה הפיכה משמאל.

לא נכון ב: אם $f \circ g$ חח"ע אז f חח"ע

הפרכה:



f אינה חח"ע ובכן $f \circ g$ חח"ע

$f: B \to C \quad g: A \to B$

נכון <u>ב</u> אם $f \circ g$ חח"ע אז g חח"ע

נניח $h \circ f \circ g = I_A \quad h: C \to A$

לכן: ל-g יש הופכית משמאל.

$k = h \circ f : B \to A$

$k \circ g = I_A$

$h \circ f$ היא ההופכית משמאל של g

$\Downarrow$

g חח"ע

נכון <u>ג</u> אם f על וגם g על אז $f \circ g$ על

נניח: f על $\Rightarrow f \circ h_1 = I_C \quad h_1: C \to B$; g על $\Rightarrow g \circ h_2 = I_B \quad h_2: B \to A$

$f \circ g \circ \square = I_C$

לכן: ל-$\overset{A \to C}{f \circ g}$ יש הופכית מימין.

נניח- $f \circ h_1 = I_C$

$\Downarrow$

$f \circ I_B \circ h_1 = I_C$

$\Downarrow$

$f \circ g \circ h_2 \circ h_1 = I_C$

$\Downarrow$

$h_2 \circ h_1$ היא ההופכית מימין של $f \circ g$

$\Downarrow$

$f \circ g$ היא על.

נכון <u>ד</u> אם $f \circ g$ על אז f על.

נניח $f \circ g \circ h = I_C \quad h: C \to A$

$g \circ h = k: C \to B$

$\Downarrow$

$f \circ k = I_C$

$\Downarrow$

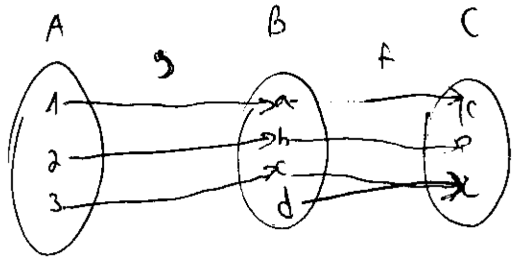
ל-f יש הופכית מימין $g \circ h$

$\Downarrow$

f על.

משפט $\underline{1}$ אם $f\circ g$ על אז g על.

הדגמה:



נתון $\underline{2}$ אם $f\circ g$ חח"ע ו g על אז f חח"ע

נתון $f\circ g$ חח"ע

$\Downarrow$

$h_1: C\to A \qquad h_1\circ f\circ g = I_A$

$\Downarrow$

$h_2: B\to A \qquad g\circ h_2 = I_B$

צ"ל: f חח"ע, כלומר יש לה הפיכה משמאל $\square\circ f = I_B$

נתון - $\overset{A\to B}{g}\circ \overset{B\to A}{h_2} = I_B$

$\Downarrow$

$g\circ \underbrace{h_1\circ f\circ g}_{A\to A}\circ h_2 = I_B$

$\overset{A\to B}{g}\circ \overset{C\to A}{h_1}\circ \overset{B\to C}{f}\circ \overset{B\to B}{I_B} = I_B$

$\Downarrow$

$\boxed{g\circ h_1}\circ f = I_B$

$g\circ h_1$ היא ההפיכה משמאל של f.

$\Downarrow$

f חח"ע

הוכחה:

נכון ה אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע אז g על

נתון: $f\circ g$ על

$\Downarrow$

$f\circ g$ הפיכה מימין. $f\circ g\circ h_1 = I_C$ $\qquad f\circ g: A\to C \quad h_1: C\to A$

f חח"ע

$\Downarrow$

f הפיכה משמאל $h_2\circ f = I_B$ $\qquad f: B\to C \quad h_2: C\to B$

צ"ל: g על, כלומר יש לה הפיכה מימין $g\circ\boxed{\ } = I_B$

$$\underset{C\to B}{h_2}\circ \underset{B\to C}{f} = I_B$$
$$\Downarrow$$
$$h_2\circ I_C\circ f = I_B$$
$$\Downarrow$$
$$h_2\circ f\circ g\circ h_1\circ f = I_B$$
$$I_B\circ \underset{A\to B}{g\circ h_1}\circ f = I_B$$
$$\Downarrow$$
$$g\circ h_1\circ f = I_B$$
$$\Downarrow$$

$h_1\circ f$ היא הופכית מימין של g.

$\Downarrow$

g על

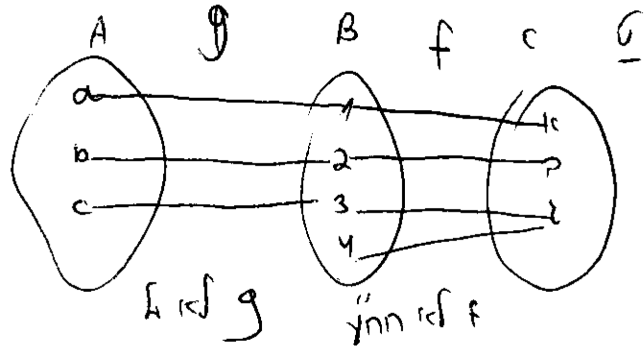
~~נכון ט נניח ש- $f\circ g$ חח"ע וגם על~~

$\Downarrow$

~~צ"ל: $h_1\circ f\circ g = I_A$ $\qquad f\circ g: A\to C \quad h_1: C\to A$~~

~~צ"ל: $f\circ g\circ h_2 = I_C$ $\qquad f\circ g: A\to C \quad h_2: C\to A$~~

לא נכון ט



ולכן $f\circ g$ חח"ע וגם על.